

طراحی قانون کنترل تعقیب مبتنی بر رویتگر برای کلاسی از سیستم‌های فازی چندجمله‌ای روزبه سلیمی طاری^۱، علی معرفیان پور^۲

^۱ فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد، گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران، kurosh_st@yahoo.com
^۲ استادیار، گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران، moarefian@srbiau.ac.ir

دریافت: 1396/2/26 ویرایش اول: 1396/6/6 پذیرش: 1396/1/13

چکیده: در این مقاله قانون کنترل تعقیب برای کلاسی از سیستم‌های فازی چندجمله‌ای طراحی می‌شود. قانون کنترل از دو بخش رویتگر و فیدبک حالت تشکیل شده است. با استفاده از یک رویتگر فازی چندجمله‌ای، بردار حالت سیستم تخمین زده می‌شود و بهره فیدبک چندجمله‌ای، از بردار حالت تخمین زده شده برای تحقق قانون کنترل استفاده می‌کند. قانون کنترل فازی چندجمله‌ای، بردار حالت فرایند را به تعقیب از بردار حالت یک مدل مرجع پایدار تحت شاخص نرم بینهایت وادار می‌کند. شرایط کافی برای تعیین پارامترهای قانون کنترل در قالب یک برنامه مجموع مربعات ارائه خواهد شد. برای نشان دادن کارایی روش ارائه شده طراحی قانون کنترل و شبیه‌سازی در قالب چند مثال انجام می‌شود.

کلمات کلیدی: سیستم‌های فازی چندجمله‌ای، قانون کنترل تعقیب، رویتگر چندجمله‌ای، بهره فیدبک چندجمله‌ای، شاخص نرم بی‌نهایت، مجموع مربعات.

Observer-Based Tracking Control Design for a Class of Fuzzy Polynomial Systems

Roohbeh Salimi Tari, Ali Moarefianpour

Abstract: In this paper tracking control law design for a class of polynomial fuzzy systems is considered. The control law consists of an observer and a state feedback. A polynomial fuzzy observer estimates the state vector of the plant, and then the estimated state vector is employed by a polynomial feedback gain to fulfill the control law. The polynomial fuzzy control law leads the state vector of the plant to track the state vector of a stable reference model subject to an H_∞ performance. Sufficient conditions for determination of the control law parameters will be presented in the form of an SOS program. Additionally simulation results are presented to show the merits of the proposed control design approach.

Keywords: Polynomial fuzzy systems, tracking control law, polynomial observer, polynomial feedback gain, H_∞ performance, sum of squares (SOS).

۱- مقدمه

پایدارسازی و تعقیب همواره به صورت دو مسأله مهم در کنترل سیستم‌های غیر خطی مورد توجه محققین بوده است. در سالهای اخیر مطالعات گوناگونی در رابطه با طراحی کنترل تعقیب سیستم‌های غیرخطی انجام شده است [۱-۴]. رویکردهای مختلفی اعم از فیدبک حالت و فیدبک خروجی در طراحی قانون کنترل مورد توجه قرار می‌گیرند. یکی از روش‌های طراحی قانون کنترل مبتنی بر فیدبک خروجی که در طراحی قانون کنترل پایدارساز و همچنین تعقیب مورد استفاده قرار می‌گیرند، روش مبتنی بر طراحی رویتگر است. اهمیت این روش نسبت به طراحی فیدبک خروجی این است که کنترلگر نه تنها می‌تواند هدف کنترل را برآورده کند، بلکه به تخمینی از بردار حالت سیستم نیز دسترسی دارد.

یک دسته از سیستم‌های فازی که مطالعات زیادی بر روی آن انجام شده است، سیستم فازی تاکاگی-سوگنو است که از آن جمله می‌توان به طراحی قانون کنترل پایدارساز [۵-۹] طراحی قانون کنترل تعقیب [۱۰-۱۴] و طراحی رویتگر فازی [۶-۲۲] اشاره کرد. مطالعات انجام شده در زمینه رویتگرهای فازی به دو دسته عمومی قابل تقسیم‌بندی هستند. در دسته اول طراحی رویتگر به منظور طراحی قانون کنترل فیدبک انجام می‌شود که دلیل اصلی آن عدم دسترسی یا غیرقابل اندازه‌گیری بودن بردار حالت است [۶-۹، ۱۱، ۱۲، ۱۴-۱۷، ۲۳]. دسته دوم مطالعاتی است که در آن طراحی رویتگر به دلایلی مانند شناسایی عیب در حلقه‌های کنترلی انجام می‌شود [۱۸-۲۰، ۲۲].

در سال‌های اخیر دسته‌ای از سیستم‌های فازی مورد توجه محققین قرار گرفته است که به سیستم‌های فازی چندجمله‌ای معروف هستند [۲۴-۲۸]. تفاوت این دسته از سیستم‌ها با سیستم‌های فازی تاکاگی-سوگنو این است که در بخش تالی قواعد فازی، سیستم‌هایی غیرخطی به فرم چندجمله‌ای ظاهر می‌شوند. مطالعات انجام شده نشان می‌دهد که این دسته از سیستم‌ها نسبت به سیستم‌های فازی تاکاگی-سوگنو توانایی بهتری در توصیف سیستم‌های غیرخطی دارند [۲۴-۲۸]. ارائه شرایط پایداری و پایدارسازی سیستم‌های فازی چندجمله‌ای [۲۴-۲۸] و طراحی قانون کنترل پایدارساز مبتنی بر رویتگر برای سیستم‌های فازی چندجمله‌ای مورد توجه محققین بوده است [۲۹-۳۲]. یکی از اولین مطالعات در خصوص طراحی رویتگر برای سیستم‌های فازی چندجمله‌ای در [۲۹] دیده می‌شود که در آن بر اساس روش مجموع مربعات [۳۳، ۳۴] برای سه دسته از سیستم‌های فازی چندجمله‌ای قانون کنترل پایدارساز طراحی شده است. به طور مشابه در مقاله [۳۰] طراحی رویتگر فازی چندجمله‌ای برای سیستم‌های غیرخطی که در معرض یک اغتشاش خارجی محدود قرار دارند انجام شده است که با استفاده از روشی موسوم به بسط سری تیلور مدل فازی چندجمله‌ای سیستم استخراج شده است. در مقاله [۳۵] بر اساس روش ارائه شده در [۲۹] از رویتگر فازی چندجمله‌ای جهت

