

## طراحی یک چارچوب توزیع شده به منظور آرایش بندی گروه شناورهای فروتحریک تحت اغتشاش محیطی به وسیله کنترل مود لغزشی پایانی

سمانه کویری<sup>۱</sup>، احمدرضا تحسیری<sup>۲</sup>، حمیدرضا تقی راد<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل و سیستم، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، Samane\_kaviri@ee.kntu.ac.ir

<sup>۲</sup> استادیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل و سیستم، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، Tahsiri@eetd.kntu.ac.ir

<sup>۳</sup> استاد، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل و سیستم، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، Taghirad@kntu.ac.ir

پذیرش: ۱۳۹۸/۱۰/۰۵

ویرایش: ۱۳۹۸/۰۵/۲۶

دریافت: ۱۳۹۸/۰۲/۲۴

**چکیده:** در این مقاله یک چارچوب توزیع شده جهت آرایش بندی گروه شناورهای بدون سرنشین، حول یک هدف معین پیشنهاد شده است. چارچوب پیشنهادی با هدف تعیین مسیر مطلوب برای هر شناور، ممانعت از ورود شناور به حریم هدف و ردیابی مسیر مطلوب تحت اغتشاش های محیطی طراحی شده است. پس از طراحی مسیر مطلوب هر شناور به منظور تشکیل آرایش مطلوب پیرامون هدف، اصلاح این مسیر با قید همواری آن براساس روش تابع پتانسیل مجازی صورت گرفته و شرط اجتناب ورود شناورها به حریم هدف بر آورده شده است. سپس الگوریتم کنترلی مقاوم برای ردیابی مسیر در حضور اغتشاش ناشی از باد و جریان آب، مبتنی بر کنترل مود لغزشی پایانی غیر تکین توسعه داده شده است. این الگوریتم کنترلی مانورپذیری شناور را با طراحی فرمان سرعت مجازی، بهبود می دهد و تعقیب مسیر مطلوب در زمان محدود را میسر می کند. در نهایت پایداری کنترل حلقه بسته براساس نظریه پایداری لیاپانوف اثبات و عملکرد الگوریتم کنترلی پیشنهادی با نتایج حاصل از کنترل مود لغزشی پایانی کلاسیک مقایسه شده است. ارزیابی و تحلیل نتایج شبیه سازی، نشان دهنده عملکرد مناسب چارچوب پیشنهادی به منظور بهبود دقت ردیابی مسیر مطلوب و دستیابی گروه شناورها به آرایش دایروی برای محاصره هدف است.

**کلمات کلیدی:** کنترل آرایش بندی سیستم چندعاملی، شناور بدون سرنشین فروتحریک، کنترل مود لغزشی پایانی غیر تکین، تقسیم بندی ورنویی.

### A Distributed Framework Design for Formation Control of Under-actuated USVs in the Presence of Environmental Disturbances Using Terminal Sliding Mode Control

Samane Kaviri, Ahmadreza Tahsiri, Hamidreza Taghirad

**Abstract:** This paper proposes a distributed framework for formation control of USVs around a predefined target. This framework, according to the mission and problem conditions, includes three parts: determination of a desired path for each USV, preventing USVs entry to the target area and tracking the desired path of USVs under environmental disturbances. In the first part, a distributed approach is proposed to determine desired path for each USV and forming an aimed USVs arrangement around the target. In the second part, by modifying artificial potential function and smoothly redirecting USVs, the restriction of not entering the target's region is met. Finally, in the third section, a robust control algorithm for the USVs navigation in the presence of wind and sea current disturbances is developed based on the nonsingular terminal sliding mode control. The developed control algorithm firstly improves maneuverability of USVs using virtual velocity

command planning, and secondly, provides a finite time trajectory tracking. Also, stability of the closed loop control is analyzed using Lyapunov stability theorem and the performance of the proposed control algorithm is compared with results of the conventional terminal sliding mode control. Simulation results demonstrate proper performance of the proposed framework in terms of improving tracking accuracy of the desired path and reaching a circular arrangement of USVs surrounding the target.

**Keywords:** Multi-agent system formation control, Under-actuated Unmanned Surface Vessel (USV), Nonsingular Terminal Sliding Mode Control (NTSMC), Voronoi partitioning.

## ۱- مقدمه

یکی از رویکردهای مؤثر در حل مسئله جابجایی عامل‌ها استفاده از تقسیم‌بندی ورنویی است [۹]. تقسیم‌بندی فضای کاری بین عامل‌ها با استفاده از دیاگرام ورنویی مزیت‌هایی شامل قوام در برابر خرابی یک عامل، حذف کنترل‌کننده متمرکز و اجتناب از برخورد بین عامل‌ها را به همراه دارد و در مسائل کنترل مشارکتی مورد استقبال قرار گرفته است [۱۰]. بهره‌گیری از این مزایا برای تعیین مسیر مطلوب شناورها به صورت توزیع‌شده یک پیشنهاد مؤثر است تا هر عامل به صورت خودگردان (Autonomous) مسیر خود را با توجه به اطلاعات محلی خود و همسایگانش، برای رسیدن به آرایش کلی تعیین نماید. همچنین انعطاف‌پذیری برای ایجاد آرایش‌های متفاوت، با تغییر تابع چگالی تقسیم‌بندی ورنویی قابل دستیابی است. البته طراحی مسیر مطلوب هر عامل مبتنی بر این روش، مستلزم توجه به قیودی از قبیل عدم نزدیکی به مناطق غیرمجاز است.

اصلاح مسیر مطلوب ربات‌های بدون سرنشین معمولاً به‌منظور دوری از مانع یا عدم ورود به منطقه غیرمجاز انجام می‌شود؛ زیرا در بسیاری از کاربردها برخورد با هدف (عامل مهاجم) یا ورود به منطقه اثرهدف (منطقه آلوده) نامطلوب است. یکی از روش‌های متداول برای این کار، استفاده از تابع پتانسیل مجازی است. اجتناب از نزدیکی به موانع ثابت، به کمک تابع پتانسیل برای اولین بار در سال ۱۹۸۶ مطرح گردید [۱۱]. سپس در [۱۲]، از این روش جهت جلوگیری از برخورد ربات‌های زیرسطحی با موانع استفاده شده است. یکی از مشکلات اصلی در استفاده از تابع پتانسیل مجازی، توقف ربات متحرک در نقطه کمینه محلی و همچنین تغییر مسیر ناگهانی آن است. به‌منظور غلبه بر این مشکلات، مرجع [۱۳] به توسعه این روش با استفاده از تابع پتانسیل چرخشی پرداخته است و تغییر مسیر ربات متحرک به تدریج اتفاق می‌افتد. با توجه به دینامیک حرکتی شناور فروتحریک (Under-actuated)، اصلاح مسیر مطلوب با قید همواری مسیر باید انجام شود که نیازمند، طراحی الگوریتمی برای برآورده کردن این شرط است.

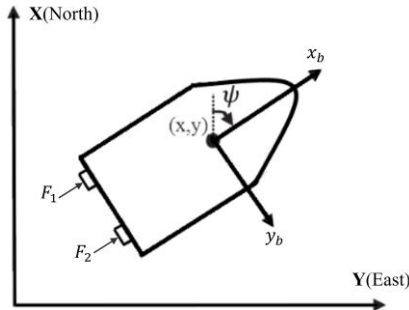
از سوی دیگر با توجه به شرایط محیطی شناورها در دریا، به روش‌های کنترلی نیاز است که علاوه بر دقت کافی، در برابر اغتشاشات مقاوم باشند. کنترل‌کننده مود لغزشی، روشی قدرتمند و مقاوم در کنترل سیستم‌های غیرخطی به شمار می‌آید [۱۴] که ویژگی‌های قابل توجه آن ساده بودن طراحی و تحلیل پایداری، مقاومت در مقابل اغتشاش و پیاده‌سازی آسان

در چند دهه‌ی اخیر، کنترل شناور بدون سرنشین در سطح دریا به عنوان زیرمجموعه‌ای از مبحث کنترل وسایل متحرک بدون سرنشین مورد توجه قرار گرفته است، تمرکز اصلی این مبحث روی توسعه روش‌های مناسب برای پاسخگویی به مسائل برنامه‌ریزی مسیر مطلوب و کنترل ردیابی مسیر (Trajectory tracking) است. چالش اصلی که در این حوزه مطرح است؛ وابستگی متقابل دینامیک‌های شناور، وابستگی پارامترهای مدل به شرایط محیطی و وجود اغتشاشات خارجی ناشی از جریان آب، باد و امواج دریا است [۱]. عدم دقت کافی کنترل‌کننده‌های رایج خطی و تک‌عاملی در مواجهه با دینامیک غیرخطی و پیچیده شناورها در مأموریت‌ها و شرایط واقعی، جذابیت توسعه الگوریتم‌های غیرخطی و چندعاملی در این مبحث را افزایش داده است. تحقیقات جاری که در زمینه کنترل غیرخطی شناورها انجام شده است، عمدتاً متمرکز روی سیستم‌های تک‌عاملی است [۲، ۳]. کاربردهای مسئله آرایش‌بندی (Formation) یک گروه از شناورها در حوزه‌هایی نظیر؛ پایش و نظارت محیط، عملیات جستجو و نجات و پایش‌های زیست‌محیطی اهمیت فراوان دارد و نیازمند به‌کارگیری استراتژی کنترلی توزیع‌شده، برای انجام وظایف به‌صورت مشارکتی است [۴، ۵].

مطالعات صورت گرفته روی مسئله آرایش‌بندی بیشتر مبتنی بر ساختار راهبر-رهرو (Leader-follower) است و با آرایش عامل‌ها به‌صورت یک آرایش ثابت در نظر گرفته شده است [۶، ۷]. ساختار راهبر-رهرو عملکرد کل مجموعه را به عملکرد صحیح راهبر وابسته می‌سازد و در صورت خرابی راهبر مأموریت ناکام می‌ماند. آرایش‌بندی گروه شناورها با رویکرد بدون راهبر در [۸] مطرح شده است که آرایش ثابتی حول میانگین موقعیت اولیه عامل‌ها را نتیجه می‌دهد. آرایش ثابت نیز انعطاف‌پذیری گروه عامل‌ها را در مواجهه با موانع یا مناطق غیرمجاز کاهش می‌دهد. لذا مدل‌سازی مسئله در کاربردهای واقعی، نیازمند رویکردی توزیع‌شده در جابجایی عامل‌ها، همراه با در نظر گرفتن قیودی همچون عدم برخورد با موانع و زمان محدود (Finite time) در ردیابی مسیر مطلوب است.

## ۲- دینامیک شناور

در کنترل شناور بدون سرنشین، ردیابی مسیر مطلوب با دقت هر چه بیشتر باید تضمین شود که می توان با در نظر گرفتن مدل افقی سه درجه آزادی از شناور به این هدف نائل آمد [۲۰]. این سه مؤلفه شامل  $[x, y, \psi]$  است که  $x, y$  موقعیت شناور در صفحه و  $\psi$  جهت گیری شناور حول محور  $Z$  مطابق شکل ۱ است.



