مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
مقاله پژوهشی
جلد ۱۸، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۳، صفحه ۶۵-۵۷

توسعه ناحیه جذب سیستم های چندجمله‌ای با طراحی کنترل‌گر مبتنی بر مشاهده گر و تبدیل به مسئله برنامه ریزی SOS

فرهاد اسمعیلی [۱]

[۱] استادیار، گروه مهندسی برق، واحد بیرجند، دانشگاه آزاد اسلامی، بیرجند، ایران، Esmaili@iaubir.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۳/۰۵/۲۴ ویرایش: ۱۴۰۳/۰۸/۰۳ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۰/۱۶

چکیده: تخمین و توسعه ناحیه جذب سیستم های غیرخطی یکی از مباحث چالش برانگیز در حوزه کنترل است. در این مقاله به توسعه ناحیه جذب سیستم های چندجمله ای که دسته ای پرکاربرد از سیستم های غیرخطی هستند، پرداخته شده است. با طراحی کنترل‌گر فیدبک حالت مبتنی بر مشاهده گر [۱] (OBC) ، پایداری سیستم حلقه بسته با وجود اشباع بر روی ورودی [۲]، حول مبدا (نقطه تعادل سیستم) پایدار مجانبی گردیده است. به منظور رسیدن به ناحیه جذب وسیع تر حول نقطه تعادل، مسئله طراحی به یک مسئله بهینه سازی چندجمله ای های مجموع مربعات [۳] (SOSP) دوخطی [۴] تبدیل شده است. مثال های عددی، کارایی کنترل‌گر مبتنی بر مشاهده گر طراحی شده را به منظور توسعه ناحیه جذب، نسبت به استفاده از فیدبک خروجی و در مواردی حتی نسبت به کنترل‌گر فیدبک حالت نشان می دهد.

کلمات کلیدی: توسعه ناحیه جذب، سیستم های چند جمله ای، چندجمله ای مجموع مربعات، اشباع بر روی ورودی.

Enlargement of the Domain of Attraction of Polynomial Systems via Observer-Based Controller Design and Transformation into an SOS Programming Problem

Farhad Esmaili

Abstract: Estimating and expanding the domain of attraction for nonlinear systems is a challenging topic in the field of control. This paper addresses the development of the attraction domain for polynomial systems, a prevalent class of nonlinear systems. By designing a state feedback controller and an observer, the closed-loop stability of the system is achieved around the origin (system equilibrium point) in the presence of input saturation. To reach a broader attraction domain around the equilibrium point, the design problem is converted into a bilinear SOS optimization problem. Numerical examples demonstrate the performance of the designed observer-based controller in expanding the attraction domain, showing improvements over using output feedback and, in some cases, even compared to state feedback controllers.

Keywords: Domain of Attraction, Polynomial Systems, sum of squares polynomials, Input saturation.

[1] Observer-Based Controller
[2] Input Saturation
[3] Sum Of Squares Polynomial
[4] Bilinear SOS

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-01]

۱- مقدمه

یکی از مسائل چالش برانگیز در تئوری کنترل بدست آوردن ناحیه جذب[1] (DA) سیستم های غیرخطی برای یک نقطه تعادل است. DA به مجموعه ای از شرایط اولیه گفته می شود که متغیرهای حالت سیستم در زمان طولانی به نقطه تعادل میل میکنند. تئوری زبوف[2] [۱] راهکاری دقیق برای بدست آوردن DA است که نیاز به حل معادلات با مشتقات جزئی دارد، اما معمولا حل این معادلات به صورت تحلیلی امکان پذیر نیست و ناگزیر برای بدست آوردن DA بصورت تحلیلی، نیاز است که DA تخمین زده شود. روش های تخمین DA را می توان به سه رویکرد تقسیم کرد. رویکرد اول، روشهایی که با استفاده از مفهوم تابع لیاپانوف بیشینه[3] (MLF) به حل تقریبی معادلات با مشتقات جزئی در تئوری زبوف می پردازند[۲-۵]. ونلی و ویدیاساگار در [۵] یک روش بازگشتی با بکار بردن تابع لیاپانوف کسری بر اساس MLF پیشنهاد نموده اند. در [۳] با استفاده از تئوری مومنت[4] محاسبه MLF به مسئله نامعادلات ماتریسی خطی[5] (LMI) تبدیل شده است. در [۲] MLF توسط تابع لیاپانوف چندجمله ای با حل مسئله مینیمم سازی نا محدب[6] و در [۴] با استفاده از الگوریتم ژنتیک با بکار بردن تابع لیاپانوف کسری، ناحیه جذب تخمین زده است.

