

## ارائه روش جدید درونیابی پایدار در طراحی خودخلبان مقاوم زمان بندی بهره

سید محمدجواد معافی مدنی<sup>۱</sup>، ایمان محمدزمان<sup>۲</sup><sup>۱</sup> فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، javadmadany@yahoo.com<sup>۲</sup> استادیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، mohammadzaman@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۱/۱/۱۹، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۱/۳/۲۴)

**چکیده:** در این مقاله یک روش جدید درونیابی پایدار برای طراحی خودخلبان مقاوم یک رهگیر ارائه شده است. روش ارائه شده بر مبنای درونیابی بین نواحی مشترک پایدار کنترل کننده های محلی بوده و تضمین پایداری سیستم حلقه بسته را در کل فضا می نماید. برای پیدا کردن نواحی پایدار هر کنترل کننده محلی از ابزار v-gap metric استفاده شده و از روش کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه  $H_\infty$  برای طراحی کنترل کننده های محلی استفاده شده است. همچنین پیچیدگی روش ارائه شده نسبت به سایر روش های درونیابی حفظ کننده پایداری کمتر می باشد. نتایج شبیه سازی سه درجه آزادی نشان دهنده تضمین کارآیی و پایداری سیستم حلقه بسته در طول مسیر پرواز می باشد.

**کلمات کلیدی:** خودخلبان مقاوم، درونیابی حفظ کننده پایداری، کنترل کننده زمان بندی بهره، v-gap metric.

## A New Stability Preserving Interpolation Method in Robust Gain Scheduling Autopilot Design

Mohammad Javad Moafi Madani, Iman Mohammadzaman

**Abstract:** This paper presents a new stability preserving interpolation technique for robust gain scheduling autopilot design. The interpolation method is based on interpolation in the common stability region of local controllers and generates a gain-scheduled controller that is stabilizing at every operating point of a closed loop system. For selection of stability region of local controllers, the notion of the v-gap metric and its connection to robust loop-shaping theory is used. The proposed method facilitates the design of gain-scheduled controllers that preserves stability of the closed loop system. The simulation results given show the generality and effectiveness of the proposed control strategy in terms of the stability, performance and robustness, of the system.

**Keywords:** Robust autopilot, stable interpolation, gain scheduling controller, v-gap metric.

Q: فشار دینامیکی

S: سطح مرجع

D: قطر

 $V_M$ : سرعت رهگیر

X: نیروی وارد بر رهگیر در راستای X بدنی

Y: نیروی وارد بر رهگیر در راستای Y بدنی

Z: نیروی وارد بر رهگیر در راستای Z بدنی

L: گشتاور حول محور رول

### فهرست علائم

 $\mathcal{RH}_\infty$ : فضای توابع کسری حقیقی محدود و آنالیتیک در نیمه

راست صفحه مختلط

 $\bar{\sigma}(\cdot)$ : بزرگترین مقدار تکین ماتریس $\underline{\sigma}(\cdot)$ : کوچکترین مقدار تکین ماتریس $\|\cdot\|_\infty$ : نرم بی نهایت ماتریس $\mathcal{E}[G_S, k_\infty]$ : حاشیه پایداری مقاوم سیستم  $[G_S, k_\infty]$  $\gamma$ : معکوس حاشیه پایداری مقاوم

$M$ : گشتاور حول محور پیچ

$N$ : گشتاور حول محور یابو

$P$ : سرعت زاویه‌ای حول محور  $X$  بدنی

$Q$ : سرعت زاویه‌ای حول محور  $Y$  بدنی

$R$ : سرعت زاویه‌ای حول محور  $Z$  بدنی

$m$ : جرم رهگیر

$I_y$ : ممان اینرسی طولی

$I_z$ : ممان اینرسی عرضی

$\delta$ : زاویه بالک عملگر

$C_{z\delta}$ : تغییرات  $Z$  ناشی از تغییرات زاویه بالک

$C_{z\alpha}$ : تغییرات  $Z$  ناشی از تغییرات زاویه حمله

$C_{m\delta}$ : تغییرات  $M$  ناشی از تغییرات زاویه بالک

$C_{m\alpha}$ : تغییرات  $M$  ناشی از تغییرات زاویه حمله

### ۱- مقدمه

طراحی خودخلبان برای رهگیرها و تحلیل پایداری و کارایی آن در طول مسیر پروازی یکی از مسائل مورد توجه مهندسين کنترل بوده و تلاش‌های تحقیقاتی زیادی را به خود جلب نموده است [۱]-[۳]. پیچیدگی‌های حاکم بر دینامیک رهگیر مثل رفتار غیرخطی، وجود نامعینی و دینامیک وابسته به پارامتر منجر به گسترش تحقیقات پیرامون طراحی کنترل کننده برای این سیستم و تحلیل پایداری و کارایی آن شده است. از این میان، روش زمان بندی بهره یکی از رایج ترین روش‌ها در تحلیل پایداری و طراحی کنترل کننده برای سیستم‌های غیرخطی وابسته به پارامتر و همچنین طراحی خودخلبان رهگیرها می‌باشد [۴]. در حالت کلی می‌توان روش‌های زمان بندی بهره را با توجه به نحوه خطی سازی مدل غیرخطی به دو دسته زمان بندی بهره بر مبنای مدل خطی متغیر با پارامتر و زمان بندی بهره بر مبنای مدل خطی غیرمتغیر با زمان تقسیم کرد [۵]. در روش‌های مبتنی بر مدل خطی متغیر با پارامتر، دینامیک سیستم غیرخطی به صورت یک سیستم خطی با ماتریس‌های فضای حالت تغییر پذیر با زمان مدل می‌شود و تحلیل پایداری و طراحی کنترل کننده در این روش‌ها با استفاده از تحلیل تابع لیاپانوف و یا قضیه بهره کوچک انجام می‌شود [۶]. تحلیل پایداری با استفاده از تابع لیاپانوف و یا قضیه بهره کوچک محافظه کارانه بوده و در نهایت ساختار کنترل کننده از نظر شبیه سازی و پیاده سازی پیچیده خواهد بود. علاوه بر آن ممکن است شرایط امکان پذیری توابع لیاپانوف برقرار نباشد و وجود کنترل کننده فراگیر تضمین شده نیست (منظور از کنترل کننده فراگیر کنترل کننده زمان بندی بهره است که از ترکیب کنترل کننده‌های محلی و احتمالا دینامیک سیستم وابسته به پارامتر به دست آمده است).

در روش‌های مبتنی بر مدل خطی تغییر ناپذیر با زمان عموماً چند سیستم خطی از روی سیستم غیرخطی اولیه در نقاط کار مختلف به دست آمده و برای هر کدام از آن‌ها کنترل کننده محلی طراحی می‌گردد که لزوماً دارای ساختار مشابه نیستند و در نهایت به منظور دست یافتن به

کنترل کننده زمان بندی بهره نهایی بین این کنترل کننده‌ها، درونیابی انجام می‌شود [۷]-[۸]. روش‌های مبتنی بر مدل خطی تغییر ناپذیر با زمان، روش‌های بدون محافظه کاری بوده و وجود کنترل کننده زمان بندی بهره همواره در این روش‌ها تضمین شده است ولی تحلیل پایداری در این روش‌ها با پیچیدگی همراه است. در سال‌های گذشته از سوئیچینگ سخت، درونیابی بین صفر و قطب و بهره تابع تبدیل، درونیابی بین ضرایب تابع تبدیل کنترل کننده‌های محلی در هنگام انتقال از یک ناحیه به ناحیه دیگر و ترکیب خروجی کنترل کننده‌های محلی استفاده شده است [۸]-[۹]. تمام این روش‌ها جزء روش‌های قدیمی مبتنی بر مدل خطی بوده و به طور خلاصه می‌توان گفت مزیت این روش‌ها در سادگی طراحی و پیاده سازی کنترل کننده زمان بندی بهره نهایی می‌باشد و مهمترین عیب آن‌ها نیز عدم تضمین پایداری کنترل کننده فراگیر است.

