

کنترل اجماع توزیع شده تطبیقی برای دسته‌ای از سیستم‌های چندعاملی غیرخطی نامعین و ناهمگون

مائه تاج^۱، مریم شهریاری کاهکشی^۲

^۱ فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه شهرکرد، taj@stu.sku.ac.ir

^۲ استادیار دانشکده فنی و مهندسی، گروه کنترل، دانشگاه شهرکرد، m.shahriarikahkeshi@ec.iut.ac.ir

پذیرش: ۱۳۹۷/۰۳/۹

ویرایش: ۱۳۹۶/۰۷/۱۸

دریافت: ۱۳۹۶/۰۴/۳۰

چکیده: این مقاله، به طراحی کنترل اجماع توزیع شده برای دسته‌ای از سیستم‌های چندعاملی غیرخطی نامعین به فرم اکیداً فیدبک برداشته است. ارتباط بین عامل‌ها توسط یک گراف جهت‌دار توصیف شده است. شبکه‌های عصبی با توابع پایه شعاعی برای تقریب دینامیک نامعین و ناهمگون عامل‌های پیرو و اثر عوامل مجاور هر عامل در سیستم چندعاملی مورد استفاده قرار گرفته است. سپس، روش پیشنهادی براساس روش کنترل سطح دینامیکی ارائه شده است. تحلیل پایداری سیستم حلقه بسته نشان می‌دهد که تمام سیگنال‌های سیستم حلقه بسته نهایتاً به صورت یکنواخت کران‌دار هستند. روش پیشنهادی ضمن حل مسئله اجماع در سیستم‌های چندعاملی با دینامیک نامعین، معضل انفجار جملات را نیز برطرف نموده است. نتایج شبیه‌سازی روش پیشنهادی بر روی دسته‌ای از ربات‌های تک‌محوری با دینامیک نامعین متشکل از چهار عامل پیرو و یک عامل راهبر ارائه شدند. نتایج ارائه شده کارایی روش پیشنهادی را تأیید می‌نمایند.

کلمات کلیدی: سیستم‌های چندعاملی، کنترل توزیع شده، شبکه عصبی با توابع پایه شعاعی.

Adaptive Distributed Consensus Control for a Class of Heterogeneous and Uncertain Nonlinear Multi-Agent Systems

Maedeh Taj, Maryam Shahriari-kahkeshi

Abstract: This paper has been devoted to the design of a distributed consensus control for a class of uncertain nonlinear multi-agent systems in the strict-feedback form. The communication between the agents has been described by a directed graph. Radial-basis function neural networks have been used for the approximation of the uncertain and heterogeneous dynamics of the followers as well as the effect of the neighbors of each agent in the multi-agent system. Then, the proposed scheme based on the dynamic surface control approach has been presented. Stability analysis of the closed-loop system shows that all the signals of the closed-loop system are uniformly ultimately bounded. The proposed scheme solves the consensus problem in the multi-agent systems with uncertain dynamics and avoids the "explosion of complexity" problem. The simulation results of the proposed approach are presented on a group of single-link robots with uncertain dynamics including four followers and one leader. The presented results verify the effectiveness of the proposed method.

Keywords: Multi-agent systems, Distributed control, Radial-basis function neural networks.

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر کنترل سیستم‌های چندعاملی به دلیل کاربرد وسیع آن‌ها در سیستم‌های نظمی و غیرنظامی توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است [۱-۳]. موضوعات مورد مطالعه در سیستم‌های چندعاملی شامل مسئله اجماع [۴]، کنترل مشارکتی [۵]، کنترل بهینه توزیع شده [۶]، کنترل شکل‌دهی [۷] و غیره می‌باشد که بر روی سیستم‌هایی با دینامیک خطی [۸] و غیرخطی [۹] به کار گرفته شده است. کنترل سیستم‌های چندعاملی در دو حالت با راهبر و بی‌راهبر انجام می‌گیرد که در حالت باراهبر، هدف اصلی ردیابی مسیر مطلوب تولید شده توسط راهبر می‌باشد. راهبر در سیستم‌های چندعاملی، عامل یا عواملی است که به صورت فردی یا گروهی وظیفه راهبری را برعهده دارند. اطلاعات عامل راهبر تنها برای عوامل پیرو که با آن در ارتباط مستقیم هستند قابل دسترسی می‌باشد. در مقابل، در حالت بی‌راهبر، هدف هدایت عوامل به یک مقدار مشترک از پیش تعیین نشده می‌باشد که به طور کلی تابعی از حالت‌های اولیه عوامل در شبکه است.

از آنجایی که بسیاری از سیستم‌های فیزیکی ذاتاً دارای خاصیت غیرخطی بوده و اغلب شامل دینامیک‌های مدل نشده و نامعین می‌باشند و از طرفی دستیابی به اهداف کنترل در سیستم‌های غیرخطی با دینامیک غیرخطی و نامعین کار بسیار دشواری است، از این رو کنترل سیستم‌های چندعاملی غیرخطی با دینامیک نامعین حائز اهمیت است. یکی از روش‌های کنترل سیستم‌های چندعاملی براساس استفاده از تقریب‌زن‌های سراسری می‌باشد که در این روش از تقریب‌زن‌هایی نظیر سیستم‌های فازی [۱۰] و شبکه‌های عصبی [۱۱، ۱۲] برای تقریب دینامیک نامعین سیستم استفاده می‌شود و کنترل کننده براساس مدل به دست آمده طراحی می‌گردد.

کنترل مد لغزشی و روش بازگشت به عقب از جمله روش‌های کنترل مقاوم تطبیقی مرسوم محسوب می‌شوند که از آن‌ها برای کنترل عوامل سیستم‌های چندعاملی بهره گرفته شده است. در [۱۳] کنترل ردیابی مشارکتی تطبیقی مبتنی بر شبکه‌های عصبی و روش کنترل مد لغزشی برای سیستم‌های غیرخطی آئین مرتبه بالا با فرض نامعین بودن دینامیک عامل‌ها ارائه شد. هم‌چنین، در [۱۴] روش کنترل تطبیقی مبتنی بر روش کنترل مد لغزشی و روش بازگشت به عقب برای کنترل سیستم‌های چندعاملی راهبر- پیرو مطالعه شد.

کنترل ردیابی اجماع توزیع شده برای سیستم‌های چندعاملی غیرخطی مرتبه دوم در [۱۵، ۱۶] مورد بررسی قرار گرفته است که در هر دو آن‌ها شبکه‌های عصبی برای تقریب دینامیک نامعین به کار برده شده است. هم‌چنین، در [۱۷، ۱۸] کنترل ردیابی اجماع توزیع شده برای سیستم‌های چندعاملی غیرخطی مرتبه بالا به روش بازگشت به عقب مطالعه شد.

به منظور کاهش حجم محاسبات در [۱۹، ۲۰] از روش بازگشت به عقب فیلتر شده برای کنترل اجماع توزیع شده سیستم‌های چندعاملی غیرخطی به فرم اکیداً فیدبک و تحت گراف جهت‌دار استفاده شد که در آن‌ها از شبکه عصبی برای تقریب دینامیک نامعین هر عامل بکار رفته است.

هرچند روش بازگشت به عقب یکی از روش‌های کنترل مقاوم می‌باشد و همانند روش مد لغزشی در حضور اغتشاش و نامعینی‌های پارامتری عملکرد مقاوم دارد اما به دلیل ایجاد مشتقات مکرر تابع در طراحی قوانین کنترل واقعی و مجازی از معضل انفجار جملات رنج می‌برد. یک راه حل برای رفع این معضل، استفاده از روش کنترل سطح دینامیکی است. در این روش، برای جلوگیری از ایجاد مشتقات متوالی تابع در طراحی کنترل کننده، ورودی کنترل مجازی از یک فیلتر پایین گذر مرتبه اول عبور نموده و یک متغیر حالت جدید ایجاد می‌گردد. مسئله کنترل ردیابی اجماع توزیع شده تطبیقی مبتنی بر روش کنترل سطح دینامیکی برای دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی به فرم فیدبک خالص در [۲۱، ۲۲] مطالعه شد. هم‌چنین در [۲۳، ۲۴]، مسئله کنترل اجماع توزیع شده بر روی دسته‌ای از سیستم‌های چندعاملی به فرم اکیداً فیدبک با دینامیک غیرخطی و نامعین بررسی شد که در [۲۳] از رؤیت گر مرتبه کاهش یافته و در [۲۴] از مزایای شبکه عصبی برای تقریب دینامیک نامعین عوامل پیرو استفاده شده است. با بررسی دقیق تر می‌توان گفت، مطالعات اخیر بر روی سیستم‌هایی با بهره‌های کنترلی واحد صورت گرفته است و روش‌های پیشنهادی امکان کنترل سیستم‌های اکیداً فیدبک با بهره‌های کنترلی ثابت (غیر ۱) را ندارند.