رویکرد دوم، روشهای مبتنی بر استفاده از مجموعه های پایا[7] است [۶-۱۰]. تخمین DA با بکار بردن مجموعه پایای مثبت در [۶, ۸-۱۰] به مسئله برنامه ریزی SOSP تبدیل شده است. ایده بکار رفته در [۷] استفاده از مجموعه های فرارفت[8] که مجموعه پایای مثبت هستند، می باشد. این روش منجر به نتایج بهتری نسبت به سایر روش ها گردیده، اما بدلیل اینکه یک روش تکراری است نیاز به محاسبات زیادی برای بدست آوردن تخمین DA دارد.

رویکرد سوم، روشهایی است که به تخمین DA با محاسبه بزرگترین مجموعه رویه[9] می پردازد که این رویکرد پر کاربرد تر است [۱۱-۱۶]. در این روش برای تخمین DA تابع لیاپانوفی که مثبت و مشتق زمانی آن در داخل مجموعه رویه منفی باشد، انتخاب می شود. این مجموعه رویه یک مجموعه پایای مثبت است و بنابراین تخمینی از DA است. با این دیدگاه در مقالات، تخمین ناحیه جذب و یا توسعه آن با طراحی کنترل‌گر فیدبک حالت و یا کنترل‌گر فیدبک خروجی و یا کنترل‌گر فیدبک حالت مبتنی بر طراحی مشاهده گر انجام گرفته است. یکی از حوزه‌های تحقیقاتی در این رویکرد، طراحی کنترل‌گر فیدبک حالت به منظور توسعه ناحیه جذب سیستم حلقه بسته است [۱۷-۲۴]. با توجه به کاربردی تر بودن استفاده از فیدبک خروجی به جای فیدبک حالت، در تعدادی از مقالات، طراحی فیدبک خروجی به منظور توسعه ناحیه جذب، به کار گرفته شده است [۲۵-۲۷].

بکارگیری کنترل‌گر فیدبک حالت نسبت به فیدبک خروجی قطعا منجر به ناحیه جذب وسیع تر می گردد اما فیدبک خروجی کاربردی تر است. به همین دلیل استفاده از کنترل‌گر فیدبک حالت مبتنی بر مشاهده گر می تواند مزایای هر دو را داشته باشد. در [۲۸] برای سیستم های لیپشیتس یک طرفه[10] بهمراه اشباع بر روی ورودی، OBC به منظور افزایش ناحیه جذب سیستم حلقه بسته انجام گرفته است.

چند جمله‌ای های SOS چند جمله‌ای هایی هستند که می توان آنها را به صورت مجموع مربعات تعدادی چندجمله‌ای بیان کرد. با توجه به پیشرفت های انجام گرفته در به کارگیری و حل مسئله بهینه سازی چندجمله‌ای های SOS [۲۹, ۳۰]، همچنین تبدیل مسئله بهینه سازی SOS به LMI، استفاده از این چندجمله‌ای ها رواج یافته است. مسئله تخمین ناحیه جذب سیستم های چندجمله‌ای، معمولا به مسئله بهینه‌سازی SOS دو خطی و یا نامعادلات ماتریسی دوخطی[11] تبدیل می شود [۶-۱۰, ۱۳, ۱۴, ۳۱]. اما در مقالات معدودی، تخمین و یا توسعه ناحیه جذب به مسئله SOS و یا LMI منجر شده است [۳, ۲۵, ۲۸]. در [۳] با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف به فرم درجه دو و نه چندجمله ای به توسعه ناحیه جذب سیستم پرداخته شده و در [۲۵] با انتخاب تابع لیاپانوف ثابت و بوسیله طراحی فیدبک خروجی، افزایش DA به مسئله بهینه سازی LMI تبدیل شده است که طراحی تابع لیاپانوف می توانست منجر به یافتن DA وسیع تر گردد. در [۲۸] با طراحی OBC افزایش ناحیه جذب بر روی سیستم‌های لیپشیتس یک طرفه به مسئله LMI تبدیل شده است.