اما از میان روش‌های مبتنی بر مدل خطی تغییر ناپذیر با زمان، می‌توان به روش‌هایی اشاره کرد که در آن‌ها در مورد پایداری سیستم زمان بندی بهره نهایی نیز تضمین‌هایی داده شده است. یکی از روش‌های درونیابی که در آن در مورد پایداری سیستم زمان بندی بهره نهایی بحث شده است روش درونیابی فیدبک حالت و مشاهده گر می‌باشد. این روش به علت درونیابی بین چندین ماتریس فضای حالت دارای پیچیدگی فراوانی است ولی در مقالاتی برای اثبات پایداری این روش ایده‌هایی مطرح شده است [۱۰]. یکی دیگر از روش‌هایی که توانایی تضمین پایداری سیستم زمان بندی بهره نهایی را دارد روش‌های درونیابی بین ماتریس‌های نمایش پارامتر یولای<sup>۱</sup> است و در نتیجه ساختار کنترل کننده زمان بندی بهره نهایی به صورت ترکیب کسری خطی از سیستم وابسته به پارامتر با کنترل کننده‌های محلی می‌باشد [۱۱]-[۱۳]. در [۱۲] و [۱۳] یک روش درونیابی حفظ کننده پایداری بر مبنای درونیابی روی پارامترهای یولای ارائه شده و از آن برای طراحی خودخلبان رهگیر استفاده شده است. این مهمترین شرط درونیابی در این روش شرط پوشش پایداری است. این شرط بیان می‌کند که هر کنترل کننده محلی باید توانایی تضمین پایداری برای یک همسایگی باز حول نقطه نامی را به ازای پارامترهای فریز شده سیستم داشته باشد و درونیابی نیز درون نواحی مشترک پایداری امکان پذیر است. اما در این روش درجه کنترل کننده فراگیر بسیار بالاتر از درجه کنترل کننده‌های محلی بوده و پیاده سازی آن دارای پیچیدگی فراوانی می‌باشد. همچنین پایداری سیستم وابسته به پارامتر در مرحله طراحی مدنظر قرار نگرفته و تنها پایداری سیستم به ازای پارامترهای فریز شده مورد بررسی قرار می‌گیرد و بعد از مرحله طراحی با بررسی یک قید روی بیشینه نرخ تغییرات متغیر زمان بندی بهره، پایداری سیستم وابسته به پارامتر نهایی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

به منظور بهبود مشکلات و پیچیدگی‌های بیان شده در بالا، در این مقاله یک روش جدید برای درونیابی پایدار بین کنترل کننده‌های محلی ارائه شده است. مهمترین شرط درونیابی در این روش، شرط پوشش

<sup>1</sup> Youla parameter

بیان کننده مقدار مقاومت سیستم در برابر نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول سیستم نامی می باشد، در این مقاله از روش شکل دهی حلقه  $H_\infty$  برای طراحی کنترل کننده محلی استفاده می شود. زیرا در این روش نیز کنترل کننده مقاوم به گونه ای طراحی می شود که حاشیه پایداری مقاوم سیستم در برابر نامعینی های روی ضرایب نسبت به هم اول سیستم نامی بیشینه گردد. البته به منظور رفع مشکل درجه بالای کنترل کننده روش شکل دهی حلقه  $H_\infty$  از یک نوع روش طراحی استفاده شده است تا کنترل کننده مقاوم طراحی شده دارای درجه پایینی باشد. این روش به نام روش کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه  $H_\infty$  شناخته می شود. تحقق فضای حالت  $G_s$  را به صورت زیر در نظر بگیرد:

$$G_s = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (1)$$

که در آن  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times n_u}$ ,  $C \in R^{n_y \times n}$ ,  $D \in R^{n_y \times n_u}$  سیستم شکل دهی شده در روش شکل دهی حلقه  $H_\infty$  می باشد [۱۶]. تحقق مینمال فضای حالت ضرایب نسبت هم اول  $G_s$  به صورت زیر می باشد [۱۶]:

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} A+LC & L \\ E^{-1/2}C & E^{-1/2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} B+LD & L \\ E^{-1/2}D & E^{-1/2} \end{bmatrix}$$

که در آن  $E = I + DD^T$  و  $L = -(BD^T + ZC^T)E^{-1}$  ماتریس  $Z$  جواب معادله جبری ریکاتی زیر است:

$$(A - BF^{-1}D^TC)Z + Z(A - BF^{-1}D^TC)^T - ZC^TE^{-1}CZ + BF^{-1}B^T = 0 \quad (3)$$

که در رابطه فوق  $F = I + D^TD$  می باشد. علاوه بر آن تحقق فضای حالت سیستم کلی شده<sup>۱</sup> متناظر با روش شکل دهی حلقه به صورت زیر به دست می آید [۱۶]:

$$P = \begin{bmatrix} A_s & -LE^{1/2} & B \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ E^{1/2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I_{n_u} \\ D \end{bmatrix} \\ C & E^{1/2} & D \end{bmatrix} \quad (4)$$

لم زیر شرایط وجود کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه  $H_\infty$  که با  $K_\infty$  نمایش داده می شود را بیان می نماید:

لم ۱: تحقق فضای حالت سیستم شکل دهی شده  $G_s$  مطابق رابطه (۱) و نرم بی نهایت تابع تبدیل حلقه بسته از اغتشاش به خروجی مطابق رابطه زیر می باشد:

$$\left\| \begin{bmatrix} K_\infty \\ I \end{bmatrix} (I - G_s K_\infty)^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\| \leq \gamma = \varepsilon^{-1} \quad (5)$$

پایداری وابسته به پارامتر است بطوریکه با برقراری شرط مذکور، پایداری کلی سیستم تضمین شده و ساختار ساده ای برای کنترل کننده فراگیر بدست می آید. تفاوت بین این شرط با شرط پوشش پایداری بیان شده در مراجع [۱۲] و [۱۳] این است که در مراجع مذکور تنها به بررسی پایداری سیستم برای مقادیر فریز شده می پردازد. این پایداری بدین معنی است که سیستم وابسته به پارامتر به ازای مقادیر ثابت متغیر زمان بندی بهره به صورت یک سیستم LTI تبدیل شده و سپس پایداری آن مورد بررسی قرار می گیرد. ولیکن در شرط پایداری وابسته به پارامتر ارائه شده در این مقاله، یک همسایگی باز حول نقطه نامی مشخص می شود که سیستم وابسته به پارامتر به ازای تغییرات پارامترهایش درون ناحیه مورد نظر به صورت کلی پایدار باشد. پایداری کلی در این جا بدین معنی است که سیستم وابسته به پارامتر به ازای تغییرات متغیر زمان بندی بهره (بدون فریز شدن)، پایدار بماند. در حقیقت در شرط پوشش پایداری وابسته به پارامتر، بررسی مقادیر ویژه سیستم به تنهایی کافی نمی باشد و لذا برای پیدا کردن همسایگی باز حول هر نقطه نامی به گونه ای که شرط مورد نظر را ارضا کند، ابزار v-gap metric پیشنهاد شده است. با استفاده از این ایده برای هر کنترل کننده محلی نواحی محلی پایدار مشخص شده و روشی برای درونیایی بین دو کنترل کننده محلی مجاور درون ناحیه اشتراک پایداری دو کنترل کننده ارائه می شود. همچنین کنترل کننده فراگیر ارائه شده در این مقاله تنها با ترکیب کنترل کننده های محلی به دست می آید ولی در سایر روش ها با ترکیب کنترل کننده های محلی و سیستم وابسته به پارامتر به دست می آید. در حقیقت با ورود دینامیک سیستم وابسته به پارامتر به دینامیک کنترل کننده فراگیر، دشواری و پیچیدگی فراوانی در پیاده سازی کنترل کننده فراگیر حاصل می شود که با این ایده این مشکل برطرف می گردد.

از آنجایی که قضایای پایداری که توسط ابزار v-gap metric معرفی می شود با روش شکل دهی حلقه  $H_\infty$  مرتبط است، بنابراین در این مقاله برای طراحی کنترل کننده محلی از روش کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه  $H_\infty$  استفاده شده است که در آن درجه کنترل کننده مقاوم صفر بوده و درجه کنترل کننده فراگیر تنها برابر درجه وزن های شکل دهی حلقه می باشد و لذا منجر به یک کنترل کننده با درجه نسبی پایین می گردد که مشکلات پیاده سازی عملی را بر خلاف روش کلاسیک شکل دهی حلقه  $H_\infty$  نخواهد داشت. این ویژگی باعث سادگی فراوان در پیاده سازی کنترل کننده زمان بندی بهره نهایی خواهد شد [۱۴].

## ۲- کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه $H_\infty$

برای طراحی کنترل کننده زمان بندی بهره با استفاده از درونیایی پایدار بین کنترل کننده های محلی، لازم است کنترل کننده های محلی توانایی تضمین پایداری برای یک همسایگی باز حول نقطه نامی را داشته باشند. از آنجایی که در این مقاله از ابزار v-gap metric برای پیدا کردن همسایگی باز حول نقطه نامی استفاده می شود و این ابزار در حقیقت

<sup>1</sup> Generalized plant

در این قسمت به ارائه برخی تعاریف و فرضیات مورد استفاده در مقاله پرداخته شده است. برای سادگی فرض می شود سیستم وابسته به پارامتر تنها به یک پارامتر وابستگی دارد و تعمیم این روش برای حالت بیشتر از یک پارامتر به سادگی قابل انجام است.