در این مقاله، یک روش اجماع تطبیقی توزیع شده مبتنی بر روش کنترل سطح دینامیکی و شبکه‌های عصبی با توابع پایه شعاعی برای دسته‌ای از سیستم‌های چندعاملی غیرخطی با دینامیک نامعین و ناهمگون ارائه می‌شود. ارتباط بین عامل‌ها توسط گراف جهت‌دار توصیف شده است. خروجی عامل راهبر تنها در دسترس برخی از عوامل پیرو می‌باشد و هر عامل پیرو نیز تنها به اطلاعات خروجی برخی از عوامل مجاور خود دسترسی دارد. برخلاف روش‌های موجود که بهره‌های کنترلی را واحد فرض می‌کنند، در این مقاله، بهره‌های کنترل مجازی و واقعی عامل راهبر و عوامل پیرو ثابت‌های معین و غیر صفر می‌باشند. در روش پیشنهادی، شبکه‌های عصبی با توابع پایه شعاعی برای تقریب دینامیک نامعین و ناهمگون هر عامل پیرو و اثر عوامل مجاور آن، پیشنهاد می‌گردد. سپس، روش کنترل سطح دینامیکی توزیع شده با بکارگیری تقریب‌های ارائه شده، طراحی می‌گردد. هم‌چنین، قوانین تطبیقی برای بروزرسانی پارامترهای وزن شبکه پیشنهاد می‌شوند. تحلیل پایداری روش پیشنهادی نشان می‌دهد که سیگنال‌های سیستم حلقه بسته نهایتاً به صورت یکنواخت کراندار هستند. به علاوه، روش پیشنهادی معضل انفجار جملات را که متداول‌ترین محدودیت روش کنترل بازگشت به عقب است را نیز برطرف می‌نماید. هم‌چنین، قادر است دینامیک نامعین عامل‌ها و اثر عوامل مجاور آن‌ها را به صورت برخط و بدون نیاز به هیچ نوع دانش اولیه و با آموزش برون‌خط مدل‌سازی نماید. به علاوه، روش پیشنهادی هیچ نوع محدودیتی بر روی گراف توصیف کننده سیستم ندارد و عملکرد آن مستقل از ایجاد هر گونه تغییر در توپولوژی ارتباطات جهت‌دار عامل‌ها می‌باشد.

نشان‌دهنده توابع هموار نامعین و بهره‌های کنترلی سیستم هستند. هم‌چنین، دینامیک عامل راهبر به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{0,1} &= g_{0,1}x_{0,2} \\ \dot{x}_{0,2} &= g_{0,2}x_{0,3} \\ &\vdots \\ \dot{x}_{0,n} &= g_{0,n}u_0 + f_{0,n}(x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) \\ y_0 &= x_{0,1} \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن $x_{0,1}$ ، $x_{0,2}$ و ... و $x_{0,n}$ متغیرهای حالت راهبر، u_0 ورودی کنترل آن، $f_{0,n}(\cdot)$ تابع هموار معین و $g_{0,j}$ به ازای $j = 1, \dots, n$ بهره‌های کنترلی متناظر با آن می‌باشند.

هدف این مقاله، ارائه یک روش تطبیقی مبتنی بر کنترل سطح دینامیکی و شبکه‌های عصبی با توابع پایه شعاعی برای کنترل اجماع توزیع شده دسته‌ای از سیستم‌های چندعاملی می‌باشد به نحوی که: (۱) خروجی عوامل پیرو (y_i) بتوانند مسیر خروجی عامل راهبر (y_0) را دنبال نمایند، (۲) سیگنال‌های سیستم حلقه بسته، نهایتاً به صورت یکنواخت کران‌دار باقی بمانند و (۳) خطای ردیابی را بتوان با انتخاب مناسب پارامترهای طراحی کوچک نمود.

قبل از ارائه روش پیشنهادی فرضیات زیر مطرح می‌شوند:

فرض ۱: خروجی عامل راهبر (y_0) یک تابع هموار نسبت به t می‌باشد و نیز \dot{y}_0 ، \ddot{y}_0 در دسترس بوده و کران‌دار هستند، به عبارت دیگر به ازای هر ثابت مثبت B_0 مجموعه Π وجود دارد به نحوی که $\Pi = \{(y_0, \dot{y}_0, \ddot{y}_0) : y_0^2 + \dot{y}_0^2 + \ddot{y}_0^2 \leq B_0\}$ [۲۵].

فرض ۲: دینامیک عوامل پیرو ناهمگون فرض می‌شود، بنابراین $f_{i,1} \neq f_{i,2} \neq \dots \neq f_{i,j}$ به ازای $i = 1, \dots, N$ و $j = 1, \dots, n$ خواهد بود.

در ادامه، ابتدا تئوری گراف برای توصیف ارتباط عامل‌ها در سیستم چندعاملی توصیف می‌شود.

۲-۲- تئوری گراف

گراف جهت‌دار $G = \{v, E, A\}$ که شامل مجموعه رأس ناتهی $v = \{v_1, \dots, v_N\}$ ، مجموعه یال $E \subseteq \{(v_i, v_j) : v_i, v_j \in v\}$ و ماتریس مجاورت وزن $A = [a_{ij}] \in R^{N \times N}$ با المان‌های غیر منفی است، برای توصیف چگونگی ارتباط بین عامل‌های سیستم چندعاملی بکار رفته است. هر عامل در این گراف با یک رأس مدل می‌شود. در صورتی که i امین عامل توانایی دریافت اطلاعات از j امین عامل را دارا باشد، بین رأس‌های متناظر با این عامل‌ها یال تعریف می‌شود که در آن در این توصیف به ازای $(v_j, v_i) \in E$ آنگاه $a_{ij} > 1$ و در غیر این صورت $a_{ij} = 0$ خواهد بود. ماتریس لاپلاسیان گراف G را می‌توان به صورت $L = [l_{ij}] = D - A \in R^{N \times N}$ تعریف کرد که در آن $d_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ و $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_N) \in R^{N \times N}$ است.

مقایسه روش پیشنهادی در این مقاله با روش ارائه شده در [۲۱] و [۲۴] نشان می‌دهد که: (۱) روش پیشنهادی در این مقاله، اجماع در سیستم‌های چندعاملی غیرخطی به فرم اکیداً فیدبک با بهره‌های کنترلی غیر ۱ را بررسی نموده‌است، در حالی که، روش ارائه شده در [۲۱]، سیستم‌های چندعاملی غیرخطی به فرم فیدبک خالص و در [۲۴]، سیستم‌های چندعاملی غیرخطی با بهره‌های کنترلی واحد را مطالعه نموده‌است. (۲) قوانین کنترل مجازی و واقعی پیشنهادی در این مقاله ساده‌تر از قوانین پیشنهاد شده در [۲۱] و [۲۴] می‌باشد. بنابراین، تحلیل پایداری سیستم به روش پیشنهادی ساده‌تر است و امکان کوچک نمودن خطای ردیابی با انتخاب مناسب پارامترهای طراحی تا حد زیادی فراهم شده‌است. (۳) در روش پیشنهادی، تقریب‌زن تطبیقی تنها برای مدل‌سازی دینامیک نامعین هر عامل و اثر عوامل مجاور آن پیشنهاد می‌شود و این متفاوت از روش ارائه شده در مقالات [۲۱] و [۲۴] می‌باشد. بنابراین، تعداد ورودی‌های تقریب‌زن در روش پیشنهادی، کمتر از تعداد ورودی‌های آن در روش‌های ارائه شده در [۲۱] و [۲۴] می‌باشد که این امر باعث کاهش حجم محاسبات برخط و در نتیجه کوچک‌تر شدن ابعاد تقریب‌زن گردیده است.

مقاله پیش‌رو شامل شش بخش می‌باشد. در بخش دوم به بیان مسئله، توصیف گراف جهت نمایش ارتباط بین عامل‌ها در سیستم‌های چندعاملی و توصیف شبکه‌های عصبی با توابع پایه شعاعی پرداخته شده است. در بخش سوم روند طراحی کنترل‌کننده پیشنهادی ارائه شده و در بخش چهارم پایداری آن مورد بررسی قرار گرفته است. بخش پنجم به ارائه نتایج شبیه‌سازی برای ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی پرداخته است. در انتها در بخش ششم نتیجه‌گیری مقاله آورده شده است.

۲- بیان مسئله و مفاهیم نظری

در این بخش به معرفی سیستم مورد مطالعه و هم‌چنین، مفاهیمی از تئوری گراف و شبکه‌های عصبی با توابع پایه شعاعی پرداخته شده است.

۲-۱- بیان مسئله

یک سیستم چندعاملی غیرخطی ناهمگون نامعین به فرم اکیداً فیدبک که متشکل از یک عامل راهبر و N عامل پیرو می‌باشد را در نظر بگیرید که دینامیک پیروهای آن به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i,1} &= g_{i,1}x_{i,2} + f_{i,1}(x_{i,1}) \\ \dot{x}_{i,2} &= g_{i,2}x_{i,3} + f_{i,2}(x_{i,1}, x_{i,2}) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{i,n} &= g_{i,n}u_i + f_{i,n}(x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n}) \\ y_i &= x_{i,1} \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن $x_{i,1}$ ، $x_{i,2}$ و ... و $x_{i,n}$ متغیرهای حالت پیرو i ام، u_i به ورودی کنترل آن و y_i به خروجی متناظر با آن اشاره می‌کند. هم‌چنین، $f_{i,j}(\cdot) \neq 0$ و $g_{i,j}(\cdot) \neq 0$ به ازای $i = 1, \dots, N$ و $j = 1, \dots, n$ به ترتیب

مستقل از پارامترهای وزن ایده آل و کران نرم آنها می‌باشد و صرفاً به تخمین بردار وزن ایده آل شبکه وابسته است.