شکل ۱: دستگاه مختصات زمین ثابت و دستگاه بدنه شناور

ارتباط سرعت های خطی و زاویه ای هر شناور در دستگاه زمین ثابت و دستگاه بدنه توسط رابطه سینماتیکی (۱) توصیف می شود.

$$\dot{\eta}_i = R(\psi_i) v_i$$

$$R(\psi_i) = \begin{bmatrix} \cos \psi_i & -\sin \psi_i & 0 \\ \sin \psi_i & \cos \psi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$v_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ r_i \end{bmatrix}, \eta_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ \psi_i \end{bmatrix}$$

با فرض غیرقابل تراکم و غیر لزج بودن آب دریا، معادله غیرخطی دینامیک شناور به عنوان یک جسم صلب در دستگاه بدنه به صورت رابطه (۲) نوشته می شود.

$$m_{11} \dot{u}_i - m_{22} v_i r_i + d_{11} u_i = \tau_{ui} + \tau_{dui}$$

$$m_{22} \dot{v}_i + m_{11} u_i r_i + d_{22} v_i = \tau_{dvi} \quad (2)$$

$$m_{33} \dot{r}_i + (m_{22} - m_{11}) v_i u_i + d_{33} r_i = \tau_{ri} + \tau_{dri}$$

که  $m_{ii}, i = 1, 2, 3$  نمایانگر جرم یا اینرسی،  $d_{ii}, i = 1, 2, 3$  ضرایب میرایی،  $\tau_{ui}, \tau_{dvi}$  ورودی های کنترلی عامل  $i$  ام و  $\tau_{dri}$  بردار گشتاورهای اغتشاشی عامل  $i$  در محور  $z$  هستند. همان طور که از معادلات مشخص است عملگری مستقیماً روی حرکت جانبی اثر گذار نیست، لذا این شناور یک سامانه فروتحریک با دو نیروی پیشران  $F_1$  و  $F_2$  مطابق شکل ۱ است. همچنین فرض شده است که اغتشاش محیطی ناشی از باد و جریان آب کراندار است و یک مقدار بیشینه حقیقی مثبت به صورت  $|T_{aji}| \leq T_{ji}$  وجود دارد.

در ادامه، بردار گشتاورهای اغتشاشی ناشی از حاصل جمع گشتاور اغتشاشی باد و جریان آب که از مهم ترین اغتشاشات محیطی در دریا به شمار می روند، محاسبه شده است. برای یک شناور متحرک، نیرو و ممان ناشی از باد روی وسیله شناور برحسب سرعت نسبی باد و زاویه حمله آن مطابق رابطه (۳) محاسبه می شود.

است [۱۵]. به همین علت اشرفیون و همکاران کنترل کننده مود لغزشی کلاسیک را برای انجام مانور دایروی شناور بدون سرنشین با تضمین همگرایی خطای ردیابی سرعت مطلوب، ارائه کردند [۱۶]. به دنبال آن در [۱۷] همگرایی مجانبی خطای ردیابی موقعیت، پس از همگرایی خطای ردیابی سرعت برای ردیابی مسیر مستقیم در زمان محدود، تضمین شده است. در این راستا، در این مقاله نیز طراحی کنترل کننده مود لغزشی پایانی با رویکردی جدید در تضمین همگرایی خطای موقعیت انجام شده است. به علاوه، با مدل سازی اغتشاشات محیطی، شرایط محیطی دریا از شرایط خشکی متمایز شده و بدین وسیله نیاز به آزمون های عملیاتی زمان بر و پرهزینه، برای صحت گذاری عملکرد کنترل کننده، به طرز چشمگیری کاهش می یابد [۱۸، ۱۹]. لذا ارزیابی اجرای صحیح مانور ردیابی مسیر مستقیم، با در نظر گرفتن تقریب مناسبی از گشتاورهای محیطی اهمیت پیدا می کند؛ درحالی که در [۱۶، ۱۷]، اغتشاشات تنها به وسیله توابع کراندار سینوسی لحاظ شده است.

برای مرتفع ساختن کمبودهای فوق، در این پژوهش یک چارچوب توزیع شده جهت آرایش بندی دایروی گروهی از شناورهای بدون سرنشین به منظور محاصره ی یک هدف از پیش تعیین شده، طراحی شده است. طراحی مسیر مطلوب با بهره گیری از تقسیم بندی ورنویی و با رویکردی جدید صورت گرفته است. همچنین با استفاده از تابع پتانسیل مجازی، پروتکلی برای دوری از هدف طراحی شده است که از تغییر مسیر ناگهانی شناور جلوگیری نماید. به علاوه برای بهبود مانورپذیری شناور فروتحریک، بخش طراحی سرعت مطلوب مجازی به الگوریتم کنترل ردیابی مسیر افزوده شده است تا همگرایی خطای سرعت، همگرایی خطای موقعیت شناور را نیز تضمین کند. سپس ردیابی مسیر مطلوب در زمان محدود، توسط کنترل کننده مود لغزشی پایانی غیرتکین پیاده شده و پایداری سرعت و موقعیت شناور، به صورت نظری اثبات شده است. مقاوم بودن کنترل کننده طراحی شده نسبت به گشتاورهای اغتشاشی ناشی از باد و جریان آب تحلیل شده و عملکرد کنترل کننده طراحی شده، با روش مود لغزشی پایانی کلاسیک مقایسه شده است. در نهایت عملکرد چارچوب پیشنهادی به منظور دستیابی به آرایش دایروی توسط شبیه سازی نمایش داده شده است.

این مقاله به صورت زیر ساختار بندی شده است. در بخش دوم مدل دینامیکی شناورها معرفی شده است. بخش سوم به توصیف چارچوب پیشنهادی برای گروه شناورها می پردازد و نحوه طراحی مسیر مطلوب، اجتناب از ورود به حریم هدف و کنترل ردیابی به وسیله روش مود لغزشی پایانی غیرتکین را تشریح می کند. همچنین در پایان بخش سوم، اثبات پایداری الگوریتم کنترلی طراحی شده با استفاده از نظریه لیاپانوف انجام شده است. بخش چهارم نتایج شبیه سازی برای نمایش صحت عملکرد و مقاوم بودن چارچوب پیشنهادی، در دستیابی به آرایش مورد نظر توسط گروه شناورها در شرایط محیطی متأثر از باد و جریان آب، نمایش داده شده است. سپس در بخش آخر نتایج این تحقیق ارائه شده است.

حمله  $\gamma_c$  و زاویه انحراف جانبی  $\beta_c$  مشابه با شکل ۲ تعریف می شود [۲۰]. نیرو و ممان حاصل از جریان آب روی شناور نیز بر اساس مشخصات شناور با تعیین پارامترهای  $C_{XC}$ ،  $C_{YC}$  و  $C_{NC}$  و توسط رابطه (۶) محاسبه می شود.

$$\tau_c = \frac{1}{2} \rho_w V_{rc}^2 \begin{bmatrix} A_{FC} C_{XC}(\gamma_c) \\ A_{LC} C_{YC}(\gamma_c) \\ A_{LC} L_{oa} C_{NC}(\gamma_c) \end{bmatrix} \quad (6)$$

که  $V_{rc}$  سرعت نسبی جریان آب،  $\rho_w$  چگالی آب و  $A_{FC}$  و  $A_{LC}$  مساحت تصویر شده مقابل و جانبی با جهت جریان آب و  $L_{oa}$  طول کل شناور است. سرعت نسبی و زاویه حمله به صورت رابطه (۷) تعیین می شوند.

$$V_{rc} = \sqrt{(v - V_c \cos(\beta_c - \psi))^2 + (u - V_c \sin(\beta_c - \psi))^2} \quad (7)$$

$$\gamma_c = -\text{atan2}(v - V_c \cos(\beta_c - \psi), u - V_c \sin(\beta_c - \psi))$$

پارامترهای  $C_{XC}$ ،  $C_{YC}$  و  $C_{NC}$  نیز به وسیله برازش تابع بر داده های تجربی مطابق رابطه (۸) تقریب زده می شود [۲۰].

$$\begin{aligned} C_{XC} &= -c_x \cos(\gamma_c) |\cos(\gamma_c)| \\ C_{YC} &= c_y \sin(\gamma_c) |\sin(\gamma_c)| \\ C_{NC} &= c_N \sin(2\gamma_c) \end{aligned} \quad (8)$$

که  $C_x$ ،  $C_y$  و  $C_z$  مقادیر ثابت مثبت وابسته به شکل هندسی شناور هستند. در این مقاله فرض شده است که شناورها همگن هستند یعنی پارامترهای مدل (۲) برای همه شناورها یکسان است. همچنین در محاسبه گشتاورهای اغتشاشی بایستی سرعت های نسبی و زوایای حمله در رابطه (۴) و (۷) برای هر شناور محاسبه شود که برای جلوگیری از پیچیده شدن روابط، اندیس شماره شناور حذف شده است.

### ۳- طراحی کنترل کننده برای گروه شناورهای

#### بدون سرنشین

چارچوب کنترلی طراحی شده در این مقاله، یک ساختار سلسله مراتبی برای آرایش گروه شناورهای بدون سرنشین است. در لایه اول برنامه ریزی مسیر مطلوب برای مجموعه شناورها بر اساس دیاگرام ورنویی پیشنهاد شده است که متغیر مرکز جرم به عنوان نقاط تشکیل دهنده مسیر مطلوب برای هر شناور تعریف می شود. همچنین در صورت ورود شناور به حریم هدف که با شعاع مشخصی تعریف شده است، تابع پتانسیل مجازی مسیر مطلوب را اصلاح می کند. در لایه دوم طراحی ورودی های کنترلی شناور شامل نیروی پیشران  $\tau_{ui}$  و ممان  $\tau_{ri}$  برای ردیابی مسیر مطلوب انجام می شود. ورودی های کنترلی به وسیله کنترل مود لغزشی با ارائه یک معادله غیرخطی برای سطح لغزش، طراحی شده است که منجر به همگرایی خطای ردیابی در زمان محدود خواهد شد. این لایه ویژگی فروتحریک شناور را در نظر می گیرد و امکان اجرای مانورهای مختلف مثل مسیر مستقیم و دایروی را برای شناور تحت اغتشاش محیطی فراهم می سازد. در شکل ۳ چارچوب پیشنهادی این مقاله برای یک شناور عضو گروه، نمایش داده شده است.

