

# طراحی رویتگر مد لغزشی توزیع شده برای سیستمهای غیر خطی دارای تاخیر زمانی و اعمال نامعینی

هاجر قطب<sup>۱</sup>، مهدی سیاهی<sup>۲</sup>، علی معرفیان پور<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup>دانشجوی دکتری، دانشکده مکانیک، برق و کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، ایران Hajarghotb@yahoo.com

<sup>۲</sup>دانشیار، دانشکده مکانیک، برق و کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، ایران Mehdi.siahi@srbiau.ac.ir

<sup>۳</sup>استادیار، دانشکده مکانیک، برق و کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران، ایران Moarefian@srbiau.ac.ir

پذیرش: ۱۴۰۱/۱۰/۲۹

ویرایش: ۱۴۰۱/۰۷/۰۸

دریافت: ۱۴۰۱/۰۱/۲۱

**چکیده:** در این مقاله طراحی رویتگر مد لغزشی توزیع شده برای یک کلاس از سیستم های غیر خطی با تاخیر زمانی و اعمال نامعینی در یک شبکه متصل غیرجهتدار در نظر گرفته شده است. به طور خاص، هر رویتگر مد لغزشی توزیع شده به قسمتی از خروجی دسترسی دارد و با رویتگرهای مجاور خود از طریق پروتکل های اجماع در یک شبکه گراف ارتباط برقرار می کند. این شبکه شامل  $N$  رویتگر محلی است که اطلاعات را از طریق یک شبکه گراف مخابراتی همراه با تاخیر زمانی و در نظر گرفتن نامعینی ارسال و دریافت می کنند. روش طراحی بر اساس بکارگیری شرایط لپیشیتز در سیستم های غیر خطی می باشد. در این راستا با انتخاب مناسبی از توابع لیاپانوف، نامعادله ینسن به یک شبکه متصل غیر جهت دار، اعمال می گردد. همچنین از طریق الگوریتم طراحی، شرایط لازم و کافی برای طراحی پارامترها به منظور تثبیت دینامیک خطا تعریف شده است. در نهایت، شبیه سازی های عددی برای تایید اثربخشی روش پیشنهادی ارائه می گردد.

**کلمات کلیدی:** رویتگر مد لغزشی توزیع شده، تئوری گراف، سیستم غیر خطی، تاخیر زمانی، نامعینی.

## Developing a Design of Distributed Sliding mode Observers for Nonlinear Systems with Time – Delay and Applying uncertainty

Hajar Ghotb, Mehdi Siahi, Ali MoarefianPour

**Abstract:** This paper propounds a distributed observer design for a class of nonlinear systems with time delays and applying uncertainty in an undirected network. In particular, each distributed observer has availability, to partial output as it communicates with its neighboring observers through consensus protocols defined on the undirected network. The network includes  $M$  local observers where adjacent observers transmit and receive data through a delayed telecommunication graph network with uncertainty. The design method is based on Lipschitz condition of nonlinear terms. Appropriate selection of Lyapunov functions is created, and the Jensen inequality applied in undirected network. Also, by the design algorithm, the necessary and sufficient conditions for the design of parameters are defined so as to stabilize the error dynamics. Finally, numerical simulations are provided to contrast the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** Distributed sliding mode observers, Graph theory, Non-linear system, Time delay, Uncertainty

## ۱- مقدمه

امروزه تجزیه و تحلیل سیستم‌های توزیع شده توجه بسیاری از محققان را به خود معطوف داشته است. با توجه به کاربردهای گسترده سیستم‌های چند عاملی در صنعت از جمله کنترل رباتها، موبایلها، هواپیماهای بدون سرنشین، سنسورهای بی سیم و شبکه حسگرها و ... در سالهای اخیر، توجه ویژه ایی به این مباحث شده است [۱]. همچنین با رشد سریع و ادغام محاسبات، ارتباطات و فناوری های اندازه گیری هوشمند، تجهیزات اندازه گیری کم هزینه با اندازه کوچک، با توانایی پردازش و قابلیت‌های ارتباطی، در یک دامنه وسیع از محیطها گسترش یافته اند [۲]. روابط حاکم بر شبکه توزیع شده از تئوری گرافها پیروی می کند. در این تئوری هر عامل می تواند از اطلاعات خود و همسایگان خود استفاده کند. براین اساس ارتباطاتی که بین عوامل وجود دارد، نقش کلیدی در کنترل و نظارت توزیع شده بین عوامل را ایفا می کند [۳]. در این سیستمها به دلیل برقراری ارتباط از طریق یک شبکه، پتانسیل مطلوبی برای بهبود بخشیدن به کارایی سیستم در مقایسه با ساختارهای صرفا غیر متمرکز فراهم می گردد. زیرا همپوشانی اطلاعات کلی، ایستگاههای کنترل توزیع شده را قادر می سازد تا بینش عمیق تری نسبت به سیستم در نظر گرفته شده داشته باشند، و پس از آن تصمیمات هوشمندانه تری اتخاذ کنند [۴]. چنانچه به دلایل اقتصادی و محدودیت‌های فیزیکی امکان اندازه گیری کل متغیرها یا حالات سیستم در یک شبکه گسترده و پیچیده وجود نداشته باشد، بحث تخمین حالت‌های سیستم به صورت گسترده مطرح می گردد، که در آن تخمین توزیع شده حالت‌های سیستم یک مسئله بنیادی است [۵]. تحقیقات زیادی در زمینه طراحی روینگر توزیع شده خطی وجود دارد [۶-۹]. یکی دیگر از مباحث اساسی بحث مربوط به نوع سیستم می باشد. بسیاری از سیستم‌ها در عمل به صورت غیرخطی می باشند و فعالیت تحقیقاتی قابل توجهی در توسعه روش‌های مختلف طراحی روینگر توزیع شده برای سیستم‌های غیرخطی انجام نشده است. و در این مقاله، به طور خاص به طراحی روینگر توزیع شده در سیستم‌های غیرخطی می پردازیم. برای این منظور، ابتدا روش‌های رایج برخورد با سیستم‌های غیرخطی متمرکز را بررسی می کنیم [۱۰-۱۲]. روش‌های کلی طراحی روینگر در سیستم‌های غیرخطی بر دو حالت روینگرهای تصادفی (فیلتر کالمن) [۱۳-۱۴] و روینگرهای غیر تصادفی (شبه لیونبرگر) [۱۵] متمرکز می کنند. در کنار این تقسیم بندی کلی که برای روینگرهای غیر خطی پیشنهاد شده است، روش دیگری نیز بر اساس نوع توابع غیرخطی اتخاذ شده است. در تقسیم بندی اخیر، توابع غیر خطی به توابعی که در شرایط لیشیتز صدق می کنند و توابع غیر خطی با شرایط قطعی تقسیم می شوند. مرجع [۱۶] از جمله کارهای تحقیقاتی برجسته ای است که در زمینه توابع غیر خطی حاوی شرایط قطعی انجام شده است.

علاوه بر طراحی پیچیده، یک گروه از عوامل نیز بر تک تک زیر سیستمها اثر می گذارند. هر یک از این عوامل خود باعث می گردد، که طراحی نهایی پیچیده تر و سخت تر گردد. در تخمین صحیح حالتهای توسط

روینگرها، در اختیار داشتن اطلاعات صحیح از ورودی و خروجی بسیار حائز اهمیت است. وجود تاخیر در بسیاری از اوقات، باعث می شود که تخمین صحیحی از عملکرد سیستم در اختیار نباشد. بنابراین توصیف فرآیندهای عملی با معادلات دینامیکی تاخیردار در نظر گرفته می شود [۱۷-۱۸].

تاخیر در ورودی و خروجی نوعی از تاخیر است که با توجه به محدودیت‌های سخت افزاری در حلقه کنترل، ایجاد می گردد. نوعی دیگر، تاخیر ذاتی می باشد، که به دلیل بوجود آمدن یک نوع فیدبک داخلی همراه با تاخیر زمانی در سیستم ایجاد می گردد و در معادلات دینامیکی سیستم به صورت تاخیر در حالت مدل می گردد. در این راستا، طراحی روینگر برای سیستم‌های تاخیردار با توجه به ثابت و یا متغیر با زمان بودن تاخیر و نحوه قرار گرفتن تاخیر در معادلات (حالت، ورودی، خروجی و یا تاخیرهای ترکیبی)، به انواع مختلفی تقسیم بندی می شود. نکته مهم سیستم‌های تاخیردار، بحث پایداری و پایداری سازی این سیستمها است که با روشهای معمول پایداری متفاوت می باشد. برای جبران سازی تاخیر در سیستم‌های دارای تاخیرهای کوچک، از روش تبدیل مدل استفاده می شود، به این صورت که سیستم به سیستم تاخیردار گسسته تبدیل میشود [۱۹]. ولی در برخی موارد از روشهای خاصی مانند روش لیاپانف-کرافسکی (LKF) برای اثبات پایداری سیستم‌های تاخیردار استفاده میشود. در [۲۰]، به اعمال دو تاخیر ثابت هم در معادلات حالت و هم در داده های خروجی روینگر توزیع شده خطی می پردازد و با استفاده از روش لیاپانف-کرافسکی به اثبات پایداری سیستم تاخیردار پرداخته می شود. در آن دسته از سیستم‌هایی که خروجی‌ها را تاخیردار در نظر می گیرند مهمترین روش استفاده از روش زنجیره ایی می باشد [۲۱].

یکی دیگر از عواملی که به روی تک تک زیر سیستمها اثر می گذارد، وجود نامعینی در سیستم می باشد. در این مقاله نامعینی سیستم به صورت کراندار فرض شده است، و شرط تطبیق که یک فرض مرتبط با نامعینی می باشد برقرار است. روینگر بکار برده شده در این مقاله، روینگر مد لغزشی توزیع شده می باشد، که نسبت به روینگرهای دیگر دارای مزیت‌های اساسی از جمله همگرایی در زمان محدود، مقاوم بودن در برابر نامعینی، عدم حساسیت به تغییر پارامترها، تاثیر ناپذیری از خطای خارجی، پاسخ دینامیکی سریع و سادگی طراحی و اجرای آن می باشد [۲۲]. نکته حائز اهمیتی که در حوزه روینگرهای مد لغزشی جهت تفکیک رویکردها و روشهای متفاوت قابل بررسی می باشد، سیستم‌هایی است که برای طراحی روینگر انتخاب می شود. به طور کلی دو نوع سیستم غیرخطی برای استفاده از این روینگرها مورد توجه قرار می گیرند. در نوع اول یک سیستم غیرخطی با در نظر گرفتن اینکه جملات خطی از جملات غیر خطی قابل تفکیک بوده و بخش غیرخطی شرایط لیب شیتز را برآورده می کند و خروجی آنها نیز به صورت خطی می باشد در نظر گرفته می شود [۲۳-۲۵]. این در حالی است که سیستم نوع دوم به فرم کلی مثلثی لحاظ می گردد و روینگر مد لغزشی بهره بالا برای آن در نظر گرفته می شود [۲۶].

ایی که به بررسی یک مدل عملی شبکه‌های توزیع شده می‌پردازد، می‌توان نام برد. در این مقاله بر اساس یک فیلتر کالمن توزیع شده به تخمین پارامترها می‌پردازد. تخمین پارامترها می‌تواند به طور دقیق وضعیت سیستم را در نتیجه به اشتراک گذاری اطلاعات با گره‌های همسایه تخمین بزنند.