۳- طراحی کنترل سطح دینامیکی توزیع شده

پیشنهادی

در این بخش، کنترل کننده سطح دینامیکی توزیع شده پیشنهادی برای سیستم‌های چندعاملی غیرخطی ناهمگون به فرم اکیداً فیدبک در (۱) تحت گراف جهت‌دار G طراحی می‌گردد. روش طراحی شامل n مرحله می‌باشد که از مرحله ۱ تا $n-1$ ، ورودی‌های کنترل مجازی $(\alpha_{i,j+1}, j=1, \dots, n-1)$ طراحی شده و سپس در مرحله n ام، ورودی کنترل توزیع شده u_i طراحی می‌شود. مراحل طراحی کنترل کننده پیشنهادی عبارت است از:

گام ۱: سطح خطای اول برای پیرو i ام به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$s_{i,1} = \sum_{k \in N} a_{ik}(y_i - y_k) + b_i(y_i - y_0) \quad (6)$$

با توجه به تعریف d_i رابطه (۶) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$s_{i,1} = (d_i + b_i)y_i - \sum_{k \in N} a_{ik} y_k - b_i y_0 \quad (7)$$

که در آن N نشان دهنده تعداد کل عوامل مجاور با عامل i ام می‌باشد و ترم $\sum_{k \in N} a_{ik} y_k$ اثر عامل‌های مجاور را بر روی سطح خطای عامل i ام مدل می‌کند.

با مشتق‌گیری از (۷) نسبت به زمان و جایگذاری (۱) در آن، داریم:

$$\dot{s}_{i,1} = (d_i + b_i)(g_{i,1}x_{i,2} + f_{i,1}) - \sum_{k \in N} a_{ik}(g_{k,1}x_{k,2} + f_{k,1}) - b_i \dot{y}_0 \quad (8)$$

ورودی کنترل مجازی برای پایدارسازی دینامیک (۸) به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$\alpha_{i,2}^* = \frac{1}{(d_i + b_i)g_{i,1}} \left(-(d_i + b_i)f_{i,1} + \sum_{k \in N} a_{ik}(g_{k,1}x_{k,2} + f_{k,1}) + b_i \dot{y}_0 \right) - c_{i,1} s_{i,1} \quad (9)$$

که در آن $c_{i,1} > 0$ پارامتر طراحی، $f_{k,1}$ به ازای $k \in N$ نشان دهنده دینامیک نامعین پیروهای مجاور با پیرو i ام می‌باشد. از آنجایی که دینامیک پیرو i ام $(f_{i,1})$ و دینامیک پیروهای مجاور آن $(f_{k,1}, k \in N)$ در (۹) نامعین می‌باشد امکان پیاده‌سازی ورودی کنترل مجازی $\alpha_{i,2}^*$ وجود ندارد.

برای حل این مسئله، ترم $\Gamma_{i,1}(z_{i,1})$ به صورت

$$\Gamma_{i,1}(z_{i,1}) = f_{i,1}(x_{i,1}) - \frac{1}{(d_i + b_i)} \sum_{k \in N} a_{ik} f_{k,1}(x_{k,1})$$

تعریف می‌باشد.

از زیرگراف $\bar{G} = \{\bar{v}, \bar{E}, \bar{A}\}$ که شامل مجموعه رأس‌های $\bar{v} = \{v_0, \dots, v_N\}$ می‌باشد برای نشان دادن ارتباط بین عامل راهبر و N عامل پیرو استفاده می‌شود. هم‌چنین، ماتریس قطری $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_N) \in R^{N \times N}$ به عنوان ماتریس مجاور راهبر به گونه‌ای تعریف می‌شود که بتواند ارتباط بین عامل i ام را با عامل راهبر توصیف کند. به ازای $(v_0, v_i) \in \bar{E}$ ، آنگاه $b_i > 1$ و در غیر این صورت $b_i = 0$ خواهد بود. ماتریس لاپلاس زیر گراف \bar{G} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times N} \\ -b_{N \times 1} & L_{N \times N} \end{bmatrix} \quad (3)$$

یک مسیر جهت‌دار در گراف G ، مسیری است که در آن از رأس i به رأس j رشته‌ای از رأس‌ها وجود داشته باشد که در آن با رأس i شروع و در رأس j پایان یابد، به گونه‌ای که رأس‌های متوالی میانی به صورت $(i, p), (p, q), \dots, (r, j)$ مجاور باشند. یک گراف جهت‌دار قویاً همبندگرافی است که برای هر زوج مرتب از رأس‌های متفاوت به صورت (i, j) ، مسیر جهت‌داری از رأس i به رأس j وجود داشته باشد [۲۶].

۳-۲- شبکه‌های عصبی با توابع پایه شعاعی

شبکه‌های عصبی با توابع پایه شعاعی به دلیل دارا بودن خاصیت تقریب‌زنی سراسری، برای مدل‌سازی توابع غیرخطی نامعین مورد توجه قرار گرفته‌اند. اگر $\Gamma(z)$ تابع هموار پیوسته‌ای در مجموعه $\Omega \subset R$ تعریف شده باشد، آنگاه به ازای هر ثابت مثبت $\varepsilon > 0$ شبکه عصبی به فرم $w^* \zeta^T(z)$ به گونه‌ای وجود دارد که [۲۷]:

$$\sup_{z \in \Omega} |\Gamma(z) - w^* \zeta^T(z)| \leq \varepsilon \quad (4)$$

که در آن $w^* = [w_1, \dots, w_N]^T \in R^N$ نشان دهنده بردار وزن ثابت ایده آل در لایه خروجی شبکه و $\zeta(z) = [\zeta_1(z), \dots, \zeta_N(z)]^T \in R^N$ معین با تعداد گره $N > 1$ می‌باشد. تابع پایه $\zeta_i(z)$ به صورت تابع گوسی به فرم زیر انتخاب می‌شود:

$$\zeta_i(z) = \exp \left[-\frac{(z - \mu_i)^T (z - \mu_i)}{\eta_i^2} \right], i = 1, \dots, N \quad (5)$$

که در آن $\mu_i = [\mu_{i1}, \dots, \mu_{in}]^T$ و $\eta_i > 0$ به ترتیب نشان دهنده بردار مرکز و پهنای تابع گوسی می‌باشند.

فرض ۳: بردار پارامترهای وزن ایده آل شبکه دارای نرم کران‌دار می‌باشند، به عبارت دیگر، $\|w_i\| \leq \bar{w}_i$ که در آن \bar{w} یک ثابت مثبت می‌باشد.

تکته ۱: بردار وزن ایده آل شبکه و نرم آن، تنها برای تحلیل پایداری کنترل کننده پیشنهادی به کار می‌روند و طراحی کنترل کننده

می‌شود که در آن $z_{i,1} = [x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,j}]^T$ می‌باشد. در ادامه، شبکه عصبی با توابع مجاور با پیرو α به ازای $j=1$ مدل $\Gamma_{i,1}(z_{i,1})$ را می‌توان طبق رابطه (۱۰) در (۹) جایگزین نمود که ورودی کنترل مجازی زیر را نتیجه بکار می‌رود.

می‌شود که در آن $z_{i,1} = [x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,j}]^T$ می‌باشد که $k \in N$ پیرو مجاور با پیرو α است. در ادامه، شبکه عصبی با توابع پایه شعاعی به فرم $w_{i,j}^{*T} \zeta_{i,j}(z_{i,j})$ برای تقریب تابع نامعین $\Gamma_{i,j}(z_{i,j})$ به صورت زیر بکار می‌رود.

$$\alpha_{i,j+1} = \frac{1}{g_{i,j}} \left(-\hat{w}_{i,j}^T \zeta_{i,j}(z_{i,j}) + \dot{\bar{\alpha}}_{i,j} \right) - c_{i,j} s_{i,j} \quad (17)$$

$$\Gamma_{i,j}(z_{i,j}) = w_{i,j}^{*T} \zeta_{i,j}(z_{i,j}) + \delta_{i,j}^*(z_{i,j}), \quad (10)$$

$$\left| \delta_{i,j}^*(z_{i,j}) \right| \leq \bar{\delta}_{i,j}$$

که در آن $\hat{w}_{i,j}$ به تخمین $w_{i,j}^*$ اشاره می‌کند و طبق رابطه زیر به روزرسانی می‌شود:

بنابراین، در گام ۱ به ازای $j=1$ مدل $\Gamma_{i,1}(z_{i,1})$ را می‌توان طبق رابطه (۱۰) در (۹) جایگزین نمود که ورودی کنترل مجازی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\dot{\hat{w}}_{i,j} = \gamma_{i,j} (s_{i,j} \zeta_{i,j}(z_{i,j}) - \sigma_{i,j} \hat{w}_{i,j}) \quad (18)$$

$$\alpha_{i,2} = \frac{1}{(d_i + b_i) g_{i,1}} \left(-(d_i + b_i) \hat{w}_{i,1}^T \zeta_{i,1}(z_{i,1}) + \sum_{k \in N} a_{ik} g_{k,1} x_{k,2} + b_i \dot{y}_0 \right) - c_{i,1} s_{i,1} \quad (11)$$

که در آن $\gamma_{i,j} > 0$ نرخ یادگیری و $\sigma_{i,j} > 0$ پارامتر طراحی می‌باشد. مشابه گام ۱، برای جلوگیری از ایجاد معضل پیچیدگی جملات، ورودی کنترل مجازی $\alpha_{i,j+1}$ از فیلتر پایین گذر مرتبه اول با ثابت زمانی $\tau_{i,j+1}$ ، عبور نموده و متغیر حالت جدید $\bar{\alpha}_{i,j+1}$ را به صورت زیر نتیجه می‌دهد:

که در آن $\hat{w}_{i,1}$ به تخمین $w_{i,1}^*$ اشاره می‌کند و طبق رابطه زیر به روزرسانی می‌شود:

$$\tau_{i,j+1} \dot{\bar{\alpha}}_{i,j+1} + \bar{\alpha}_{i,j+1} = \alpha_{i,j+1}, \quad \bar{\alpha}_{i,j+1}(0) = \alpha_{i,j+1}(0) \quad (19)$$

$$\dot{\hat{w}}_{i,1} = \gamma_{i,1} (s_{i,1} \zeta_{i,1}(z_{i,1}) - \sigma_{i,1} \hat{w}_{i,1}) \quad (12)$$