شناسایی پدیده رسوب در یک دستگاه تبادل حرارتی استفاده شده است. در مرجع [۳۲] طراحی کنترلگر برای پایدارسازی یک سیستم فازی چندجمله‌ای با در نظر گرفتن اغتشاش خارجی انجام شده است که در آن ابتدا به طراحی رویتگر حالت و رویتگر اغتشاش برای فرایند پرداخته شده و سپس قانون کنترل پایدارساز برای سیستم حلقه بسته طراحی شده است. در مقابل مطالعات انجام شده در خصوص پایدارسازی سیستم‌های فازی چندجمله‌ای، مطالعات کمتری در خصوص حل مسأله تعقیب برای سیستم‌های فازی چندجمله‌ای در مراجع دیده می‌شود. از جمله محدود مطالعات انجام شده در این زمینه می‌توان به [۳۶] اشاره کرد که در آن مسأله تعقیب فیدبک خروجی برای سیستم‌های فازی چندجمله‌ای با تضمین یک شاخص تعقیب نرم بی‌نهایت انجام شده است. در مرجع [۳۶] قانون کنترل به گونه‌ای عمل می‌کند که بردار حالت فرایند تحت کنترل از بردار حالت یک مدل مرجع پایدار تبعیت کند. یکی دیگر از مراجعی که مسأله تعقیب را مورد توجه قرار داده مرجع [۳۷] است که در آن مسأله کنترل تعقیب برای سیستم‌های شبکه‌ای غیرخطی با غیرخطی‌گری‌های اسکالر تکراری مورد بررسی قرار گرفته است. در [۳۷] ابتدا یک مدل فازی چندجمله‌ای برای مدل‌سازی سیستم غیرخطی ارائه شده و سپس مشابه آنچه در [۳۶] انجام شده است یک کنترلگر فازی چندجمله‌ای به گونه‌ای طراحی شده است که حالت‌های سیستم بردار حالت یک مدل مرجع پایدار را دنبال کند. شرایط کافی برای طراحی کنترلگر برای تعقیب بردار حالت مدل مرجع توسط سیستم فازی چندجمله‌ای بر اساس مجموع مربعات به دست آمده است که پایداری اتفاقی^۱ و شرط کارایی نرم بی‌نهایت را نیز تضمین می‌کند.

در مقاله حاضر طراحی قانون کنترل تعقیب برای سیستم‌های فازی چندجمله‌ای با فرض عدم دسترسی به بردار حالت سیستم تحت کنترل، مورد توجه قرار گرفته است. تفاوت عمده مطالعه انجام شده در مقاله حاضر با مطالعه انجام شده در مرجع [۳۶] این است که در مقاله حاضر برای طراحی قانون کنترل از رویتگر حالت بهره گرفته شده است در حالیکه در مرجع [۳۶] طراحی فیدبک خروجی انجام شده و هیچ تخمینی از بردار حالت سیستم تحت کنترل صورت نگرفته است. تفاوت اصلی مقاله حاضر با مقاله [۲۹] که در آن به طراحی رویتگر پرداخته شده این است که در مرجع [۲۹] تنها مسأله پایدارسازی سیستم حلقه بسته مد نظر محققین بوده است در صورتیکه در مقاله حاضر هدف نویسندگان طراحی قانون کنترل تعقیب است. بعلاوه در مرجع [۲۹] فرض شده بردار خروجی سیستم ثابت و مستقل از حالت‌های سیستم است در صورتیکه در مقاله حاضر ماتریس خروجی به طور کلی وابسته به بردار حالت سیستم در نظر گرفته شده است.

در بخش ۲ مقدمات ریاضی مورد نیاز ارائه می‌شوند. معرفی مدل فازی چندجمله‌ای در بخش ۳ انجام خواهد شد. بخش ۴ به تعریف مسأله

¹ Stochastic stability

$$\begin{bmatrix} A & \frac{1}{\sqrt{2}}(-B + C^T) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-B^T + C) & -D \end{bmatrix} \leq 0$$

آنگاه

$$A - BD^{-1}C \leq 0$$

اثبات- با استفاده از لم مکمل شور می توان گفت:

$$\begin{bmatrix} A & \frac{1}{\sqrt{2}}(-B + C^T) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-B^T + C) & -D \end{bmatrix} \leq 0$$

معادل است با

$$\begin{aligned} A + \frac{1}{2}(-B + C^T)D^{-1}(-B + C^T) \\ = A + \frac{1}{2}BD^{-1}B^T - \frac{1}{2}BD^{-1}C \\ - \frac{1}{2}C^TD^{-1}B^T + \frac{1}{2}C^TD^{-1}C \leq 0 \end{aligned} \quad (۴)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} A - \frac{1}{2}(BD^{-1}C + C^TD^{-1}B^T) \\ \leq -\frac{1}{2}C^TD^{-1}C - \frac{1}{2}BD^{-1}B^T \end{aligned} \quad (۵)$$

با توجه به اینکه سمت راست نامساوی اخیر مثبت نیست بنابراین اثبات

تمام است. ■

۲-۱- مدل فازی چندجمله ای سیستم زمان پیوسته

یک سیستم فازی با r قاعده را در نظر بگیرید که قاعده i آن به

صورت

$$\begin{aligned} \text{If } z_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } z_p(t) \text{ is } M_{ip} \\ \text{Then } \dot{x}(t) = A_i(x(t))x(t) + B_i(x(t))u(t) \end{aligned} \quad (۶)$$

$$i = 1, 2, \dots, r$$

تعریف می شود ([۲۸]). همانطور که ملاحظه می شود بخش تالی سیستم

فازی (۶) شامل ماتریس های چندجمله ای $A_i(x(t))$ و $B_i(x(t))$ که این

نکته تفاوت اصلی میان سیستم های فازی چندجمله ای و سیستم های فازی

تاکاگی-سوگنو است. می توان گفت سیستم های فازی چندجمله ای

تعمیم یافته سیستم های فازی تاکاگی-سوگنو هستند. عبارتی در رابطه

(۶) اگر ماتریس های A_i و B_i ثابت باشند سیستم فازی توصیف شده

همان سیستم تاکاگی-سوگنو خواهد بود. مدل دینامیکی سیستم (۶) به

صورت

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i(x(t))x(t) + B_i(x(t))u(t)\} \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i(x(t))x(t) \end{aligned} \quad (۷)$$

اختصاص دارد. در بخش ۵ شرایط طراحی قانون کنترل در قالب یک مساله مجموعه مربعات فرموله خواهد شد. در بخش ۶ با شبیه سازی سه مثال، کارایی روش ارائه شده نشان داده می شود و در نهایت بخش ۷ به نتیجه گیری از بحث اختصاص دارد.

۲- مقدمات ریاضی

یک تک جمله ای $x(t) \in \mathbb{R}^n$ از $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ که در آن $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ اعداد صحیح غیرمنفی هستند. چندجمله ای $P(x(t))$ به صورت حاصل جمع خطی تک جمله ای های $x(t)$ با ضرایب ثابت است. چندجمله ای $P(x(t))$ به فرم مجموع مربعات است اگر چندجمله ای های $f_1(x), \dots, f_m(x)$ به گونه ای وجود داشته باشند به طوری که بتوان $P(x(t))$ را به صورت $P(x(t)) = \sum_{i=1}^m f_i^2(x(t))$ نوشت [۳۸]. اگر $M = M^T$ یک ماتریس مربعی باشد عبارت $M > 0, M \geq 0, M < 0$ و $M \leq 0$ به ترتیب نشان دهنده مثبت نیمه معین، مثبت معین، منفی نیمه معین و منفی معین بودن ماتریس M هستند. همچنین $\mathcal{L}\{M\} = M + M^T$ تعریف می شود.