روش طراحی روینگر مد لغزشی همراه با تاخیر و اعمال نامعینی عمدتاً برای سیستم‌های خطی متمرکز در نظر گرفته شده است. در مقاله حاضر به بررسی پایداری و طراحی پارامترهای روینگر مد لغزشی توزیع شده برای سیستم‌های غیر خطی همراه با دو تاخیر زمانی در حالت خروجی و اعمال نامعینی می‌پردازیم. در این راستا، سیستم‌های غیرخطی به صورت بخش‌های خطی و غیرخطی مجزا بر اساس شرایط لیشیتز در نظر گرفته می‌شوند، همچنین نامعینی به صورت کراندار فرض شده است، و شرط تطبیق که یک فرض مرتبط با نامعینی می‌باشد همواره برقرار می‌باشد. همچنین، با انتخاب تابع لیاپانوف مناسب به اعمال نابرابری جنسن، در شبکه متصل غیر جهتدار پرداخته می‌شود. در این راستا، با ارائه الگوریتم مناسب، به بررسی شرایط لازم و کافی برای طراحی پارامترهای روینگر مد لغزشی توزیع شده با هدف نهایی تثبیت دینامیک خطا می‌پردازیم.

به طور کلی، هدف اصلی این مقاله را می‌توان در چند بخش بیان نمود.

- رفع نواقص تخمین متمرکز با ارائه یک استراتژی روینگر مد لغزشی توزیع شده مناسب، با عملکرد بهتر نسبت به رویکردهای پیشرفته موجود می‌باشد.
- جنبه نوآورانه مقاله حاضر ارائه الگوریتم به منظور طراحی پارامترهای روینگر مد لغزشی توزیع شده در یک سیستم غیر خطی همراه با اعمال دو تاخیر ثابت و محدود در حالت و خروجی سیستم و اعمال نامعینی کراندار می‌باشد.
- روش طراحی مورد استفاده با انتخاب توابع مناسب لیاپانوف و استفاده از نابرابری جنسن بر اساس شرط لیشیتز در توابع غیرخطی در شبکۀ گراف غیرجهتدار می‌باشد.

بنابراین در بخش اول کلیه مفاهیم و عبارات و مفروضات مورد نیاز به اندازه کافی ارائه شده است. در بخش‌های بعدی، تحلیل‌های پایداری و الگوریتم‌های طراحی روینگر مد لغزشی توزیع شده برای شبکه متصل غیرجهتدار پیشنهاد شده است. در نهایت، با کمک نتایج شبیه‌سازی عددی، اثربخشی الگوریتم‌های طراحی پیشنهادی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

## ۲- پیش فرضها

یک گراف جهتدار و یا غیر جهتدار توسط  $(v, \mathcal{E}, A)$  مشخص می‌گردد، که در آن  $v = \{1, 2, 3, \dots, N\}$  یک مجموعه غیر تهی محدود از گره‌ها و  $\mathcal{E} \subset R \times R$  یک مجموعه از یالهای گره‌های جفت شده مرتب و  $G = [g_{ij}] \in R^{N \times N}$  ماتریس مجاورت می‌باشد. در هر

در [۲۷] روینگر مد لغزشی همراه با شرط تطبیق برای سیستم‌های غیرخطی همراه با جملات خطی و غیرخطی مجزا مطرح شده است. در ادامه به بررسی تعدادی از جدیدترین مقالات اخیر و بیان نکات متمایز این مقاله، می‌پردازیم.

مسئله تخمین حالت توزیع شده با استفاده از فیلترها و یا روینگرها انجام می‌شود. به عنوان یکی از مقاله‌های اخیر که با استفاده از فیلتر توزیع شده انجام شده است، [۳۰] که در سال ۲۰۱۷ می‌باشد را می‌توان در نظر گرفت. در این مقاله به طراحی یک نوع از فیلتر برای تخمین حالتها در یک سیستم غیر خطی توزیع شده تصادفی در یک شبکه خاص پرداخته است. در این مقاله تاخیر و نامعینی را در مدل سیستم اعمال نکرده است و فقط یک فیلتر غیرخطی توزیع شده را در نظر گرفته است. عیب روش فیلتر کالمن این است که در محدوده کوچکی از نقطه کار استفاده می‌شود و اغلب به محاسبات سنگین برای بدست آوردن تخمین وضعیت سیستم نیاز دارد. اما هدف مقاله ما طراحی روینگر شبه لیونبرگر توزیع شده غیرخطی مقاوم در شبکۀ گراف غیرجهتدار می‌باشد که عیوب فیلتر را نداشته و در من به اعمال دو تاخیر در حالت و خروجی و نامعینی نیز پرداخته می‌شود. در سالهای اخیر، تخمین توزیع شده در سیستم‌های خطی با استفاده از روش‌های مختلفی انجام شده است. به طور خاص در [۳۱] که در سال ۲۰۱۹ می‌باشد، یک روینگر توزیع شده لیونبرگر برای دینامیک سیستم خطی در نظر گرفته شده است. که شامل چندین شبکۀ روینگر محلی است که هر روینگر با استفاده از اطلاعات خود و همسایگان، اطلاعات را دریافت می‌کند. در این مقاله مدل سیستم خطی می‌باشد و تاخیر را در مدل سیستم اعمال نکرده است و فقط شبکۀ متصل قوی را در نظر گرفته است و از روش تبدیل به مدل خطی LMI برای طراحی پارامترها استفاده کرده است. اما هدف مقاله ما طراحی روینگر غیرخطی همراه با اعمال دو تاخیر و نامعینی در شبکۀ غیرجهتدار می‌باشد و ما با استفاده از توابع لیاپانوف و نامعادله جنسن که روشی قویتر و دقیق تر می‌باشد به طراحی پارامترها پرداخته ایم.

همچنین در [۳۲] که در سال ۲۰۲۰ می‌باشد به طراحی یک روینگر توزیع شده غیرخطی شبه لیونبرگر در یک گراف غیرجهتدار می‌پردازد. در این مقاله سیستم بدون تاخیر و نامعینی می‌باشد. همچنین در [۳۳] که در سال ۲۰۲۱ می‌باشد به طراحی یک روینگر توزیع شده غیرخطی شبه لیونبرگر در یک شبکۀ گراف می‌پردازد. و با استفاده از ماتریس‌های وزنی به طراحی پارامترها می‌پردازد. اما هدف مقاله ما طراحی روینگر توزیع شده غیرخطی همراه با اعمال تاخیر و نامعینی در شبکۀ غیرجهتدار و طراحی پارامترها با استفاده از تابع لیاپانوف و نامعادله جنسن می‌باشد که روشی قویتر و دقیق تری نسبت به روشهای دیگر می‌باشد.

سیستم‌های تخمین توزیع شده دارای کاربردهای گسترده‌ای در صنعت می‌باشند. به عنوان یکی از کاربردهای عملی روینگرهای توزیع شده، سیستم‌های شبکۀ هوشمند مطرح می‌گردد. از [۳۴] به عنوان مقاله

گراف جهتدار، هر یال  $(i, j) \in \mathcal{E}$  نشان می‌دهد که اطلاعات از گره  $i$  به  $j$  جریان دارد. برای هر  $i, j \in R$  فرض می‌شود ویژگی ارتباط یک گره با خودش وجود ندارد، یعنی  $(i, i) \notin \mathcal{E}$  همچنین  $g_{ij} = 1$  اگر و تنها اگر  $(i, j) \in \mathcal{E}$  در غیر این صورت  $g_{ij} = 0$ . یک مسیر به طول  $L$  از گره  $i$  به  $j$  شامل یک رشته از گره‌های  $(i_0, i_1, i_2, \dots, i_L)$  می‌باشد، به طوری که  $(i_k, i_{k+1}) \in \mathcal{E}$  و  $i_0 = i$  و  $i_L = j$  می‌باشد. یک گراف غیرجهتدار نامیده می‌شود، اگر  $(i, j) \in \mathcal{E}$  آنگاه  $(j, i) \in \mathcal{E}$  و چنانچه  $G = [g_{ij}]_{N \times N}$  گراف غیرجهتدار متصل باشد،  $L = [l_{ij}]_{N \times N}$  یک ماتریس مثبت نیمه معین است که دارای مقادیر ویژه حقیقی منفی می‌باشد و صفر یک مقدار ویژه تکین برای  $L$  با بردار ویژه  $1_N$  می‌باشد به گونه‌ای که  $1_N$  برداری با تمام المانهای 1 می‌باشد. و فرض می‌شود که تمام مقادیر ویژه ماتریس  $L$  در رابطه  $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_N$  صدق می‌کنند. یک گراف غیرجهتدار، مرتبط می‌باشد، اگر یک مسیری از  $i$  به  $j$  برای هر دو گره دلخواه مجزای  $i, j \in R$  وجود داشته باشد [۴-۱].

## فرض ۱

گراف ارتباطات باید کاملاً همبند باشند.

## تعریف ۱

به طور کلی تاخیرها یا به صورت گسسته و یا توزیع شده می‌باشند. و تاخیرهای گسسته یا به صورت ثابت  $\tau = \tau_1, \tau = \alpha \tau_1$  (تکی و یا ضربی از همدیگر) و به صورت معلوم و یا تصادفی هستند و یا متغیر با زمان  $\tau(t)$  می‌باشند و تاخیرهای متغیر با زمان یا به صورت باند محدود می‌باشند، که به صورت  $\tau_{\min} \leq \tau(t) \leq \tau_{\max}$  تعریف می‌گردد که در عمل باند بالایی و باند پایینی رادر نظر می‌گیرند. که در واقع روش اثباتها مشابه همان روش اثبات همراه با تاخیر ثابت باند محدود معلوم می‌باشد. و یا با نرخ محدود می‌باشد، که در این صورت  $\dot{\tau}(t) \leq D \leq 1$  می‌باشد که در روش اثبات تابع لیاپانوف به صورت بخشهای مربعی و انتگرالی در نظر گرفته می‌شود. در این مقاله با هدف کاهش محاسبات تاخیرها را به صورت ثابت و محدود در هنگام دریافت اطلاعات از خروجی و در هنگام تبادل اطلاعات در گراف در نظر می‌گیریم. بنابراین  $\tau_{\text{communication}} = \tau_1 \tau_{\text{out}} = \tau_1$  و  $\tau_1 \geq 0$  و  $\tau_2 \geq 0$  در نظر گرفته می‌شود. در این راستا، یک ثابت مثبت و معلوم و محدود  $\tau_{\max}$  به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که  $\tau = \max\{\tau_1, \tau_2\} \leq \tau_{\max}$  باشد.

## تعریف ۲

در گراف جهتدار و یا غیرجهتدار، ماتریس  $L$  را به صورت ماتریس لاپلاسیان تعریف می‌کنیم. و با استفاده از خصوصیات ضرب کروئکر بین المانهای یک گراف رابطه  $\sum_{j=1}^N g_{ij} M(e_i(t - \tau_1)) - e_j(t - \tau_1) = (L \otimes M)e(t - \tau_1)$   $G =$

## تعریف ۳

مدل سیستم در نظر گرفته شده در این مقاله به صورت سیستم متمرکز غیرخطی مقاوم تغییر ناپذیر با زمان می‌باشد، که فاقد ورودی و تاخیر در مدل سیستم می‌باشد. در طراحی روینگر توزیع شده غیرخطی مقاوم تاخیردار، با هدف جلوگیری از افزایش محاسبات، تاخیرها را ثابت و دارای باند معلوم در نظر گرفته ایم. بنابراین با توجه به عدم اعمال ورودی و تاخیر ثابت شرط تداخل را اعمال نموده ایم.