گام n ام: در این مرحله، ورودی کنترل واقعی u_i طراحی می‌شود. سطح خطای n ام را به فرم در زیر در نظر بگیرد:

که در آن $\gamma_{i,1} > 0$ نرخ یادگیری و $\sigma_{i,1} > 0$ پارامتر طراحی می‌باشد. برای جلوگیری از ایجاد معضل پیچیدگی جملات که یکی از متداول‌ترین مشکلات روش بازگشت به عقب می‌باشد [۲۵]، ورودی کنترل مجازی $\alpha_{i,2}$ از فیلتر پایین گذر مرتبه اول با ثابت زمانی $\tau_{i,2}$ ، عبور نموده و متغیر حالت جدید $\bar{\alpha}_{i,2}$ را به صورت زیر نتیجه می‌دهد:

$$s_{i,n} = x_{i,n} - \bar{\alpha}_{i,n} \quad (20)$$

با مشتق‌گیری از (۲۰) و جایگذاری (۱) در آن، داریم:

$$\tau_{i,2} \dot{\bar{\alpha}}_{i,2} + \bar{\alpha}_{i,2} = \alpha_{i,2}, \quad \bar{\alpha}_{i,2}(0) = \alpha_{i,2}(0) \quad (13)$$

$$\dot{s}_{i,n} = g_{i,n} u_i + f_{i,n} - \dot{\bar{\alpha}}_{i,n} \quad (21)$$

ورودی کنترل واقعی به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

گام j ام (j=2, ..., n-1): در این مرحله، سطح خطای j ام به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u_i^* = \frac{1}{g_{i,n}} \left(-f_{i,n} + \dot{\bar{\alpha}}_{i,n} \right) - c_{i,n} s_{i,n} \quad (22)$$

مشابه حالت قبل، از آنجایی که دینامیک پیرو n ام $(f_{i,n})$ ، در (۲۲) نامعین می‌باشد امکان پیاده‌سازی u_i^* وجود ندارد. حال، ترم $\Gamma_{i,n}(z_{i,n})$ به صورت $\Gamma_{i,n}(z_{i,n}) = f_{i,n}(x_{i,n})$ در آن $z_{i,n} = [x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n}]^T$ می‌باشد. در ادامه، شبکه عصبی با توابع پایه شعاعی برای تقریب ترم تابع نامعین $\Gamma_{i,n}(z_{i,n})$ بکار می‌رود؛ بنابراین، سیگنال کنترل کننده واقعی توزیع شده به صورت زیر پیشنهاد می‌گردد:

$$s_{i,j} = x_{i,j} - \bar{\alpha}_{i,j} \quad (14)$$

با مشتق‌گیری از (۱۴) نسبت به زمان و جایگذاری (۱) در آن، داریم:

$$\dot{s}_{i,j} = g_{i,j} x_{i,j+1} + f_{i,j} - \dot{\bar{\alpha}}_{i,j} \quad (15)$$

ورودی کنترل مجازی برای پایدارسازی دینامیک (۱۵)، به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$u_i = \frac{1}{g_{i,n}} \left(-\hat{w}_{i,n}^T \zeta_{i,n}(z_{i,n}) + \dot{\bar{\alpha}}_{i,n} \right) - c_{i,n} s_{i,n} \quad (23)$$

$$\alpha_{i,j+1}^* = \frac{1}{g_{i,j}} \left(-f_{i,j} + \dot{\bar{\alpha}}_{i,j} \right) - c_{i,j} s_{i,j} \quad (16)$$

که در آن $c_{i,n} > 0$ پارامتر طراحی می‌باشد. از آنجایی که دینامیک پیرو i ام $(f_{i,j})$ ، در (۱۶) نامعین می‌باشد امکان پیاده‌سازی ورودی کنترل مجازی $\alpha_{i,j+1}^*$ وجود ندارد. حال، ترم $\Gamma_{i,j}(z_{i,j})$ به صورت $\Gamma_{i,j}(z_{i,j}) = f_{i,j}(x_{i,j})$ تعریف می‌شود که در آن

که در آن $c_{i,j} > 0$ پارامتر طراحی می‌باشد. از آنجایی که دینامیک پیرو i ام $(f_{i,j})$ ، در (۱۶) نامعین می‌باشد امکان پیاده‌سازی ورودی کنترل مجازی $\alpha_{i,j+1}^*$ وجود ندارد. حال، ترم $\Gamma_{i,j}(z_{i,j})$ به صورت $\Gamma_{i,j}(z_{i,j}) = f_{i,j}(x_{i,j})$ تعریف می‌شود که در آن

با تعریف تابع پیوسته $B_{i,j+1}$ به صورت

$$B_{i,j+1}(s_{i,1}, \dots, s_{i,j+1}, \tilde{\alpha}_{i,2}, \dots, \tilde{\alpha}_{i,j}, \hat{w}_{i,1}, \dots, \hat{w}_{i,j}, y_0, \dot{y}_0, \ddot{y}_0) = -\frac{1}{g_{i,j}} \left(-\hat{w}_{i,j}^T \zeta_{i,j} - \hat{w}_{i,j}^T \frac{\partial \zeta_{i,j}}{\partial [x_{i,1}, \dots, x_{i,j}]} \begin{bmatrix} \dot{x}_{i,1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{i,j} \end{bmatrix} + \ddot{\alpha}_{i,j} \right) + c_{i,j} \dot{s}_{i,j}$$

می‌توان (۲۸) را به صورت ساده شده زیر بازنویسی کرد.

$$\ddot{\alpha}_{i,j+1} = -\frac{\tilde{\alpha}_{i,j+1}}{\tau_{i,j+1}} \quad (۲۹)$$

$$+ B_{i,j+1}(s_{i,1}, \dots, s_{i,j+1}, \tilde{\alpha}_{i,2}, \dots, \tilde{\alpha}_{i,j}, \hat{w}_{i,1}, \dots, \hat{w}_{i,j}, y_0, \dot{y}_0, \ddot{y}_0)$$

که در آن $B_{i,j+1}$ تابع پیوسته و کران دار می‌باشد، به عبارت دیگر $|B_{i,j+1}| \leq \bar{B}_{i,j+1}$. [۲۵]

حال با توجه به روابط $s_{i,j+1} = x_{i,j+1} - \bar{\alpha}_{i,j+1}$ و $j = 1, \dots, n-1$ و $i = 1, \dots, N$ به ازای $\tilde{\alpha}_{i,j+1} = \bar{\alpha}_{i,j+1} - \alpha_{i,j+1}$ می‌توان $x_{i,j+1}$ را به صورت زیر بیان نمود:

$$x_{i,j+1} = s_{i,j+1} + \tilde{\alpha}_{i,j+1} + \alpha_{i,j+1} \quad (۳۰)$$

حال با جایگذاری (۳۰) در روابط (۸)، (۱۵) و (۲۱) و در نظر گرفتن (۱۰) داریم:

$$\dot{s}_{i,1} = (d_i + b_i)g_{i,1}(s_{i,2} + \tilde{\alpha}_{i,2} - c_{i,1}s_{i,1}) + (d_i + b_i)(-\tilde{w}_{i,1}^T \zeta_{i,1}(z_{i,1}) + \delta_{i,1}^*)$$

$$\dot{s}_{i,j} = g_{i,j}(s_{i,j+1} + \tilde{\alpha}_{i,j+1} - c_{i,j}s_{i,j}) - \tilde{w}_{i,j}^T \zeta_{i,j}(z_{i,j}) + \delta_{i,j}^*, \quad j = 2, \dots, n-1 \quad (۳۱)$$

$$\dot{s}_{i,n} = -g_{i,n}c_{i,n}s_{i,n} - \tilde{w}_{i,n}^T \zeta_{i,n}(z_{i,n}) + \delta_{i,n}^*$$

که در آن $\tilde{w}_{i,j} = \hat{w}_{i,j} - w_{i,j}^*$ به ازای $i = 1, \dots, N$ و $j = 1, \dots, n-1$ می‌باشد.

قضیه ۱: با توجه به فرض ۱، به ازای هر شرایط اولیه‌ای که $V_T(0) \leq p$ باشد که در آن p یک ثابت مثبت است، قانون کنترل (۲۳)، قوانین کنترل مجازی (۱۱) و (۱۷) و قوانین تطبیقی (۱۲)، (۱۸) و (۲۴) تضمین می‌نمایند که تمامی سیگنال‌های سیستم حلقه بسته نهایتاً به صورت یکنواخت کران دار هستند. به علاوه، با انتخاب مناسب پارامترهای طراحی می‌توان خطای ردیابی را کوچک نمود.

اثبات: تابع لیپانوف کاندید را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$V_T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{(d_i + b_i)} s_{i,1}^2 + \sum_{j=2}^n s_{i,j}^2 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\gamma_{i,j}} \tilde{w}_{i,j}^T \tilde{w}_{i,j} + \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{\alpha}_{i,j+1}^2 \right) \quad (۳۲)$$

مشق تابع لیپانوف نسبت به زمان عبارت است از:

$$\dot{\hat{w}}_{i,n} = \gamma_{i,n} (s_{i,n} \zeta_{i,n}(z_{i,n}) - \sigma_{i,n} \hat{w}_{i,n}) \quad (۲۴)$$

در رابطه فوق، $\gamma_{i,n} > 0$ نرخ یادگیری و $\sigma_{i,n} > 0$ پارامتر طراحی می‌باشد.