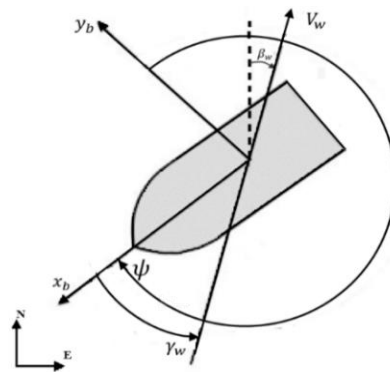
$$\tau_w = \frac{1}{2} \rho_a V_{rw}^2 \begin{bmatrix} C_{xw}(\gamma_w) A_{FW} \\ C_{yw}(\gamma_w) A_{LW} \\ C_{nw}(\gamma_w) A_{LW} H_{oa} \end{bmatrix} \quad (3)$$

که  $\rho_a = 1.225 \text{ kg/m}^3$  چگالی هوا،  $A_{FW}$  و  $A_{LW}$  ناحیه مقابل و جانبی تصویر شده عمود بر جهت وزش باد،  $H_{oa}$  ارتفاع کلی شناور و  $C_{ij}$  ضرایب آئرو دینامیکی شناور نسبت به محورهای  $i$  و  $j$  است. سرعت نسبی باد و زاویه حمله آن به صورت رابطه (۴) و مطابق شکل ۲ است [۲۰].

$$V_{rw} = \sqrt{(v - V_w \cos(\beta_w - \psi))^2 + (u - V_w \sin(\beta_w - \psi))^2} \quad (4)$$

$$\gamma_w = -\text{atan2}(v - V_w \cos(\beta_w - \psi), u - V_w \sin(\beta_w - \psi))$$

$V_w$  سرعت باد و  $\beta_w$  جهت باد را نشان می دهد که معمولاً در وسایل شناور به ترتیب توسط آنیومتر و بادنما مشخص می شوند [۲۰].



شکل ۲: سرعت باد  $V_w$ ، جهت وزش باد  $\beta_w$  و زاویه حمله باد  $\gamma_w$  نسبت به شناور [۲۰]

در این مقاله برای محاسبه ضرایب  $C_{xw}$ ،  $C_{yw}$  و  $C_{nw}$  از مدل ریاضی بهره گرفته شده است که علاوه بر دقت کافی، هزینه کمتری نسبت به روش هایی همچون آزمون های تونل باد دارد. همچنین با مقایسه روش های مختلف در مدل سازی این ضرایب، در این مقاله از مدل بلندمرن (Blendermann)، مطابق رابطه (۵) در [۲۱] استفاده شده است که دقت بیشتری نسبت به سایر روش ها دارد [۲۲، ۲۳].

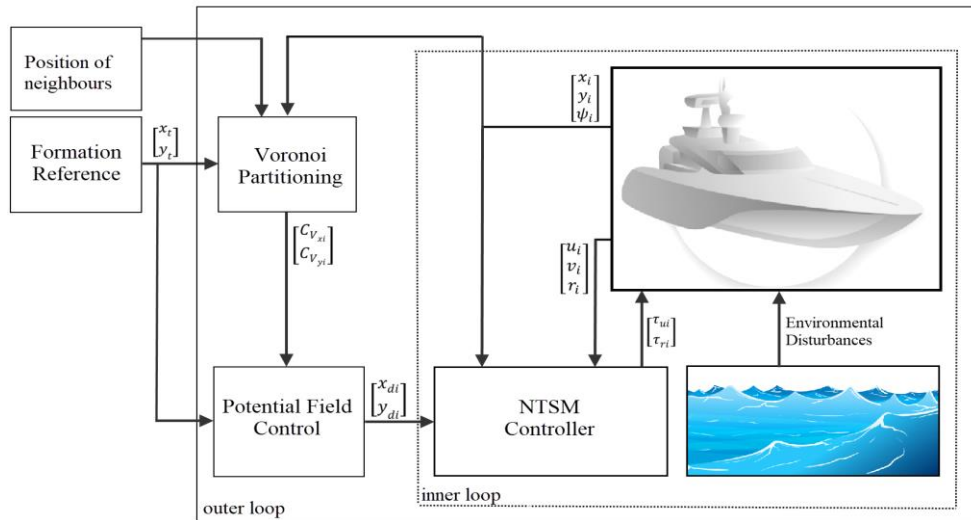
$$\begin{aligned} C_{xw}(\gamma_w) &= -CD_{IAF} \frac{\cos(\gamma_w)}{1 - \frac{\delta}{2} \left(1 - \frac{CD_t}{CD_t}\right) \sin^2(2\gamma_w)} \\ CD_{IAF} &= CD_t \frac{A_{LW}}{A_{FW}} \\ C_{yw}(\gamma_w) &= CD_t \frac{\sin(\gamma_w)}{1 - \frac{\delta}{2} \left(1 - \frac{CD_t}{CD_t}\right) \sin^2(2\gamma_w)} \\ C_{nw}(\gamma_w) &= \left[ \frac{S_L}{L_{oa}} - 0.18 \left(\gamma_w - \frac{\pi}{2}\right) \right] C_{yw}(\gamma_w) \end{aligned} \quad (5)$$

که  $CD_{IAF}$  ضریب مقاومت طولی،  $CD_t$  ضریب مقاومت جانبی،  $\delta$  پارامتر نیروی متقابل،  $S_L$  فاصله افقی مرکز جرم از ناحیه تصویر شده  $A_{LW}$  است.

با توجه به منطقه کاری محدود شناور نسبت به پهنه دریا، جریان آب دریا به صورت یک بردار دارای اندازه و جهت مدل شده است. سرعت جریان آب با  $V_c$  نشان داده شده که جهت آن نسبت به وسیله متحرک، با زاویه

طراحی شده باید توانایی ردیابی این مسیر را داشته باشد. در ادامه بخش های مختلف این چارچوب طراحی شده است.

ورودی حلقه داخلی در شکل ۳، مسیری است که هر شناور باید برای رسیدن به موقعیت مطلوبش در آرایش مورد نظر طی کند. کنترل کننده



شکل ۳. چارچوب پیشنهادی برای کنترل آرایش بندی گروه شناورها

اطلاعات اهمیت ویژه دارد. حال اگر فرض شود که هر یک از نقاط تولید کننده نواحی ورنویی یک عامل متحرک است و احتمال رخداد یک پدیده یا توزیع یک پارامتر فیزیکی توسط تابع چگالی  $\phi: Q \rightarrow \mathbb{R}^+$  توصیف می شود، هر سلول ورنویی، ناحیه ی مختص هر عامل را نمایش می دهد. سپس معیاری تحت عنوان تابع هزینه پوشش، برای عملکرد سیستم مطابق رابطه (۱۱) تعریف می شود [۱۰].

$$H(P, Q) = \sum_{i=1}^n H(p_i, V_i) \tag{11}$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{V_i} \min \frac{1}{2} \|q - p_i\|^2 \phi(q) dq$$

برای یافتن چیدمان بهینه عامل ها، نقاط اکسترمم تابع  $H(P, Q)$  بر اساس رابطه (۱۲) مشخص می شود.

$$\frac{\partial H(p_i, V_i)}{\partial p_i} = \int_{V_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \frac{1}{2} \|q - p_i\|^2 \right) \phi(q) dq \tag{12}$$

$$= - \int_{V_i} (q - p_i) \phi(q) dq$$

$$= \left( \int_{V_i} \phi(q) dq \right) \left( p_i - \frac{\int_{V_i} q \phi(q) dq}{\int_{V_i} \phi(q) dq} \right)$$

با توجه به رابطه (۱۲) مرکز جرم هر سلول به صورت رابطه (۱۳) تعریف می شود.

$$C_{V_i} = \frac{\int_{V_i} q \phi(q) dq}{\int_{V_i} \phi(q) dq} \tag{13}$$

لذا برای کمینه کردن  $H$ ، هر عامل نه تنها بایستی نقطه ی تولید کننده سلول ورنویی خود باشد، بلکه بایستی در مرکز جرم سلول ورنویی خود نیز قرار داشته باشد. به عبارت دیگر  $p_i = C_{V_i}$  نقاط بهینه محلی در مسئله

### ۳-۱ تقسیم بندی ورنویی

با افزایش تعداد عامل ها در شبکه، برنامه ریزی و کنترل آن ها به صورت مرکزی، دشوار و گاهی غیرممکن می شود زیرا حجم محاسباتی بالایی خواهد داشت. از سوی دیگر هر خرابی یا شکست در کنترل کننده مرکزی منجر به از دست رفتن مأموریت می شود. لذا کنترل توزیع شده در حضور محدودیت های ارتباطی دنیای واقعی، یک نیاز برای شبکه های چندعاملی است. در این راستا تقسیم بندی ورنویی به منظور جابجایی عامل ها برای رسیدن به چیدمان بهینه به صورت توزیع شده استفاده شده است. در ادامه مبانی این روش و مشخصات آن مطرح شده است.

$Q$  یک فضای دو بعدی محدب، با ابعاد محدود است که دیاگرام ورنویی آن را به چند سلول ورنویی مجزا از یکدیگر تقسیم می کند. مجموعه ی نقاط  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  سلول های ورنویی متناظر  $V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$  را تولید می کنند.  $V_i$  نشان دهنده یک ناحیه یا سلول ورنویی است که مربوط به نقطه  $p_i = [x_i \ y_i]^T$  است و به صورت رابطه (۹) تعریف می شود:

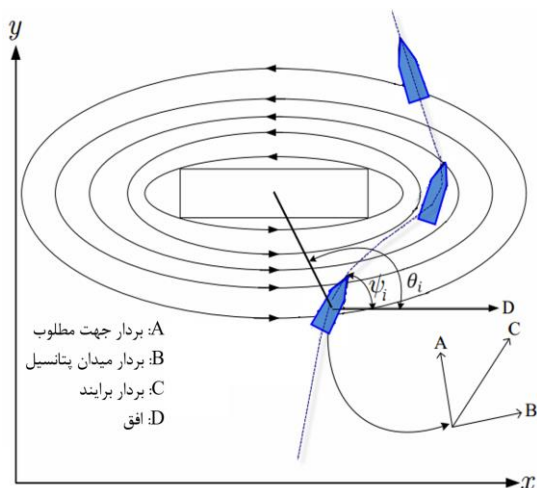
$$V_i = \{q \in Q | d(q - p_i) \leq d(q - p_j), \forall j \neq i\} \tag{9}$$

اجتماع این سلول ها کل ناحیه  $Q$  را تشکیل می دهد یعنی  $\cup_{i=1}^n V_i = Q$ . همچنین شرط  $I(V_i) \cap I(V_j) = \emptyset$  برقرار است یعنی نواحی داخلی سلول های ورنویی باهم اشتراکی ندارند. در محیط دوبعدی تعریف تابع فاصله  $d$  به صورت رابطه (۱۰) است:

$$d(q - p_i) = \|q - p_i\| \tag{10}$$

گراف ارتباطی دوگان با دیاگرام ورنویی گراف همبند (Connected) دلونویی (Delaunay) است [۹]. همبندی کل شبکه برای اشتراک

ارائه می شود. مزیت اصلی این روش این است که متناسب با جهت حرکت شناور، به آرامی آن را از هدف دور می کند. بردارهای این تابع پتانسیل دور هدف می چرخند؛ به نحوی که جهت این چرخش وابسته به زاویه حرکت شناور است. اگر شناور وارد محدوده غیرمجاز حول هدف شود، سرعت آن با سرعتی حاصل از میدان پتانسیل مجازی جمع خواهد شد تا منجر به تغییر مسیر آن شود. در شکل ۵ شرایطی که شناور، هدف را در سمت چپ خود می بیند، نمایش داده شده است.