## لم ۱

ماتریس لاپلاسیان گراف  $G = [g_{ij}] \in R^{N \times N}$ ، به صورت  $L = D - G$  نیز تعریف می‌گردد به گونه‌ای که ماتریس قطری  $D = \text{diag}\{d_i\}$  بصورت  $d_i = \sum_{j \in n, j \neq i} g_{ij}$  می‌باشد که  $d_i =$

## لم ۲ (معادلات دیفرانسیل ریکاتی)

فرض کنید زوج  $(A, H)$  رویت پذیر باشند. بنابراین برای معادله ریکاتی پارامتری، یک راه حل منحصر به فرد وجود دارد [۲۰].  
 $p(\gamma) = P > 0$  for  $\gamma > 0$  :

$$PA^T + AP - PH^T HP = -\gamma P$$

به گونه‌ای که  $p(\gamma)$  دارای مشخصات زیر می‌باشد.

$$\forall \gamma > 0 \quad \lim_{\gamma \rightarrow 0} p(\gamma) = 0, \left( \frac{dp(\gamma)}{d\gamma} \right) > 0; \quad \text{tr}(HP(\gamma)H^T) = n\gamma; \quad P(\gamma)H^T HP(\gamma) \leq n\gamma P(\gamma); \quad e^{At} P(\gamma) e^{A^T t} \leq e^{(n-1)\gamma t} P(\gamma) \quad t \geq 0.$$

## لم ۳ (معادلات ینسن)

برای هر ماتریس  $OR^{n \times n} > 0$  و اسکالر  $t > 0$  بردار  $\varphi: [-t, 0] \rightarrow R^n$  انتگرال مربوطه، به گونه‌ای تعریف شده است که رابطه زیر صادق می‌باشد [۱۸].

$$\int_{-t}^0 \phi(s)^T R \phi(s) ds \geq \frac{1}{t} \int_{-t}^0 \phi(s)^T ds R \int_{-t}^0 \phi(s) ds \quad (2)$$

## لم ۴ (S-Procedure)

ماتریسهای متقارن  $P, Q \times n \times n$  را در نظر بگیرید. و فرض کنید نامعادله مربعی  $x^T P x \geq 0$  برقرار باشد. بنابراین نامعادله مربعی  $(x^T P x \geq 0)$  نیز از این رابطه محاسبه می‌گردد  $(x^T Q x \geq 0) \rightarrow x^T Q x \geq 0$  اگر و تنها اگر یک اسکالر حقیقی  $\lambda \geq 0$  وجود داشته باشد، به گونه‌ای که  $P \geq \lambda Q$  [۲۹].

## لم ۵ (Cauchy-Schwarz inequality)

نامعادله Cauchy-Schwarz بیان میدارد که برای تمام بردارهای  $M, N$  در فضای ضرب داخلی رابطه  $|\langle M, N \rangle|^2 \leq \langle M, M \rangle \langle N, N \rangle$

که در این رابطه  $\bar{P}_i$  و  $Z_i^T \in R^{m_i}$  به صورت رابطه (۵) تعریف می‌گردد، که در این رابطه ماتریس  $P_i$  در معادلات ریکاتی که در لم ۲ بیان شد صادق می‌باشد.

$$\bar{P}_i = e^{-A^T \tau_2} P_i^{-1} e^{-A \tau_2} \quad (5)$$

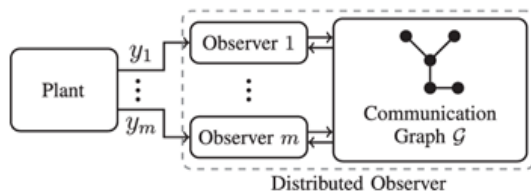
در این رابطه  $\tau_2$  تاخیر در دریافت اطلاعات از خروجی سیستم تعریف می‌گردد. که به صورت ثابت و محدود و کراندار در نظر گرفته می‌شود.

## فرض ۲

تمام مقادیر ویژه ماتریس  $A$  درای مقدار حقیقی منفی می‌باشد و زوج  $(A, H_i)$  رویت پذیر می‌باشد و زوج  $(A, H_i)$  می‌تواند رویت پذیر نباشند.

## ۳-۱- روینگر مد لغزشی توزیع شده

سیستم غیرخطی به وسیله یک گراف از سنسورها تصویر می‌شود و شامل  $N$  گره می‌باشد که در آن هر گره، شامل یک روینگر محلی می‌باشد. هدف هر گره تخمین مجانبی حالت‌های سیستم با استفاده از اندازه‌گیری‌های محدود خود همراه با تبادل اطلاعات با همسایگان می‌باشد. شکل (۱) یک شبکه روینگر توزیع شده را نشان می‌دهد.



شکل (۱): مشخصه کلی روینگر توزیع شده

در واقع، هدف ما طراحی روینگر مد لغزشی توزیع شده غیر خطی مقاوم شامل  $N$  روینگر محلی می‌باشد.

در ابتدا روینگر خطی متمرکز لیونبرگر را بدون اعمال هیچ تاخیری در نظر می‌گیریم. مرحله بعد به اعمال تاخیر در خروجی روینگر می‌پردازیم. البته این نکته را در نظر می‌گیریم که تاخیرها با مقادیر محدود و کوچک می‌باشند. در مرحله بعد، به اعمال پارامتر توزیع شده می‌پردازیم. چنانچه روینگر توزیع شده ای را در نظر بگیریم. باید به اثرات مجموع تمام گره‌ها پردازیم و تاثیر آنها را در تک تک روابط بررسی نماییم. بنابراین، بخش دوم شامل اعمال تاخیر در حالت‌های پارامتر توزیع شده می‌باشد. که تا این مرحله در مرجع [۲۰] بیان شده است. در بخش سوم به اعمال پارامتر غیر خطی می‌پردازیم که به صورت متمرکز آن در مراجع [۱۰-۱۱] بیان شده است. اما به صورت توزیع شده آن نکته متمایز مقاله ما می‌باشد. در مرحله بعدی به اعمال سطح سوئیچینگ منظور کاهش اثرات نامعینی به روینگر توزیع شده غیر خطی می‌پردازیم که به صورت متمرکز آن در مراجع [۲۵-۲۶-۲۷] بیان شده است. اما به صورت

$(N, N)$ .  $(M, M)$  برقرار می‌باشد. به گونه ای که  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  نشان دهنده ضرب داخلی می‌باشد [۱۸].

## لم ۶ (شرط وجود و منحصر به فرد بودن جواب محلی

در توابع غیرخطی دارای شرط لیب شیتز)

فرض کنید تابع  $f(t, x)$  تابع تکیه ای پیوسته در  $t$  با شرایط لیب شیتز می‌باشد بنابراین

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \|f(t, x) - f(t, y)\| = L \|x - y\|$$

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \| \|x - x_0\| < N\}, \forall t \in [t_0, t_1]$$

در این رابطه، به  $f(t, x)$  که شرط لیب شیتز را ارضاء می‌کند، تابع لیب شیتز در  $x$  می‌گویند. و  $L$  ثابت لیب شیتز می‌باشد.  $L$  نباید تابع  $x$  یا  $t$  در منطقه مورد نظر باشد. شرط لیب شیتز بودن به معنای هموار بودن  $f$  در منطقه مورد نظر از  $x$  می‌باشد. در این رابطه پارامتر  $\alpha > 0$  به گونه ای وجود دارد که تابع غیرخطی  $\dot{x} = f(t, x)$  با مقدار اولیه  $x(t_0) = x_0$  در ناحیه  $[t_0, t_0 + \alpha]$  دارای جواب منحصر به فرد می‌باشد. همچنین، اگر توابع  $f(t, x)$  و  $\left| \frac{df(t, x)}{dx} \right|$  در ناحیه  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$  وجود داشته باشد، تابع  $f(t, x)$  لیب شیتز محلی در  $x$  به روی  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$  می‌باشد، اگر و تنها اگر  $\left| \frac{df(t, x)}{dx} \right|$  به روی  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$  محدود و یکنواخت باشد. به استثنای مدل ایده آل غیرخطی گسسته، اکثر پدیده های فیزیکی لیب شیتز محلی می‌باشند. برای داشتن جواب منحصر به فرد در منطقه  $D$  شرط لیب شیتز محلی کافی می‌باشد [۱۲].

## ۳- بیان مسئله

سیستم غیرخطی تغییر ناپذیر با زمان زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t, x) + \Gamma d(t) \quad (3)$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 x \\ \vdots \\ H_m x \end{bmatrix}, i = 1, \dots, N$$

که در آن  $x \in \mathbb{R}^n$  حالت سیستم و  $y \in \mathbb{R}^m$  خروجی اندازه گیری شده است، که در آن  $y_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  و  $\sum_{i=1}^N m_i = m$  می‌باشد. ماتریسهای  $\Gamma \in \mathbb{R}^n$  و  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  معلوم می‌باشند. تابع غیرخطی به صورت  $f(t, x)$  در نظر گرفته می‌شود که در شرط لیب شیتز که در لم ۶ بیان شد، صدق می‌کند. همچنین  $d(t)$  نامعینی سیستم و یا ورودی اغتشاش می‌باشد، که به صورت کراندار در نظر گرفته شده است. و همواره  $\|d\| \leq D$  می‌باشد و  $D > 0$  یک ثابت مثبت می‌باشد. همچنین فرض می‌کنیم که همواره نامعینی در شرط زیر که به عنوان شرط تطبیق مطرح می‌گردد صادق می‌باشد.

$$\Gamma^T \bar{P}_i = Z_i H_i \quad (4)$$

یک روینگر توزیع شده، پایدار مجانبی همه‌جانبه خواهد بود اگر رابطه خطا  $\delta_i(t) = x(t) - \hat{x}_i(t)$  به ازای مقادیر اولیه  $\delta_i(\varphi) = \rho_i(\varphi)$ ،  $\varphi \in [-\tau, 0]$ ،  $\tau = \max(\tau_1, \tau_2)$ ،  $i = 1, \dots, N$  برقرار باشد و همچنین به ازای تمام  $i \in N$  تخمین حالت به دست آمده توسط هر گره، به صورت مجانبی به مقدار صحیح حالت سیستم همگرا گردد.

### نکته ۱

بر اساس تعریف خطا می توان رابطه بین حالتها در یک گراف را به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M g_{ij} M(\hat{x}_i(t - \tau_1) - \hat{x}_j(t - \tau_1)) = \\ & \sum_{j=1}^M g_{ij} M(\hat{x}_i(t - \tau_1) - x(t - \tau_1) + x(t - \tau_1) - \\ & \hat{x}_j(t - \tau_1)) = \sum_{j=1}^M g_{ij} M(-(x(t - \tau_1) - \hat{x}_i(t - \\ & \tau_1)) + (x(t - \tau_1) - \hat{x}_j(t - \tau_1))) = \\ & \sum_{j=1}^M g_{ij} M(e_j(t - \tau_1) - e_i(t - \tau_1)) \blacksquare \end{aligned}$$

در ادامه با توجه به دو رابطه (۳) و (۶) معادله دینامیک خطا به صورت زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_i(t) = & A\delta_i(t) - G_i H_i (e^{-A\tau_2} \delta_i(t)) - \\ & \sum_{j=1}^M g_{ij} M(\delta_i(t - \tau_1) - \delta_j(t - \tau_1)) + \\ & \tilde{f}_i + \Gamma d(t) - S_i \end{aligned} \quad (9)$$

به گونه ایی که  $\tilde{f}_i = f(t, x) - f(t, \hat{x}_i)$ ،  $i = 1, \dots, N$  تعریف می گردد. چنانچه بردار خطای تمام  $M$  گره به صورت  $\delta = \text{col}(\delta_1^T, \dots, \delta_N^T)$  در نظر گرفته می شود. که در این رابطه علامت  $\otimes$  به صورت ضرب کرونگر تعریف می گردد.