۴- تحلیل پایداری

در این بخش به تحلیل پایداری سیستم چندعاملی (۱) در حضور کنترل کننده پیشنهادی پرداخته می‌شود. برای این منظور، ابتدا خطای لایه مرزی $\tilde{\alpha}_{i,j+1}$ به ازای $j = 1, \dots, n-1$ و $i = 1, \dots, N$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{\alpha}_{i,j+1} = \bar{\alpha}_{i,j+1} - \alpha_{i,j+1} \quad (۲۵)$$

با مشتق گیری از (۲۵) نسبت به زمان به ازای $i = 1, \dots, N$ و $j = 1$ در نظر گرفتن (۱۳) و جایگذاری (۱۱) در آن، رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$\ddot{\alpha}_{i,2} = -\frac{\tilde{\alpha}_{i,2}}{\tau_{i,2}} + c_{i,1} \dot{s}_{i,1} - \frac{1}{(d_i + b_i)g_{i,1}} \left(-(d_i + b_i) \hat{w}_{i,1}^T \zeta_{i,1} + \hat{w}_{i,1}^T \frac{\partial \zeta_{i,1}}{\partial x_{i,1}} \dot{x}_{i,1} + \sum_{k \in N} \hat{w}_{i,1}^T \frac{\partial \zeta_{i,1}}{\partial x_{k,1}} \dot{x}_{k,1} \right) + b_i \ddot{y}_0 \quad (۲۶)$$

با تعریف تابع پیوسته $B_{i,2}$ به صورت

$$B_{i,2}(s_{i,1}, s_{i,2}, \hat{w}_{i,1}, y_0, \dot{y}_0, \ddot{y}_0) = c_{i,1} \dot{s}_{i,1} - \frac{1}{(d_i + b_i)g_{i,1}} \left(-(d_i + b_i) \hat{w}_{i,1}^T \zeta_{i,1} + \hat{w}_{i,1}^T \frac{\partial \zeta_{i,1}}{\partial x_{i,1}} \dot{x}_{i,1} + \sum_{k \in N} \hat{w}_{i,1}^T \frac{\partial \zeta_{i,1}}{\partial x_{k,1}} \dot{x}_{k,1} \right) + b_i \ddot{y}_0$$

می‌توان (۲۶) را به صورت ساده شده زیر بازنویسی کرد.

$$\ddot{\alpha}_{i,2} = -\frac{\tilde{\alpha}_{i,2}}{\tau_{i,2}} + B_{i,2}(s_{i,1}, s_{i,2}, \hat{w}_{i,1}, y_0, \dot{y}_0, \ddot{y}_0) \quad (۲۷)$$

در آن $B_{i,2}$ تابع پیوسته و کران دار می‌باشد، به عبارت دیگر $|B_{i,2}| \leq \bar{B}_{i,2}$. [۲۵]

مجدداً، با مشتق گیری از (۲۵) نسبت به زمان به ازای $i = 1, \dots, N$ و $j = 2, \dots, n-1$ و در نظر گرفتن (۱۹) و نیز جایگذاری (۱۷) در آن خواهیم داشت:

$$\ddot{\alpha}_{i,j+1} = -\frac{\tilde{\alpha}_{i,j+1}}{\tau_{i,j+1}} + c_{i,j} \dot{s}_{i,j} - \frac{1}{g_{i,j}} \left(-\hat{w}_{i,j}^T \zeta_{i,j} - \hat{w}_{i,j}^T \frac{\partial \zeta_{i,j}}{\partial [x_{i,1}, \dots, x_{i,j}]} \begin{bmatrix} \dot{x}_{i,1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{i,j} \end{bmatrix} + \ddot{\alpha}_{i,j} \right) \quad (۲۸)$$

$$\begin{aligned}
 s_{i,j} s_{i,j+1} &\leq \frac{1}{2} s_{i,j}^2 + \frac{1}{2} s_{i,j+1}^2 \\
 s_{i,j} \tilde{\alpha}_{i,j+1} &\leq \frac{1}{2} s_{i,j}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\alpha}_{i,j+1}^2 \\
 s_{i,j} \delta_{i,j}^* &\leq \frac{1}{2} s_{i,j}^2 + \frac{1}{2} \delta_{i,j}^{*2} \\
 \tilde{\alpha}_{i,j+1} B_{i,j+1} &\leq \frac{1}{2} \tilde{\alpha}_{i,j+1}^2 + \frac{1}{2} B_{i,j+1}^2
 \end{aligned} \tag{۳۷}$$

و نیز با در نظر گرفتن نامساوی $\|\tilde{w}_{i,j}\|^2 - \|w_{i,j}^*\|^2 \leq 2\tilde{w}_{i,j}^T \hat{w}_{i,j}$ اعمال آن به رابطه (۳۶)، داریم:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_T &\leq \sum_{i=1}^N \left(-\left(-\frac{1}{2} - g_{i,1} + g_{i,1} c_{i,1} \right) s_{i,1}^2 \right. \\
 &\quad - \sum_{j=2}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - \frac{g_{i,j-1}}{2} - g_{i,j} + g_{i,j} c_{i,j} \right) s_{i,j}^2 \\
 &\quad - \left(-\frac{1}{2} - \frac{g_{i,n-1}}{2} + g_{i,n} c_{i,n} \right) s_{i,n}^2 \\
 &\quad - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\sigma_{i,j}}{2} \tilde{w}_{i,j}^T \tilde{w}_{i,j} \right) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} \delta_{i,j}^{*2} + \frac{\sigma_{i,j}}{2} w_{i,j}^{*T} w_{i,j}^* \right) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \bar{B}_{i,j+1}^2 \right) \\
 &\quad \left. - \sum_{j=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - \frac{g_{i,j}}{2} + \frac{1}{\tau_{i,j+1}} \right) \tilde{\alpha}_{i,j+1}^2 \right) \\
 &\leq -\alpha_0 V_T + \Delta^*
 \end{aligned} \tag{۳۸}$$

که در آن α_0 و Δ^* به ازای $i=1, \dots, N$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\alpha_0 = \min \begin{cases} (d_i + b_i)(-1 + g_{i,1}(-2 + 2c_{i,1})) \\ -1 - g_{i,j-1} + g_{i,j}(-2 + 2c_{i,j}) & , j = 2, \dots, n-1 \\ -1 - g_{i,n-1} + 2g_{i,n} c_{i,n} \\ -1 - g_{i,j} + \frac{2}{\tau_{i,j+1}} & , j = 1, \dots, n-1 \\ \sigma_{i,j} \gamma_{i,j} & , j = 1, \dots, n-1 \end{cases} \tag{۳۹}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta^* &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} \delta_{i,j}^{*2} + \frac{\sigma_{i,j}}{2} w_{i,j}^{*T} w_{i,j}^* \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \bar{B}_{i,j+1}^2 \right) \right)
 \end{aligned} \tag{۴۰}$$

برای تضمین پایداری سیستم حلقه بسته، پارامترهای طراحی کنترل کننده به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که نامساوی‌های زیر برقرار باشند:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_T &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{(d_i + b_i)} s_{i,1} \dot{s}_{i,1} + \sum_{j=2}^n s_{i,j} \dot{s}_{i,j} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\gamma_{i,j}} \tilde{w}_{i,j}^T \dot{\hat{w}}_{i,j} + \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{\alpha}_{i,j+1} \dot{\tilde{\alpha}}_{i,j+1} \right)
 \end{aligned} \tag{۳۳}$$

اعمال روابط (۲۷)، (۲۹) و (۳۱) در (۳۳)، رابطه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_T &= \sum_{i=1}^N \left((g_{i,1} s_{i,1} s_{i,2} + g_{i,1} s_{i,1} \tilde{\alpha}_{i,2} - g_{i,1} c_{i,1} s_{i,1}^2 \right. \\
 &\quad - \tilde{w}_{i,1}^T s_{i,1} \zeta_{i,1} + s_{i,1} \delta_{i,1}^*) \\
 &\quad + \sum_{j=2}^{n-1} (g_{i,j} s_{i,j} s_{i,j+1} + g_{i,j} s_{i,j} \tilde{\alpha}_{i,j+1} \\
 &\quad - g_{i,j} c_{i,j} s_{i,j}^2 - \tilde{w}_{i,j}^T s_{i,j} \zeta_{i,j} + s_{i,j} \delta_{i,j}^*) \\
 &\quad + (-g_{i,n} c_{i,n} s_{i,n}^2 - \tilde{w}_{i,n}^T s_{i,n} \zeta_{i,n} + s_{i,n} \delta_{i,n}^*) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\gamma_{i,j}} \tilde{w}_{i,j}^T \dot{\hat{w}}_{i,j} \right) \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^{n-1} \left(-\frac{\tilde{\alpha}_{i,j+1}^2}{\tau_{i,j+1}} + \alpha_{i,j+1} B_{i,j+1} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{۳۴}$$

رابطه (۳۴) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_T &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^{n-1} (g_{i,j} s_{i,j} s_{i,j+1} + g_{i,j} s_{i,j} \tilde{\alpha}_{i,j+1} \right. \\
 &\quad - g_{i,j} c_{i,j} s_{i,j}^2 + s_{i,j} \delta_{i,j}^*) \\
 &\quad + (-g_{i,n} c_{i,n} s_{i,n}^2 + s_{i,n} \delta_{i,n}^*) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\gamma_{i,j}} \tilde{w}_{i,j}^T \dot{\hat{w}}_{i,j} - \tilde{w}_{i,j}^T s_{i,j} \zeta_{i,j} \right) \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^{n-1} \left(-\frac{\tilde{\alpha}_{i,j+1}^2}{\tau_{i,j+1}} + \alpha_{i,j+1} B_{i,j+1} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{۳۵}$$