شکل ۵: میدان پتانسیل اطراف هدف و مسیر عامل متحرک [۱۳]

در شکل ۵، چرخش میدان حول هدف به صورت پادساعت گرد است. در این شرایط نیروی وارد به شناور، در خلاف جهت حرکت آن نیست. در نتیجه شناور در نقطه کمینه محلی قرار نمی گیرد و همچنین به طور ناگهانی تغییر مسیر نمی دهد.  $\psi_i$  زاویه ورود شناور به میدان پتانسیل چرخشی و  $\theta_i$  زاویه خط واصل بین هدف و هر شناور با محور افقی است که به وسیله رابطه (۱۵) محاسبه می شود.

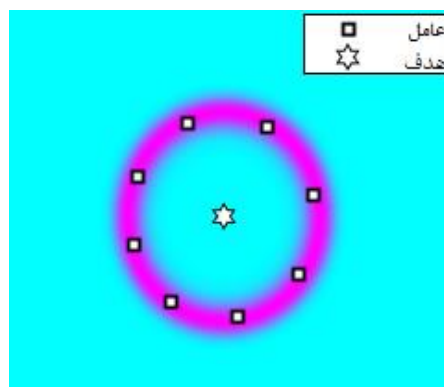
$$\begin{aligned} \psi_i &= \text{atan2}(\dot{y}_i, \dot{x}_i) \\ \theta_i &= \text{atan2}(y_t - y_i, x_t - x_i) \end{aligned} \quad (15)$$

اگر  $\text{mod}(\psi_i - \theta_i, 2\pi) \leq \pi$  باشد، به این معناست که  $\theta_i \leq \psi_i$  در این شرایط چرخش به دور هدف به صورت ساعت گرد و مطابق رابطه (۱۶) در نظر گرفته شده است. اگر  $\text{mod}(\psi_i - \theta_i, 2\pi) > \pi$  باشد، چرخش شناور به صورت پادساعت گرد و مطابق رابطه (۱۷) در نظر گرفته خواهد شد. از سوی دیگر تغییر مسیر باید با سرعتی متناسب با اندازهی سرعت مطلوب شناور جمع شود؛ زیرا این سرعت افزوده شده باید توانایی ایجاد تغییر مسیر را داشته باشد [۱۳]. بنابراین ترم  $|u_{xdesi}|$  یا  $|u_{ydesi}|$  در رابطه ها لحاظ شده است. همچنین سرعت تغییر مسیر عامل باید با عکس فاصله ی عامل از هدف، متناسب باشد تا در شرایطی که موقعیت شناور به هدف نزدیک تر است، با سرعت بیشتری از آن دور شود. تمام این موارد در طراحی روابط (۱۶) و (۱۷) لحاظ شده است.

بهینه سازی مکانی است. میزان اهمیت هر نقطه نسبت به سایر نقاط در منطقه بر عهده تابع  $\phi$  است که در نهایت تعیین کننده شکل چینش عامل ها است. در این مقاله چیدمان مطلوب، محاصره ی هدف توسط عامل ها به صورت دایروی است که در شکل ۴ نمایش داده شده است. برای این چیدمان تابع چگالی به صورت رابطه (۱۴) پیشنهاد می شود.

$$\phi = \exp\left(-k_\phi(a(x-x_t)^2 + b(y-y_t)^2 - r^2)\right) \quad (14)$$

که  $(x_t, y_t)$  موقعیت هدف موردنظر،  $r$ ،  $a$  و  $b$  نیز پارامترهای تعیین کننده شعاع محاصره به صورت یک بیضی است. در شکل ۴، علامت مربع نشان دهنده عامل ها است که به دور یک هدف، با شکل ستاره، حلقه زده اند.



شکل ۴: چیدمان دایروی عامل ها برای محاصره هدف

لازم به ذکر است که با تغییر تابع چگالی در رابطه (۱۴)، آرایش های متفاوت قابل دستیابی است. به عنوان مثال استفاده از تابع گوسی، منجر به تجمع بیشتر عامل ها در محل میانگین تابع گوسی خواهد شد. از سوی دیگر، موقعیت هدف مورد نظر در این مقاله ثابت در نظر گرفته است. از نظر عملیاتی این بدین معناست که دینامیک حرکت هدف، کندتر از دینامیک حرکت عامل ها است.

### ۲-۳ عدم ورود به حریم هدف

با توجه به فرض لازم مبنی بر عدم ورود شناور به حریم هدف، در این بخش الگوریتم اصلاح مسیر توسعه داده شده است که در کاربردهایی مثل احاطه مرکز نشت آلودگی یا محاصره هدف مهاجم مورد توجه است. به عنوان مثال اگر آرایش بندی عامل ها به منظور احاطه بر یک منبع آلودگی باشد، ورود شناورها به منطقه آلوده و نزدیک شدن به مرکز آن منجر به تغییر شکل توزیع آلودگی روی آب و یا اختلال در عملکرد شناور خواهد شد.

ایده اصلی روش تابع پتانسیل مجازی معرفی تابع تولید کننده نیروی مجازی است که با کاهش فاصله از مانع، نیروی مجازی افزایش یابد و از برخورد با مانع جلوگیری شود و پس از خروج از محدوده غیرمجاز، مقدار این نیرو به صفر می رسد. با الهام از [۱۳]، در این بخش یک روش جدید برای دوری از هدف تحت نظر تا شعاع معین  $R_{safe}$ ، به وسیله تابع پتانسیل چرخشی

در این بخش اندیس شناورها برای ساده تر شدن روابط ریاضی نمایش داده نشده و معادلات برای یک شناور مطرح شده است. کنترل کننده بایستی خطای بین موقعیت شناور و موقعیت مطلوب را در هر لحظه از زمان کمینه سازد. لذا خطای ردیابی موقعیت شناور به صورت رابطه (۱۹) تعریف می شود.

$$\begin{aligned} x_e &= x - x_d \\ y_e &= y - y_d \end{aligned} \quad (19)$$

که  $(x_d, y_d)$  مختصات مسیر مطلوب طی زمان است که این مقادیر از نتایج لایه اول شکل ۳ حاصل می شود. خطای ردیابی سرعت نیز به صورت رابطه (۲۰) تعریف می شود.

$$\begin{aligned} v_e &= v - v_d \\ u_e &= u - u_d \end{aligned} \quad (20)$$

که  $u_d$  و  $v_d$  سرعت های مطلوب در راستای روبه جلو و جانبی هستند. برای تضمین اینکه همگرایی خطای سرعت منجر به همگرایی خطای موقعیت می شود، مقدار مطلوب برای  $u_d$  و  $v_d$  مطابق رابطه (۲۱) طراحی می شود.

$$\begin{bmatrix} u_d \\ v_d \end{bmatrix} = J\psi \begin{bmatrix} \dot{x}_d - \left( k_{1x} x_e + k_{2x} \int_0^t x_e d\tau \right) \\ \dot{y}_d - \left( k_{1y} y_e + k_{2y} \int_0^t y_e d\tau \right) \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$J\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}$$

اگر خطای ردیابی سرعت با جایگذاری رابطه (۲۱) در (۲۰) بازنویسی شده و برابر صفر قرار داده شود، با توجه به غیر صفر بودن ماتریس  $J\psi$  بخش دوم رابطه مطابق با رابطه (۲۲) برابر صفر خواهد شد.

$$\begin{aligned} \dot{x}_e + k_{1x} x_e + k_{2x} \int_0^t x_e d\tau &= 0 \\ \dot{y}_e + k_{1y} y_e + k_{2y} \int_0^t y_e d\tau &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} u_{xAPFi} &= \frac{B}{A} \left( \frac{1}{(y_t - y_i)^2 + (x_t - x_i)^2} \right) |u_{xdesi}| (y_i - y_t) \\ u_{yAPFi} &= \frac{-A}{B} \left( \frac{1}{(y_t - y_i)^2 + (x_t - x_i)^2} \right) |u_{ydesi}| (x_i - x_t) \end{aligned} \quad (16)$$

در شرایطی که چرخش پادساعت گرد شناور حول هدف لازم باشد طبق رابطه (۱۷) سرعت مطلوب شناور در نظر گرفته می شود.

$$\begin{aligned} u_{xAPFi} &= \frac{-B}{A} \left( \frac{1}{(y_t - y_i)^2 + (x_t - x_i)^2} \right) |u_{xdesi}| (y_i - y_t) \\ u_{yAPFi} &= \frac{A}{B} \left( \frac{1}{(y_t - y_i)^2 + (x_t - x_i)^2} \right) |u_{ydesi}| (x_i - x_t) \end{aligned} \quad (17)$$

که  $(x_t, y_t)$  موقعیت هدف مورد نظر،  $(x_i, y_i)$  موقعیت عامل و  $u_{ydesi}$  و  $u_{xdesi}$  سرعت های مطلوب شناور  $i$  ام برای رسیدن به موقعیت مطلوب است. ضرایب  $A$  و  $B$  به ترتیب متناسب با عکس اندازه قطر بیضی حول هدف در راستای محور  $x$  و  $y$  است.

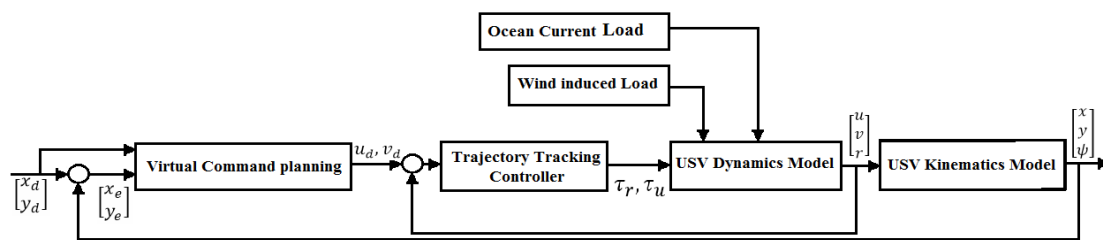
حال به منظور تعیین موقعیت مطلوب هر عامل به توجه به موقعیت مطلوب تعریف شده در رابطه (۱۳) و در نظر گرفتن سرعت اصلاحی در روابط (۱۶) و (۱۷)، مسیر مطلوب هر شناور را در هر گام مطابق رابطه (۱۸) طراحی شده است.

$$\begin{aligned} p_{di}(t + \Delta t) &= p_{di}(t) + (u_{desi} + u_{APFi}) \Delta t \\ u_{desi} &= K_{pi}(p_i(t) - C_{Vi}) \end{aligned} \quad (18)$$

که  $p_{di} = [x_{di} \ y_{di}]^T$ ،  $K_{pi} > 0$  که  $u_{APFi} = [u_{xAPFi} \ u_{yAPFi}]^T$ ،  $u_{desi} = [u_{xdesi} \ u_{ydesi}]^T$  و  $\Delta t$  گام زمانی است تا مسیر طراحی شده یک مسیر هموار باشد.