لم ۱- متمم شور [۳۹]: فرض کنید ماتریس های $A(x) = A(x)^T$ و $D(x) = D(x)^T$ باشند. در اینصورت عبارت های زیر معادل هستند

$$\begin{aligned} \text{الف- } \begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ B(x)^T & D(x) \end{bmatrix} < 0 \\ \text{ب- } A(x) < 0, A(x) - B(x)D(x)^{-1}B(x)^T < 0 \\ \text{ج- } D(x) < 0, D(x) - B(x)^T A(x)^{-1}B(x) < 0 \end{aligned}$$

لم ۲- سیستم دینامیکی

$$\dot{x} = f(x, \omega) \quad (۱)$$

را در نظر بگیرید که در آن x بردار حالت سیستم و ω یک سیگنال خارجی است. فرض کنید تابع $V(t)$ وجود دارد به گونه ای که

$$V(t) > 0 \quad (۲)$$

$$\dot{V}(t) \leq -x^T x + \sigma^2 \omega^T \omega$$

که در آن σ یک مقدار تعیین شده است، در اینصورت بهره انرژی سیستم از ورودی ω تا خروجی \dot{x} محدود است.

اثبات- با انتگرال گیری از طرفین عبارت دوم رابطه (۲) نسبت به زمان

و با فرض پایداری سیستم می توان نوشت:

$$\int_0^{\infty} x^T x dt - V(0) \leq \sigma^2 \int_0^{\infty} \omega^T \omega dt \quad (۳)$$

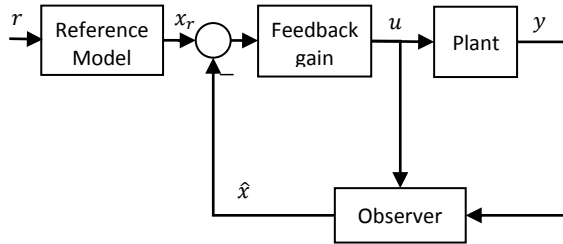
رابطه اخیر بیان کننده محدود بودن بهره انرژی سیستم یا همان معیار

نرم بی نهایت است. ■

لم ۳- فرض کنید ماتریس های $A < 0, D > 0$ و ماتریس های B و C با ابعاد مناسب وجود دارند. در اینصورت اگر

به ترتیب ماتریس سیستم، ماتریس ورودی و ماتریس خروجی مدل مرجع پایدار هستند.

دیاگرام بلوکی سیستم حلقه بسته در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱: دیاگرام بلوکی سیستم حلقه بسته

۴- طراحی قانون کنترل مبتنی بر رویکرد

در این قسمت شرایط طراحی قانون کنترل تعقیب برای سیستم (۸) به ازای قانون کنترل (۹) به صورت مجموع مربعات ارائه خواهد شد. برای سادگی و اجتناب از پیچیده شدن روابط، متغیر زمان در روابط حذف می‌شود. بعبارتی $x(t)$ به صورت x نشان داده خواهد شد. همانطور که در قسمت قبل اشاره شد در مقاله حاضر دو هدف اصلی تعقیب و تخمین بردار حالت سیستم به طور همزمان مورد توجه است. برای این منظور خطای تخمین بردار حالت سیستم، به صورت

$$e = x - \hat{x} \quad (12)$$

تعریف می‌شود. بر اساس رابطه اخیر و با استناد به رابطه‌های (۸) و (۱۰) دینامیک خطای تخمین به صورت

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) \left[[A_i(x)x + B_i u] \right. \\ &\quad \left. - [A_i(\hat{x})\hat{x} + B_i u] \right. \\ &\quad \left. + L_i(\hat{x})(C_j(x)x - C_j(\hat{x})\hat{x}) \right] \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) \left[(A_i(x)x - A_i(\hat{x})\hat{x}) \right. \\ &\quad \left. - L_i(\hat{x})(C_j(x)x - C_j(\hat{x})\hat{x}) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

قابل استخراج است. با تغییر متغیر $\bar{A}_i(x, \hat{x})e$ و $A_i(x)x - A_i(\hat{x})\hat{x} = \bar{A}_i(x, \hat{x})e$ به صورت

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) \left(\bar{A}_i(x, \hat{x}) - L_i(\hat{x})\bar{C}_j(x, \hat{x}) \right) e \quad (14)$$

قابل بیان است. رابطه اخیر دینامیک خطای تخمین را توصیف می‌کند که در آن بهره رویکرد است و در حالت کلی می‌تواند یک چندجمله‌ای از بردار حالت رویکرد باشد.

قابل نمایش است که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی، $y \in \mathbb{R}^q$ خروجی سیستم هستند. ماتریس‌های $A_i(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B_i(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $C_i(x(t)) \in \mathbb{R}^{q \times n}$ که ماتریس‌های چندجمله‌ای از x هستند، به ترتیب ماتریس سیستم، ماتریس ورودی و ماتریس خروجی هستند. در رابطه (۷) عبارت M_{ij} تابع عضویت متناظر با i امین قانون و j امین متغیر مقدم و $Z_j(t)$ متغیر مقدم است که در حالت کلی می‌تواند هر کدام از متغیرهای حالت و یا متغیر قابل اندازه‌گیری خارج از سیستم باشد.

۳- تعریف مساله

در این مقاله دسته خاصی از سیستم‌های فازی چندجمله‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرند که به صورت

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i(x(t))x(t) + B_i(z(t))u(t)\} \quad (8)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i(x(t))x(t)$$

نشان داده می‌شوند. در رابطه (۸) ماتریس سیستم تابعی از بردار حالت سیستم است ولی ماتریس ورودی به طور صریح تابعی از بردار حالت سیستم نیست. پارامتر $\zeta(t)$ یک بردار متغیر با زمان است که می‌تواند یک متغیر خارجی قابل اندازه‌گیری باشد.

برای وادار کردن بردار حالت سیستم (۸) به پیروی از بردار حالت یک سیستم مرجع پایدار، قانون کنترل به صورت

$$u(t) = \sum_{j=1}^r h_j(z(t)) K_j(\hat{x}(t)) (\hat{x}(t) - x_r(t)) \quad (9)$$

در نظر گرفته می‌شود که در آن $K_j(\hat{x}(t))$ یک ماتریس چندجمله‌ای از بردار حالت رویکرد فازی

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i(\hat{x}(t))\hat{x}(t) + B_i(\zeta(t))u(t) \\ &\quad + L_i(\hat{x}(t))(y(t) - \hat{y}(t))\} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i(\hat{x}(t))\hat{x}(t)$$

است. بعبارتی $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت رویکرد فازی و $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^q$ بردار خروجی رویکرد است. در رابطه (۹) متغیر $x_r(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت مدل مرجع پایدار

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r r(t) \\ y_r(t) &= C x_r(t) \end{aligned} \quad (11)$$

است که در آن $r(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی مرجع، $y_r(t) \in \mathbb{R}^q$ خروجی مدل مرجع، $A_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B_r \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $C_r \in \mathbb{R}^{q \times n}$