با در نظر گرفتن قانون تطبیق $\dot{\hat{w}}_{i,j} = \gamma_{i,j} (s_{i,j} \zeta_{i,j} - \sigma_{i,j} \hat{w}_{i,j})$ و جایگذاری آن در (۳۵)، داریم:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_T &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^{n-1} (g_{i,j} s_{i,j} s_{i,j+1} + g_{i,j} s_{i,j} \tilde{\alpha}_{i,j+1} \right. \\
 &\quad - g_{i,j} c_{i,j} s_{i,j}^2 + s_{i,j} \delta_{i,j}^*) \\
 &\quad + (-g_{i,n} c_{i,n} s_{i,n}^2 + s_{i,n} \delta_{i,n}^*) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^n (-\tilde{w}_{i,j}^T \sigma_{i,j} \hat{w}_{i,j}) \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^{n-1} \left(-\frac{\tilde{\alpha}_{i,j+1}^2}{\tau_{i,j+1}} + \alpha_{i,j+1} B_{i,j+1} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{۳۶}$$

با در نظر گرفتن نامساوی‌های زیر

$$\begin{aligned} \dot{q}_{i,1} &= q_{i,2} \\ \dot{q}_{i,2} &= J_i^{-1}(u_i + B_i q_{i,2} - M_i g l_i \sin(q_{i,1})) \quad (44) \\ y_i &= q_{i,1} \end{aligned}$$

که در آن به ازای $i=1, \dots, 4$ ، $q_{i,1}$ موقعیت زاویه‌ای و $q_{i,2}$ سرعت زاویه‌ای محور و u_i سیگنال کنترلی متناظر با آن می‌باشد. J_i اینرسی چرخشی کل محور و موتور، B_i ضریب میرایی و M_i جرم کل محور می‌باشد. هم‌چنین، l_i نشان‌دهنده فاصله بین محل اتصال به محور و مرکز جرم محور و g شتاب گرانشی است.

با تعریف $x_{i,1} = q_{i,1}$ و $x_{i,2} = q_{i,2}$ به ازای $i=1, \dots, 4$ ، (۴۴) را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i,1} &= x_{i,2} \\ \dot{x}_{i,2} &= J_i^{-1}(u_i + B_i x_{i,2} - M_i g l_i \sin(x_{i,1})) \quad (45) \\ y_i &= x_{i,1} \end{aligned}$$

هم‌چنین، دینامیک عامل را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$M_0 \ddot{q}_0 + d_0 \dot{q}_0 + k_0 q_0 = u_0 \quad (46)$$

که در آن q_0 موقعیت زاویه‌ای و \dot{q}_0 سرعت زاویه‌ای و u_0 سیگنال کنترلی متناظر با آن می‌باشد. با تعریف $x_{0,1} = q_0$ و $x_{0,2} = \dot{q}_0$ ، (۴۶) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{0,1} &= x_{0,2} \\ \dot{x}_{0,2} &= M_0^{-1}(u_0 - d_0 x_{0,2} - k_0 x_{0,1}) \quad (47) \\ y_0 &= x_{0,1} \end{aligned}$$

هدف از کنترل اجماع توزیع شده، هدایت عامل‌های پیرو برای ردیابی مسیر خروجی عامل راهبر می‌باشد تا سیستم سنکرونی با حرکت سینوسی برای موقعیت زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای به صورت $x_{0,1} = \sin(2t)$ و $x_{0,2} = 2\cos(2t)$ ایجاد گردد. سیگنال کنترلی u_0 برای عامل راهبر، جهت ایجاد موقعیت زاویه‌ای مطلوب $y_0 = \sin(2t)$ را می‌توان به صورت زیر اعمال نمود [۱۰]:

$$u_0 = (k_0 - 4M_0)\sin(2t) + 2d_0 \cos(2t) \quad (48)$$

برای طراحی کنترل‌کننده ارتباط بین عامل‌ها به صورت شکل (۲-الف) در نظر گرفته شده که گراف متناظر با آن در شکل (۲-ب) نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل (۲-ب) دیده می‌شود، عامل راهبر با شماره صفر و عوامل پیرو با شماره‌های ۱ تا ۴ مشخص شده‌اند. خروجی عامل راهبر نمی‌تواند برای همه عوامل پیرو شناخته شده باشد بلکه تنها عامل‌های پیرو ۱ و ۳ به خروجی عامل راهبر دسترسی دارند. عوامل پیرو ۲ و ۴ نیز تنها توانایی دارای ارتباطی دوطرفه می‌باشند به این مفهوم که هر دو به اطلاعات خروجی یکدیگر دسترسی دارند. عامل‌های پیرو ۲ و ۴ نیز تنها توانایی دریافت اطلاعات خروجی عامل پیرو ۱ را دارا می‌باشند اما به خروجی

$$\begin{aligned} (-1 + g_{i,1}(-2 + 2c_{i,1})) &> 0 \\ (-1 - g_{i,j-1} + g_{i,j}(-2 + 2c_{i,j})) &> 0, \quad j=1, \dots, n-1 \\ (-1 - g_{i,n-1} + 2g_{i,n}c_{i,n}) &> 0 \\ \left(-1 - g_{i,j} + \frac{2}{\tau_{i,j+1}}\right) &> 0, \quad j=1, \dots, n-1 \\ (\sigma_{i,j}\gamma_{i,j}) &> 0, \quad j=1, \dots, n \end{aligned} \quad (41)$$

با حل نامساوی (۳۸)، داریم:

$$0 < V_T(t) \leq \left(V_T(0) - \frac{\Delta^*}{\alpha_0}\right) e^{-\alpha_0 t} + \left(\frac{\Delta^*}{\alpha_0}\right), \quad \forall t \geq 0 \quad (42)$$

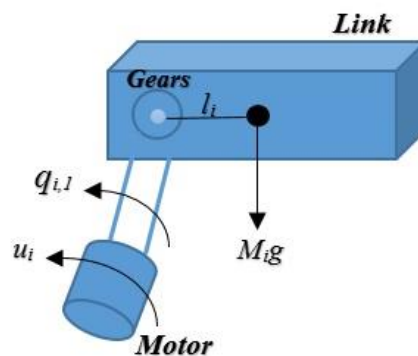
که نشان می‌دهد $V_T(t)$ کران دار است و در نتیجه تمامی سیگنال‌های سیستم حلقه بسته شامل $s_{i,j}(t)$ ، $\tilde{w}_{i,j}$ و $\tilde{\alpha}_{i,j}$ به ازای $i=1, \dots, N$ نهایتاً به صورت یکنواخت کران‌دار هستند. به علاوه، با توجه به نامساوی $\frac{1}{2(d_i + b_i)} s_{i,1}^2 \leq V_T$ ، کران زیر بر روی خطای ردیابی بدست می‌آید:

$$|s_{i,1}(t)| \leq \sqrt{2(d_i + b_i)(V_T(0) - v)} e^{-\alpha_0 t} + v \quad (43)$$

که در آن $v = \Delta^*/\alpha_0$ می‌باشد. حال با انتخاب مناسب پارامترهای طراحی شامل $c_{i,j}$ ، $\gamma_{i,j}$ و $\tau_{i,k+1}$ به ازای $j=1, \dots, n$ ، $i=1, \dots, N$ و $k=2, \dots, n-1$ می‌توان کران خطای ردیابی را کوچک نمود. ■

۵- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، به منظور نشان دادن عملکرد کنترل‌کننده پیشنهادی، گروهی از ربات‌های تک‌محوری به‌عنوان یک سیستم چندعاملی متشکل از چهار عامل پیرو و یک عامل راهبر در نظر گرفته شده است. همان‌طور که شماتیک ربات در شکل (۱) نشان داده شده هر ربات شامل محوری می‌باشد که توسط چرخ‌دنده به موتور DC متصل شده است. دینامیک عوامل پیرو آن با معادله دینامیکی لاگرانژ مرتبه دوم به صورت زیر مدل‌سازی شده‌اند [۱۰]:



شکل ۱: ربات تک‌محوری

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \dot{y}_0 - c_{1,1}s_{1,1} \\ \alpha_{2,2} &= \frac{1}{2}(x_{1,2} + x_{3,2}) - c_{2,1}s_{2,1} \\ \alpha_{3,2} &= \frac{1}{2}(x_{2,2} + \dot{y}_0) - c_{3,1}s_{3,1} \\ \alpha_{4,2} &= x_{1,2} - c_{4,1}s_{4,1} \end{aligned} \quad (50)$$

با عبور از فیلتر مرتبه اول با ثابت زمانی $\tau_{i,2}$ ، متغیر حالت جدید $\bar{\alpha}_{i,2}$ را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \tau_{1,2}\dot{\bar{\alpha}}_{1,2} + \bar{\alpha}_{1,2} &= \alpha_{1,2} \\ \tau_{2,2}\dot{\bar{\alpha}}_{2,2} + \bar{\alpha}_{2,2} &= \alpha_{2,2} \\ \tau_{3,2}\dot{\bar{\alpha}}_{3,2} + \bar{\alpha}_{3,2} &= \alpha_{3,2} \\ \tau_{4,2}\dot{\bar{\alpha}}_{4,2} + \bar{\alpha}_{4,2} &= \alpha_{4,2} \end{aligned} \quad (51)$$

گام ۲: با در نظر گرفتن سطح خطای (۱۴)، $s_{i,2}$ به ازای $i=1, \dots, 4$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= x_{1,2} - \bar{\alpha}_{1,2} \\ s_{2,2} &= x_{2,2} - \bar{\alpha}_{2,2} \\ s_{3,2} &= x_{3,2} - \bar{\alpha}_{3,2} \\ s_{4,1} &= x_{4,2} - \bar{\alpha}_{4,2} \end{aligned} \quad (52)$$

نهایتاً، سیگنال کنترل برای هر عامل به صورت زیر طراحی می‌شود:

$$\begin{aligned} u_1 &= J_1(-\hat{w}_{1,2}^T \zeta_{1,2}(z_{1,2}) + \dot{\bar{\alpha}}_{1,2}) - c_{1,2}s_{1,2} \\ u_2 &= J_2(-\hat{w}_{2,2}^T \zeta_{2,2}(z_{2,2}) + \dot{\bar{\alpha}}_{2,2}) - c_{2,2}s_{2,2} \\ u_3 &= J_3(-\hat{w}_{3,2}^T \zeta_{3,2}(z_{3,2}) + \dot{\bar{\alpha}}_{3,2}) - c_{3,2}s_{3,2} \\ u_4 &= J_4(-\hat{w}_{4,2}^T \zeta_{4,2}(z_{4,2}) + \dot{\bar{\alpha}}_{4,2}) - c_{4,2}s_{4,2} \end{aligned} \quad (53)$$

که در آن $\hat{w}_{i,2}$ طبق رابطه (۱۸) به روزرسانی می‌شود.