### ۳-۳ طراحی کنترل کننده شناور

در این بخش حلقه داخلی شکل ۳، به منظور طراحی کنترل کننده مود لغزشی پایانی غیر تکین انتگرالی (Integral Nonsingular Terminal Sliding Mode (INTSM)) برای شناور گسترش داده شده است. شکل ۶ بلوک دیاگرام طراحی شده برای کنترل ردیابی شناور بدون سرنشین فروتحریک را نشان می دهد. این ساختار پیشنهادی، با اضافه کردن بلوک طراحی سرعت مجازی و اثبات پایداری خطای موقعیت شناور پس از صفر شدن خطای سرعت، منجر به بهبود عملکرد کنترل کننده می شود.



شکل ۶: بلوک دیاگرام کنترل ردیابی مسیر مطلوب برای شناور بدون سرنشین

خطای ردیابی سرعت در زمان محدود به صفر می رسد و در نتیجه ی آن، خطای ردیابی موقعیت نیز به صفر میل می کند.

$$\tau_u = -m_{22}v r + d_{11}u + m_{11}\dot{u}_d - \frac{1}{\beta_1} \frac{1}{\alpha_1} m_{11}(u_e)^{2-\alpha_1} - m_{11} W_1 \operatorname{sgn}(S_{ITSM}) \quad (27)$$

$$\tau_r = (m_{22} - m_{11})uv + d_{33}r + \frac{m_{33}}{\left(\frac{m_{11}}{m_{22}}u - u_d\right)} \left[ \frac{m_{11}}{m_{22}} \dot{u} r + \frac{d_{22}}{m_{22}} \dot{v} + \Delta - \frac{1}{\beta_2} \frac{1}{\alpha_2} (\dot{v}_e)^{2-\alpha_2} - W_2 \operatorname{sgn}(S_{NTSM}) \right] \quad (28)$$

که  $\Delta = \dot{v}_d + \dot{r}u_d$  است و  $W_1$  و  $W_2$  پارامترهای کنترلی با مقدار مثبت هستند.

**اثبات** - تابع لیاپانوف به صورت رابطه (۲۹) را در نظر بگیرید.

$$V = \frac{1}{2} (S_{ITSM}^2 + S_{NTSM}^2) > 0 \quad (29)$$

با مشتق گیری از تابع لیاپانوف، جای گذاری معادلات (۲۷) و (۲۸) در آن و ساده سازی معادله، مشتق تابع لیاپانوف برابر رابطه (۳۰) است.

$$\dot{V} = -W_1 \beta_1 \alpha_1 (u_e)^{\alpha_2-1} S_{ITSM} \operatorname{sign}(S_{ITSM}) - W_2 \beta_2 \alpha_2 (\dot{v}_e)^{\alpha_2-1} S_{NTSM} \operatorname{sign}(S_{NTSM}) \quad (30)$$

اگر  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  حاصل تقسیم اعداد فرد و بزرگ تر از یک انتخاب شوند، تابع  $f_1(u_e) = (u_e)^{\alpha_2-1}$  و  $f_2(v_e) = (\dot{v}_e)^{\alpha_2-1}$  بزرگ تر از صفر بوده و در نتیجه رابطه (۳۱) کوچک تر یا مساوی صفر است:

$$\dot{V} = -W_1 f_1(u_e) |S_{ITSM}| - W_2 f_2(v_e) |S_{NTSM}| \leq 0 \quad (31)$$

بنابراین همگرا شدن به سطوح لغزش رابطه (۲۶) تضمین می شود. هنگامی که سیستم روی سطح لغزش  $S_{ITSM} = 0$  قرار می گیرد، باید همگرا شدن سیستم به سمت نقطه تعادل بررسی شود. با صفر قرار دادن سطح لغزش  $S_{ITSM}$  و مشتق گیری از آن، رابطه (۳۲) حاصل می شود.

$$\dot{u}_e(t) = -\beta_1 u_e(t)^{\alpha_1} \quad (32)$$

که به ازای  $\beta_1 > 0$  و  $1 < \alpha_1 < 2$  رابطه (۳۲) پایدار است و لذا خطای سرعت روبه جلو، پس از قرار گرفتن روی سطح لغزش در زمان محدود به صفر می رسد. معادله  $S_{NTSM} = 0$  نیز بایستی پایدار باشد تا خطای سرعت جانبی صفر شود که مطابق رابطه (۳۳) است.

$$v_e(t) + \beta_2 \dot{v}_e(t)^{\alpha_2} = 0 \quad (33)$$

رابطه (۳۳) معادل رابطه متناظر لم ۱ در مرجع [۱۶] است. در نتیجه همگرایی  $v_e$  و  $\dot{v}_e$  به صفر تضمین می شود. همچنین بر اساس تحلیل ابتدای این بخش، در رابطه (۲۵) با صفر شدن خطای ردیابی سرعت، خطای ردیابی موقعیت نیز به صفر میل خواهد کرد.

الگوریتم ۱: آرایش شناورهای سطحی

با تغییر متغیر  $x_I = \int_0^t x_e dt$  و  $y_I = \int_0^t y_e dt$  رابطه (۲۲) به شکل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم مطابق رابطه (۲۳) بازنویسی می شود:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_I + k_{1y} \dot{x}_I + k_{2y} x_I &= 0 \\ \ddot{y}_I + k_{1x} \dot{y}_I + k_{2x} y_I &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

که به ازای  $k_{1j}^2 - 4k_{2j} > 0$ ، ریشه های معادله (۲۳) به صورت رابطه (۲۴) حاصل می شود.

$$\begin{aligned} x_I &= c_{1x} e^{\frac{(-k_{1x} - \sqrt{k_{1x}^2 - 4k_{2x}})(t-t_{sum})}{2}} \\ &+ c_{2x} e^{\frac{(-k_{1x} + \sqrt{k_{1x}^2 - 4k_{2x}})(t-t_{sum})}{2}} \\ y_I &= c_{1y} e^{\frac{(-k_{1y} - \sqrt{k_{1y}^2 - 4k_{2y}})(t-t_{sum})}{2}} \\ &+ c_{2y} e^{\frac{(-k_{1y} + \sqrt{k_{1y}^2 - 4k_{2y}})(t-t_{sum})}{2}} \end{aligned} \quad (24)$$

با استفاده از  $x_e = \dot{x}_I$  و  $y_e = \dot{y}_I$  خطای موقعیت شناور به صورت رابطه (۲۵) خواهد بود.

$$\begin{aligned} x_e &= c_{1x} \frac{-k_{1x} - \sqrt{k_{1x}^2 - 4k_{2x}}}{2} e^{\frac{(-k_{1x} - \sqrt{k_{1x}^2 - 4k_{2x}})(t-t_{sum})}{2}} \\ &+ c_{2x} \frac{-k_{1x} - \sqrt{k_{1x}^2 - 4k_{2x}}}{2} e^{\frac{(-k_{1y} + \sqrt{k_{1x}^2 - 4k_{2x}})(t-t_{sum})}{2}} \\ y_e &= c_{1y} \frac{-k_{1y} - \sqrt{k_{1y}^2 - 4k_{2y}}}{2} e^{\frac{(-k_{1y} - \sqrt{k_{1y}^2 - 4k_{2y}})(t-t_{sum})}{2}} \\ &+ c_{2y} \frac{-k_{1y} - \sqrt{k_{1y}^2 - 4k_{2y}}}{2} e^{\frac{(-k_{1y} + \sqrt{k_{1y}^2 - 4k_{2y}})(t-t_{sum})}{2}} \end{aligned} \quad (25)$$

همان طور که از رابطه (۲۵) مشخص است بعد از صفر شدن خطای سرعت، خطای موقعیت نیز به صورت نمایی به صفر میل می کند.

در ادامه برای پایدارسازی خطای سرعت شناور، طراحی کنترل کننده در دو بخش طراحی شده است که یکی برای کنترل حرکت روبه جلو و دیگری برای حرکت جانبی شناور است. این کنترل کننده محدودیت روش ارائه شده در [۱۵] را مرتفع می سازد و علاوه بر مسیر دایروی، امکان ردیابی مسیر مستقیم را نیز برای شناور فراهم می کند. با فرض اینکه مسیر مطلوب پیوسته و مشتق پذیر است، سطح لغزشی برای این دو بخش به صورت رابطه (۲۶) در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} S_{ITSM} &= \int_0^t u_e(\tau) dt + \beta_1 u_e(t)^{\alpha_1} \\ S_{NTSM} &= v_e(t) + \beta_2 \dot{v}_e(t)^{\alpha_2} \end{aligned} \quad (26)$$

که  $v_e$  و  $u_e$  خطای ردیابی سرعت و  $\beta_1$  و  $\beta_2$  پارامتر ثابت مثبت هستند.  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  نیز در بازه (1, 2) اعداد حقیقی هستند که حاصل تقسیم دو عدد فرد در نظر گرفته می شود.

**لم ۱** - شناور با مدل سینماتیکی و دینامیکی (۱) و (۲) را در نظر بگیرید. با سطح لغزش (۲۶)، اگر قانون کنترلی مطابق روابط (۲۷) و (۲۸) باشد،



**هدف:** جانمایی یک گروه متشکل از N شناور برای محاصره یک هدف مشخص

در هر گام زمانی برای هر یک از N شناور اقدامات زیر انجام می شود:

۱- موقعیت خود را اندازه می گیرد و اطلاعات موقعیت را با همسایگان به اشتراک می گذارد.

۲- ناحیه ورنویی خود را محاسبه می نماید.

۳- مقدار مرکز جرم خود را مطابق رابطه (۱۳)، به عنوان نقطه مطلوب، محاسبه می نماید.

۴- اگر فاصله نقطه مطلوب از موقعیت هدف کمتر از شعاع  $R_{safe}$  باشد:

زاویه ورود شناور به میدان پتانسیل مطابق رابطه (۱۵) محاسبه می شود.

اگر  $\text{mod}(\psi_i - \theta_i, 2\pi) \leq \pi$  باشد، اصلاح مسیر توسط رابطه (۱۶) انجام می شود.

اگر  $\text{mod}(\psi_i - \theta_i, 2\pi) > \pi$  باشد، اصلاح مسیر توسط رابطه (۱۷) انجام می شود.

۵- نقطه مطلوب جدید شناور به وسیله رابطه (۱۸) محاسبه می شود.

۶- گشتاور کنترلی توسط رابطه (۲۷) و (۲۸) محاسبه می شود.

۷- موقعیت شناور بر اساس مدل (۱) به روزرسانی می شود.

نظر گرفته شده است. گشتاورهای اغتشاشی با استفاده از رابطه (۳) و (۶) و پارامترهای جدول ۱ محاسبه می شود.