تعریف ۱: سیستم خطی تغییر پذیر با پارامتر  $G(\rho)$  به همراه مجموعه بسته  $\Gamma \subset R$  که بیان گر محدوده تغییرات متغیرهای زمان بندی بهره است ( $\rho \in \Gamma$ )، داده شده است. همچنین فرض کنید به ازای مقادیر ثابت  $\rho_1, \dots, \rho_q \in \Gamma$  کنترل کننده های خطی تغییرناپذیر با زمان  $K_1, \dots, K_\rho$  طراحی شده است به گونه ای که هر کنترل کننده قادر به حفظ پایداری سیستم خطی غیرمتغیر با زمان  $G(\rho_i)$  متناظر با خود باشد. کنترل کننده تغییرپذیر با پارامتر  $K(\rho)$  را که از روی  $K_1, \dots, K_\rho$  ساخته شده است، کنترل کننده حفظ کننده پایداری می گویند اگر شرایط زیر برقرار باشد [۱۳]:

۱. ضرایب  $K(\rho)$  به صورت توابع پیوسته ای از  $\rho$  باشند.

۲.  $K(\rho_i) = K_i$  for  $i=1, \dots, q$

۳.  $K(\rho)$  سیستم  $G(\rho)$  را به ازای تمام  $\rho \in \Gamma$  پایدار کند.

با استفاده از تعریف ۱، در این مقاله یک روش درونیایی حفظ کننده پایداری ارائه شده است که در آن مهمترین شرطی که روی کنترل کننده های خطی تغییرناپذیر با زمان که بین آنها درونیایی پایدار صورت می گیرد؛ شرط پوشش پایداری سیستم وابسته به پارامتر می باشد. این شرط بدین معنی است که هر کنترل کننده محلی در این حالت بایستی توانایی تضمین پایداری سیستم حلقه بسته به ازای یک ناحیه در اطراف نقطه نامی به ازای تغییرات پارامترهای سیستم را نیز داشته باشد. ولیکن در روش های قبلی درونیایی حفظ کننده پایداری، هر کنترل کننده محلی بایستی سیستم را در یک ناحیه در اطراف نقطه نامی به صورت فریز شده پایدار کند.

تعریف ۲ (شرط پوشش پایداری وابسته به پارامتر): سیستم خطی تغییر پذیر با پارامتر  $G(\rho)$  به همراه مجموعه بسته  $\Gamma \subset R$  که بیان گر محدوده تغییرات متغیرهای زمان بندی بهره است را در نظر بگیرید که کنترل کننده های محلی  $K_1, K_2, \dots, K_q$  در نقاط کار  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$  به گونه ای طراحی شده اند که  $K_i$  سیستم نامی  $G(\rho_i)$  را پایدار کند. حال اگر به ازای هر کنترل کننده محلی  $K_i$  یک همسایگی باز  $U_i$  که شامل  $\rho_i$  است وجود داشته باشد به گونه ای که  $K_i$  سیستم  $G(\rho)$  را به ازای محدوده تغییرات  $\rho \in U_i$ ،  $i=1, \dots, q$  پایدار کند و شرط  $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^q U_i$  برقرار باشد، آن گاه گفته می شود که شرط پوشش پایداری وابسته به پارامتر ارضا شده است.

از آنجایی که در این مقاله هدف آن است سیستم وابسته به پارامتر به ازای یک محدوده تغییرات پارامتر به صورت کلی پایدار بماند، آزمون موقعیت مقادیر ویژه کافی نمی باشد. لذا برای این کار ابزار v-gap

کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه  $H_\infty$  ( $k_\infty$ ) به گونه ای که رابطه (۵) کمینه گردد؛ وجود دارد اگر  $\gamma > 1$  و ماتریس معین مثبت  $R$  وجود داشته باشد بطوریکه دو نامساوی زیر را ارضا نمایند:

$$R(A+LC)^T + (A+LC)R < 0 \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} AR+RA^T - \gamma BB^T & RC^T - \gamma BD^T & -LE^{1/2} \\ CR - \gamma BD^T & -\gamma E & E^{1/2} \\ -E^{1/2}L^T & E^{1/2} & -\mathcal{N}_{n_y} \end{pmatrix} < 0 \quad (7)$$

□

بعد از بررسی شرایط امکان پذیری مساله در نامساوی های فوق، کنترل کننده  $K_\infty$  با استفاده از لم کران حقیقی به صورت زیر ساخته می گردد [۱۴]:

$$K_\infty = \tilde{k}(I + D\tilde{k})^{-1} \quad (8)$$

که در آن  $\tilde{k}$  با حل نامساوی زیر به دست می آید:

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}\tilde{C} + \tilde{C}^T\tilde{k}^T\tilde{B}^T < 0 \quad (9)$$

که در رابطه فوق ماتریس های  $\tilde{C}, \tilde{B}, \tilde{A}$  به صورت زیر می باشند:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} AR+RA^T & 0 & RC^T & -LE^{1/2} \\ 0 & -\mathcal{N}_{n_u} & 0 & 0 \\ CR & 0 & -\mathcal{N}_{n_y} & E^{1/2} \\ -E^{1/2}L^T & 0 & E^{1/2} & -\mathcal{N}_{n_y} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B \\ I_{n_u} \\ D \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} CR & 0 & 0 & E^{1/2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

که در آن ماتریس لیاپانوف  $R$  با استفاده از لم ۱ بدست می آید.

در حالت کلی طراحی وزن های شکل دهی حلقه به دید مهندسی و تجربه طراح بستگی دارد. این وزن ها می بایست به گونه ای طراحی شوند که تمامی معیارهای کار آیی در حوزه فرکانس به خوبی ارضا شوند. یعنی بهره تابع در فرکانس های پایین و بالا به ترتیب به اندازه کافی بزرگ و کوچک شود. همچنین در حوالی فرکانس عبور پاسخ فرکانسی دارای شیب تند نباشد. برای اجتناب از طراحی وزن ها به صورت کلاسیک اخیرا روش های سیستماتیکی ارائه شده است [۱۷]، [۱۸]. در این مقاله از روش سیستماتیکی ارائه شده در [۱۸] برای طراحی وزن های شکل دهی حلقه و کنترل کننده استاتیکی مقاوم استفاده شده است.

### ۳- تعاریف و فرضیات

کنترل کننده محلی استفاده شده است. اساس این ایده تبدیل یک سیستم وابسته به پارامتر به یک سیستم LTI بوده که در آن وابستگی به پارامتر به صورت وجود نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول سیستم LTI مدل می گردد و با استفاده از لم ۲ تحلیل پایداری سیستم وابسته به پارامتر انجام می گیرد.

سیستم وابسته به پارامتر  $G(\rho)$  را به ازای محدوده تغییرات پارامتر  $\rho \in U_i$  در نظر بگیرید. این سیستم را می توان به صورت یک سیستم LTI  $(G(\rho_i))$  در نظر گرفت که در آن تمام وابستگی های سیستم به پارامتر  $\rho$  به صورت وجود نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول آن مدل می گردد. برای این منظور باید توجه کرد که همواره می توان سیستم وابسته به پارامتر  $G(\rho)$  را به ازای تغییرات پارامتر  $\rho \in U_i$  در تمام نقاط فریز کرد و با  $G_\Delta$  نمایش داد که در آن  $G_\Delta$  به صورت زیر می باشد:

$$G_\Delta = G(\rho)_{\rho=\rho_k, \rho_k \in U_i} \quad (1)$$

فرض کنید درون هر ناحیه  $U_i$  نقطه  $\rho_i$  به عنوان نقطه نامی انتخاب گردد. می توان به ازای هر سیستم فریز شده  $G_\Delta$ ، کمترین مقدار نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول سیستم نامی  $G(\rho_i)$  را مطابق رابطه (۱) به گونه ای یافت که سیستم نامی به سیستم  $G_\Delta$  تبدیل شود و آن را با  $\delta_v(G(\rho_i), G_\Delta)$  نمایش داد. علاوه بر آن بیشینه مقدار نرم نامعینی به ازای تمام تغییرات پارامتر  $\rho$  درون ناحیه  $\rho \in U_i$ ، برای آن که سیستم نامی به سیستم  $G_\Delta$  تبدیل شود با  $\beta_i$  نمایش داده می شود یعنی:

$$\sup_{G_\Delta \subset G(\rho) \text{ for } \rho \in U_i} \delta_v(G(\rho_i), G_\Delta) = \beta_i \quad (2)$$

آن گاه می توان سیستم وابسته به پارامتر  $G(\rho)$  به ازای محدوده تغییرات پارامتر  $\rho \in U_i$  را به صورت یک سیستم نامی  $G(\rho_i)$  در نظر گرفت که دارای بیشینه نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول خود به اندازه  $\beta_i$  می باشد. در نتیجه مطابق لم ۲ می توان گفت چنانچه کنترل کننده ای بتواند سیستم نامی  $G(\rho_i)$  را پایدار کند و  $\mathcal{E}[G(\rho_i), K_i] > \beta_i$  باشد معادل این است که بتواند سیستم وابسته به پارامتر  $G(\rho)$  را به ازای محدوده تغییرات پارامتر  $\rho \in U_i$  پایدار نماید.