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) = & (I_N \otimes A - \\ & \bar{G} \bar{H} (I_N \otimes e^{-A\tau_2})) \delta(t) - (L \otimes M) \delta(t - \tau_1) + \\ & \bar{F} + \Lambda d(t) - S \end{aligned} \quad (10)$$

به گونه ایی که  $\bar{G} = \text{diag}\{G_1, \dots, G_N\}$ ،  $\bar{H} = \text{diag}\{H_1, \dots, H_N\}$  و  $S = \text{col}\{s_1^T, s_2^T, \dots, s_N^T\}$  همچنین  $\Gamma \in R^N$  از روی هم قرار گرفتن  $N$  ماتریس اغتشاش  $\Lambda \in R^{N \times M}$  یکسان بوجود می آید. همچنین  $L$  در تئوری گراف در لم ۱ تعریف شده است. و  $\bar{F} = [\tilde{f}_1^T \quad \tilde{f}_2^T \quad \tilde{f}_3^T \quad \dots \quad \tilde{f}_N^T]^T$  که در شرایط لیپ شیتز صدق می کند. و برای تابع غیرخطی  $\bar{F}$  شرایط لیپ شیتز در ثابت  $\alpha$  و دو متغیر  $\delta, \delta^T$  به صورت زیر تعریف می گردد.

$$\bar{F} \bar{F}^T \leq \delta^T(t) (I_N \otimes \alpha^2 I_N) \delta(t) \quad (11)$$

همچنین  $\tau = \max(\tau_1, \tau_2)$  در نظر گرفته می شود. در ادامه به منظور ساده سازی رابطه خطا تعریف زیر را انجام میدهم که در پیوست ۱ اثبات آن بیان می گردد.

توزیع شده آن نکته متمایز مقاله ما می باشد. در این راستا، دینامیک هر روینگر محلی در گره  $i$  به صورت رابطه (۶) بیان می گردد.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_i = & \underbrace{A\hat{x}_i(t) + G_i(y_i(t - \tau_2) - H_i e^{-A\tau_2} \hat{x}_i(t)) -}_{\text{Luenberger observer with delay}} \\ & \underbrace{\sum_{j=1}^N g_{ij} M(\hat{x}_i(t - \tau_1) - \hat{x}_j(t - \tau_1))}_{\text{Distributed observer with delay}} + \\ & \underbrace{f(t, \hat{x}_i)}_{\text{Nonlinear function}} + \underbrace{S_j(t, \hat{x}_i)}_{\text{Switching}} \end{aligned} \quad (6)$$

$i = 1, \dots, N$ .

که در آن  $\hat{x}_i \in R^n$  تخمین حالت روینگر محلی در گره  $i$  می باشد.  $g_{ij}$ ،  $(i, j)$ -امین عنصر ماتریس مجاورت  $G$  در شبکه گراف می باشد.  $G_i \in R^{n \times m_i}$  و  $M \in R^{n \times n}$  ماتریس‌های بهره می باشند که باید طراحی شوند.  $\tau_{\text{out}} = \tau_{\text{communication}} = \tau_1$ ،  $\tau_2 \geq 0$  و  $\tau_1 \geq 0$  دو تاخیر در نظر گرفته شده در حالت و خروجی سیستم می باشد.  $f(t, \hat{x}_i)$  تابع غیرخطی می باشد که بر اساس رابطه لیپ شیتز که در لم ۶ بیان گردید، به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$\|f(t, x) - f(t, \hat{x}_i)\| \leq \alpha^2 \|x(t) - \hat{x}_i(t)\| \quad (7)$$

در این رابطه  $\alpha > 0$  ثابت لیپ شیتز و نماد  $\|\cdot\|$  نشان دهنده نرم اقلیدسی می باشد.

اساس روش روینگر مد لغزشی به این صورت می باشد که، در ابتدا یک سطح سوئیچینگ به صورت تابعی از متغیرهای حالت تعریف می گردد، که در حالت دو بعدی خط و در حالت سه بعدی صفحه می باشد. حالت‌های سیستم از یک شرط اولیه شروع می شود و قبل از رسیدن به سطح سوئیچینگ، طراحیهای موجود، سیستم را به سطح مورد نظر هدایت می کنند. هنگامی که تمام حالت‌های روی سطح قرار گرفت، این حالتها به سمت مبدا حرکت می کنند. اما این فرض در حالت ایده آل اتفاق می افتد. در عمل عواملی مانند اصطکاک و فرکانس و ... باعث می شوند که پدیده ها از سطح سوئیچینگ کمی عبور کنند، اما دوباره به سمت سطح حرکت می کنند. و این اتفاق تا زمانی که حالت‌های سیستم به مبدا برسند و خطا به سمت صفر برود، ادامه دارد.

در این مقاله به دلیل اعمال شبکه توزیع شده، روینگر دارای  $N$  سطح سوئیچینگ می باشد و  $S_i$  تابع سطح سوئیچینگ ناپیوسته ایی می باشد که در روینگر  $i$  در نظر گرفته می شود و به صورت زیر تعریف می گردد.

$$S_i = \begin{cases} -\frac{\bar{P}_i^{-1} H_i^T Z_i^T Z_i H_i \delta_i D}{\|Z_i H_i \delta_i\|} & \|Z_i H_i e_i\| \neq 0 \\ 0 & \|Z_i H_i e_i\| = 0 \end{cases} \quad (8)$$

که در این رابطه ماتریس  $\bar{P}_i$  به صورت معادله (۵) در نظر گرفته می شود و در معادلات ریکاتی که در لم ۲ بیان شد صادق می باشد  $Z_i \in R^{m_i}$  و  $\delta_i \in R^{m_i}$  خطا در هر روینگر  $i$  در نظر گرفته می شود.

و چنانچه  $\beta > 0$  را حداقل نرخ همگرایی در نظر بگیریم. خطای رابطه (۱۳) با حداقل نرخ  $\beta$  به صفر همگرا گردد.

### اثبات

در مرجع [۲۰] ماتریس های بهره رولتگر توزیع شده برای سیستم خطی به صورت زیر می باشند. ما با این دستاوردها در شبکه متصل غیرجهتدار شروع می کنیم و اثبات خود را برای حالت غیرخطی توسعه می دهیم.

$$M = k\gamma e^{A\tau_1} \quad (۱۴)$$

$$G_i = \frac{N}{2} e^{A\tau_2} P H_i^T, i = 1, \dots, N \quad (۱۵)$$

در این اثبات، تابع کاندیدای لیانوف به شرح زیر برای تجزیه و تحلیل پایداری دینامیک خطا انتخاب می شود.

$$V(e) = \delta^T (I_N \otimes \bar{P}) \delta \quad (۱۶)$$

در این رابطه ماتریس  $\bar{P}$  در معادله دیفرانسیل ریکاتی (۱) که در لم ۲ ارائه شده است صدق می کند و به صورت زیر می باشد.

$$\bar{P} = e^{-A^T \tau_2} P^{-1} e^{-A\tau_2} \quad (۱۷)$$

برای اطمینان از پایداری مجانبی تابع خطا، مشتق تابع لیانوف باید منفی معین باشد. بدین منظور به محاسبه مشتق لیانوف می پردازیم. در این راستا، مشتق  $\dot{e}$  را از رابطه (۱۳) و با جایگذاری روابط (۱۴) و (۱۵) در آن محاسبه می کنیم. در ادامه، نابرابری کوشی در روند اثبات حاضر گنجانده شده است. نابرابری کوشی و نتایج مهم آن در لم ۵ و مرجع [۱۸] بیان شده است. بر طبق این نابرابری داریم

$$2k\gamma\delta^T(t)(L\otimes\bar{P})z(t) \leq k\gamma\delta^T(t)(L\otimes\bar{P})\delta(t) + k\gamma z^T(t)(L\otimes\bar{P})z(t)$$

جایگذاری کرده و رابطه زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \delta^T(t)(I_N \otimes e^{-A^T \tau_2})(A^T P^{-1} + P^{-1} A) \\ & (I_N \otimes e^{-A\tau_2})\delta(t) \\ & - N\delta(t)(I_N \otimes e^{-A^T \tau_2})\bar{H}^T \bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2})\delta(t) \\ & - k\gamma\delta^T(t)(I_N \otimes e^{-A^T \tau_2})(L\otimes P^{-1}) \\ & (I_N \otimes e^{-A\tau_2})\delta(t) + k\gamma z^T(t)(I_N \otimes e^{-A^T \tau_2}) \\ & (L\otimes P^{-1})(I_N \otimes e^{-A\tau_2})z(t) + \delta^T(t) \\ & (I_N \otimes e^{-A^T \tau_2})(I_N \otimes P^{-1})(I_N \otimes e^{-A\tau_2})\bar{F} \\ & + \bar{F}^T(I_N \otimes e^{-A^T \tau_2})(I_N \otimes P^{-1})(I_N \otimes e^{-A\tau_2}) \\ & \delta(t) + \delta^T(t)(I_N \otimes e^{-A^T \tau_2})(I_N \otimes P^{-1}) \\ & (I_N \otimes e^{-A\tau_2})(\Lambda d(t) - S) + (\Lambda d(t) - \\ & S)^T(I_N \otimes e^{-A^T \tau_2})(I_N \otimes P^{-1})(I_N \otimes e^{-A\tau_2})\delta(t) \end{aligned} \quad (۱۸)$$

به منظور ساده سازی نابرابری (۱۸)، با استفاده از شرط تطبیق در رابطه (۴) و تابع ناپیوسته  $S_i$  در معادله (۸) می توان رابطه زیر را در هر گروه  $i \in N$  نظر گرفت.

$$\begin{aligned} Z(t) = & \int_{s=t-\tau_1}^t (I_N \otimes e^{A(t-s)})(\bar{G}\bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2})\delta(s) \\ & + (L\otimes M)\delta(s - \tau_1) - (\bar{F} + \Lambda d(t) - \\ & S)ds \end{aligned} \quad (۱۲)$$

بنابراین داریم  $\delta(t - \tau_1) = (I_N \otimes e^{-A\tau_1})(\delta(t) +$  خطا  $z(t))$ . در ادامه با جایگذاری رابطه  $\delta(t - \tau_1)$  در معادله (۱۰) در  $M$  گره به صورت زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) = & (I_N \otimes A - \bar{G}\bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2}) - \\ & (L\otimes M e^{-A\tau_1}))\delta(t) - (L\otimes M e^{-A\tau_1})z(t) + \\ & (\bar{F} + \Lambda d(t) - S) \end{aligned} \quad (۱۳)$$

در این مقاله، قصد ما طراحی رولتگر مد لغزشی توزیع شده غیرخطی تاخیردار برای شبکه متصل غیرجهتدار می باشد. در این راستا، قضایایی که پایداری مجانبی  $\delta(t)$  را برای شبکه غیرجهتدار تضمین می کنند ارائه و روند طراحی پارامترهای  $M, G_i, i = 1, \dots, N$ . رولتگر، در الگوریتم طراحی خلاصه می گردد.

### نکته ۲

در این مقاله فرض ما براین است که شبکه گراف شامل گراف غیرجهتدار متصل همبند می باشد. و تمام اصول و روابط حاکم بر گراف ها که در پیش فرض بیان شده است را در نظر می گیریم. و ماتریس  $L$  گراف در شرایط بیان شده در لم ۱ صدق می کند. همچنین دیگر محدودیت ما که در فرض ۱ بیان شده است مربوط به رویت پذیری ماتریس  $(A, H)$  می باشد. محدودیت دیگر ما به روی میزان تاخیر در نظر گرفته شده در حالت و خروجی است که در بخش تعریف ۱ به طور مجزا بیان شده است. و محدودیت دیگر مربوط به ماتریس  $P$  می باشد که در معادلات ریکاتی که در لم ۲ بیان شده است صدق می کند. همچنین تابع غیرخطی شامل دو قسمت خطی و غیرخطی مجزا می باشد که بخش غیرخطی در شرایط لیب شیتز که در لم ۶ بیان شده است صدق می کند.

### ۴ - طراحی پارامترهای رولتگر مد لغزشی توزیع شده

در این بخش، تحلیلی برای طراحی پارامترهای رولتگر مد لغزشی توزیع شده غیرخطی همراه با تاخیر و اعمال نامعینی در یک شبکه ارتباطی متصل غیرجهتدار، ارائه شده است.