برای شبیه‌سازی روش پیشنهادی شرایط اولیه عامل راهبر و عوامل پیرو به ترتیب $x_{0,1} = \pi/2$ ، $x_{0,2} = 1$

$[x_{1,1}(0), x_{2,1}(0), x_{3,1}(0), x_{4,1}(0)] = [1.05\pi, 0.82\pi, 0.62\pi, 1.01\pi]$ و $[x_{1,2}(0), x_{2,2}(0), x_{3,2}(0), x_{4,2}(0)] = [0, 0, 0, 0.15]$ انتخاب شده‌اند. پارامترهای متناظر با عامل راهبر به ترتیب $M_0 = 1$ ، $d_0 = 2$ و عوامل پیرو نیز در جدول (۱) آورده شده‌اند [۱۰]. در روابط (۴۴) و (۴۶)، g شتاب گرانشی را نمایش می‌دهد و برابر با $9.81m/s^2$ انتخاب شده است.

جدول ۱: مقادیر متناظر با عوامل پیرو

عامل i	J_i	B_i	l_i	M_i
1	10	30	1	1
2	9	15	0.8	0.6
3	6	20	1.2	0.5
4	5	10	0.5	0.4

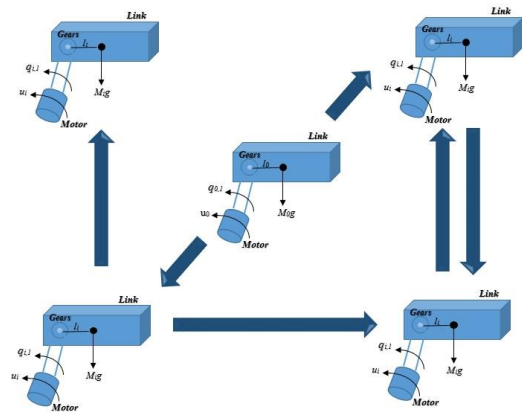
همدیگر دسترسی ندارند. با توجه به گراف شکل ۲، درایه‌های ماتریس مجاور وزن A به صورت $a_{21} = 1$ ، $a_{23} = 1$ ، $a_{32} = 1$ و $a_{41} = 1$ و هم‌چنین، درایه‌های ماتریس قطری مجاور راهبر به صورت $b_1 = 1$ و $b_3 = 1$ می‌باشند.

مطابق با روش طراحی ارائه شده در بخش ۳ و نیز براساس معادله دینامیکی عامل راهبر (۴۷) و عامل‌های پیرو (۴۵) و هم‌چنین، با توجه به گراف جهت‌دار شکل (۳)، طراحی کنترل‌کننده به ازای $i=1, \dots, 4$ و $j=1, 2$ به صورت زیر انجام می‌شود.

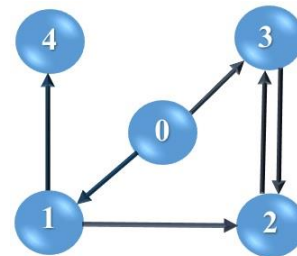
گام ۱: با توجه به سطح خطای اول (۷)، $s_{i,1}$ به ازای $i=1, \dots, 4$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} s_{1,1} &= y_1 - y_0 \\ s_{2,1} &= 2y_2 - y_1 - y_3 \\ s_{3,1} &= 2y_3 - y_2 - y_0 \\ s_{4,1} &= y_4 - y_1 \end{aligned} \quad (49)$$

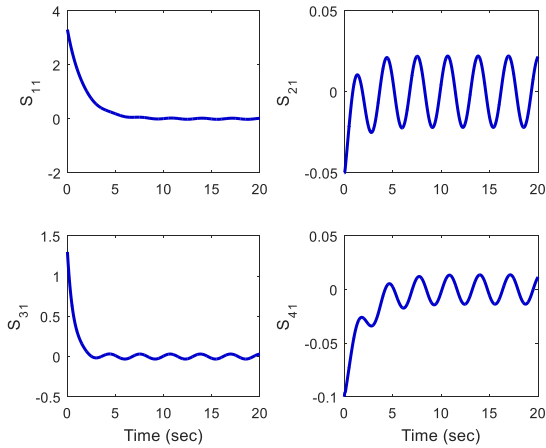
با در نظر گرفتن ورودی کنترل مجازی (۱۱)، $\alpha_{i,2}$ برای عامل‌های پیرو به صورت زیر به دست می‌آید:



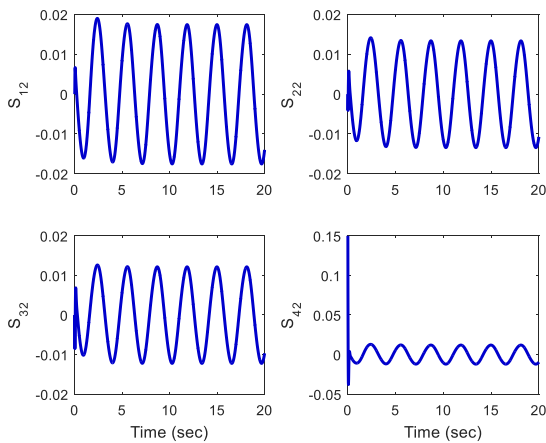
شکل ۲- الف: ارتباط بین ربات‌های تک محوری برای طراحی کنترل‌کننده



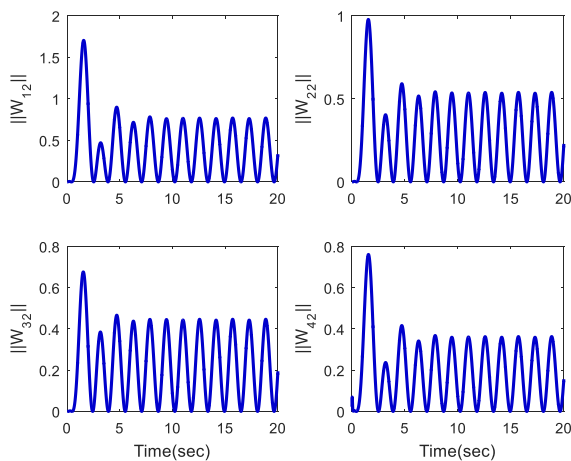
شکل ۲- ب: گراف متناظر با آن



شکل ۵: سطح خطای اول عامل‌های پیرو

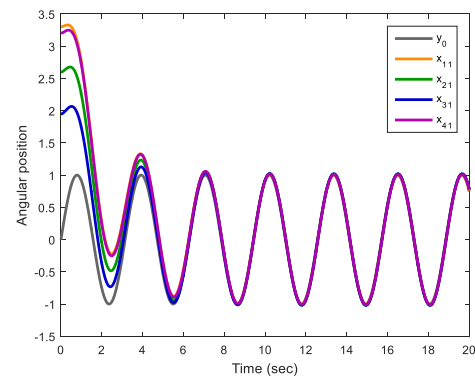


شکل ۶: سطح خطای دوم عامل‌های پیرو

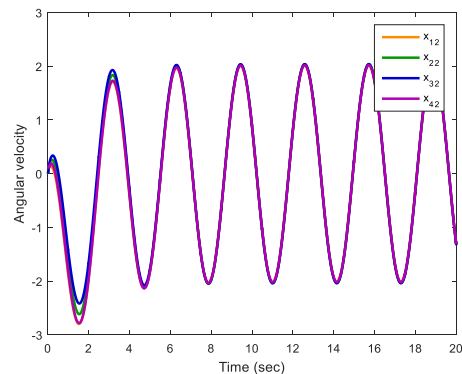


شکل ۷: تخمین بردار نرم وزن‌های شبکه عصبی

در شکل‌های (۳) تا (۸) نتایج شبیه‌سازی به دست آمده از اعمال روش پیشنهادی بر روی سیستم چندعاملی (۴۵)، آورده شده است. در تمامی شکل‌ها محور افقی برحسب زمان می‌باشد. شکل‌های (۳) و (۴) به ترتیب نشان‌دهنده موقعیت زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای عوامل پیرو می‌باشند. همان‌طور که مشاهده می‌شود عوامل پیرو مسیر مطلوب موقعیت زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای عامل راهبر را به خوبی ردیابی می‌کنند و در نتیجه هدف کنترل که ایجاد یک سیستم سنکرون برای گروهی از ربات‌های تک‌محوری جهت ردیابی مسیر خروجی عامل راهبر توسط عوامل پیرو است، برآورده می‌شود. جهت تأیید کارایی روش پیشنهادی، سطح خطای حالت اول و سطح خطای حالت دوم به ترتیب در شکل‌های (۵) و (۶) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در کمتر از چند ثانیه سطوح خطا به همسایگی کوچکی در اطراف مبدأ همگرا می‌شوند. در شکل (۷)، نرم تخمین وزن‌های شبکه عصبی آورده شده است که مشاهده می‌شود نرم وزن‌های شبکه کران‌دار می‌باشد و در شکل (۸) سیگنال کنترل عامل راهبر و عوامل پیرو نشان داده شده و مشاهده می‌شود که دامنه سیگنال‌های کنترل نیز کران‌دار می‌باشند. نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های (۳) تا (۸) مؤید کارایی مناسب روش پیشنهادی در طراحی کنترل اجماع توزیع شده سیستم چندعاملی با دینامیک غیرخطی و نامعین می‌باشند.