با توجه به روش بیان شده، می توان محدوده تغییرات متغیرهای زمان بندی بهره  $(\rho \in \Gamma)$  را به گونه ای به چند زیرناحیه  $U_i, (i=1, \dots, q)$  تقسیم کرد که اولاً اجتماع این زیرناحیه ها تمام فضای تغییرات متغیرهای زمان بندی بهره را پوشش دهد (یعنی  $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^q U_i$ ) و همچنین هر کنترل کننده نامی طراحی شده برای هر زیرناحیه توانایی تضمین پایداری برای سیستم وابسته به پارامتر درون زیرناحیه مربوط به خود را داشته باشد. با فرض این که زیرناحیه های  $U_i, (i=1, \dots, q)$  با توجه به روش بیان شده انتخاب شده اند قضیه زیر یک روش درونیایی پایدار بین دو کنترل کننده محلی مجاور هم و درون ناحیه مشترک پایداری این دو کنترل کننده ارائه می کند. این ناحیه

metric پیشنهاد شده است. انگیزه گسترش ایده های gap یا v-gap metric در اندازه گیری تفاوت رفتار حلقه بسته دو سیستم از روی رفتار حلقه باز آن ها می باشد. **Error! Reference source not found.** فرض کنید ضرایب نسبت به هم اول سیستم  $G$  به صورت  $G = NM^{-1}$  باشد. آن گاه فاصله v-gap بین سیستم های  $G, G_\Delta$   $(\delta_v(G, G_\Delta))$  را می توان به صورت زیر تعریف کرد [۱۵]:

$$\delta_v(G, G_\Delta) = \inf_{\substack{\begin{bmatrix} \Delta_N \\ \Delta_M \end{bmatrix} \in RL_\infty \\ \text{w/ } \det(M+\Delta_M) \neq \eta(G)}} \left\{ \begin{bmatrix} \|\Delta_N\| \\ \|\Delta_M\|_\infty \end{bmatrix} : G_\Delta = (N + \Delta_N)(M + \Delta_M)^{-1} \right\} \quad (1)$$

که در آن  $wno g(s)$  برابر تعداد چرخش منحنی نایکوئیست تابع  $g(s)$  حول مبدا در جهت چرخش عقربه های ساعت بوده و  $\eta(G)$  برابر تعداد قطب های سمت راست سیستم  $G$  می باشد. این رابطه بیان گر آن است که می توان با پیدا کردن مقدار کمینه نامعینی لازم روی ضرایب نسبت به هم اول سیستم نامی به گونه ای که به سیستم اغتشاش یافته تبدیل شود، به مقدار مشابهت رفتار دینامیکی حلقه بسته دو سیستم با یک فیدبک پی برد. لم زیر ارتباط بین مفهوم v-gap و پایداری را به خوبی بیان می کند [۱۵]:

لم ۲: سیستم نامی  $G$  که در آن  $\beta \leq \alpha < \mathcal{E}_{opt}(G)$  است را در نظر بگیرید. برای کنترل کننده داده شده  $K$  و برای تمام سیستم های غیر نامی که دارای ویژگی  $\delta_v(G, G_\Delta) \leq \beta$  هستند، رابطه زیر برقرار است:

$$\arcsin \mathcal{E}[G, K] > \arcsin \alpha - \arcsin \beta \quad (2)$$

اگر و فقط اگر:  $\mathcal{E}[G, K] > \alpha$

با قرار دادن  $\beta = \alpha$  در لم ۲ می توان گفت  $[G_\Delta \ K]$  پایدار است اگر و فقط اگر  $\mathcal{E}[G, K] > \alpha$ .

لم ۳: فرض کنید سیستم فیدبک  $[G \ K]$  پایدار باشد. مجموعه های  $\pi$  و  $\kappa$  را به صورت زیر در نظر بگیرید **Error! Reference source not found.**

$$\begin{aligned} \pi &:= \{G_\Delta : \delta_v(G_\Delta, G) < r_1\}, \\ \kappa &:= \{K_\Delta : \delta_v(K_\Delta, K) < r_2\}, \end{aligned} \quad (3)$$

آن گاه سیستم فیدبک  $[G_\Delta \ K_\Delta]$  برای تمام  $G_\Delta \in \pi, K_\Delta \in \kappa$  پایدار است اگر و فقط اگر:

$$\arcsin \mathcal{E}[G, K] \geq \arcsin r_1 + \arcsin r_2 \quad (4)$$

## ۴- روش درونیایی پایدار پیشنهادی

در این بخش روش درونیایی حفظ کننده پایداری ارائه می شود. ابتدا روشی برای تحلیل پایداری یک سیستم وابسته به پارامتر با ابزار v-gap metric ارائه می گردد. همچنین از این روش برای پیدا کردن ناحیه محلی پایدار برای یک سیستم وابسته به پارامتر استفاده خواهد شد. در مرجع [۵] از ایده ای مشابه این روش برای پیدا کردن نقاط کار بهینه برای طراحی

می توان به ازای هر سیستم فریز شده  $K_{\Delta}$ ، کمترین مقدار نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول کنترل کننده نامی  $K_i$  را مطابق رابطه (۱) به گونه ای یافت که کنترل کننده نامی به کنترل کننده  $K_{\Delta}$  تبدیل شود و آن را با  $\delta_v(K_i, K_{\Delta})$  نمایش داد. علاوه بر آن بیشینه مقدار نرم نامعینی به ازای تمام تغییرات پارامتر  $\rho$  درون ناحیه  $\rho \in [a_i, b_i]$ ، برای آن که کنترل کننده نامی به کنترل کننده  $K_{\Delta}$  تبدیل شود مطابق رابطه (۶) با  $r_2$  نمایش داده می شود. آن گاه می توان کنترل کننده زمان بندی بهره  $\hat{K}_i(\rho)$  به ازای محدوده تغییرات پارامتر  $\rho \in [a_i, b_i]$  را به صورت یک کنترل کننده نامی  $K_i$  در نظر گرفت که دارای بیشینه نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول خود به اندازه  $r_2$  می باشد. همچنین اگر بیشینه مقدار نرم نامعینی به ازای تمام تغییرات پارامتر  $\rho$  درون ناحیه  $\rho \in [a_i, b_i]$ ، برای آن که سیستم نامی  $G(a_i)$  به سیستم  $G_{\Delta}$  تبدیل شود مطابق رابطه (۵) با  $r_1$  نمایش داده شود، آن گاه مطابق لم ۳ می توان نتیجه گرفت اگر رابطه (۴) برقرار باشد آن گاه کنترل کننده  $\hat{K}_i(\rho)$  سیستم  $G(\rho)$  را درون ناحیه مشترک پایداری  $\rho \in [a_i, b_i]$  پایدار می کند. □

باید توجه کرد اگر شرط رابطه (۴) برقرار نباشد می بایست ناحیه مشترک پایداری را کوچکتر انتخاب کرد و این کار می بایست آن قدر ادامه یابد تا شرط مذکور صادق باشد. در نهایت با استفاده از قضیه ۱، به منظور برقراری پایداری سیستم در کل بازه  $\rho \in [\rho_i, \rho_{i+1}]$  کنترل کننده فراگیر بصورت زیر تعریف می شود:

$$K_i(\rho) = \begin{cases} K_i & \rho \in [\rho_i, a_i] \\ \hat{K}_i(\rho) & \rho \in [a_i, b_i] \\ K_{i+1} & \rho \in [b_i, \rho_{i+1}] \end{cases} \quad (7)$$

که در آن ضرایب کنترل کننده تابع پیوسته ای از پارامتر  $\rho$  خواهند بود. حال می توان روش ارائه شده برای درونیابی پایدار در محدوده تغییرات  $[\rho_i, \rho_{i+1}]$  را به راحتی تعمیم داد به گونه ای که تمام فضای تغییرات پارامتر  $\rho$  را پوشش دهد. برای این کار فرض کنید به ازای هر ناحیه مشترک پایداری  $[a_i, b_i]$  کنترل کننده های حفظ کننده پایداری  $K_i(\rho)$  مطابق رابطه (۷) طراحی شده است. کنترل کننده زمان بندی بهره حفظ کننده پایداری نهایی برای تمام ناحیه  $\Gamma$  به صورت زیر خواهد بود:

$$K(\rho) = \begin{cases} K_i, & \rho \in U_i, \rho \notin \bigcup_{j=1}^{q-1} [a_j, b_j], i=1, \dots, q \\ \hat{K}_i(\rho), & \rho \in [a_j, b_j], j=1, \dots, q-1 \end{cases} \quad (8)$$

به منظور شفاف تر شدن مراحل طراحی کنترل کننده زمان بندی بهره، تمام مراحل طراحی در قالب نمودار گردش در شکل ۱ آمده است.