### فرضیه ۱

رولتگر مد لغزشی توزیع شده غیرخطی تاخیر دار (۶) را در یک شبکه متصل غیرجهتدار در نظر بگیرید. اگر فرض ۱ و ۲ برقرار باشد، و شرط تطبیق (۴) را در نظر بگیریم، برای هر  $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$  ماتریس های  $M, G_i, i = 1, \dots, N$  و تابع ناپیوسته  $S_i$  به گونه ای طراحی می شوند که پایداری مجانبی معادلات خطا  $\dot{e}(t)$  در رابطه (۱۳) برقرار باشد

$$S)ds \leq 2\tau_1\lambda_N \int_{t-\tau_1}^t (\mu_1(t, s) + \mu_2(t, s))ds - \tau_1\lambda_N \int_{t-\tau_1}^t \mu_3(t, s) ds - \tau_1\lambda_N \int_{t-\tau_1}^t \mu_4(t, s) ds$$

در ادامه با استفاده از معادلات ریکاتی بیان شده در لم ۲ و تعریف

تابع لیپانوف در (۱۶) برای هر ثابت  $\varphi > 1$  داریم که

$$V(t + \theta) \leq \varphi V(t), \text{ for } \theta \in [-2\tau_1, 0]$$

$$\mu_1(t, s) \leq \frac{(nN\gamma)^2}{4} e^{(n-1)\gamma(t-s)} V(s)$$

$$\mu_2(t, s) \leq \lambda_N^2 (k\gamma)^2 \times e^{(n-1)\gamma(t-s+\tau_1)} V(s - \tau_1) \leq \varphi \lambda_N^2 (\nu\gamma)^2 e^{(n-1)\gamma(t-s+\tau_1)} V(s).$$

با استفاده از نامساوی ینسن که در لم (۳) بیان شده است.

در ادامه به محاسبه  $\mu_3(t, s)$  می پردازیم.

$$-\tau_1\lambda_N \int_{t-\tau_1}^t \mu_3(t, s) ds = -\tau_1\lambda_N \int_{t-\tau_1}^t (I_N \otimes e^{A(t-s)} \bar{F})^T (I_N \otimes \bar{P}) (I_N \otimes e^{A(t-s)} \bar{F}) ds \leq \lambda_N \int_{t-\tau_1}^t (\bar{F}^T (I_N \otimes e^{A^T(t-s)})) ds (I_N \otimes \bar{P}) \int_{t-\tau_1}^t ((I_N \otimes e^{A(t-s)} \bar{F}) ds \leq \lambda_N \bar{F}^T \times ((I_N \otimes \frac{1}{A^T} (e^{A^T \tau_1} - 1)) (I_N \otimes \bar{P}) (I_N \otimes \frac{1}{A} (e^{A \tau_1} - 1)) \bar{F}) \quad (24)$$

در ادامه به محاسبه  $\mu_4(t, s)$  با استفاده از شرط تطبیق (۴) و نامساوی ینسن و تابع ناپیوسته  $S_i$  در (۸) و روابط (۱۴) و (۱۵) داریم

$$-\tau_1\lambda_N \int_{t-\tau_1}^t \mu_4(t, s) ds = -\tau_1\lambda_N \int_{t-\tau_1}^t (I_N \otimes e^{A(t-s)} (\Delta d(t) - S))^T (I_N \otimes \bar{P}) (I_N \otimes e^{A(t-s)} (\Delta d(t) - S)) ds \leq \lambda_N \int_{t-\tau_1}^t ((\Delta d(t) - S))^T (I_N \otimes e^{A^T(t-s)}) ds (I_N \otimes \bar{P}) \times \int_{t-\tau_1}^t ((I_N \otimes e^{A(t-s)} (\Delta d(t) - S)) ds \leq \lambda_N (\Delta d(t) - S)^T (I_N \otimes \frac{1}{A^T} (e^{A^T \tau_1} - 1)) (I_N \otimes \bar{P}) (I_N \otimes \frac{1}{A} (e^{A \tau_1} - 1)) (\Delta d(t) - S) + k\gamma z^T(t) (L \otimes \bar{P}) z(t) \leq \phi_1(\gamma) \gamma^3 V + \phi_2(\gamma) + \phi_3(\gamma) \quad (25)$$

$$\phi_1(\gamma) = 2k\lambda_N\tau_1\varphi \frac{(e^{(n-1)\gamma\tau_1}-1)}{(n-1)\gamma} \times \left( \frac{n^2 N^2}{4} k^2 + \lambda_N^2 e^{(n-1)\gamma\tau_1} \right)$$

$$\phi_2(\gamma) = k\gamma\lambda_N (\bar{F}^T \times (I_M \otimes \frac{1}{A^T} (e^{A^T \tau_1} - 1) (e^{A \tau_1} - 1)) \bar{F}) (I_N \otimes \bar{P}) (I_N \otimes \frac{1}{A} (e^{A \tau_1} - 1)) (I_N \otimes \frac{1}{A^T} (e^{A^T \tau_1} - 1) - \phi_3(\gamma) = k\gamma\lambda_N (\Delta d(t) - S)^T \times (I_N \otimes \bar{P}) (I_N \otimes \frac{1}{A} (e^{A \tau_1} - 1)) (\Delta d(t) - S)$$

در ادامه معادله (۲۵) را در مشتق تابع لیپانوف معادله (۲۱) جایگزاری

می نماییم.

$$\delta_i^T(t) e^{-A^T \tau_2} P_i^{-1} e^{-A \tau_2} (\Gamma d(t) - s_i) + (\Gamma d(t) - s_i)^T e^{-A^T \tau_2} P_i^{-1} e^{-A \tau_2} \delta_i(t) s_i = -(\delta_i^T(t) \bar{P}_i s_i + s_i^T \bar{P}_i \delta_i(t)) + (\delta_i^T(t) \bar{P}_i \Gamma d(t) + \delta_i(t) (\Gamma d(t))^T \bar{P}_i) = -2\delta_i^T(t) \bar{P}_i s_i + 2\delta_i^T \bar{P}_i \Gamma d(t) \leq 2 \frac{\delta_i^T \bar{P}_i P_i^{-1} H_i^T Z_i^T Z_i H_i \delta_i D}{\|Z_i H_i \delta_i\|} - 2\|\Gamma^T \bar{P}_i \delta_i\| D \leq 0 \quad (19)$$

بنابر این داریم که  $-2\delta_i^T(t) \bar{P}_i s_i + 2\delta_i^T \bar{P}_i \Gamma d(t) \leq 2\|Z_i H_i \delta_i\| D - 2\|Z_i H_i \delta_i\| D = 0$  از رابطه مشتق لیپانوف داریم

$$\dot{V} \leq \delta^T(t) (I_N \otimes e^{-A^T \tau_2}) (A^T P^{-1} + P^{-1} A) (I_N \otimes e^{-A \tau_2}) \delta(t) - N \delta(t) (I_N \otimes e^{-A^T \tau_2}) \bar{H}^T \bar{H} (I_N \otimes e^{-A \tau_2}) \delta(t) - k\gamma \delta^T(t) (I_N \otimes e^{-A^T \tau_2}) (L \otimes P^{-1}) (I_N \otimes e^{-A \tau_2}) \delta(t) + k\gamma z^T(t) (I_N \otimes e^{-A^T \tau_2}) (L \otimes P^{-1}) (I_N \otimes e^{-A \tau_2}) z(t) + \delta^T(t) (I_N \otimes e^{-A^T \tau_2}) (I_N \otimes P^{-1}) (I_N \otimes e^{-A \tau_2}) \bar{F} + \bar{F}^T (I_N \otimes e^{-A^T \tau_2}) (I_N \otimes P^{-1}) \bar{F}^T (I_N \otimes e^{-A^T \tau_2}) (I_N \otimes P^{-1}) (I_N \otimes e^{-A \tau_2}) \delta(t) \quad (20)$$

به منظور ساده سازی، نامعادله (۲۰) را می توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\dot{V} \leq \delta^T(t) (I_N \otimes e^{-A^T \tau_2}) \sigma(\gamma) (I_N \otimes e^{-A \tau_2}) \delta(t) + k\gamma z^T(t) (L \otimes \bar{P}) z(t) + \delta^T(t) (I_N \otimes \bar{P}) \bar{F} + \bar{F}^T (I_N \otimes \bar{P}) \delta(t) \quad (21)$$

$$\mu(\gamma) = I_N \otimes (A^T P^{-1} + P^{-1} A) - N \bar{H}^T \bar{H} - k\gamma (L \otimes P^{-1}) \quad (22)$$

ترم  $\sigma(\gamma)$  در رابطه مشتق لیپانوف در نظر گرفته می شود. همچنین

در مرجع [۲۰] اثبات میگردد که  $\mu(\gamma) \leq -\frac{1}{2}(\gamma I_N \otimes P^{-1})$ .

با استفاده از این نامساوی به جایگزاری آن در رابطه (۲۱) می پر

دازیم. در ادامه به بررسی ترم دوم مشتق لیپانوف می پردازیم. برای این

منظوره از نابرابری جنسن استفاده می گردد. این نابرابری به طور کلی در

لم ۳ و مرجع [۱۸] ارائه شده است. در ترم دوم رابطه (۲۱) و با استفاده از

معادله (۱۴) و (۱۵) و حداکثر مقدار ویژه ماتریس  $L$ ، ارائه شده در لم ۱، رابطه زیر بدست می آید.

$$z^T(t) (L \otimes \bar{P}) z(t) \leq \tau_1 \lambda_N \int_{t-\tau_1}^t ((I_N \otimes e^{A(t-s)}) (I_N \otimes \frac{N}{2} e^{A \tau_2} P \bar{H}^T \bar{H}) (I_N \otimes e^{-A \tau_2}) \delta(s) + (L \otimes k\gamma e^{A \tau_1}) \delta(s - \tau_1)) ds + (I_N \otimes \bar{P}) ((I_M \otimes e^{A(t-s)}) (I_N \otimes \frac{N}{2} e^{A \tau_2} P \bar{H}^T \bar{H}) (I_N \otimes e^{-A \tau_2}) \delta(s) + (L \otimes k\gamma e^{A \tau_1}) \delta(s - \tau_1)) ds - \tau_1 \lambda_N \int_{t-\tau_1}^t (I_N \otimes e^{A(t-s)} \bar{F})^T (I_N \otimes \bar{P}) (I_N \otimes e^{A(t-s)} \bar{F}) ds - \tau_1 \lambda_N \int_{t-\tau_1}^t (I_N \otimes e^{A(t-s)} (\Delta d(t) - S))^T (I_N \otimes \bar{P}) (I_N \otimes e^{A(t-s)} (\Delta d(t) - S)) ds \quad (23)$$



در ادامه روند اثبات، از رابطه — procedureS استفاده می‌نماییم. این رابطه در لم ۴ و مرجع [۲۸] بیان شده است. در این راستا با استفاده از تعریف  $\Omega(t)$  در رابطه (۲۷) و با بکارگیری لم ۴، در دو ماتریس (۲۸) و (۲۹) روابط زیر برقرار می‌باشد. چنانچه دو ماتریس  $\psi \in R^{n \times n}$ ،  $v_{11} \in R^{n \times n}$ ،  $v_1$  وجود داشته باشد به گونه ای که  $v_{11}^* = v_1 - \psi v_{11} < 0$  بنابراین  $\Omega(t)^T v_1 \Omega(t) < 0$  for any  $\Omega(t) \in R^n \neq 0$  و این ضمانتی است که  $\Omega(t)^T v_{11} \Omega(t) < 0$  for any  $\Omega(t) \in R^n \neq 0$  بنابراین داریم که

$$v_{11}^* = \begin{bmatrix} w_{11}^* & (I_N \otimes P^{-1}) \\ (I_N \otimes P^{-1}) & w_{22}^* \end{bmatrix} \leq 0 \quad (۳۰)$$