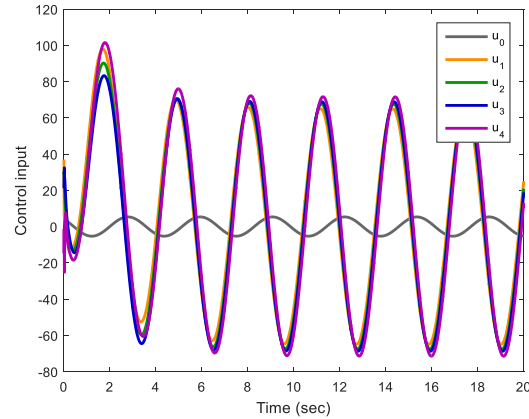


شکل ۸: سیگنال خروجی عامل راهبر و عامل‌های پیرو



شکل ۹: سرعت زاویه‌ای عامل‌های پیرو

- Automatic Control, vol. 49, no. 9, pp. 1520-1533, 2004.
- [5] W. Ren, R. W. Beard and E. M. Atkins, "Information consensus in multivehicle cooperative control," IEEE Control Systems Magazine, vol. 27, no.2, pp. 71-82, 2007.
- [6] H. Zhang, T. Feng, G. H. Yang and H. Liang, "Distributed cooperative optimal control for multiagent systems on directed graphs: An inverse optimal approach," IEEE Transactions on Cybernetics, vol. 45, no. 7, pp. 1315-1326, 2015.
- [7] F. Xiao, L. Wang, J. Chen and Y. Gao, "Finite-time formation control for multi-agent systems," Automatica, vol. 45, pp. 2605-2611, 2009.
- [8] C. Q. Ma and J. F. Zhang, "Necessary and sufficient conditions for consensusability of linear multi-agent systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 55, no. 5, pp. 1263-1268, 2010.
- [9] F. Shamsi, H.A. Talebi and F. Abdollahi, "Output consensus control of multi-agent systems with nonlinear non-minimum phase dynamics," International Journal of Control, 2017.
- [10] C. L. P. Chen, C. E. Ren and T. Du, "Fuzzy observed-based adaptive consensus tracking control for second-order multi-agent systems with heterogeneous nonlinear dynamics," IEEE Transaction on Fuzzy Systems, vol. 24, no. 4, pp. 906-915, 2016.
- [11] H. Ma, Z. Wang, D. Wang, D. Liu, P. Yan and Q. Wei, "Neural-Network-Based distributed adaptive robust control for a class of nonlinear multi agent systems with time delays and external noises," IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, vol. 46, no. 6, pp. 750-758, 2016.
- [12] C.L.P. Chen, G.X. Wen, Y.J. Liu and F.Y. Wang, "Adaptive consensus control for a class of nonlinear multiagent time-delay systems using neural networks," IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, Vol. 25, No. 6, pp. 1217-1226, 2014.
- [13] S. El-Ferik, A. Qureshi and F.L. Lewis, "Neuro-adaptive cooperative tracking control of unknown higher-order affine nonlinear systems," Automatica, vol. 50, pp. 798-808, 2014.
- [14] D. Zhao, T. Zou, S. Li and Q. Zhu, "Adaptive backstepping sliding mode control for leader-follower multi-agent systems," IET Control Theory and Applications, vol. 6, no. 8, pp. 1109-1117, 2012.
- [15] G.X. Wen, C.L.P. Chen, Y.J. Liu and Z. Liu, "Neural-network-based adaptive leader-following consensus control for second-order non-linear multi-agent systems," IET Control Theory and Applications, vol. 9, no. 13, pp. 1927-1934, 2015.
- [16] L. Zhao and Y. Jia, "Neural network-based adaptive consensus tracking control for multi-agent systems under actuator faults," International Journal of Systems Science, vol. 47, no. 8, pp. 1931-1942, 2016.



شکل ۸: سیگنال کنترل عامل راهبر و عوامل پیرو

۶- نتیجه گیری

در این مقاله، یک روش کنترل اجماع توزیع شده تطبیقی برای دسته‌ای از سیستم‌های چندعاملی نامعین و ناهمگون تحت گراف ارتباطات جهت‌دار پیشنهاد شد. روش پیشنهادی مبتنی بر روش کنترل سطح دینامیکی توزیع شده و شبکه‌های عصبی با توابع پایه شعاعی می‌باشد. قوانین تطبیقی برای بروزرسانی پارامترهای شبکه طراحی شدند. تحلیل پایداری روش پیشنهادی کراندارای سیگنال‌های سیستم حلقه بسته را تضمین می‌نماید. نتایج شبیه‌سازی بر روی دسته‌ای ربات‌های تک‌محوری با دینامیک نامعین جهت تأیید عملکرد روش پیشنهادی ارائه شدند. از آنجایی که در بسیاری از سیستم‌های فیزیکی بهره‌های کنترلی، توابع غیرخطی و نامعین می‌باشند، در کارهای آتی، به مبحث اجماع سیستم‌های چندعاملی با بهره‌های کنترلی غیرخطی و نامعین پرداخته خواهد شد.

مراجع

- [1] R. Olfati-Saber, J. A. Fax and R. M. Murray, "Consensus and cooperation in networked multi-agent systems," Proceedings of the IEEE, vol. 95, no. 1, pp. 215-233, 2007.
- [2] Y. Cao, W. Yu, W. Ren and G. Chen, "An overview of recent progress in the study of distributed multi-agent coordination," IEEE Transaction on Industrial Information, vol. 9, no. 1, pp. 427-438, 2012.
- [3] Y. Chen, J. Lu, X. Yu and D. J. Hill, "Multi-agent systems with dynamical topologies: consensus and applications," IEEE Circuits and Systems Magazine, vol. 13, no. 3, pp. 21-34, 2013.
- [4] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, "Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays." IEEE Transactions on

- [17] G. Wang, C. Wang, Y. Yan, L. Li and X. Cai, "Distributed adaptive output feedback tracking control for a class of uncertain nonlinear multiagent systems," *International Journal of Systems Science*, vol. 48, no. 3, pp. 587-603, 2016.
- [18] W. Wang, C. Wen and J. Huang, "Distributed adaptive asymptotically consensus tracking control of nonlinear multi-agent systems with unknown parameters and uncertain disturbances" *Automatica*, Vol. 77, pp. 133-142, 2017.
- [19] Y. Zhang, G. Cui, G. Zhuang, J. Lu, and Z. Li, "Command filtered backstepping tracking control of uncertain nonlinear strict-feedback systems under a directed graph," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2016.
- [20] G. Cui, S. Xu, F.L. Lewis, B. Zhang and Q. Ma, "Distributed consensus tracking for non-linear multi-agent systems with input saturation: a command filtered backstepping approach," *IET Control Theory and Applications*, vol. 10, no. 5, pp. 509-516, 2016.
- [21] X. Shi and S. Xu, "Adaptive distributed consensus tracking control for uncertain nonlinear multi-agent systems in pure-feedback form," in *Control Conference (CCC), 2016 35th Chinese*, 2016, pp. 475-479: IEEE.
- [22] X. Shi, J. Lu, Z. Li and S. Xu, "Robust adaptive distributed dynamic surface consensus tracking control for nonlinear multi-agent systems with dynamic uncertainties," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 353, no. 17, pp. 4758-4805, 2016.
- [23] L. Zhang, C. Hua and X. Guan, "Distributed output feedback consensus tracking prescribed performance control for a class of nonlinear multi-agent systems with unknown disturbances," *IET Control Theory and Applications*, vol. 10, no. 8, pp. 877-883, 2016.
- [24] S.J. Yoo, "distributed consensus tracking for multiple uncertain nonlinear strict-feedback systems under a directed graph," *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 24, no. 4, pp. 666-672, 2013.
- [25] D. Wang and J. Huang, "Neural network-based adaptive dynamic surface control for a class of uncertain nonlinear systems in strict-feedback form," *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 16, no. 1, pp. 195-202, 2005.
- [۲۶] ح. حق شناس، م.ع. بادامچی زاده و م. برادران نیا، "کنترل محدود نگهدارنده سیستم‌های چندعاملی خطی متشکل از عامل‌های غیر یکسان با استفاده از فیدبک خروجی دینامیکی،" *مجله کنترل*، جلد ۱۰، شماره ۴، ۱۳۹۵.
- [27] J. Park and I.W. Sandberg, "Universal approximation using radial-basis-function networks, *Neural Computation*," *Neural computation*, vol. 3, no. 2, pp. 246-257, 1991.