را به عنوان کاندیدای تابع لیاپانوف در نظر بگیرید که در آن

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & X_{33} \end{bmatrix} \quad (20)$$

مشتق زمانی تابع $V(t)$ در امتداد مسیر حالت های سیستم به صورت

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{\tilde{x}}^T X \tilde{x} + \tilde{x}^T X \dot{\tilde{x}} \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) \{ \tilde{x}^T \tilde{A}_{ij}^T X \tilde{x} + r^T \tilde{E}_i^T X \tilde{x} \\ &\quad + \tilde{x}^T X \tilde{A}_{ij} \tilde{x} + \tilde{x}^T X \tilde{E}_i r \} \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) \tilde{x}^T (\tilde{A}_{ij}^T X + X \tilde{A}_{ij}) \tilde{x} \\ &\quad + r^T \tilde{E}_i^T X \tilde{x} + \tilde{x}^T X \tilde{E}_i r - r^T \sigma^2 r \\ &\quad + r^T \sigma^2 r \end{aligned} \quad (21)$$

بدست می آید. رابطه اخیر را می توان به صورت

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) \Phi^T \Psi_{ij} \Phi - \tilde{x}^T \tilde{x} + \sigma^2 r^T r \quad (22)$$

بازنویسی کرد که در آن

$$\begin{aligned} \Psi_{ij} &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{ij}^T X + X \tilde{A}_{ij} + I & X \tilde{E}_i \\ \tilde{E}_i^T X & -\sigma^2 I \end{bmatrix} \\ \Phi &= \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

و اسکالری است که باید توسط طراح تعیین شود. از آنجایی که در رابطه (22) باید $\dot{V}(t) \leq 0$ باشد، با استفاده از لم ۲ می توان دید در صورتیکه $\Psi_{ij} \leq 0$ باشد شاخص نرم بی نهایت سیستم (15) از ورودی r تا خروجی \tilde{x} کمتر از مقدار از قبل تعیین شده σ خواهد شد. حال رابطه (22) را در نظر بگیرید. با جایگذاری \tilde{A}_{ij} و X در رابطه اخیر می توان نشان داد

$$\begin{aligned} \Psi_{ij} &= \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{X_{11}(A_i^x + B_i K_j)\} \\ -(B_i K_j)^T X_{11} \\ (A_i^x - A_r)^T X_{11} \\ -B_r^T X_{11} \\ * & * & * \\ \mathcal{L}\{X_{22}(\tilde{A}_i - L_i \tilde{C}_j)\} & * & * \\ 0 & \mathcal{L}\{X_{33} A_r\} & * \\ 0 & B_r^T X_{33} & -\sigma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

رابطه اخیر بدلیل ظاهر شدن ضرب پارامترهای مجهول در یکدیگر غیر محذب است. با استفاده از تبدیل همانندی می توان گفت برقرار بودن رابطه (24) معادل برقراری رابطه

$$\chi^T \Psi_{ij} \chi \leq 0 \quad (25)$$

است که در آن $\chi = \text{diag}(X_{11}^{-1}, I, I, I)$ رابطه اخیر را می توان به صورت

برای اینکه قانون کنترل، اهداف پایدارسازی و تعقیب را به طور همزمان فراهم کند سیستم جدیدی به صورت

$$\dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^r h_i(z) \sum_{j=1}^r h_j(z) [\tilde{A}_{ij} \hat{x} + \tilde{E}_i r] \quad (15)$$

در نظر گرفته می شود که در آن

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ij} &= \begin{bmatrix} A_i(x) + B_i(\zeta) K_j(\hat{x}) & -B_i(\zeta) K_j(\hat{x}) & A_i(x) - A_r \\ 0 & \tilde{A}_i - L_i(\hat{x}) \tilde{C}_j & 0 \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix} \\ \tilde{x} &= \begin{bmatrix} x - x_r \\ e \\ x_r \end{bmatrix}, \tilde{E}_i = \begin{bmatrix} -B_r \\ 0 \\ B_r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

که در آن $\tilde{A}_i = \tilde{A}_i(x, \hat{x})$ و $\tilde{C}_j = \tilde{C}_j(x, \hat{x})$ ، در نظر گرفته شده است.

قضیه ۱- سیستم (15) را در نظر بگیرید. اگر ماتریس های $X_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $X_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $X_{33} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و چندجمله ای $\epsilon_{1i} > 0$ و $\epsilon_{2ij}(x) \geq 0$ به ازای $i, j = 1, \dots, r$ و ضرب $\sigma > 0$ وجود داشته باشند به گونه ای که

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & X_{33} \end{bmatrix} - \epsilon_{1i} I \text{ is SOS} \\ -(\Omega_{ij}(x) + \epsilon_{2ij}(x) I) \text{ is SOS} \end{aligned} \quad (17)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{(A_i^x + B_i K_j) X_{11}^{-1}\} + \mathcal{L}\{B_i K_j\} \\ -(B_i K_j)^T \\ (A_i^x - A_r)^T \\ -B_r^T \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(X_{11}^{-1} - I + B_i K_j)^T \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(X_{11}^{-1} - I + B_i K_j)^T \\ * & * & * & * & * \\ \mathcal{L}(X_{22} \tilde{A}_i - Z_i \tilde{C}_j) & * & * & * & * \\ 0 & \mathcal{L}\{X_{33} A_r\} & * & * & * \\ 0 & B_r^T X_{33} & -\sigma^2 I & * & * \\ 0 & 0 & 0 & -I & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

برقرار باشند آنگاه به ازای قانون کنترل (9) بهره انرژی از ورودی مرجع تا خطای تعقب و خطای تخمین بردار حالت محدود خواهد بود. در رابطه اخیر برای اجتناب از بزرگ شدن روابط $B_i = B_i(\zeta)$ ، $K_j = K_j(\hat{x})$ ، $Z_i = Z_i(\hat{x}) = X_{22} L_i(\hat{x})$ و $A_i^x = A_i(x)$ ، $A_i = A_i(\hat{x})$ گرفته شده است.

اثبات- تابع

$$V(t) = \tilde{x}^T X \tilde{x} \quad (19)$$

در همه مثال ها از جعبه ابزار یالمپ^۱ در متلب برای به دست آوردن پارامترهای کنترلگر استفاده شده است.