### ۵- طراحی خودخلبان مقاوم زمان بندی بهره

مشترک از اشتراک دو زیرناحیه پایدار دو کنترل کننده مجاور به دست آمده است. چنانچه اثبات پایداری برای درونیابی بین دو کنترل کننده مجاور  $K_i$  و  $K_{i+1}$  و برای ناحیه مشترک پایداری  $[a_i, b_i] \subset (U_i \cap U_{i+1})$  انجام گیرد، به راحتی می توان همین اثبات را برای نواحی مشترک پایداری بعدی انجام داد و کنترل کننده زمان بندی بهره کلی را یافت.

**قضیه ۱:** کنترل کننده های محلی  $K_i$  و  $K_{i+1}$  در نقاط  $\rho_i$  و  $\rho_{i+1}$  را در نظر بگیرید بطوری که سیستم  $G(\rho)$  را در زیرنواحی  $U_i$  و  $U_{i+1}$  پایدار می کنند و ناحیه مشترک پایداری آن ها به صورت  $[a_i, b_i] \subset (U_i \cap U_{i+1})$  می باشد. کنترل کننده درونیابی شده بصورت:

$$\hat{K}_i(\rho) = \left( \frac{b_i - \rho}{b_i - a_i} \right) K_i + \left( \frac{\rho - a_i}{b_i - a_i} \right) K_{i+1} \quad (3)$$

سیستم  $G(\rho)$  را به ازای ناحیه  $[a_i, b_i]$  پایدار می نماید اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\arcsin \varepsilon_{G(a_i), K_i} \geq \arcsin r_1 + \arcsin r_2 \quad (4)$$

که در آن  $r_1$  و  $r_2$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sup_{G_{\Delta} \subset G(\rho) \text{ for } \rho \in [a_i, b_i]} \delta_v(G(\rho_i), G_{\Delta}) = r_1 \quad (5)$$

$$\sup_{K_{\Delta} \subset K(\rho) \text{ for } \rho \in [a_i, b_i]} \delta_v(K_i, K_{\Delta}) = r_2 \quad (6)$$

$G_{\Delta}$  و  $K_{\Delta}$  برابر با  $G(\rho)$  و  $\hat{K}_i(\rho)$  به ازای مقادیر فریز شده  $\rho \in [a_i, b_i]$  می باشند.

**اثبات:** فرض کنید کنترل کننده محلی  $K_i$  و  $K_{i+1}$  سیستم  $G(\rho)$  را به ازای  $[a_i, b_i]$  و  $[\rho_i, \rho_{i+1}]$  (در نتیجه ناحیه مشترک پایداری  $\rho \in [a_i, b_i]$  با استفاده از لم ۳ می توان نشان داد کنترل کننده زمان بندی بهره  $\hat{K}_i(\rho)$  سیستم  $G(\rho)$  را پایدار می کند. روش کار به صورت زیر می باشد:

کنترل کننده زمان بندی بهره  $\hat{K}_i(\rho)$  را به ازای محدوده تغییرات پارامتر  $\rho \in [a_i, b_i]$  در نظر بگیرید. فرض کنید سیستم  $G(\rho)$  به ازای  $\rho = a_i$  به عنوان سیستم نامی و کنترل کننده محلی  $K_i$  مربوط به ناحیه پایداری  $[\rho_i, \rho_{i+1}]$  نیز به عنوان کنترل کننده نامی در نظر گرفته شود، آن گاه کنترل کننده وابسته به پارامتر  $\hat{K}_i(\rho)$  را می توان به صورت یک کنترل کننده نامی LTI در نظر گرفت که در آن تمام وابستگی های کنترل کننده به پارامتر  $\rho$  به صورت وجود نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول آن مدل می گردد. برای این منظور باید توجه کرد که همواره می توان کنترل کننده زمان بندی بهره  $\hat{K}_i(\rho)$  را به ازای تغییرات پارامتر  $\rho \in [a_i, b_i]$  در نقاط مختلف فریز کرد و با  $K_{\Delta}$  نمایش داد. همچنین

$$\begin{aligned}
 Y &= QSD \left( C_{y\beta} \beta + C_{y\delta} \delta_r + C_{y_r} \cdot \frac{D}{2U} R \right) \\
 Z &= QSD \left( C_{z\alpha} \alpha + C_{z\delta} \delta_e + C_{z_q} \cdot \frac{D}{2U} Q \right) \\
 L &= QSD \left( C_{l\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + C_{l_p} \cdot \frac{D}{2V} P \right) \\
 M &= QSD \left( C_{m\alpha} \alpha + C_{m\delta} \delta_e + C_{m_q} \cdot \frac{D}{2U} Q \right) \\
 N &= QSD \left( C_{n\beta} \beta + C_{n\delta} \delta_e + C_{n_r} \cdot \frac{D}{2U} R \right)
 \end{aligned} \tag{۲}$$

معادلات فوق در کانال پیچش، بعد از خطی سازی توسط یک سیستم خطی وابسته به پارامتر  $G(\rho)$  به صورت زیر بیان می شود:

$$G(\rho) \equiv \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\alpha & 1 \\ M_\alpha & 0 \\ V_m Z_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_\delta \\ M_\delta \\ V_m Z_\delta \end{bmatrix} \delta \tag{۳}$$

که در رابطه فوق ضرایب به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned}
 Z_\alpha &= \frac{SQDC_{z\alpha}}{m} & M_\alpha &= \frac{SQDC_{m\alpha}}{I_y} \\
 Z_\delta &= \frac{SQDC_{z\delta}}{m} & M_\delta &= \frac{SQDC_{m\delta}}{I_y}
 \end{aligned} \tag{۴}$$

مدل فوق وابسته به پارامترهای فشار دینامیکی ( $Q$ )، و عدد ماخ ( $M$ ) می باشد. اما به منظور سهولت پیاده سازی و طراحی تنها از متغیر فشار دینامیکی ( $\rho = Q$ ) که بیشترین تاثیر را در رفتار دینامیکی سیستم حلقه بسته دارد، برای زمان بندی بهره استفاده شده و اثر متغیر دیگر روی پایداری با ابزار v-gap مورد بررسی قرار گرفته است. محدوده تغییرات پارامتر زمان بندی بهره  $\rho$  به صورت زیر می باشد که با  $\Gamma$  مشخص شده است:

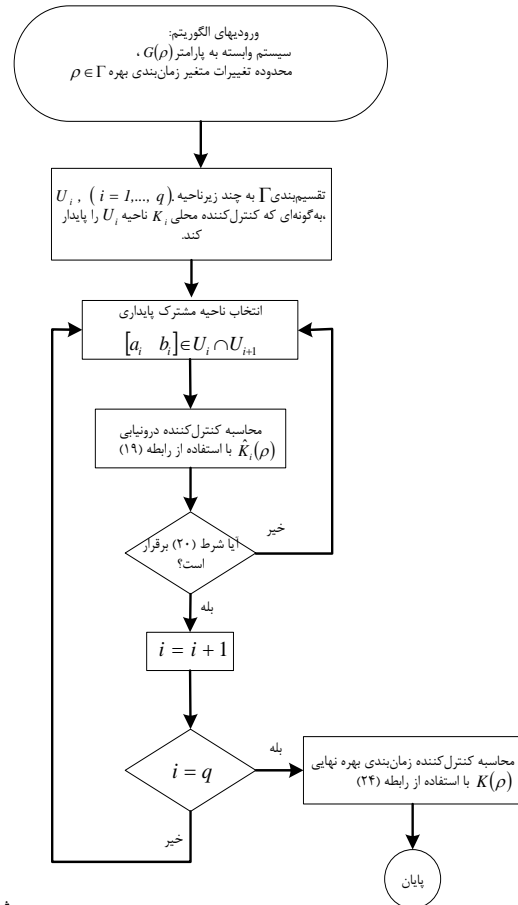
$$\Gamma: 30000 < \rho < 200000 \tag{۵}$$