جدول ۱: پارامترهای نیروی ناشی از باد برای شناور

نام متغیر	مقدار	واحد
$CD_t$	0.8	-
$(Y_w \leq \pi/2)CD_{IAF}$	0.55	-
$(Y_w > \pi/2)CD_{IAF}$	0.6	-
$\delta$	0.6	-
$A_{FW}$	0.24	m <sup>2</sup>
$A_{LW}$	1.6	m <sup>2</sup>
$s_L$	-0.6	m
$L_{Oa}$	0.7	m

شکل ۷ گشتاور و نیروی ناشی از نیروی باد را در سرعت میانگین باد ۱ متر بر ثانیه برحسب زاویه حمله نمایش می دهد. همان طور که از شکل ۷ مشخص است، مقدار گشتاور در هر راستا متفاوت است و طبق انتظار، نیروی باد در راستای جانبی که بیشترین مساحت در مقابل بردار عمود باد را داراست، بیشترین اندازه را دارد. به طور مشابه ضرایب جریان آب برحسب زاویه حمله در شکل ۸ نمایش داده شده است و بر مبنای آن گشتاور و نیروی ناشی از آن روی شناور با استفاده از رابطه (۶) محاسبه می شود.

چارچوب کنترل توزیع شده شناورهای بدون سرنشین طراحی شده در این مقاله، در الگوریتم ۱ خلاصه شده است. هر شناور موقعیت خود و موقعیت هدف را می داند. همچنین شناورها توانایی ارتباط با همسایگان خود به منظور دریافت اطلاعات موقعیتی آن ها را دارند.

**۴- نتایج شبیه سازی**

به منظور بررسی عملکرد کنترل کننده طراحی شده در این تحقیق، ابتدا عملکرد ردیابی مسیر مستقیم برای یک شناور در لایه دوم چارچوب پیشنهادی بررسی شده است. نتایج با کنترل مود لغزشی پایانی کلاسیک (TSMC) مقایسه و عملکرد آن تحت اغتشاش محیطی ناشی از باد و جریان آب دریا تحلیل شده است. سپس در بخش دوم چارچوب پیشنهادی برای آرایش بندی دایروی گروه شناورهای بدون سرنشین پیاده سازی شده و نتایج عملکرد آن برای رسیدن به آرایش مطلوب بررسی شده است.

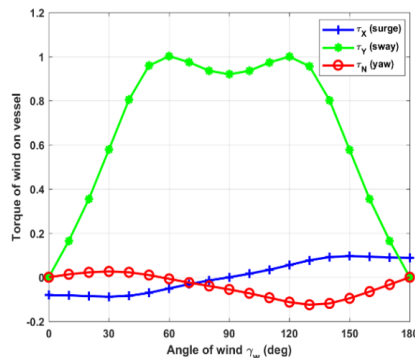
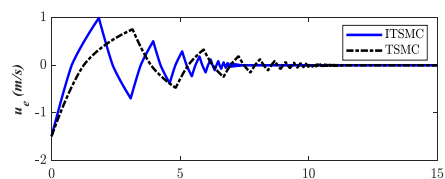
سطح لغزش در نظر گرفته شده برای روش مود لغزشی پایانی کلاسیک مطابق رابطه (۳۴) است:

$$\begin{aligned} S_u &= u_e + \beta_1 \left( \int u_e d\tau \right)^{p_1/q_1} \\ S_v &= v_e + \beta_2 (v_e)^{p_1/q_1} \end{aligned} \quad (34)$$

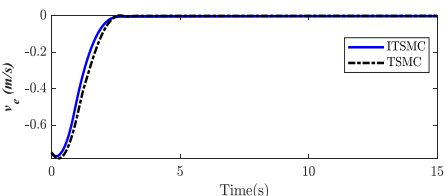
که  $p_1 = 3$  و  $q_1 = 5$  و  $\beta_1$  و  $\beta_2$  اعداد صحیح فرد مثبت است.

پارامترهای شناور در رابطه (۱) و (۲) به صورت  $m_{11} = 31.41$ ،  $m_{22} =$ ،  $d_{33} = 6.73$  و  $d_{22} = 65.54$ ،  $d_{11} = 8.806$ ،  $m_{33} = 38.95$ ،  $65.98$

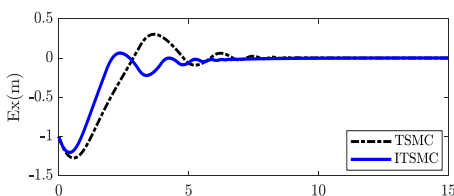
دستیابی و فاز لغزش است. در فاز دستیابی، حالت‌ها به سطح لغزش  $S_{ITSM} = 0$  می‌رسند و سپس در فاز لغزش خطای ردیابی سرعت در زمان محدود به صفر همگرا می‌شود. گشتاور کنترلی عامل برای طی مسیر مستقیم در شکل ۱۲ نمایش داده شده است که مویید عملکرد مناسب تر روش ITSMC است.



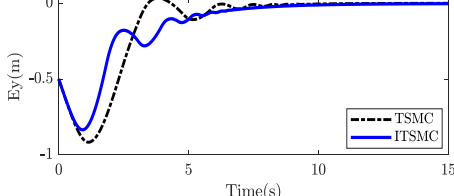
شکل ۷: گشتاور باد برحسب زاویه حمله در سرعت باد ۱ متر بر ثانیه



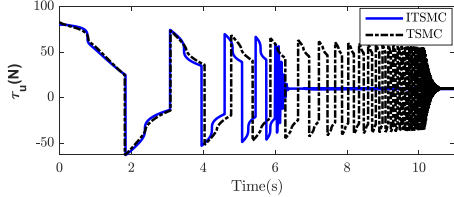
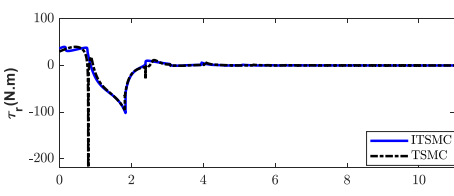
شکل ۹: مسیر مستقیم طی شده و مسیر مطلوب شناور در دو بعد



شکل ۱۰: خطای ردیابی سرعت مطلوب برای شناور



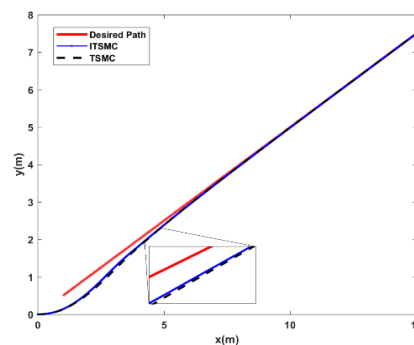
شکل ۱۱: خطای ردیابی موقعیت شناور



شکل ۱۲: ورودی‌های کنترلی شناور

با توجه به رابطه (۳۲)، زمان همگرایی خطا به صفر برای سرعت روبه‌جلو  $u$  از رابطه (۳۵) محاسبه می‌شود.

پارامترهای کنترل کننده در روابط (۲۷) و (۲۸) به صورت  $\alpha_1 = 1.6$  بخش طراحی سرعت مجازی به صورت  $k_{2y} = 1$  و  $k_{1y} = k_{1x} = 4$  و  $k_{2x} = 1$  در نظر گرفته شده است. شکل ۹ مسیر طی شده توسط شناور و مسیر مطلوب را در فضای دوبعدی نمایش می‌دهد و مشاهده می‌شود که روش ITSMC عملکرد بهتری نسبت به TSMC از نظر زمان همگرایی و دقت ردیابی دارد. در شکل ۱۰، خطای ردیابی سرعت مطلوب ترسیم شده است که نشان‌دهنده صفر شدن خطا در زمان محدود است.



شکل ۱۳: ورودی‌های کنترلی شناور

در شکل ۱۱ خطای ردیابی موقعیت برای شناور ترسیم شده است. پس از صفر شدن خطای ردیابی سرعت، خطای موقعیت نیز به صورت مجانبی به صفر همگرا می‌شود. زمان همگرایی خطای ردیابی سرعت شامل دو فاز

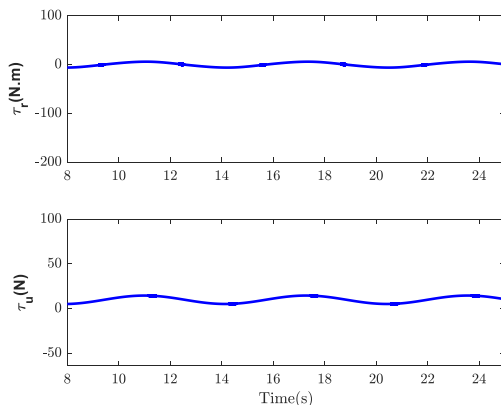
اغتشاش سینوسی  $\tau_{dji} = 0.2 * \sin(t)$  در رابطه (۲)، پس از شرایط گذرا رسم شده است.

جدول ۲: پارامترهای عملکرد ردیابی در استراتژی ITSMC و TSMC

TSMC	ITSMC	معیار عملکرد
0.323	0.305	$L_2(u_e)$
0.197	0.183	$L_2(v_e)$
0.383	0.315	$L_2(x_e)$
0.296	0.258	$L_2(y_e)$

جدول ۳: تلاش کنترلی میانگین برای سناریوهای در نظر گرفته شده

$L_2(\tau_r)$	$L_2(\tau_r)$	شماره سناریو
25.98	25.98	1
25.19	25.19	2
26.69	26.69	3



شکل ۱۳: ورودی های کنترلی شناور تحت اغتشاش سینوسی پس از حالت گذرا با توجه به شکل ۱۳ مشاهده می شود که پس از حالت گذرا، مقدار ورودی های کنترلی همچنان تغییراتی دارد تا شناور را در مسیر مطلوب حفظ نماید. این موضوع نشان دهنده توانایی کنترلی کننده طراحی شده برای حفظ شناور در مسیر مطلوب تحت تاثیر نیروهای محیطی است. بنابراین می توان نتیجه گرفت که ورودی های کنترلی (۲۷) و (۲۸) در مقابل اغتشاش کراندار مقاوم هستند.

در بخش دوم پیاده سازی الگوریتم آرایش بندی برای ۸ شناور در یک فضای دوبعدی ارائه شده است. پارامترهای شناورها با هم یکسان و مشابه بخش قبل است. هدف مورد نظر در نقطه (5,5) و مشخصات محوطه محاصره هدف  $a = 1/4$ ،  $b = 1/5$ ،  $r = 1$ ،  $k_\varphi = 10$  و  $R_{safe} = 2$  است. موقعیت اولیه شناورها به صورت تصادفی در یک محدوده مشخص از فضای کاری در نظر گرفته شده است. در شکل ۱۴ چیدمان شناورها برای محاصره هدف طی زمان ماموریت نمایش داده شده است.

$$t_{sum} = t_{reach} + t_s$$

$$= t_{reach} + \frac{\beta_1 \alpha_1}{(\alpha_1 - 1)} |u_e(t_{reach})|^{\alpha_1 - 1} \quad (35)$$

که  $t_{reach}$  زمان رسیدن سیستم به سطح لغزش  $s_{ITSM} = 0$  زمانی است که  $u_e(t_{reach} + t_s) = 0$  می رسد و  $t_{sum}$  زمانی است که خطا از  $u_e(0)$  به  $u_e(t_{sum}) = 0$  برسد. مشابه این محاسبه برای خطای ردیابی سرعت  $v$  نیز قابل انجام است. برای مقایسه کمی عملکرد دو کنترل کننده، شاخص عملکرد ردیابی میانگین طبق رابطه (۳۶) تعریف شده است.

$$L_2(error) = \sqrt{\frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} |error|^2 dt} \quad (36)$$

که  $T_f$  کل زمان شبیه سازی است. مقادیر این شاخص در جدول ۲ لیست شده و با استناد به این جدول مشاهده می شود که مقدار  $L_2(error)$  برای روش ITSMC کمتر از روش TSMC است و لذا روش پیشنهادی، عملکرد بهتری را ارائه می دهد.