۱-۵- مثال ۱

سیستم آشوبناک لورنز را در نظر بگیرید ([۴۰])

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10(x_2 - x_1) + u_1 \\ \dot{x}_2 = 28x_1 - x_2 - x_1x_3 + u_2 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - \frac{8}{3}x_3 + u_3 \end{cases} \quad (۴۱)$$

که در آن $x_1 \in [-30, 30]$ است. با استفاده از روش غیرخطی گری قطاعی [۴۱]، می توان یک مدل فازی تاکاگی-سوگنو با دوقاعده که در آن متغیر مقدم $x_1 = z$ است را به گونه ای تعریف کرد که رفتار سیستم (۴۱) را در بازه تعریف شده را به طور دقیق توصیف کند. پارامترهای سیستم فازی به صورت

$$A_1 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & -30 \\ 0 & 30 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 30 \\ 0 & -30 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_1 = C_2 = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$h_1(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x_1}{30} \right), h_2(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x_1}{30} \right)$$

بدست می آیند. با انتخاب پارامترهای مدل مرجع به صورت

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}, B_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_r = [1 \quad 0 \quad 0]$$

و با انتخاب $\sigma = 5$ متغیرهای تصمیم گیری و پارامترهای کنترلگر و رویکرد به صورت

$$X_{11} = 10^{-7} \begin{bmatrix} 0.1369 & -0.3255 & -0.0018 \\ -0.3255 & 0.9082 & 0.0003 \\ -0.0018 & 0.0003 & 0.6679 \end{bmatrix}, X_{22} = \begin{bmatrix} 0.4325 & -0.2616 & 0 \\ -0.2616 & 0.2748 & 0 \\ 0 & 0 & 0.247 \end{bmatrix}, X_{33} = \begin{bmatrix} 0.0114 & -0.0133 & 0.0266 \\ -0.0133 & 0.0114 & 0.0398 \\ 0.0266 & 0.0398 & 0.0513 \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} -6457.481 & 492.268 & -0.729 \\ 787.778 & -6895.572 & 0.188 \\ -0.182 & 0.517 & -5747.302 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} -6451.520 & 492.440 & -0.381 \\ 787.216 & -6895.329 & 0.404 \\ -0.498 & 0.0935 & -5747.282 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} 44.704 \\ 61.498 \\ 18.582 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 44.704 \\ 61.497 \\ -18.582 \end{bmatrix}$$

بدست می آیند. نتایج شبیه سازی سیستم حلقه بسته را به ازای انتخاب شرایط اولیه سیستم اصلی به صورت $x(0) = [-5 \quad 10 \quad -5]^T$ و شرایط اولیه رویکرد به صورت $\hat{x}(0) = [5 \quad -5 \quad 5]^T$ می توان در

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ij} &= \begin{bmatrix} A_i^x + B_i K_j & A_i^x - A_r \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \\ \bar{x} &= \begin{bmatrix} x - x_r \\ x_r \end{bmatrix}, \bar{E}_i = \begin{bmatrix} -B_r \\ B_r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۳۶)$$

است. مانند آنچه در اثبات قضیه ۱ بیان شد با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف به صورت (۱۹) و با استفاده از قضیه لیاپانوف می توان نتیجه گرفت که

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) \Phi^T \Psi_{ij} \Phi - \tilde{x}^T \tilde{x} + \sigma^2 r^T r \leq 0 \quad (۳۷)$$

که در آن $\Phi = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ x_r \end{bmatrix}$

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{X_{11}(A_i^x + B_i K_j)\} & * & * \\ (A_i^x - A_r)^T X_{11} & \mathcal{L}\{X_{22} A_r\} & * \\ -B_r^T X_{11} & B_r^T X_{22} & -\sigma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (۳۸)$$

است. مانند آنچه در اثبات قضیه ۱ ذکر شد برقراری رابطه (۳۸) معادل برقراری رابطه

$$\chi^T \Psi_{ij} \chi = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{(A_i^x + B_i K_j) X_{11}^{-1}\} & * & * \\ (A_i^x - A_r)^T & \mathcal{L}\{X_{22} A_r\} & * \\ -B_r^T & B_r^T X_{22} & -\sigma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (۳۹)$$

است که در آن $\chi = \text{diag}(X_{11}^{-1}, I, I)$ است. رابطه (۳۹) به دلیل حاصلضرب دو پارامتر مجهول X_{11}^{-1} و K_j غیر محدب است. بنابراین با تغییر متغیر $Z_j = K_j X_{11}^{-1}$ به صورت

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}\{A_i^x X_{11}^{-1} + B_i Z_j\} & * & * \\ (A_i^x - A_r)^T & \mathcal{L}\{X_{22} A_r\} & * \\ -B_r^T & B_r^T X_{22} & -\sigma^2 I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (۴۰)$$

قابل بازنویسی است. ■

۵- شبیه سازی

در این بخش برای نشان دادن کارایی قضایای ارائه شده در بخش قبل، سه مثال شبیه سازی ارائه می شود. در مثال اول سیستم غیرخطی آشوبناک لورنز مورد بررسی قرار می گیرد. سیستم آشوبناک بوسیله یک سیستم فازی تاکاگی-سوگنو به طور دقیق توصیف و سپس طراحی قانون کنترل تعقیب برای سیستم مذکور انجام خواهد شد. در مثال دوم یک سیستم غیرخطی توسط یک سیستم فازی چندجمله ای توصیف شده است که در آن ماتریس سیستم وابسته به بردار حالت است. در نتیجه طراحی قانون کنترل بر اساس مدل فازی چندجمله ای انجام می شود. در مثال سوم برای یک سیستم غیرخطی هم مدل فازی تاکاگی-سوگنو و هم مدل فازی چندجمله ای ارائه و طراحی قانون کنترل تعقیب برای هر دو سیستم فازی انجام می شود.

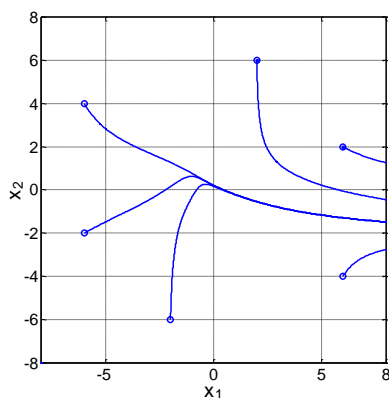
¹Yalmip Toolbox

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & -0.3x_2 \\ -1.5 & -2 - x_2^2 \end{bmatrix}, A_2(x) = \begin{bmatrix} -0.2172 & -0.3x_2 \\ -1.5 & -2 - x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$B_1(x) = B_2(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_1 = C_2 = [1 \ 0]$$

$$h_1(z) = \frac{\sin x_1 + 0.21727}{1.2172x_1}, h_2(z) = \frac{x_1 - \sin x_1}{1.2172x_1}$$

قابل استخراج است. نمودار فاز سیستم (۴۲) در شکل ۴ نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود سیستم (۴۲) در حالت حلقه باز ناپایدار است.