خروجی سیستم، شتاب رهگیر ( $a_z$ ) بوده و ورودی نیز تغییر زاویه بالک ( $\delta_e$ ) می باشد. تابع تبدیل عملگر بالک نیز با یک تابع تبدیل درجه ۲ با فرکانس طبیعی ۲۰۰ rad/sec و ضریب میرایی ۰/۷ به صورت زیر تقریب زده شده است:

$$\frac{\delta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{۶}$$

با استفاده از مدل بیان شده در رابطه (۳) به سادگی می توان توابع تبدیل شتاب خروجی ( $a_z$ ) نسبت به تغییر زاویه بالک ( $\delta$ ) و سرعت زاویه ای ( $q$ ) نسبت به  $\delta$  را یافت. معمولاً به منظور داشتن پاسخ گذرای مناسب در حلقه خودخلبان، از حلقه داخلی سرعت زاویه ای مطابق شکل ۲ استفاده می شود. با استفاده از ژيروسکوپ نرخی و با فیدبک گرفتن از

مدل دینامیکی رهگیر یک مدل غیرخطی وابسته به پارامتر می باشد. معادلات شش درجه آزادی رهگیر در دستگاه بدنی به صورت زیر می باشد [۱۹]:



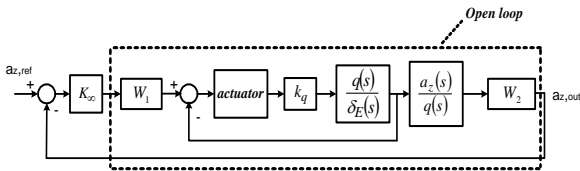
شکل ۱. نمودار گردش مراحل طراحی کنترل کننده زمان بندی بهره.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} (\dot{U} + QW - RV) \\ (\dot{V} + RU) \\ (\dot{W} - QU) \end{bmatrix} \tag{۱}$$

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x \dot{P} \\ I_y \dot{Q} \\ I_z \dot{R} \end{bmatrix}$$

که نیروها و گشتاورهای آبرودینامیکی در روابط بالا به صورت زیر تعریف می شوند:

در مشخصات هر زیرناحیه  $U_i$  به همراه بیشینه v-gap و حاشیه پایداری مقاوم آن آمده است. همان گونه که ملاحظه می شود ملاحظات پایداری بیان شده در رابطه (۴) در هر زیر ناحیه رعایت می گردد. در جدول ۲ مشخصات سیستم حلقه باز نامی به همراه وزن های شکل دهی حلقه و کنترل کننده استاتیکی مقاوم طراحی شده برای مدل رهگیر آمده است. همان گونه که ملاحظه می گردد کنترل کننده مقاوم بدون درجه می باشد. در جدول ۱ زیرناحیه های محلی  $U_i$  به گونه ای پیدا شد که اجتماع آن ها تمام محدوده تغییرات پارامتر  $\Gamma$  را پوشش دهد. در ادامه می بایست نواحی مشترک پایداری  $[a_i \ b_i]$  درون اشتراک دو زیرناحیه محلی مجاور را به گونه ای یافت که شرط پایداری بیان شده در رابطه (۴) ارضا شود. برای این منظور ابتدا نواحی مشترک پایدار به صورت  $[a_i \ b_i] = (U_i \cap U_{i+1})$  انتخاب می شوند. برای این نواحی می بایست شرط پایداری (۴) مورد بررسی قرار گیرد. اگر این شرط برقرار نبود بازه  $[a_i \ b_i]$  باید به صورت محدودتر و به صورت زیرمجموعه ناحیه اشتراک پایداری بصورت  $[a_i \ b_i] \subset (U_i \cap U_{i+1})$  انتخاب گردد. بازه  $[a_i \ b_i]$  می بایست آن قدر کوچک شود که رابطه (۴) برقرار گردد. در جدول ۳ مشخصات نواحی  $(U_i \cap U_{i+1})$  و بازه های  $[a_i \ b_i]$  بیان شده است.



شکل ۲. تابع حلقه باز شکل دهی شده برای تحلیل پایداری با ابزار v-gap

سرعت زاویه ای کانال پیچ می توان به سادگی کنترل کننده تناسبی  $k_q$  را طراحی کرد.

به منظور طراحی خودخلبان مقاوم برای رهگیر ارائه شده، می بایست ابتدا زیر نواحی پایدار  $U_i, (i=1, \dots, q)$  درون محدوده تغییرات پارامتر  $\Gamma$  به گونه ای یافت شود که در هر زیرناحیه شرط پایداری بیان شده صادق باشد  $(\varepsilon[G(\rho_i), k_i] > \beta_i)$ . برای این منظور نقطه ابتدای محدوده تغییرات پارامتر زمان بندی بهره  $\rho_1 = 30000$  به عنوان نقطه نامی اول برای طراحی کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه  $H_\infty$  انتخاب می شود. وزن شکل دهی حلقه  $W_1$  برابر یک و  $W_2$  نیز با استفاده از مساله بهینه سازی (۱۵) و الگوریتم به دست آمده در [۱۸] طراحی می شود. حال با توجه به شکل ۲ تابع شکل دهی شده  $G_s(\rho_1) = W_2 G(\rho_1) W_1$  به عنوان تابع حلقه باز نامی (تابع نشان داده شده در شکل ۲ درون نقطه چین) انتخاب شده و کنترل کننده استاتیکی مقاوم مطابق روابط (۸)–(۱۲) برای آن طراحی می گردد. حاشیه پایداری مقاوم برای سیستم شکل دهی شده  $G_s(\rho_1)$  نیز با استفاده از الگوریتم به دست آمده در **Error! Reference source not found.** محاسبه می گردد. بعد از به دست آمدن حاشیه پایداری مقاوم برای سیستم شکل دهی شده  $G_s(\rho_1)$ ، می توان ناحیه  $U_1$  که در آن شرط پوشش پایداری ارضا می شود را به دست آورد. برای این منظور پارامتر  $\rho$  آن قدر افزایش می یابد تا بیشینه v-gap ایجاد شده بین سیستم های شکل دهی شده و سیستم نامی (مطابق رابطه (۲)) از حاشیه پایداری مقاوم سیستم شکل دهی شده نامی کمتر باشد. به همین ترتیب انتهای بازه  $U_1$  به عنوان نقطه ابتدای بازه  $U_2$  انتخاب شده و تمام مراحل بیان شده در این جا برای پیدا کردن بازه  $U_1$  دوباره تکرار می گردد. این کار آن قدر انجام می شود تا اجتماع زیرناحیه های محلی  $U_i$  تمام محدوده تغییرات پارامتر  $\Gamma$  را پوشش دهد (یعنی  $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^q U_i$ ).

جدول ۱. مقایسه حاشیه پایداری مقاوم با بیشینه v-gap به دست آمده درون هر زیرناحیه

زیرناحیه ۱	زیرناحیه ۲	زیرناحیه ۳	زیرناحیه ۴	
۰/۳۱	۰/۴۵	۰/۵۲	۰/۵۵	حاشیه پایداری مقاوم
۰/۲۷	۰/۴۲	۰/۴۹	۰/۴	بیشترین v-gap
$30000 < U_1 < 55000$	$35000 < U_2 < 90000$	$70000 < U_1 < 140000$	$100000 < U_1 < 200000$	محدوده بازه های $U_i$

جدول ۲. مشخصات نقاط کار نامی به همراه کنترل کننده محلی و وزن های شکل دهی حلقه در هر نقطه

سیستم نامی	وزن شکل دهی حلقه	کنترل کننده استاتیکی مقاوم	
زیرناحیه ۱ $P_1 = \frac{44000(s-6.7)(s+6.7)}{(s+3.5)(s+1.1)(s^2+116s+4604)}$ $Q_1 = 30000$	$W_{2,1} = \frac{0.001(s+3)(s^2+91s+20000)}{(s+117)(s+16)(s+0.0001)}$	$K_{\infty,1} = 0.78$ $k_{q,1} = -1.25$	زیرناحیه ۱
زیرناحیه ۲ $P_1 = \frac{163000(s-9.97)(s+9.8)}{(s+21)(s+0.75)(s^2+98s+2939)}$ $Q_2 = 60000$	$W_{2,2} = \frac{0.001(s+60000)(s^2+26s+0.95)}{(s+7420)(s+6.4)(s+0.0001)}$	$K_{\infty,2} = 0.52$ $k_{q,2} = -0.95$	زیرناحیه ۲