برای مقایسه کمی تأثیر مدل سازی شرایط محیطی، سه سناریو مطابق زیر در نظر گرفته شده است:

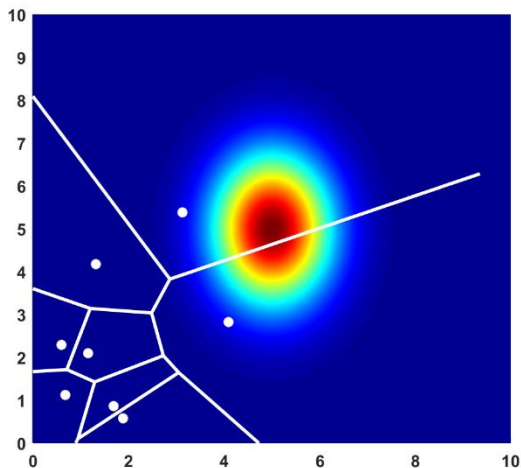
- ۱- گشتاور اغتشاشی در سه راستا به صورت  $3 \sin(0.2 * t)$
- ۲- پارامترهای محیطی  $V_c = 1 \frac{m}{s}$ ،  $V_w = 5 \frac{m}{s}$  و  $\beta_c = \beta_w = 26^\circ$
- ۳- پارامترهای محیطی  $V_c = 1 \frac{m}{s}$ ،  $V_w = 5 \frac{m}{s}$  و  $\beta_c = \beta_w = -26^\circ$

سناریو اول گشتاور اغتشاشی متداول در سایر مقالات مثل [۱۵] است، گشتاور اغتشاشی در سناریوی دوم به حرکت شناور در راستای مسیر مطلوب کمک می کند و گشتاور اغتشاشی در سناریوی سوم، نیروی مخالف در برابر حرکت شناور در مسیر مطلوب است. شاخص میانگین تلاش کنترلی برای مقایسه تأثیر این سناریوها، در رابطه (۳۷) تعریف می شود.

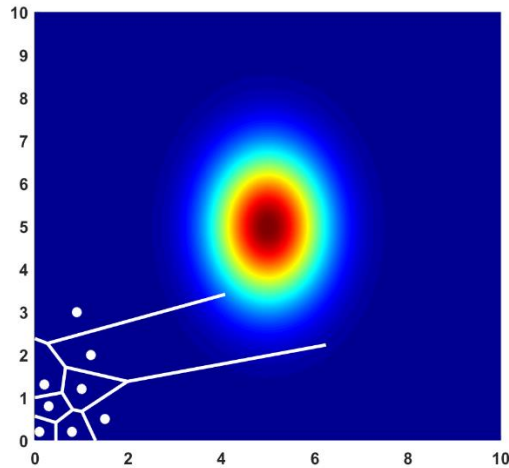
$$L_2(T) = \sqrt{\frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} |\tau|^2 dt} \quad (37)$$

مقادیر این شاخص در جدول ۳، نشان دهنده تلاش کنترلی میانگین کمتر، در سناریو دوم نسبت به سایر موارد است که مطابق انتظار نیز هست.

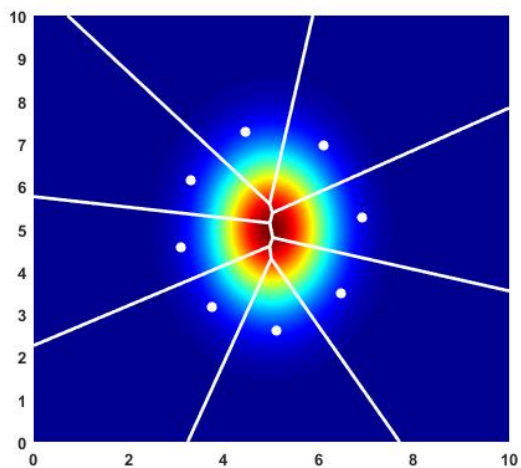
به منظور مقاوم بودن کنترل کننده پیشنهادی، اطلاعات کران بالای اغتشاش محیطی در تنظیم بهره کنترلی لحاظ شده است که در پیوست دوم تحلیل شده است. همچنین به منظور بررسی مقاوم بودن کنترل کننده رابطه (۲۷) و (۲۸) در شکل ۱۳ گشتاور کنترلی شناور برای غلبه بر



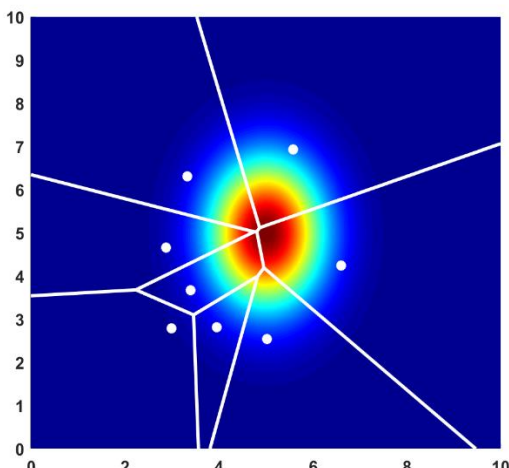
ب) لحظه ۱۰ ثانیه



الف) شرایط اولیه



د) لحظه ۳۰ ثانیه



ج) لحظه ۲۰ ثانیه

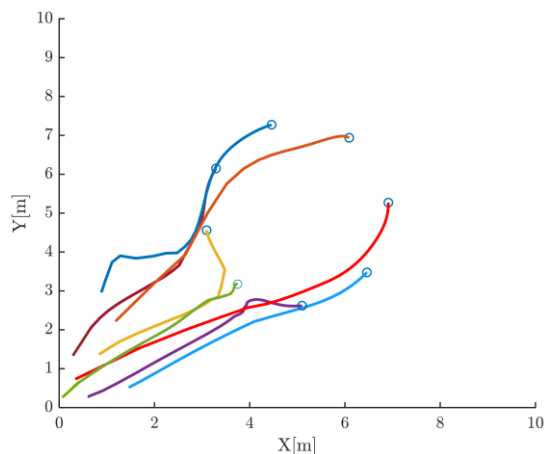
شکل ۱۴: آرایش بندی شناورها (الف) لحظه اولیه ب) در زمان ۱۰ ثانیه ج) در زمان ۲۰ ثانیه د) در زمان ۳۰ ثانیه

با توجه به شکل ۱۵ شناورها به آرایش مطلوب حول هدف دست یافته اند. در شکل ۱۶ مسیر یکی از شناورها، مجدداً در حضور تابع پتانسیل برای اصلاح مسیر مطلوب و بدون حضور آن نمایش داده شده است تا تأثیر آن واضح تر شود.

در شکل ۱۷ شبیه سازی برای گروه متشکل از ۴ شناور بدون سرنشین مشابه، در شرایطی که اغتشاش محیطی وجود ندارد، انجام شده است. نقاط خط چین نشان دهنده مسیر عامل با استفاده از الگوریتم ارائه شده در [۸] و خط توپر مسیر عامل با استفاده از الگوریتم پیشنهادی در این مقاله است.

همانطور که از شکل ۱۷ مشاهده می شود، هر دو الگوریتم به خوبی به آرایش مطلوب حول نقطه (3,5) دست یافته اند. البته مسیر طی شده توسط الگوریتم ارائه شده در مرجع [۸] به فرم دایروی است و لذا مسیر طولانی تری توسط شناور باید طی شود.

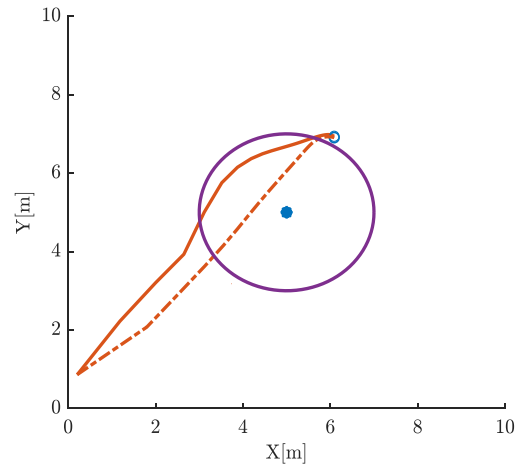
از شکل ۱۴ مشخص است که شناورها به خوبی هدف را محاصره نموده اند. در شکل ۱۵ مسیر طی شده توسط شناورها و آرایش نهایی آن ها حول هدف ترسیم شده است.



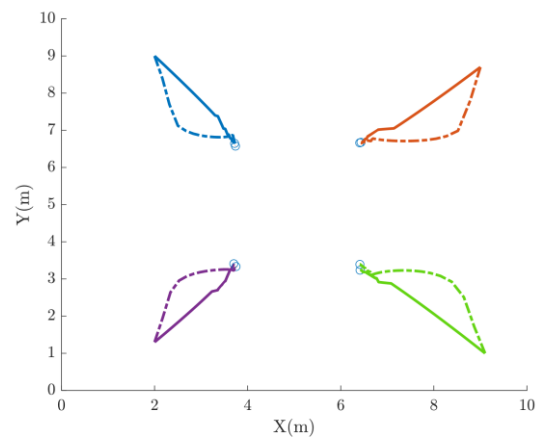
شکل ۱۵: مسیر شناورها طی زمان مأموریت

- اصلاح مسیر مطلوب با اعمال قید همواری مسیر در بهره گیری از توابع پتانسیل مجازی،
- ردیابی مسیر مطلوب تحت نیروهای محیطی دریا،
- ردیابی مسیر مطلوب در زمان محدود.

تشکیل آرایش بندی شناورها بر اساس اطلاعات محلی به عنوان بخش اصلی این پژوهش، برای دستیابی به یک آرایش دایروی برای محاصره یک هدف طراحی شده و نتایج ارائه شده در مقاله، دقت مناسب موقعیت نهایی عامل ها نسبت به موقعیت مطلوب را ارائه می کند. به علاوه، به عنوان دستاورد فرعی این پژوهش، توسعه الگوریتم اصلاح مسیر شناور با قید هموار بودن مسیر و تغییر تدریجی آن صورت گرفته و نتایج نمایانگر درستی عملکرد آن برای عدم ورود شناور به حریم هدف است. با توجه به نتایج شبیه سازی، در مطالعه مقایسه ای ارجحیت روش پیشنهادی مبتنی بر کنترل NTSM در ردیابی مسیر در حضور اغتشاش محیطی ناشی از باد و جریان آب، نسبت به عملکرد روش مود لغزشی پایانی بررسی شده است. پایداری سیستم حلقه بسته نیز بر اساس نظریه لیاپانوف اثبات شده و نتایج حاکی از بهبود دقت ردیابی مسیر مطلوب توسط روش توسعه داده شده است.