با توجه به بررسی های انجام گرفته، تا کنون در خصوص گسترش ناحیه جذب سیستم های چندجمله ای با بکارگیری OBC هیچ تحقیق صورت نگرفته است. از معدود کارهای مشابه می توان به افزایش ناحیه جذب در [۲۸] بر روی سیستم های OSL و نه چندجمله ای اشاره کرد. در [۲۸] با طراحی OBC به توسعه ناحیه جذب پرداخته شده که به دلیل استفاده از مشاهده گر و کنترل‌گر خطی و همچنین تابع لیاپانوف درجه ۲ شرایط محدود کننده ای دارد. در این مقاله توسعه DA سیستم های چندجمله ای به همراه اشباع بر روی ورودی با بکار بردن تابع لیاپانوف و طراحی OBC به فرم چندجمله ای انجام می گیرد. مشاهده گر، برای تخمین متغیرهای حالت سیستم از روی خروجی و OBC به منظور پایداری سیستم حلقه بسته طراحی می گردد. انتخاب بزرگترین مجموعه رویه، تخمینی از ناحیه جذب سیستم حلقه بسته خواهد داد. در انتها مساله بدست آوردن بزرگترین

[1] Domain Of Attraction
[2] Zubov
[3] Maximal Lyapunov Function
[4] moment
[5] Linear Matrix Inequality
[6] Non-Convex
[7] Invariant Set
[8] Advection Set
[9] Level Set
[10] One-sided Lipschitz
[11] Bilinear Matrix Inequality

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-01]

تخمین ناحیه جذب، به مساله بهینه سازی SOS دو خطی منجر گردیده است.

مقاله بدین صورت سازمان دهی شده است. در بخش بعد طراحی تخمین DA با مجموعه رویه بیان و چندجمله ای های SOS معرفی شده است. در بخش ۳ با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف و OBC و مشاهده‌گر بفرم چندجمله‌ای، مسئله توسعه DA به SOS دوخطی ارایه و الگوریتمی برای حل این مسئله بیان شده است. در بخش ۴ چند مثال برای نشان دادن توانایی روش پیشنهادی ارائه و نتایج با روشهای موجود در مقالات معتبر مقایسه شده و در انتها جمع بندی نتایج ارائه گردیده است.

۲- پیش نیازها

در زیر علائم بکار رفته در این مقاله ارائه شده است.

|u|: قدر مطلق مقدار عددی u

$\mathbb{R}$: مجموعه اعداد حقیقی

$\mathbb{R}^+$: مجموعه اعداد حقیقی مثبت

$\mathbb{R}^m$: مجموعه فضای برداری m بعدی

$\mathbb{R}_n$: مجموعه تمام چندجمله ای های با ضرایب حقیقی n متغیره

$\mathbb{R}_n^m$: مجموعه تمام بردارهای m بعدی با آرایه هایی از مجموعه $\mathbb{R}_n$

Σ_n: مجموعه چندجمله ای های SOS n متغیره

۲-۱- تخمین ناحیه جذب

سیستم با معادلات حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x(t)),\ \ x(0) = x_0 \qquad (۱)$$

که در آن $t \in \mathbb{R}$ متغیر زمان، $x \in \mathbb{R}^n$ متغیرهای حالت سیستم، n تعداد متغیرهای حالت، x_0 شرایط اولیه و $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک تابع برداری است.

تعریف ۱ (نقطه تعادل [9]): $x_e \in \mathbb{R}^n$ نقطه تعادل سیستم (1) تعریف می شود اگر $f(x_e) = 0$. بدون از دست دادن کلیت (با تغییر متغیر) می توان نقطه تعادل را در مبدا ($x_e = 0$) در نظر گرفت. بنابراین در ادامه نقطه تعادل سیستم در مبدا در نظر گرفته شده است.

تعریف ۲ *(DA)* [25]: در صورتی که $x_e = 0$ نقطه تعادل سیستم (1) باشد، DA مجموعه شرایط اولیه‌ای تعریف می شود که با شروع از آن نقاط، متغیرهای حالت به سمت مبدا (نقطه تعادل) میل کند:

$$\Omega := \{x_0 | if\ x(0) = x_0\ then\ \lim_{t\to\infty} x(t) \to 0\}$$

بدست آوردن DA برای سیستم های معدودی امکان پذیر است و در اغلب موارد برای سیستم های واقعی تخمین DA بدست می آید. یکی از روش های تخمین DA استفاده از لم ۱ با بکارگیری تئوری مستقیم لیاپانوف است که یک مجموعه رویه از تابع لیاپانوف بعنوان تخمین داخلی DA بکار می رود.