$K_{\infty,3} = 0.63$ $k_{q,3} = -0.75$	$W_{2,3} = \frac{0.005(s+20000)(s^2+4.6s+35)}{(s+3183)(s+8.15)(s+0.0001)}$	$P_1 = \frac{3644(s-13.34)(s+13.21)}{(s^2+5.5s+33)(s^2+116s+4625)}$ $Q_3 = 100000$	زیرناحیه ۳
$K_{\infty,4} = 0.86$ $k_{q,4} = -0.45$	$W_{2,4} = \frac{0.003(s+2600)(s^2+5.5s+29)}{(s+3401)(s+14)(s+0.0001)}$	$P_1 = \frac{55564(s-16.7)(s+16.7)}{(s^2+6.6s+24)(s^2+114s+4504)}$ $Q_4 = 150000$	زیرناحیه ۴

جدول ۳. مشخصات اشتراک نواحی محلی پایدار به همراه نواحی تضمین کننده پایداری  $[a_i \ b_i]$ 

زیرناحیه ۳ و زیرناحیه ۴	زیرناحیه ۲ و زیرناحیه ۳	زیرناحیه ۱ و زیرناحیه ۲	محدوده اشتراک دو زیرناحیه محلی
$U_3 \cap U_4 =$ [100000 140000]	$U_2 \cap U_3 =$ [70000 90000]	$U_1 \cap U_2 =$ [35000 55000]	
$[a_3 \ b_3] =$ [110000 130000]	$[a_2 \ b_2] =$ [75000 85000]	$[a_1 \ b_1] =$ [40000 50000]	محدوده مشترک پایداری $[a_i \ b_i]$

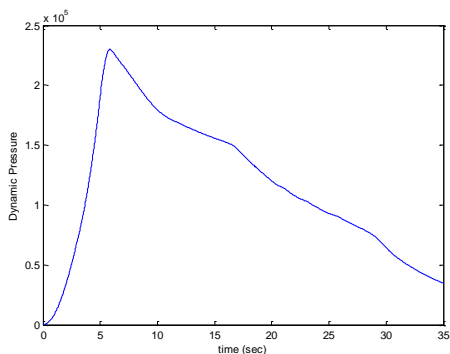
## ۸- نتایج شبیه سازی

در ادامه برای نشان دادن کارآیی کنترل کننده زمان بندی بهره نهایی در سیستم غیرخطی، شبیه سازی سه درجه آزادی انجام می گیرد. به منظور مقایسه روش ارائه شده در این مقاله با سایر روش های کلاسیک زمان بندی بهره، درونیایی بین صفر-قطب-بهره (zpk) کنترل کننده های محلی که یکی از روش های کلاسیک درونیایی است نیز مورد بررسی و شبیه سازی قرار می گیرد [۲۰]-[۲۱]. در روش درونیایی بین صفر-قطب-بهره کنترل کننده های محلی، ابتدا در نقاط کار مختلف کنترل کننده های محلی طراحی شده و سپس با درونیایی خطی بین این کنترل کننده ها، کنترل کننده زمان بندی بهره به دست می آید. انتخاب نقاط کار در این روش کلاسیک بستگی به تجربه طراح داشته و فاقد روش سیستماتیک است. همچنین روش مورد نظر دارای اثبات پایداری نمی باشد. به منظور مقایسه بین دو روش بیان شده از همان نقاط کار به دست آمده در جدول ۲ برای طراحی کنترل کننده های محلی استفاده شده است. همچنین برای طراحی کنترل کننده های محلی از کنترل کننده PID استفاده می شود. در جدول ۴ مشخصات کنترل کننده های محلی برای نقاط کار مختلف برای روش PID آمده است.

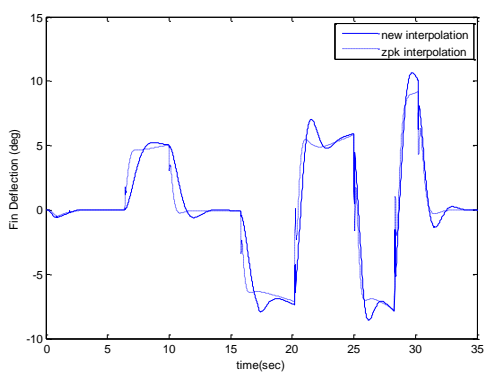
دستور ورودی مطابق شکل ۵ به سیستم غیرخطی اعمال شده و نتایج تعقیب دستور ورودی برای هر دو روش نشان داده شده است. مشاهده می گردد که روش درونیایی ارائه شده دارای عملکرد بهتری می باشد. علاوه بر آن روش درونیایی ارائه شده دارای اثبات پایداری می باشد در حالی که در روش کلاسیک درونیایی، تضمینی برای پایداری سیستم وابسته به پارامتر وجود ندارد. در شکل ۶ نشان داده شده است که تمام ناحیه پروازی رهگیر با سناریوی طراحی شده تحریک می گردد.

به منظور بررسی روش مذکور در پایداری و کارآیی کنترل کننده فراگیر نهایی شبیه سازی سه درجه آزادی انجام می گردد. شبیه سازی سه درجه آزادی بر مبنای معادلات غیرخطی (۱) و (۲) انجام شده است. نتایج ارائه شده در این جا برای یک رهگیر از نوع کنترل با دم بوده و به منظور سادگی، فرمان شتاب تنها به کانال پیچ اعمال می گردد. همان گونه که بیان شد برای بهبود عملکرد سیستم در تعقیب دستور ورودی، ابتدا می بایست حلقه داخلی سرعت زاویه ای (حلقه داخلی نشان داده شده در شکل ۲) با ضریب مناسب  $k_q$  بسته شود. در جدول ۲ ضریب  $k_q$  در نقاط کار مختلف آمده است. بعد از طراحی ضریب  $k_q$ ، وزن های شکل دهی حلقه و کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه  $H_{\infty}$  با استفاده از الگوریتم بیان شده در مرجع [۱۸] در هر نقطه کار طراحی شده که نتایج آن در جدول ۲ آمده است. در نهایت درونیایی بین کنترل کننده های محلی با استفاده از روش بیان شده در بخش قبل انجام می گیرد. سناریوی پروازی رهگیر به گونه ای انتخاب می شود که تمام ناحیه تغییرات پارامتر زمان بندی بهره (فشار دینامیکی) را پوشش دهد. بررسی نتایج شبیه سازی در دو مرحله صورت می گیرد. در مرحله اول پایداری و کارآیی کنترل کننده های محلی در نقاط کار نامی مورد بررسی قرار گرفته و در مرحله دوم عملکرد کنترل کننده فراگیر در سیستم غیرخطی مورد بررسی قرار می گیرد. برای مشاهده کارایی کنترل کننده زمان بندی بهره در سیستم خطی، پاسخ پله سیستم حلقه بسته در حالت نامی و در نقاط کار اول تا چهارم به همراه حد بهره و حد فاز آن ها در شکل ۳ و شکل ۴ نشان داده شده است. ملاحظه می شود که تمامی معیارهای کارآیی و پایداری در حالت خطی به خوبی ارضا شده است.

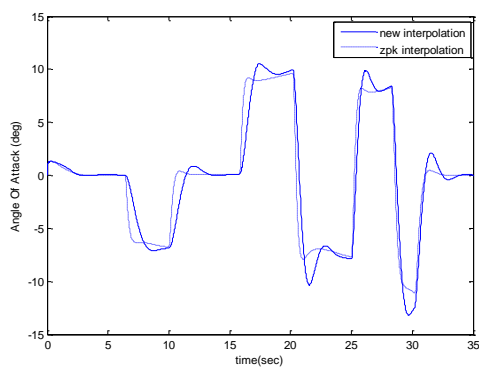
<sup>1</sup> Zero-pole-gain interpolation



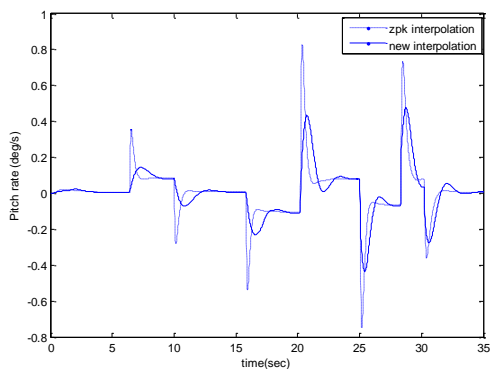
شکل ۶. فشار دینامیکی



شکل ۷. سیگنال کنترلی ورودی به عملگر

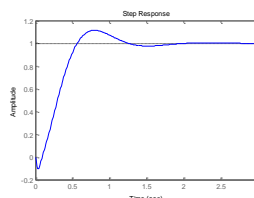
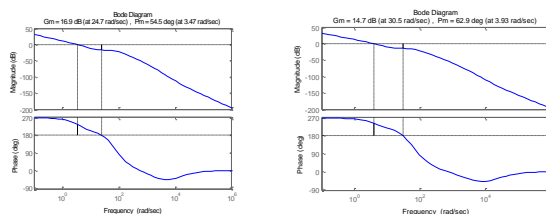


شکل ۸. زاویه حمله

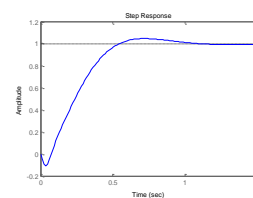


شکل ۹. سرعت زاویه‌ای کانال پیچ

مشاهده می‌شود که عملکرد کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره خوب بوده و مطابق شکل ۷ سیگنال‌های کنترلی تولید شده نیز مناسب می‌باشد. زاویه حمله رهگیر و سرعت زاویه‌ای کانال پیچ نیز در شکل ۸ و شکل ۹ آمده است که نشان‌دهنده عملکرد مطلوب سیستم می‌باشد.