به گونه ای که داریم

$$w_{11}^* = I_N \otimes (A^T P^{-1} + P^{-1} A) - N \bar{H}^T \bar{H} - k\gamma(L \otimes P^{-1}) + (2k\lambda_N \tau_1 \varphi \frac{(e^{(n-1)\gamma\tau_1} - 1)}{(n-1)\gamma} \times (\frac{n^2 N^2}{4} k^2 + \lambda_N^2 e^{(n-1)\gamma\tau_1})) (I_N \otimes P^{-1}) + \psi(I_N \otimes \alpha^2 I_n) \\ w_{22}^* = k\gamma\lambda_N (I_N \otimes \frac{1}{A^T} (e^{A^T \tau_1} - 1)) (I_N \otimes P^{-1}) (I_N \otimes \frac{1}{A} (e^{A \tau_1} - 1)) - \psi I_{Nn}$$

همانگونه که مشاهده می‌گردد ماتریس  $v_{11}^*$  یک ماتریس غیرخطی می‌باشد، به منظور محاسبه شرایط پایدارسازی خطا در ابتدا این ماتریس را به زیرماتریسهای A, B, C, D به گونه ای تقسیم می‌نماییم که

$$B = I_N \otimes P^{-1}, C = I_N \otimes P^{-1}, D = w_{22}^*, A = w_{11}^*$$

در ادامه اثبات از مکمل شور [۱۸]، استفاده می‌گردد به گونه ای که  $G(\gamma) = A - BD^{-1}C$  تابع پایدار می‌گردد اگر شرایط زیر برقرار باشد.

$$G(\gamma) = w_{11}^* - (I_N \otimes P^{-1}) w_{11}^* (I_N \otimes P^{-1}) < 0 \blacksquare \quad (۳۱)$$

### نکته ۳

برای هر رابطه  $G(\gamma)$  میتوان یک  $\gamma^* > 0$  در نظر گرفت به گونه ای که  $G(\gamma^*) = 0$  همچنین برای هر  $\gamma \in (0, \gamma^*)$  داریم  $G(\gamma) < 0$  و برای هر  $\gamma > 0$  می‌توان یک  $k > 0$  به اندازه کافی بزرگ، در نظر گرفت که ضمانتی بر  $G(\gamma) < 0$  می‌باشد. در این مقاله هدف ما طراحی رباتگر توزیع شده برای سیستم‌های غیرخطی همراه با اعمال نامعینی و دو تاخیر زمانی در حالت و خروجی در یک شبکه غیرجهتدار می‌باشد. در ادامه، به منظور ارائه راه حل بهتر، شرایط ارائه شده در قضیه ۱ تضمینی بر پایداری مجانبی  $e(t)$  بر اساس نابرابری جنسن است که منجر به محافظه کاری معینی در یک کلاس کلی از سیستم های غیر

$$\dot{V} \leq \delta^T(t) (I_N \otimes e^{-A^T \tau_2}) (I_N \otimes (A^T P^{-1} + P^{-1} A)) (I_N \otimes e^{-A \tau_2}) \delta(t) - N \delta^T(t) (I_N \otimes e^{-A^T \tau_2}) \bar{H}^T \bar{H} (I_N \otimes e^{-A \tau_2}) \delta(t) - k\gamma \delta^T(t) (I_N \otimes e^{-A^T \tau_2}) (L \otimes P^{-1}) (I_N \otimes e^{-A \tau_2}) \delta(t) + k\gamma \lambda_N (\bar{F}^T \times (I_N \otimes e^{-A^T \tau_2}) (I_N \otimes \frac{1}{A^T} (e^{A^T \tau_1} - 1)) (I_N \otimes P^{-1}) (I_N \otimes \frac{1}{A} (e^{A \tau_1} - 1)) (I_N \otimes e^{-A \tau_2}) \bar{F} + \delta^T(t) (I_N \otimes e^{-A^T \tau_2}) (2k\lambda_N \tau_1 \varphi \frac{(e^{(n-1)\gamma\tau_1} - 1)}{(n-1)\gamma} \times (\frac{n^2 N^2}{4} k^2 + \lambda_N^2 e^{(n-1)\gamma\tau_1})) (I_N \otimes P^{-1}) (I_N \otimes e^{-A \tau_2}) \delta(t) + \delta^T(t) (I_N \otimes e^{-A^T \tau_2}) (I_N \otimes P^{-1}) (I_N \otimes e^{-A \tau_2}) \bar{F} + \delta^T(t) (I_N \otimes e^{-A^T \tau_2}) (I_N \otimes P^{-1}) (I_N \otimes e^{-A \tau_2}) \delta(t) + (I_N \otimes \frac{1}{A^T} (e^{A^T \tau_1} - k\gamma\lambda_N (\Lambda d(t) - S))^T (I_N \otimes e^{-A^T \tau_2}) (I_M \otimes e^{-A \tau_2}) (I_N \otimes \frac{1}{A} (e^{A \tau_1} - 1)) (\Lambda d(t) - S)) \quad (۲۶)$$

در ادامه رابطه زیر را تعریف می‌نماییم

$$\Omega(t) = col \left\{ \begin{array}{l} \delta^T(t) (I_N \otimes e^{-A^T \tau_2}), \\ (\bar{F} + S - \Lambda d(t))^T (I_N \otimes e^{-A^T \tau_2}) \end{array} \right\} \quad (۲۷)$$

در ادامه می‌توان مشتق تابع لیاپانوف را به صورت  $\dot{V} \leq \Omega(t)^T v_1 \Omega(t)$  نوشت. و با استفاده از تئوری لیاپانوف به منظور اثبات پایداری دینامیک خطا کافی است:  $\dot{V} \leq \Omega(t)^T v_1 \Omega(t) \leq -\zeta |\delta(t)|^2$  به طوری که به ازای  $\zeta > 0$  داریم:

$$0 v_1 = \begin{bmatrix} w_{11} & (I_N \otimes P^{-1}) \\ (I_N \otimes P^{-1}) & w_{22} \end{bmatrix} \leq \quad (۲۸)$$

به گونه ای که داریم

$$-N \bar{H}^T \bar{H} - w_{11} = I_N \otimes (A^T P^{-1} + P^{-1} A) - k\gamma(L \otimes P^{-1}) + (2k\lambda_N \tau_1 \varphi \frac{(e^{(n-1)\gamma\tau_1} - 1)}{(n-1)\gamma} \times (\frac{n^2 N^2}{4} k^2 + \lambda_N^2 e^{(n-1)\gamma\tau_1})) (I_N \otimes P^{-1}), \\ w_{22} = k\gamma\lambda_N (I_N \otimes \frac{1}{A^T} (e^{A^T \tau_1} - 1)) (I_N \otimes P^{-1}) (I_N \otimes \frac{1}{A} (e^{A \tau_1} - 1))$$

از طرف دیگر طبق فرضیات مساله، تابع غیر خطی  $f \in R^M$  را به گونه ای در نظر گرفته ایم که در شرایط لیب شیتز صدق می‌کند. در ادامه هر دو طرف رابطه (۱۱) را

$$(I_N \otimes e^{-A^T \tau_2}) (I_N \otimes e^{-A \tau_2}) > 0 \text{ ضرب می‌کنیم و داریم} \\ \bar{F}^T (I_N \otimes e^{-A^T \tau_2}) (I_N \otimes e^{-A \tau_2}) \bar{F} - \delta_i^T(t) (I_N \otimes e^{-A^T \tau_2}) (I_N \otimes \alpha^2 I_n) (I_N \otimes e^{-A \tau_2}) \delta_i(t) \leq 0$$

بنابر این با استفاده از تعریف  $\Omega(t)$  در رابطه (۲۷) می‌توان عبارت  $\Omega(t)^T v_{11} \Omega(t) \leq 0$  را محاسبه کرد به طوری که

$$v_{11} = \begin{bmatrix} -(I_N \otimes \alpha^2 I_n) & 0 \\ 0 & I_{Nn} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (۲۹)$$

**مثال ۱:** سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t, x) + \Gamma d(t)$$

$$y_i = H_i x(t), \quad i = 1, \dots, M$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.3770 & 0.6841 & 0 \\ -0.3770 & 0 & 0 & 0.6841 \\ -0.4589 & 0 & -0.0128 & 0.3770 \\ 0 & -0.4589 & -0.3770 & -0.0128 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = [0,0,1,0], H_2 = [1,0,0,1], H_3 = [0,0,1,0], H_4 = [1,0,1,0], H_4 = [0,1,0,0]$$

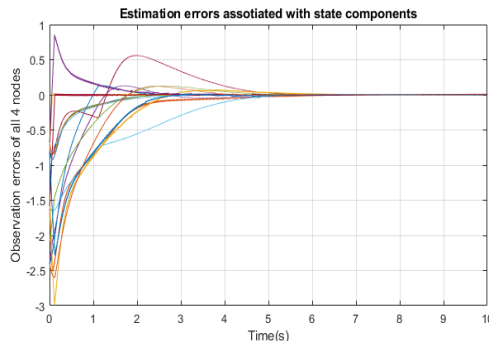
$$H = \begin{bmatrix} 0,0,1,0 \\ 1,0,0,1 \\ 1,0,1,0 \\ 0,1,0,0 \end{bmatrix}, f(t, x) = \begin{bmatrix} 3\sin(x_1) + 5\cos(x_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma d(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\sin(\pi t))$$

در حالت و خروجی به صورت  $\tau_1 = 1$  و  $\tau_2 = 2$ . در نظر گرفته شده است. همچنین بر طبق محاسبات انجام شده در الگوریتم ارائه شده  $\psi = 0.1$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $w = 60$  و ثابت  $S$ -prosecute. همچنین  $P(\gamma)$  بر طبق معادلات ریکاتی (۱) محاسبه می گردد. گراف ارتباطی بین گرهای مانند شکل ۱ می باشد. با اعمال روینگر مدل لغزشی توزیع شده غیرخطی به سیستم فوق نتایج شبیه سازی بصورت زیر می باشد. شکل ۲ خطای تخمین رادر تمام ۴ روینگر نشان می دهد و شکل ۳ خطای ردیابی مسیر هر ۴ روینگر را در شکل مجزا نشان می دهد.

$$M = \begin{bmatrix} 0.9796 & 0.1113 & 0.2026 & 0.0230 \\ -0.1113 & 0.9796 & -0.0230 & 0.2026 \\ -0.1359 & -0.0154 & 0.9758 & 0.1108 \\ 0.0154 & -0.1359 & -0.1108 & 0.9758 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0.0145 \\ 0.0084 \\ 0.0082 \\ 0.0056 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0.0091 \\ 0.0101 \\ 0.0082 \\ 0.0085 \end{bmatrix}, G_3 = \begin{bmatrix} 0.0199 \\ 0.0093 \\ 0.0097 \\ 0.0108 \end{bmatrix}, G_4 = \begin{bmatrix} 0.0157 \\ 0.0100 \\ 0.0100 \\ 0.004 \end{bmatrix}$$



شکل ۳: خطای تخمین در تمام ۴ روینگر  $(E_1, E_2, E_3, E_4)$

خطی با شرایط لپشیتز و تابع لیاپانوف می باشد. در این راستا الگوریتم زیر را می توان برای طراحی  $k$  و  $\gamma$  به گونه ای بیان کرد که برای هر  $M, G_i$  به اندازه کافی بزرگ، صادق باشد. فلوجارت الگوریتم در پیوست ۲ نشان داده شده است.

**Algorithm 1**

ورودی: مقدار اولیه  $k_0$  با استپ  $h$  را در نظر می گیریم.

I. مقدار اولیه  $k = k_0$  را در نظر می گیریم.

II. بر طبق رابطه (۲۲) پارامتر  $\mu(\gamma_1^*)$  را در نظر می گیریم،

در این راستا یک ثابت مثبت  $\gamma_1^*$  را به گونه ای انتخاب می کنیم که شرط  $\mu(\gamma_1^*) \leq -\frac{1}{2} \gamma_1^* (I_M \otimes P^{-1})$  برقرار باشد.