شکل ۴: نمودار فاز سیستم حلقه باز مثال دوم

با انتخاب ماتریس‌های مدل مرجع به صورت

$$A_r = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, B_r = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}, C_r = [1 \ 0]$$

و با انتخاب $\sigma = 0.4$ متغیرهای تصمیم‌گیری و پارامترهای کنترل‌گر و رویکرد فازی چندجمله‌ای به صورت

$$X_{11} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.0064 & 0 \\ 0 & 0.3557 \end{bmatrix}$$

$$X_{22} = \begin{bmatrix} 0.0799 & 0 \\ 0 & 0.006 \end{bmatrix}$$

$$X_{33} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0265 & 0.0097 \\ 0.0097 & 0.2049 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = [-2.468 \quad -0.0593 + 0.0064\hat{x}_2]$$

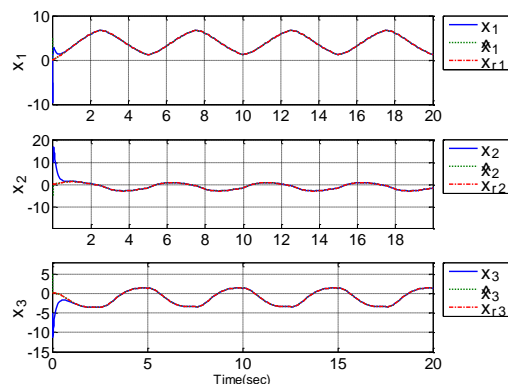
$$K_2 = [-4.051 \quad -0.515 + 0.318\hat{x}_2]$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 88.655 - 2.35 \times 10^{-12}\hat{x}_2 \\ -4.415 - 1.824\hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

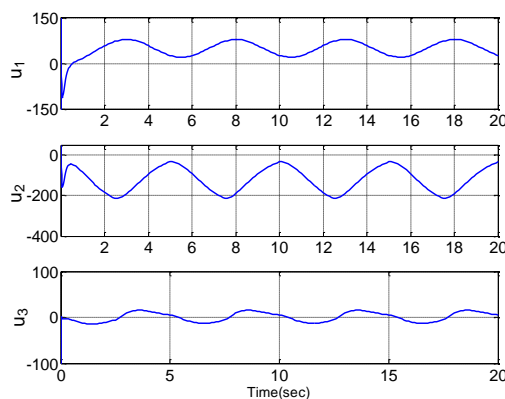
$$L_2 = \begin{bmatrix} 86.994 - 2.35 \times 10^{-12}\hat{x}_2 \\ -4.428 - 1.838\hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

بدست می‌آیند. نتایج شبیه‌سازی با انتخاب شرایط اولیه به صورت $x(0) = [1 \ 1]^T$ و شرایط اولیه رویکرد فازی چندجمله‌ای به صورت $\hat{x}(0) = [-1 \ -1]^T$ در شکل ۵ نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود سیستم حلقه بسته پایدار شده و تعقیب و تخمین بردار حالت به طور مناسب انجام شده است. لازم به ذکر است که ورودی مرجع r به صورت سیگنال پالس با دامنه 0.3 ، دوره تناوب 10 ثانیه و عرض پالس 50% در نظر گرفته شده است.

شکل ۲ و شکل ۳ مشاهده کرد. همانطور که در شکل ۲ ملاحظه می‌شود قانون کنترل باعث شده که تعقیب با دقت بالایی انجام شود. همچنین تخمین مناسبی از بردار حالت سیستم بدست آمده است. شکل ۳ سیگنال‌های کنترلی تولید شده را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که ورودی مرجع r به صورت سیگنال پالس با دامنه 2 ، دوره تناوب 5 ثانیه و عرض پالس 50% در نظر گرفته شده است.



شکل ۲: نتایج تعقیب و تخمین همزمان سیستم مثال اول



شکل ۳: قانون کنترل سیستم مثال اول

۵-۲-۲ مثال ۲

سیستم غیرخطی

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_1 - 0.3x_2 + (x_1^2 + 1)u \\ \dot{x}_2 = -1.5x_1 - 2x_2 - x_2^3 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (42)$$

را در نظر بگیرید که در آن متغیر حالت x_1 قابل اندازه‌گیری است ([۲۹]). با استفاده از روش غیرخطی‌گری قطاعی، یک مدل فازی چندجمله‌ای با دو قاعده می‌توان بدست آورد به گونه‌ای که به طور دقیق و جامع سیستم (۴۲) را توصیف کند. بردار متغیر مقدم $z = x_1$ شامل متغیر حالت غیرقابل اندازه‌گیری x_2 نیست و در ماتریس‌های چندجمله‌ای A_i و B_i ظاهر می‌شود. مدل فازی چندجمله‌ای توصیف کننده سیستم غیرخطی (۴۲) به صورت

$$X_{33} = \begin{bmatrix} 2.1787 & -0.1536 \\ -0.1536 & 1.3586 \end{bmatrix}$$

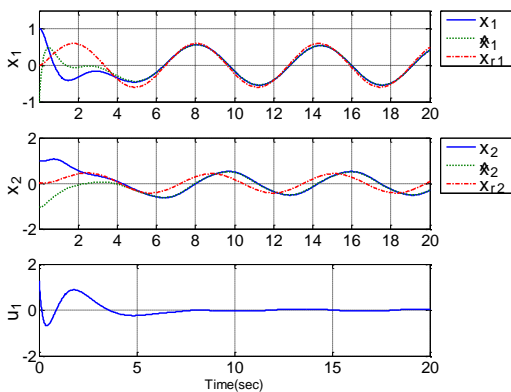
$$K_1 = [-1.4982 \quad 0.2189], K_2 = [-1.5013 \quad 0.2243]$$

$$K_3 = [-1.5013 \quad 0.2243], K_4 = [-1.5013 \quad 0.2243]$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 3.2682 \\ -0.9292 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 3.2295 \\ -1.0764 \end{bmatrix},$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 3.1668 \\ -0.8591 \end{bmatrix}, L_4 = \begin{bmatrix} 3.1666 \\ -1.0586 \end{bmatrix}$$

بدست می آیند. نتایج شبیه سازی در شکل ۶ نشان داده شده است که در آن شرایط اولیه سیستم به صورت $x(0) = [1 \quad 1]^T$ و ورودی مرجع به صورت $\hat{x}(0) = [-1 \quad -1]^T$ و فرکانس 1 rad/sec انتخاب شده-اند.



شکل ۶: نتایج شبیه سازی مثال سوم برای مدل تاکاگی-سوگنو

حال به طراحی قانون کنترل بر اساس مدل فازی چندجمله ای پرداخته می شود. دینامیک سیستم غیرخطی (۴۳) به طور جامع (بدون در نظر گرفتن بازه تغییرات برای حالت x_1) توسط مدل فازی چندجمله ای قابل نمایش است که در آن $z = y$ و

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.1y^2 & -1 \\ 1 & -y^2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.1y^2 & -1 \\ -0.2172 & -y^2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_1 = C_2 = [1 \quad 0]$$

$$h_1(z) = \frac{\sin y + 0.2172y}{1.217y}, h_2(z) = \frac{y - \sin y}{1.2172y},$$

با در نظر گرفتن سایر پارامترهای طراحی مطابق با آنچه در طراحی حالت قبل انجام شد، متغیرهای تصمیم گیری و پارامترهای کنترلگر و رویکرد فازی به صورت

$$X_{11} = \begin{bmatrix} 0.0415 & 0.0086 \\ 0.0086 & 0.0707 \end{bmatrix},$$

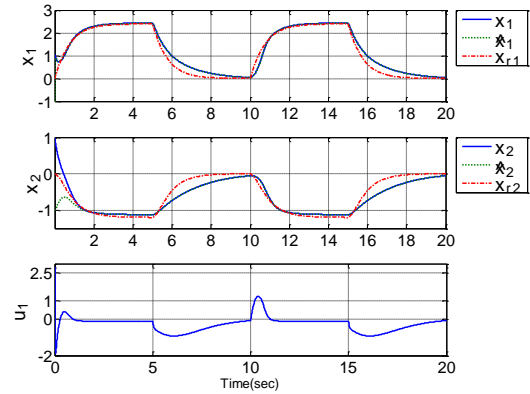
$$X_{22} = \begin{bmatrix} 2.4376 & 0.3848 \\ 0.3848 & 3.8856 \end{bmatrix},$$

$$X_{33} = \begin{bmatrix} 1.7516 & 0.0448 \\ 0.0448 & 2.1999 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = [-1.1728 \quad 0.22032]$$

$$K_2 = [-1.1728 \quad 0.2032]$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.7008 \\ -0.0671 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0.7124 \\ -0.1511 \end{bmatrix}$$