شکل ۱۶: مسیر شناور با الگوریتم دوری از هدف و بدون آن



شکل ۱۷: مسیر شناورها برای دستیابی به آرایش مطلوب توسط روش [۸] و روش پیشنهادی

در مجموع نتایج ارائه شده در شکل ۱۴، ۱۵ و ۱۷ نشان می دهد که چارچوب ارائه شده، اولاً طراحی مسیر هر شناور بین موقعیت اولیه و موقعیت نهایی برای تشکیل آرایش دایروی پیرامون هدف را به صورت هموار انجام می دهد. ثانیاً ردیابی این مسیر با دقت مناسبی توسط کنترل کننده لایه دوم صورت گرفته است. لازم به ذکر است که برای رسیدن به پوشش کافی از هدف در ماموریت مورد نظر، تعداد شناورهای گروه با توجه به شعاع حسگری یا عملگری محدود آن ها قابل تغییر است.

## ۸- نتیجه گیری

در این مقاله، هدف توسعه ی یک چارچوب توزیع شده برای جایابی گروه شناورهای بدون سرنشین در سطح دریا است. طراحی این چارچوب سلسله مراتبی، یک ابزار سازگار با محیط و شرایط مسئله ارائه می کند که مزیت های زیر را در بر دارد:

- طراحی مسیر با استفاده از اطلاعات محلی هر عامل مبتنی بر تقسیم بندی ورنویی،

## مراجع

- [14] Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L. and Levant, A., 2014. *Sliding mode control and observation*. New York: Springer New York.
- [15] Ghasemi, M. and Nersesov, S.G., 2014. Finite-time coordination in multiagent systems using sliding mode control approach. *Automatica*, 50(4), pp.1209-1216.
- [16] Ashrafiuon, H., Muske, K.R., McNinch, L.C. and Soltan, R.A., 2008. Sliding-mode tracking control of surface vessels. *IEEE transactions on industrial electronics*, 55(11), pp.4004-4012.
- [17] Elmokadem, T., Zribi, M. and Youcef-Toumi, K., 2017. Terminal sliding mode control for the trajectory tracking of underactuated Autonomous Underwater Vehicles. *Ocean Engineering*, 129, pp.613-625.
- [18] J. Heins, P.H., Jones, B.L. and Taunton, D.J., 2017. Design and validation of an unmanned surface vehicle simulation model. *Applied Mathematical Modelling*, 48, pp.749-774.
- [19] Liu, Z., Zhang, Y., Yu, X. and Yuan, C., 2016. Unmanned surface vehicles: An overview of developments and challenges. *Annual Reviews in Control*, 41, pp.71-93.
- [20] Fossen, T.I., 2011. *Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control*. John Wiley & Sons.
- [21] Blendermann, W., 1994. Parameter identification of wind loads on ships. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 51(3), pp.339-351.
- [22] Chen, Q., Yin, Q., Fan, A., Sun, X. and Mou, X., 2015, June. Research on the calculation methods of wind load coefficients of inland cruise ship. In *2015 International Conference on Transportation Information and Safety (ICTIS)* (pp. 871-876). IEEE.
- [23] Haddara, M.R. and Soares, C.G., 1999. Wind loads on marine structures. *Marine Structures*, 12(3), pp.199-209.
- [1] Tan, Y. and Zheng, Z.Y., 2013. Research advance in swarm robotics. *Defence Technology*, 9(1), pp.18-39.
- [2] Faghih, S. and Shojaei, K., 2017. Partial State Feedback Control for Trajectory Tracking of Underactuated Autonomous Underwater Vehicle by Using Neural Adaptive Dynamic Surface Control. *Journal of Control*, 11(2), pp.43-54.
- [3] Qiao, L. and Zhang, W., 2017. Adaptive non-singular integral terminal sliding mode tracking control for autonomous underwater vehicles. *IET Control Theory & Applications*, 11(8), pp.1293-1306.
- [4] B. Liu, Y. and Bucknall, R., 2016. The angle guidance path planning algorithms for unmanned surface vehicle formations by using the fast marching method. *Applied Ocean Research*, 59, pp.327-344.
- [5] Do KD., 2011. Formation control of under-actuated ships with elliptical shape approximation and limited communication ranges. *Automatica*, 48, pp.1380-1388.
- [6] Cui, R., Ge, S.S., How, B.V.E. and Choo, Y.S., 2010. Leader-follower formation control of under-actuated autonomous underwater vehicles. *Ocean Engineering*, 37(17-18), pp.1491-1502.
- [7] Fahimi, F., 2007. Sliding-mode formation control for under-actuated surface vessels. *IEEE Transactions on Robotics*, 23(3), pp.617-622.
- [8] Xie, W., Ma, B., Fernando, T. and Iu, H.H.C., 2018. A new formation control of multiple under-actuated surface vessels. *International Journal of Control*, 91(5), pp.1011-1022.
- [9] Cortes, J., Martinez, S., Karatas, T. and Bullo, F., 2004. Coverage control for mobile sensing networks. *IEEE Transactions on robotics and Automation*, 20(2), pp.243-255.
- [10] Mohseni, F., Doustmohammadi, A. and Menhaj, M.B., 2014. Distributed receding horizon coverage control for multiple mobile robots. *IEEE Systems Journal*, 10(1), pp.198-207.
- [11] Khatib, O., 1986. Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots. *Autonomous robot vehicles* (pp. 396-404). Springer, New York, NY.
- [12] Sahu, B.K. and Subudhi, B., 2017. Potential function-based path-following control of an autonomous underwater vehicle in an obstacle-rich environment. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 39(8), pp.1236-1252.
- [13] Rezaee, H. and Abdollahi, F., 2013. A decentralized cooperative control scheme with obstacle avoidance for a team of mobile robots. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 61(1), pp.347-354.

## پیوست ۱

با توجه به رابطه (۱) در متن مقاله، رابطه (پ) حاصل می شود:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (پ)$$

با توجه به رابطه (پ) خطای سرعت ردیابی در رابطه (۲۰)، به صورت (پ۲) بازنویسی می شود:

$$\begin{bmatrix} u_e \\ v_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} - \dot{x}_d + \left( k_{1x} x_e + k_{2x} \int_0^t x_e d\tau \right) \\ \dot{y} - \dot{y}_d + \left( k_{1y} y_e + k_{2y} \int_0^t y_e d\tau \right) \end{bmatrix} \quad (۲پ)$$

ماتریس  $J_\psi$  مطابق (۳پ) تعریف می شود:

$$J_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (۳پ)$$

با توجه به رابطه (۱۹)، خطای ردیابی به صورت رابطه (۴پ) است:

$$\begin{bmatrix} u_e \\ v_e \end{bmatrix} = J_\psi \begin{bmatrix} \dot{x}_e + k_{1x} x_e + k_{2x} \int_0^t x_e d\tau \\ \dot{y}_e + k_{1y} y_e + k_{2y} \int_0^t y_e d\tau \end{bmatrix} \quad (۴پ)$$

با توجه به غیرصفر بودن ماتریس  $J_\psi$ ، صفر شدن خطای ردیابی سرعت رابطه (۴پ) به معنای صفر شدن بخش دوم عبارت سمت راست این رابطه است که وابسته به خطای ردیابی موقعیت است. لذا رابطه (۲۲) در متن مقاله حاصل می شود.

### پیوست ۲

مشتق تابع لیاپانوف رابطه (۲۹) به صورت زیر است:

$$\dot{V} = S_{ITSM} \dot{S}_{ITSM} + S_{NTSM} \dot{S}_{NTSM} \quad (۵پ)$$

همچنین با توجه به رابطه (۲۶) در متن مقاله، مشتق زمانی سطوح لغزش به صورت رابطه (۶پ) است.

$$\begin{aligned} \dot{S}_{ITSM} &= u_e + \beta_1 \alpha_1 \dot{u}_e u_e(t)^{\alpha_1-1} \\ &= u_e + \beta_1 \alpha_1 \left( \frac{1}{m_{11}} (m_{22} v r - d_{11} u + \tau_u) - \dot{u}_d \right) u_e(t)^{\alpha_1-1} \\ \dot{S}_{NTSM} &= \dot{v}_e(t) + \beta_2 \alpha_2 \dot{v}_e v_e(t)^{\alpha_2-1} \\ &= \dot{v}_e(t) + \beta_2 \alpha_2 \dot{v}_e(t)^{\alpha_2-1} \left( \frac{m_{11}}{m_{22}} \dot{u} r + \frac{d_{22}}{m_{22}} \dot{v} - \Delta - \frac{1}{m_{33}} \left( \frac{m_{11}}{m_{22}} u - u_d \right) (-m_{22} - m_{11}) uv - d_{33} r + \tau_r \right) \end{aligned} \quad (۶پ)$$

با جایگذاری ورودی های کنترلی مطابق رابطه (۲۷) و (۲۸) در رابطه (۶پ)، مشتق تابع لیاپانوف به صورت (۷پ) است:

$$\dot{V} = -W_1 \beta_1 \alpha_1 (u_e)^{\alpha_2-1} S_{ITSM} \text{sign}(S_{ITSM}) - W_2 \beta_2 \alpha_2 (\dot{v}_e)^{\alpha_2-1} S_{NTSM} \text{sign}(S_{NTSM}) \quad (۷پ)$$

در صورتیکه اغتشاش محیطی را نیز در روابط در نظر بگیریم، مشتق تابع لیاپانوف به صورت رابطه (۸پ) خواهد بود.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -W_1 \beta_1 \alpha_1 (u_e)^{\alpha_2-1} S_{ITSM} \text{sign}(S_{ITSM}) + \frac{\beta_1 \alpha_1}{m_{11}} (u_e)^{\alpha_2-1} \tau_{du} - W_2 \beta_2 \alpha_2 (\dot{v}_e)^{\alpha_2-1} S_{NTSM} \text{sign}(S_{NTSM}) - \frac{\beta_2 \alpha_2}{m_{33}} (\dot{v}_e)^{\alpha_2-1} \left( \frac{m_{11}}{m_{22}} u - u_d \right) \tau_{dr} \end{aligned} \quad (۸پ)$$

که با توجه به کراندار فرض نمودن اغتشاش داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1 \alpha_1}{m_{11}} (u_e)^{\alpha_2-1} \tau_{du} &\leq \rho_1(t) T_{du} \\ \frac{\beta_2 \alpha_2}{m_{33}} (\dot{v}_e)^{\alpha_2-1} \left( \frac{m_{11}}{m_{22}} u - u_d \right) \tau_{dr} &\leq \rho_2(t) T_{dr} \end{aligned} \quad (۹پ)$$

بنابراین بایستی مقادیر بهره کنترلی  $W_1$  و  $W_2$  به قدر کافی بزرگ باشند تا سیستم پایدار باشد.