III. رابطه (۲۵) را در نظر می گیریم در این رابطه یک ثابت مثبت  $\gamma_2^*$  را به گونه ای انتخاب می کنیم که شرط

$$k y z^T(t) (L \otimes \bar{P}) z(t) \leq \phi_1(\gamma) \gamma^3 V + \phi_2(\gamma) + \phi_3(\gamma)$$

IV. یک  $\gamma \leq \min(\gamma_1^*, \gamma_2^*)$  را در نظر می گیریم اگر رابطه

(۳۱) به صورت زیر برقرار بود که الگوریتم پایان می یابد،

در غیر این صورت پارامتر  $k$  را به صورت  $k = k + h$  در نظر می گیریم و به مرحله ۲ باز می گردیم.

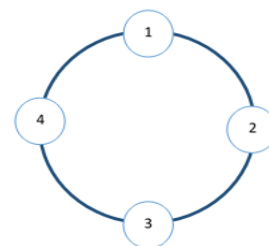
$$-(I_N \otimes P^{-1}) w_{11}^* {}^{-1} (I_N \otimes P^{-1}) < 0 \quad OG(\gamma) = w_{11}^*$$

خروجی:  $k$  و  $\gamma$  را به عنوان خروجی در نظر می گیریم.

**تکته ۴**

تحت یک شبکه متصل غیرجهتدار به طراحی ماتریسهای  $M$  و  $G_i$  با استفاده از روابط (۱۴) و (۱۵) می پردازیم. علاوه بر آن با استفاده از الگوریتم ۱ به طراحی پارامترهای  $\gamma, k$  می پردازیم. هر روینگر اندازه گیریهای موجود خود را جمع آوری می کند و از طریق یک شبکه اتصال غیرجهتدار، اندازه گیریهای خود را با اندازه گیریهای همسایگان خود مبادله می کند. به این ترتیب، روینگر مدل لغزشی توزیع شده به طور مشترک وضعیت سیستم را دنبال خواهد کرد.

**۴- شبیه سازی**



شکل ۲: شبکه گراف متصل غیرجهتدار

در این قسمت به بررسی روش پیشنهادی در یک شبکه متصل غیرجهتدار می پردازیم.

**مثال ۳:** به منظور مقایسه عملکرد ارائه شده، مقاله مرجع [۳۱] را

در نظر گرفته و با اعمال پارامترهای غیرخطی آن را بهبود بخشیده ایم. مقادیر ماتریسها و شبکه گراف در مرجع مورد نظر بیان شده است. تابع غیر خطی را به صورت زیر در نظر می گیریم. مقادیر پارامترهای غیر خطی در رابطه زیر بیان شده است.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x, t) + \Gamma d(t)$$

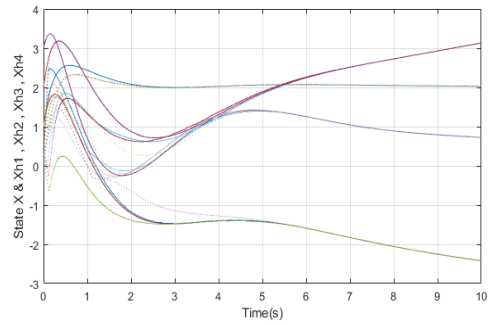
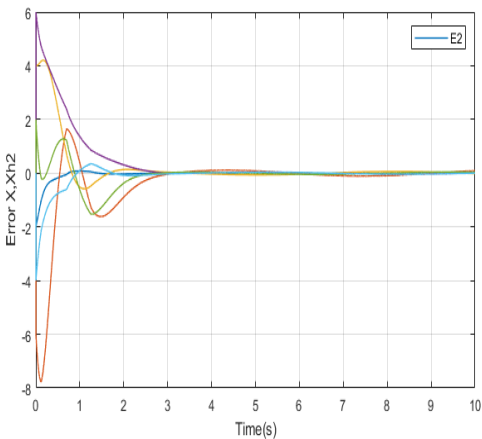
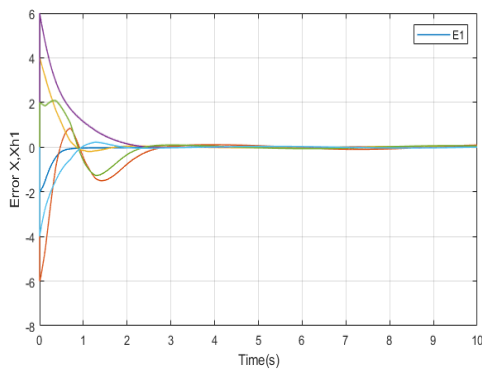
$$y_i = H_i x(t), \quad i = 1, \dots, N$$

$$\Gamma d(t) = 0.1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin(t), f(x, t) = \begin{bmatrix} 3 \sin(\pi x) \\ 3 \sin(\pi x) \\ 3 \sin(\pi x) \\ 3 \sin(\pi x) \\ 3 \sin(\pi x) \\ 3 \sin(\pi x) \\ 3 \sin(\pi x) \end{bmatrix}$$

ماتریسهای بهره رویکنگر محلی  $M_i$  و  $L_i$  به صورت زیر محاسبه می گردد.

$$L_1 = \begin{bmatrix} -0.1436 & 0.5757 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5218 & -0.1822 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 1.2638 \\ -6.3179 \\ 0.3438 \\ -2.0418 \\ -5.5558 \\ 1.4010 \\ -0.0137 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.4311 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, L_4 = \begin{bmatrix} -0.0069 & -0.0137 \\ -1.7673 & -3.5346 \\ 0.4472 & 0.8944 \\ 0.5823 & 1.1646 \\ -0.8332 & -1.6664 \\ 0.2372 & 0.4744 \end{bmatrix}$$



شکل ۴: نمودار مقادیر حقیقی و تخمین زده شده حالتها در هر ۴ رویکنگر

**مثال ۲:** به منظور مقایسه عملکرد ارائه شده، مقاله مرجع [۲۸] را

در نظر گرفته و با اعمال پارامترهای غیرخطی آن را بهبود بخشیده ایم. مقادیر ماتریسها و شبکه گراف در مرجع مورد نظر بیان شده است. تابع غیر خطی را به صورت زیر در نظر می گیریم. مقادیر پارامترهای غیر خطی در رابطه زیر بیان شده است.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x, t)$$

$$y_i = H_i x(t), \quad i = 1, \dots, N$$

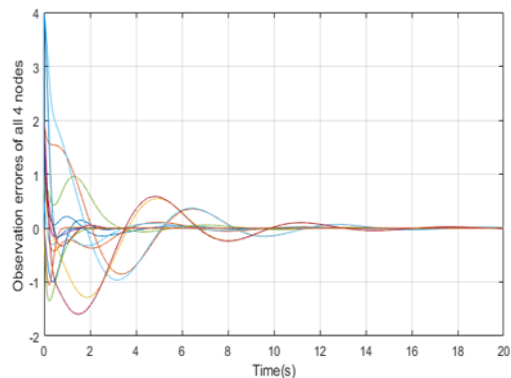
$$f(x, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \sin(x) + 3 \cos(x) \\ 0 \end{bmatrix}$$

ماتریسهای بهره رویکنگر محلی  $M_i$  و  $L_i$  به صورت زیر محاسبه می گردد

$$L_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, L_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & -1.5 & 0 & 0 \\ 1.5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2.25 & 0 & 0 \\ 2.25 & 2.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.144 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1.548 \end{bmatrix}, M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.7410 & 1.1250 \\ 0 & 0 & 1.1250 & 1.2870 \end{bmatrix}$$



شکل ۵: خطای تخمین در تمام ۴ رویکنگر ( $E_1, E_2, E_3, E_4$ )

بکارگیری شرایط لپشیتز در بخش غیرخطی و با انتخاب توابع مناسب لیاپانوف و اعمال نابرابری جنسن در شبکه‌های متصل غیرجهتدار، انجام شده است. در این راستا قضایایی که پایداری مجانبی خطا را تضمین می‌کنند ارائه شده و روند طراحی پارامترهای روینگر در یک الگوریتم خلاصه شده است. در نهایت، نتایج شبیه‌سازی برای شبکه متصل غیرجهتدار مورد بررسی قرار گرفت.

### پیوست ۱

ابتدا رابطه خطا را برای تمام حالتها در نظر می‌گیریم.

$$\delta(t) = (I_N \otimes A - \bar{G}\bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2}))\delta(t) - (L \otimes M)\delta(t - \tau_1) + \bar{F} + \Lambda d(t) - S$$

دو طرف رابطه بالا را در  $0 < (I_N \otimes e^{A(t-s)})$  ضرب می‌کنیم و داریم که

$$\begin{aligned} (I_N \otimes e^{A(t-s)})\delta(t) &= \\ (I_N \otimes e^{A(t-s)})(I_N \otimes A)\delta(t) &- \\ (I_N \otimes e^{A(t-s)})(\bar{G}\bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2}))\delta(t) &- \\ (I_N \otimes e^{A(t-s)})(L \otimes M)\delta(t - \tau_1) &+ \\ S(I_N \otimes e^{A(t-s)})(\bar{F} + \Lambda d(t)) &- \end{aligned}$$

در این راستا عبارات شامل  $(I_N \otimes e^{A(t-s)})(I_N \otimes A)\delta(t)$  را یک طرف می‌بریم.

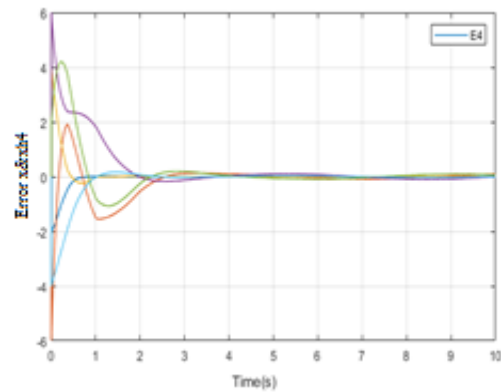
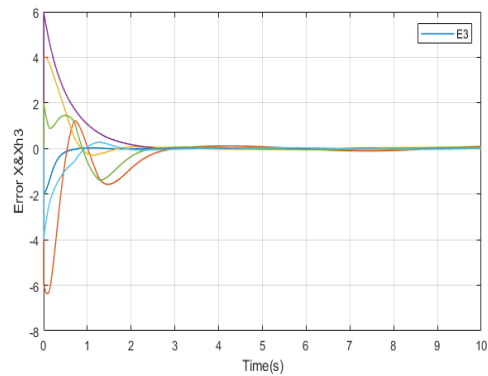
$$\begin{aligned} (I_N \otimes e^{A(t-s)})\delta(t) &- \\ (I_N \otimes e^{A(t-s)})(I_N \otimes A)\delta(t) &= \\ (I_N \otimes e^{A(t-s)})(\bar{G}\bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2}))\delta(t) &- \\ (I_N \otimes e^{A(t-s)})(L \otimes M)\delta(t - \tau_1) &+ \\ S(I_N \otimes e^{A(t-s)})(\bar{F} + \Lambda d(t)) &- \end{aligned}$$