شکل ۵: نتایج شبیه سازی سیستم مثال دوم

۳-۵ مثال ۳

سیستم غیر خطی

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0.1x_1^3 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 = \sin x_1 - x_1^2 x_2 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (43)$$

را در نظر بگیرید ([۲۹]). در این مثال به دو روش مبتنی بر مدل تاکاگی-سوگنو و مدل فازی چندجمله ای طراحی قانون کنترل انجام می شود. برای به دست آوردن مدل فازی تاکاگی-سوگنو به روش غیرخطی گری قطعی فرض شده است که $x_1 \in [-1, 1]$ است. بنابراین مدل فازی تاکاگی-سوگنو با ۴ قاعده به صورت

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & -1 \\ -0.217 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -0.217 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = [1 \quad 0]$$

$$h_1(x) = x_1^2 \frac{\sin x_1 + 0.217x_1}{1.217x_1},$$

$$h_2(x) = x_1^2 \frac{x_1 - \sin x_1}{1.217x_1},$$

$$h_3(x) = (1 - x_1^2) \frac{\sin x_1 + 0.217x_1}{1.217x_1},$$

$$h_4(x) = (1 - x_1^2) \frac{x_1 - \sin x_1}{1.217x_1}$$

بدست می آیند. با انتخاب پارامتر $\sigma = 5$ و با انتخاب پارامترهای مدل مرجع به صورت

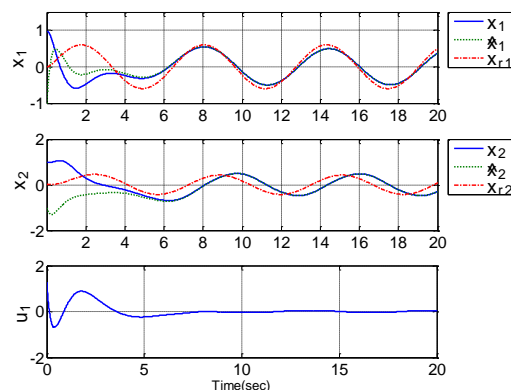
$$A_r = \begin{bmatrix} -4.9 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_r = [1 \quad 0]$$

متغیرهای تصمیم گیری و پارامترهای کنترلگر و رویکرد فازی به صورت

$$X_{11} = \begin{bmatrix} 0.8676 & 0.2861 \\ 0.2861 & 0.7334 \end{bmatrix}, X_{22} = \begin{bmatrix} 0.3066 & 0.2021 \\ 0.2021 & 0.6991 \end{bmatrix}$$

- Wheeled Mobile Robot With Nonholonomic Constraint," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 24, pp. 741-746, 2016.
- [4] G. Wen, W. Yu, Y. Xia, X. Yu, and J. Hu, "Distributed Tracking of Nonlinear Multiagent Systems Under Directed Switching Topology: An Observer-Based Protocol," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 47, pp. 869-881, 2017.
- [5] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. F. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4, pp. 14-23, 1996.
- [6] K. Tanaka and H. O. Wang, "Fuzzy regulators and fuzzy observers: a linear matrix inequality approach," in *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, 1997, pp. 1315-1320 vol.2.
- [7] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang, "Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 6, pp. 250-265, 1998.
- [8] M. C. M. Teixeira, E. Assunção, and H. C. Pietrobom, "On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers," in *2001 European Control Conference (ECC)*, 2001, pp. 120-125.
- [9] M. C. M. Teixeira, E. Assuncao, and R. G. Avellar, "On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 11, pp. 613-623, 2003.
- [10] T. Chung-Shi, C. Bor-Sen, and U. Huey-Jian, "Fuzzy tracking control design for nonlinear dynamic systems via T-S fuzzy model," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 9, pp. 381-392, 2001.
- [11] G. H. Chang and J. C. Wu, "Robust Tracking Control Design for Nonlinear Systems via Fuzzy Observer," in *2012 Fifth International Symposium on Computational Intelligence and Design*, 2012, pp. 366-369.
- [12] M. H. Asemani and V. J. Majd, "A robust H_{∞} observer-based controller design for uncertain T-S fuzzy systems with unknown premise variables via LMI," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 212, pp. 21-40, 2013.
- [13] C. Lin, Q.-G. Wang, and T. Heng Lee, "Improvement on observer-based control for T-S fuzzy systems," *Automatica*, vol. 41, pp. 1651-1656, 2005.
- [14] C.-S. Tseng and C.-K. Hwang, "Fuzzy observer-based fuzzy control design for nonlinear systems with persistent bounded disturbances," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 158, pp. 164-179, 2007.
- [15] H. Dahmani, O. Pagès, A. E. Hajjaji, and N. Daraoui, "Observer-Based Robust Control of Vehicle Dynamics for Rollover Mitigation in Critical Situations," *IEEE Transactions on*

بدست می‌آیند. نتایج شبیه‌سازی با انتخاب شرایط اولیه سیستم به صورت $x(0) = [1 \ 1]^T$ و شرایط اولیه رویکر فازی چندجمله‌ای به صورت $\hat{x}(0) = [-1 \ -1]^T$ قابل مشاهده است.



شکل ۷: نتایج شبیه‌سازی مثال سوم برای مدل فازی چندجمله‌ای

همانطور که در شکل ۶ و شکل ۷ ملاحظه می‌شود در طراحی به روش فازی چندجمله‌ای با وجود یکسان بودن پارامترهای طراحی با روش فازی تاکاگی-سوگنو، مقداری بهبود در میزان خطای تخمین حالت و خطای تعقیب مدل مرجع پایدار دیده می‌شود. همچنین طراحی به روش تاکاگی-سوگنو اعتبار مدلسازی به بازه $x_1 \in [-1, 1]$ محدود می‌شود در صورتیکه در روش فازی چندجمله‌ای مدلسازی و در نتیجه قانون کنترل به طور جامع معتبر است.