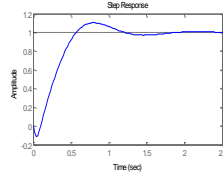
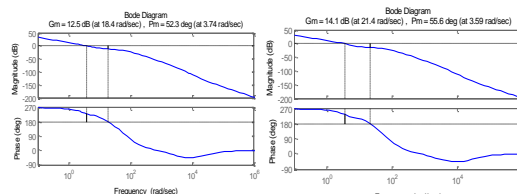


فشار دینامیکی  $Q_2 = 60000$

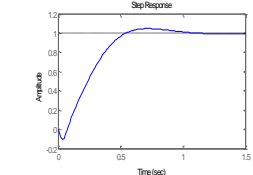


فشار دینامیکی  $Q_1 = 30000$

شکل ۳. پاسخ پله و حدبهره و حدفاز برای نقاط کار اول و دوم

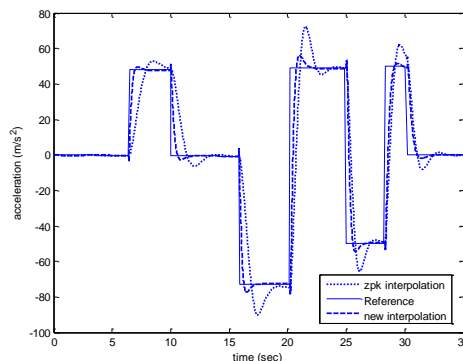


فشار دینامیکی  $Q_4 = 150000$



فشار دینامیکی  $Q_3 = 100000$

شکل ۴. پاسخ پله و حدبهره و حدفاز برای نقاط کار سوم و چهارم



شکل ۵. سیگنال شتاب مرجع و خروجی

جدول ۴. مشخصات نقاط کار نامی به همراه کنترل کننده محلی PID

کنترل کننده محلی PID	سیستم نامی	نقاط کار
$K_1 = -0.18 \frac{1+0.96s}{s}$	$P_1 = \frac{44000(s-6.7)(s+6.7)}{(s+3.5)(s+1.1)(s^2+116s+4604)}$ $Q_1 = 30000$	۱
$K_2 = -3.69 \frac{1+0.5s}{s}$	$P_1 = \frac{163000(s-9.97)(s+9.8)}{(s+21)(s+0.75)(s^2+98s+2939)}$ $Q_2 = 60000$	۲
$K_1 = -0.047 \frac{1}{s}$	$P_1 = \frac{36441(s-13.34)(s+13.21)}{(s^2+5.5s+33)(s^2+116s+4625)}$ $Q_3 = 100000$	۳
$K_1 = -0.02 \frac{1+0.14s}{s}$	$P_1 = \frac{55564(s-16.7)(s+16.7)}{(s^2+6.6s+24)(s^2+114s+4504)}$ $Q_4 = 150000$	۴

- [5] S. Theodoulis and G. Duc, "Missile autopilot design: gain scheduling and the gap metric", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 32, No.3, pp. 986-996, 2009.
- [6] M. Sato . "Gain Scheduled Output-feedback depending solely on scheduling parameters via parameter-dependent Lyapunov functions". *Automatica*, Vol.47, pp.2786 2790, 2011.
- [7] F. Blanchini, S. Miani, F. Mesquine. "A separation principle for linear switching systems and parameterization of all stabilizing controllers". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54, 279-292, 2009.
- [8] F.D. Bianchi, R.S. Sanchez-Pena, M. Guadayol, " Gain scheduled control based on high fidelity local wind turbine models". *Renewable energy*, Vol.37, pp.233-240, 2012.
- [9] B. Hency, A. Alleyne. "Robust controller interpolation design technique". *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 18, pp. 1-10, 2010.
- [10] F.D. Bianchi., R.S. Sanchez Pena, "Interpolation for gain-scheduled control with guarantees"; *Automatica*, Vol. 47, pp.239 243, 2011.
- [11] B.P. Rasmussen, and A. Alleyne, "Gain scheduled control of an air conditioning system using the youla parameterization", *IEEE Transactions on Control system technology*, Vol.18, No.5, pp.1216 1225, 2010.
- [12] D.J. Stilwell, "state space interpolation for a gain scheduled autopilot", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 24, pp. 460 465, 2001.
- [13] D.J. Stilwell., and W.J. Rugh. "Stability preserving interpolation methods for the synthesis of gain

## ۸- نتیجه گیری

در این مقاله یک روش درونیایی پایدار برای طراحی خودخلبان رهگیر ارائه شده است. روش پیشنهادی دارای پیچیدگی کمتری نسبت به سایر روش‌های درونیایی بوده و علاوه بر آن تضمین کننده پایداری سیستم متغیر با پارامتر نیز می‌باشد. علاوه بر آن نشان داده شد که با استفاده از ابزار  $v$ -gap metric می‌توان نقاط کار مناسب برای طراحی کنترل کننده محلی انتخاب کرد. علاوه بر آن با کمک این ابزار می‌توان نواحی محلی پایداری را برای هر کنترل کننده محلی مشخص نمود. نتایج شبیه‌سازی سه درجه آزادی نشان‌دهنده عملکرد مطلوب کنترل کننده زمان‌بندی بهره نهایی می‌باشد.

## مراجع

- [1] H. Buschek, "Full Envelope Missile Autopilot Design Using Gain Scheduled Robust Control", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 22, No. 1, pp.115 122, 1999.
- [2] S. Kang, H.J. Kim, J.I. Lee, B.E. Jun, and M.J. Tahk, "Roll-pitch-yaw integrated robust autopilot design for a high angle-of attack missile", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 32, No. 5, pp. 1622 1628, 2009.
- [3] D. Saussie, L. Saydy, and O. Akhrif, "Gain scheduling control design for a pitch-axis missile autopilot", *AIAA Guidance, Navigation, and Control conference*, Honolulu, Hawaii, 2008.
- [4] D. J. Leith, W. E. Leithead, "Survey of gain scheduling analysis and design", *International journal of control*, Vol. 73, No.11, pp. 1001-1025, 2000.



حلقه  $H_\infty$ ، نشریه علمی-پژوهشی مهندسی هوانوردی، سال سیزدهم، شماره دوم، صفحه ۷۹-۹۴، پاییز ۱۳۹۰.

- [19] G.M. Siouris, "Missile guidance and control systems", New York, Springer-verlag, Inc., 2004.
- [20] R.A. Nichols, R.A. Reichert, W.J Rugh, "Gain scheduling for H-infinity controllers: A flight control example", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol(1), N(2), 69-79, 1993.
- [21] B. Paijmans, W. Sysmens, H.V. Brussel, J. Swevers, "A gain scheduling control technique for mechatronic systems with position-dependent dynamics", *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 2933-2938, 2006.

scheduled controllers", *Automatica*, Vol. 36, pp.665 671, 2000.

- [14] E. Prempain, I. Postlethwaite, "Static  $H_\infty$  loop shaping control of a fly-by-wire helicopter" *Automatica*, Vol. 41, pp. 1517 1528, sept. 2005.
- [15] G. Vinnicombe . *Uncertainty and feedback: h-infinity loop shaping and the v-gap metric*, Imperial college press, 1999.
- [16] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover, "Essential of robust control", Prentice Hall, 1998.
- [17] A. , Lanzon, "Weight optimization in  $H_\infty$  loop shaping" *Automatica*, Vol. 41, No. 7, pp. 1201 1208, 2005.

[18] معافی مدنی، محمد جواد، محمدزمان، ایمان، "طراحی

خودخلبان با استفاده از روش کنترل کننده استاتیکی شکل دهی