در ادامه باتوجه به خصوصیات ضرب کرانکر داریم

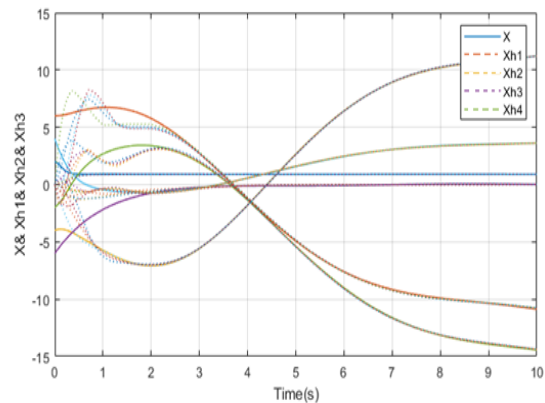
$$\begin{aligned} (I_N \otimes e^{A(t-s)})(L \otimes M)\delta(t - \tau_1) &= \\ (L \otimes M e^{A(t-s)})\delta(t - \tau_1) & \\ (I_N \otimes e^{A(t-s)})\delta(t) &- \text{با توجه به تعریف مشتق داریم} \\ (I_N \otimes e^{A(t-s)})(I_N \otimes A)\delta(t) &= \frac{d}{dt}((I_N \otimes e^{A(t-s)})\delta(t)) \\ \frac{d}{dt}((I_N \otimes e^{A(t-s)})\delta(t)) &= \\ -(I_N \otimes e^{A(t-s)})(\bar{G}\bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2}))\delta(t) &- \\ (L \otimes M e^{A(t-s)})\delta(t - \tau_1) + (I_N \otimes e^{A(t-s)})(\bar{F} + & \\ S)\Lambda d(t) &- \end{aligned}$$

در ادامه از دو طرف رابطه انتگرال می‌گیریم.

$$\begin{aligned} \int_{s=t-\tau_1}^s \frac{d}{dt}((I_N \otimes e^{A(t-s)})\delta(t)) &= \\ -\int_{s=t-\tau_1}^s (I_N \otimes e^{A(t-s)})(\bar{G}\bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2}))\delta(t) &+ \\ (L \otimes M e^{A(t-s)})\delta(s - \tau_1) - (I_N \otimes e^{A(t-s)})(\bar{F} + & \\ =((I_N \otimes e^{A(t-t)})\delta(t)) - \Lambda d(t) - S) ds & \\ ((I_N \otimes e^{A(t-t+\tau_1)})\delta(t - \tau_1)) &= \\ -\int_{s=t-\tau_1}^s (I_N \otimes e^{A(t-s)})(\bar{G}\bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2}))\delta(t) &+ \\ (L \otimes M e^{A(t-s)})\delta(s - \tau_1) - (I_N \otimes e^{A(t-s)})(\bar{F} + & \\ \Lambda d(t) - S) ds & \end{aligned}$$



شکل ۶: خطای تخمین در تمام ۴ روینگر (E1, E2, E3, E4)



شکل ۷: نمودار مقادیر حقیقی و تخمین زده شده در تمام روینگرها

### نتیجه گیری

مقاله پژوهشی حاضر طراحی روینگر مد لغزشی توزیع شده را برای یک کلاس از سیستم‌های غیرخطی شامل تأخیرهای زمانی و اعمال نامعینی در نظر می‌گیرد. انگیزه اصلی این کار رفع نواقص تخمین متمرکز با ارائه یک استراتژی روینگر توزیع شده مناسب با عملکرد بهتر نسبت به رویکردهای پیشرفته می‌باشد. روینگرمدلغزشی توزیع شده پیشنهادی به بخشی از خروجی دسترسی دارد و با روینگرهای مجاور خود از طریق یک شبکه گراف غیرجهتدار تأخیری در ارتباط است. روش طراحی بر اساس

[4]. F.L. Lewis, H.Zhang,, K.H Movric, A. Das, "Cooperative Control of Multi-Agent Systems" optimal and adaptive Design Approaches, Springer, 2014.

[5]. Y. Bar-Shalom, XR Li, T Kirubarajan " Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory, Algorithms and Software", Amazon, 2004.

[6]. L. Wang and A. S. Morse, "A distributed observer for a time-invariant linear system," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 63, PP. 2123-2130, 2018.

[7]. S. Park and N. C. Martins, "Design of Distributed LTI Observers for State Omniscience", IEEE Transaction on Automatic Control, Vol.2, No. 4, April 2017.

[8]. A. Mitra and S. Sundaram, "Distributed observers for LTI systems," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.63, No. 11, PP. 3689-3704, 2018..

[9]. K. Liu, H. Zhu, and J. Lü," Cooperative Stabilization of a Class of LTI Plants With Distributed Observers", IEEE Transaction on Circuits and systems, 2017

[10]. Zak, H. Stanislaw, "On the Stabilization and Observation of Nonlinear/Uncertain Dynamic Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.35.5, PP. 604-607, 1990.

[11]. Raghavan, Sekhar, and J.K. Hedrick, "Observer Design for a Class of Nonlinear Systems", International Journal of Control 59.2, PP. 515-528. 1994.

[12]. R. Rajamani, "Observer for Lipschitz nonlinear Systems", IEEE Transactions on Automatic control, Vol. 43.3, PP. 397-401, 1998.

[13]. Dan Simom." Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches "Springer, 2006.

[14]. R. Olfati-Saber and J. S. Shamma, "Consensus filters for sensor networks and distributed sensor fusion," in Decision and Control, 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on, 2005, pp. 6698-6703:.

[15]. G. Ciccarella, M.. DallaMora and A. Germani."A Luenberger - Like observer for nonlinear systems". International Journal of Control, Vol.57.3.PP. 537-556, 1993A.

[16]. Murat and P. Kokotovic, "Nonlinear Observer: a circle criterion design and robustness analysis." Automatica, Vol.37.2. PP. 1923-1930. 2001.

[17]. M.Krstic, "Delay Compensation for nonlinear, Adaptive, and PDE Systems, Birkhauser, 2009

[18]. E.Fridman, " Introduction to Time-Delay Syatems, , Birkhauser, 2014

$$\delta(t) - \left( (I_N \otimes e^{A(t-t+\tau_1)}) \delta(t - \tau_1) \right) = - \left( \int_{s=t-\tau_1}^{s=t} (I_N \otimes e^{A(t-s)}) (\bar{G}\bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2}) \delta(t) + (L \otimes M e^{A(t-s)}) \delta(t - \tau_1) - (I_N \otimes e^{A(t-s)}) (\bar{F} + \Lambda d(t) - S)) ds \right)$$

$$\delta(t) = (I_N \otimes e^{A(\tau_1)}) \delta(t - \tau_1) - \left( \int_{s=t-\tau_1}^{s=t} (I_N \otimes e^{A(t-s)}) (\bar{G}\bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2}) \delta(t) + (L \otimes M e^{A(t-s)}) \delta(s - \tau_1) - (I_N \otimes e^{A(t-s)}) (\bar{F} + \Lambda d(t) - S)) ds \right)$$

در ادامه، بخش شامل انتگرال را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$z(t) = \int_{s=t-\tau_1}^{s=t} (I_N \otimes e^{A(t-s)}) (\bar{G}\bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2}) e(s) + S) ds (L \otimes M) e(s - \tau_1) - (\bar{F} + \Lambda d(t) -$$

تعریف می گردد و به صورت محدود می باشد. بنابراین داریم که

$$t \in [-\tau_1, 0]$$

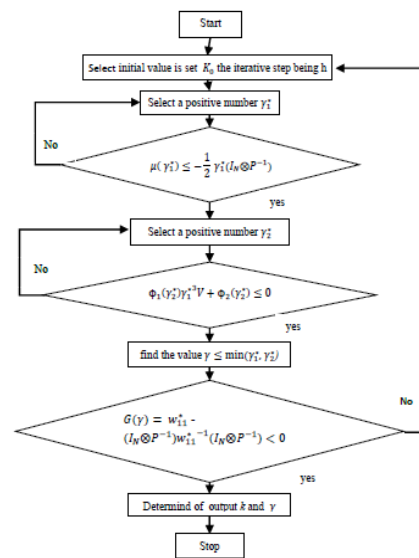
از آنجایی که  $\delta(t)$  در بازه

$$\delta(t - \tau_1) = (I_N \otimes e^{-A(\tau_1)}) (\delta(t) + z(t))$$

راستا مشتق خطا به صورت زیر می باشد.

$$\dot{\delta}(t) = (I_N \otimes A - \bar{G}\bar{H}(I_N \otimes e^{-A\tau_2}) - (L \otimes M e^{-A\tau_1})) \delta(t) - (L \otimes M e^{-A\tau_1}) z(t) + (\bar{F} + S) \Lambda d(t) -$$

## پیوست ۲



شکل ۸: فلوجارت الگوریتم طراحی پارامترهای  $k$  و  $\gamma$

## مراجع

[1]. W. Fei-Yue and L. Derong, "Networked Control Systems: Theory and Applications," ed: Springer-Verlag, London, 2008.

[2]. W. Ren, R. W. Beard, "Distributed Consensus in Multi-vehicle cooperative control", theory and application, Springer, 2008.

[3]. J. Lunze, "Control theory of digitally networked dynamic systems". Springer, 2014

- design for linear systems". IEEE Transactions on Automatic Control. 64(1):329-336. 2019.
- [32]. G. Yang, H. Rezaee, and T. Parisini, "Distributed State Estimation for a Class of Jointly Observable Nonlinear Systems" IFAC PapersOnLine Vol. 53, No.2,, PP.5045–5050,2020.
- [33]. H. Xu, J. Wang and H. Wang and W. Bohui, ""Distributed observers design for a class of nonlinear systems to achieve omniscience asymptotically via differential geometry"International Journal of Robust and Nonlinear Control,2021.
- [34]. Md. Masud Rana, LiLi,Steven W.su and Wei Xiang, " Micro grid State Estimation: A Distributed Approach", IEEE Transaction on Industrial Informatic",2017
- [19]. J.Weì, W.Hongli, L.Jinghui, Q.Weìwei,C. Guangbin , " Non fragile Robust Model Predictive Control for Uncertain Constrained Time-delayed System with Compensations", Journal of Franklin Institute, 2017.
- [20]. K. Liu, J. Lü, and Z. Lin, "Design of Distributed Observers in the Presence of Arbitrarily Large Communication Delays," IEEE transactions on neural networks and learning systems, Vol. 29, No. 9, PP. 4447-4461, 2018.
- [21]. .M. Farza and O. H.Gonz and. T. Ménard and , B.Targui, and M. M'Saad , and C.M. aragoza," Cascade observer design for a class of uncertain nonlinear systems with delayed outputs" , Automatica, . 2017.
- [22]. .M. Ekramian,S. Hosseinnia, F.Sheikholeslam,"General framework in designing Luenberger - Like nonlinear observer ". IET Control Theory & Applications, Vol.7, no. 2, PP. 253-260,2013.
- [23]. A.M.Pertew,H.J.Marquez, Zhao,"H/sub/spl/ infin/observer design for lipschitznonlinear system", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 51,no.7,PP.1211-1216,2006..
- [24]. M.S.Chen, C.C.Chen,"Robust nonlinear observer for Lipschitz nonlinear systems subject to disturbances," IEEE Transaction on Automatic Control vol.52,no.12,PP.2365-2369,2007.
- [25]. M.Ekramian, S.Hosseinnia, F. Sheikholeslam,"Observer design for nonlinear systems based on generalised Lipschitz condition" IET Control Theory & Applications, vol.5,no.16.PP. 1813-2011.
- [26]. M. Hou,K.Busawon,M.Saif," Observer design for nonlinear systems via injective mapping", IEEE Transaction on Automatic Control, vol.45.PP. 1350-1355,2000.
- [27]. S.Mobayen, D.Baleanu," Linear matrix inequalities design approach for robust stabilization of uncertain nonlinear systems with perturbation based on optimally-tuned global sliding mode control", Journal of Vibration and control, vol. 23,no.8,PP.1285-1295,2017.
- [28]. T. Kim, H. Shim, and D. D. Cho, "Distributed luenberger observer design," in Decision and Control (CDC), 2016 IEEE 55th Conference on, 2016, pp. 6928- 6933: IEEE.
- [29]. V. Yakubovich,"S-procedure in nonlinear control theory",Vestn Leningr Univ 62–77,1971.
- [30]. Jenabzadeh and B. Safarinejadian," A Lyapunove -based distributed consensus filter for a class of nonlinear stochastic systems" Automatica, Vol.86, pp.53-62. 2017.
- [31]. Han W, Trentelman H L, Wang Z, and Shen YA" simple approach to distributed observer