۶- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، قانون کنترل تعقیب مبتنی بر رویکر برای کلاس خاصی از سیستم‌های فازی چندجمله‌ای با تضمین شاخص تعقیب نرم بی‌نیاید طراحی شد. در این کلاس از سیستم‌های فازی چندجمله‌ای، ماتریس سیستم و خروجی وابسته به بردار حالت ولی ماتریس ورودی به طور مستقیم تابعی از بردار حالت سیستم نیست. شرایط کافی برای محاسبه بهره‌های قانون کنترل بر اساس روش مجموع مربعات ارائه شد به گونه‌ای که بتواند علاوه بر وادار کردن بردار حالت سیستم به پیروی از بردار حالت یک سیستم مرجع پایدار، شاخص نرم بی‌نیاید از ورودی خارجی تا خطاهای تعقیب و تخمین از مقدار مشخص داده شده کمتر باشد. در انتها برای نشان دادن کارایی قانون کنترل ارائه شده، طراحی قانون کنترل و شبیه‌سازی آن برای چند سیستم مینا انجام شد.

مراجع

- [1] Z. Wang, R. Lu, and H. Wang, "Finite-Time Trajectory Tracking Control of a Class of Nonlinear Discrete-Time Systems," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 47, pp. 1679-1687, 2017.
- [2] Y. F. Gao, X. M. Sun, C. Wen, and W. Wang, "Adaptive Tracking Control for a Class of Stochastic Uncertain Nonlinear Systems With Input Saturation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, pp. 2498-2504, 2017.
- [3] H. Yang, X. Fan, P. Shi, and C. Hua, "Nonlinear Control for Tracking and Obstacle Avoidance of a

- IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 17, pp. 1284-1295, 2009.
- [29] K. Tanaka, H. Ohtake, T. Seo, M. Tanaka, and H. O. Wang, "Polynomial Fuzzy Observer Designs: A Sum-of-Squares Approach," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, vol. 42, pp. 1330-1342, 2012.
- [30] A. Sala, J. L. Pitarch, M. Bernal, A. Jaadari, and T. M. Guerra, "Fuzzy Polynomial observers," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 44, pp. 12772-12776, 2011.
- [31] C. Liu, H. K. Lam, X. Ban, and X. Zhao, "Design of polynomial fuzzy observer-controller with membership functions using unmeasurable premise variables for nonlinear systems," *Information Sciences*, vol. 355-356, pp. 186-207, 2016.
- [32] H. Han, J. Chen, and H. R. Karimi, "State and disturbance observers-based polynomial fuzzy controller," *Information Sciences*, vol. 382-383, pp. 38-59, 2017.
- [33] S. Prajna, A. Papachristodoulou, and W. Fen, "Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: a Lyapunov-based approach," in *2004 5th Asian Control Conference (IEEE Cat. No.04EX904)*, 2004, pp. 157-165 Vol.1.
- [34] A. Papachristodoulou and S. Prajna, "A tutorial on sum of squares techniques for systems analysis," in *Proceedings of the 2005, American Control Conference, 2005.*, 2005, pp. 2686-2700 vol. 4.
- [35] F. Delmotte, M. Dambrine, S. Delrot, and S. Lalot, "Fouling detection in a heat exchanger: A polynomial fuzzy observer approach," *Control Engineering Practice*, vol. 21, pp. 1386-1395, 2013.
- [36] H. K. Lam and H. Li, "Output-Feedback Tracking Control for Polynomial Fuzzy-Model-Based Control Systems," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 60, pp. 5830-5840, 2013.
- [37] Z. Chen, B. Zhang, H. Li, and J. Yu, "Tracking control for polynomial fuzzy networked systems with repeated scalar nonlinearities," *Neurocomputing*, vol. 171, pp. 185-193, 2016.
- [38] S. Prajna, A. Papachristodoulou, and P. A. Parrilo, "Introducing SOSTOOLS: a general purpose sum of squares programming solver," in *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002.*, 2002, pp. 741-746 vol.1.
- [39] S. Boyd. et. al., *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, in *Applied Mathematics*, vol. 15, PHL:SIAM, 1994.
- [40] C.-W. Park, C.-H. Lee, and M. Park, "Design of an adaptive fuzzy model based controller for chaotic dynamics in Lorenz systems with uncertainty," *Information Sciences*, vol. 147, pp. 245-266, 2002.
- [41] H. Ohtake, K. Tanaka, and H. O. Wang, "Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept," in *Proceedings Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference (Cat. No. 01TH8569)*, 2001, pp. 127-132.
- Intelligent Transportation Systems*, vol. 15, pp. 274-284, 2014.
- [16] H. Dahmani, O. Pagès, and A. E. Hajjaji, "Observer-Based State Feedback Control for Vehicle Chassis Stability in Critical Situations," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 24, pp. 636-643, 2016.
- [17] P. Bergsten, R. Palm, and D. Driankov, "Observers for Takagi-Sugeno fuzzy systems," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, vol. 32, pp. 114-121, 2002.
- [18] L. Li, S. X. Ding, J. Qiu, Y. Yang, and D. Xu, "Fuzzy Observer-Based Fault Detection Design Approach for Nonlinear Processes," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. PP, pp. 1-12, 2016.
- [19] L. Li, S. X. Ding, J. Qiu, and Y. Yang, "Real-Time Fault Detection Approach for Nonlinear Systems and its Asynchronous T-S Fuzzy Observer-Based Implementation," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 47, pp. 283-294, 2017.
- [20] Y. Wu, J. Dong, X. J. Li, and G. H. Yang, "A new fault detection observer scheme for T-S fuzzy systems with unmeasurable variables," in *2016 12th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA)*, 2016, pp. 120-125.
- [21] Y. Yang, S. X. Ding, and L. Li, "On observer-based fault detection for nonlinear systems," *Systems & Control Letters*, vol. 82, pp. 18-25, 2015.
- [22] L. Li, S. X. Ding, Y. Yang, and Y. Zhang, "Robust fuzzy observer-based fault detection for nonlinear systems with disturbances," *Neurocomputing*, vol. 174, Part B, pp. 767-772, 2016.
- [23] T. Agustinah, A. Jazidie, M. Nuh, and D. Haiping, "Fuzzy tracking control design using observer-based stabilizing compensator for nonlinear systems," in *2010 International Conference on System Science and Engineering*, 2010, pp. 275-280.
- [24] K. Tanaka, H. Yoshida, H. Ohtake, and H. O. Wang, "A Sum of Squares Approach to Stability Analysis of Polynomial Fuzzy Systems," in *2007 American Control Conference*, 2007, pp. 4071-4076.
- [25] K. Tanaka, H. Yoshida, H. Ohtake, and H. O. Wang, "Stabilization of Polynomial Fuzzy Systems via a Sum of Squares Approach," in *2007 IEEE 22nd International Symposium on Intelligent Control*, 2007, pp. 160-165.
- [26] K. Tanaka, H. Ohtake, and H. O. Wang, "Guaranteed Cost Control of Polynomial Fuzzy Systems via a Sum of Squares Approach," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, vol. 39, pp. 561-567, 2009.
- [27] K. Tanaka, H. Yoshida, H. Ohtake, and H. O. Wang, "A Sum-of-Squares Approach to Modeling and Control of Nonlinear Dynamical Systems With Polynomial Fuzzy Systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 17, pp. 911-922, 2009.
- [28] A. Sala and C. Arino, "Polynomial Fuzzy Models for Nonlinear Control: A Taylor Series Approach,"