لم ۱: اگر تابع پیوسته مشتق پذیر $V(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و مقدار $\gamma \in \mathbb{R}^+$ وجود داشته باشد که

$$V(x) > 0\ \forall\ x \in R^n - \{0\},\quad V(0) = 0, \qquad (۲)$$

$$\Omega_\gamma := \{x | V(x) \le \gamma\}\ \text{مجموعه محدود شده}^1\text{است} \qquad (۳)$$

$$\Omega_\gamma \subseteq \{x | \dot{V}(x) < 0\} \cup \{0\}, \qquad (۴)$$

در این صورت مبدا پایدار مجانبی سیستم (۱) است و مجموعه Ω_γ یک زیرمجموعه از DA یا تخمینی از DA است. (اثبات در [۳۲]).

برای رسیدن به بزرگترین تخمین از DA، نیاز است بزرگترین مقدار γ که شرایط (۲) تا (۴) در لم ۱ را برآورده کند، بدست آید.

۲-۲- چند جمله ای های SOS

تعریف ۳ (چند جمله‌ای های SOS [25]): چندجمله‌ای $s(x) = s(x_1, \dots, x_n)$ از درجه $2d$ یک چندجمله‌ای SOS است اگر چندجمله ای های $p_1(x), \dots, p_m(x) \in \mathbb{R}_n$ از درجه کوچکتر یا مساوی $2d$ وجود داشته باشند که $s(x) = \sum_{i=1}^m p_i^2(x)$.

نشان داده شده است که شرط وجود چندجمله ای های $p_1(x), \dots, p_m(x)$ برای اینکه $s(x) \in \Sigma_n$، این است که ماتریس Q>0 وجود داشته باشد که $s(x) = x^{\{d\}\prime} Q x^{\{d\}}$ که در آن $x^{\{d\}}$ تابع برداری شامل همه مونومیال های از درجه کوچکتر یا مساوی d است [۳۳]. به این ترتیب مسئله یافتن چندجمله ای SOS می تواند به یک مسئله LMI که یک مسئله برنامه ریزی محدب است، تبدیل شود.

لم ۲: چندجمله ای های $p_0(x), \dots, p_m(x) \in \mathbb{R}_n$ و $s_1(x), \dots, s_m(x) \in \Sigma_n$ مفروض است. اگر

$$p_0(x) - \sum_{i=1}^{m} s_i(x) p_i(x) \ge 0$$

آنگاه

$$\{x \in \mathbb{R}^n | p_1(x) \ge 0, \dots, p_m(x) \ge 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n | p_0(x) \ge 0\}.$$

(اثبات در [34]).

لم ۳: با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف و تابع برداری $f(x)$ به صورت چند جمله ای و بکارگیری لم ۱ و ۲ در مساله بهینه سازی زیر، Ω_γ تخمینی از DA سیستم (۱) را برای مبدا خواهد داد

$$\max_{\gamma\in\mathbb{R},\ \ V(x)\in\mathbb{R}_n,\ \ s_1(x)\in\Sigma_n} \gamma \qquad (۵)$$

$$s.t\ V(x) - l_1(x) \in \Sigma_n \qquad (۶)$$

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial x} f(x) - l_2(x)\right) - s_1(x)\big(\gamma - V(x)\big) \in \Sigma_n \qquad (۷)$$

که در آن $\Omega_\gamma := \{x | \gamma - V(x) \ge 0\}$ و $l_i(x) = \epsilon x' x,\ \ i = 1,2$ و ϵ یک عدد حقیقی مثبت کوچک انتخاب شده است.

اثبات: با توجه به اینکه $l_i(0) = 0,\ \ l_i(x) > 0\ \ \forall x \ne 0$، بنابراین قید (۶)، شرط (۲) در لم ۱ را برآورده می کند. از طرفی چون $V(x)$ بصورت چندجمله‌ای

[1] Bounded

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-01]

است پس Ω_γ محدود است و شرط (۳) لم ۱ نیز برقرار است. همچنین به دلیل اینکه $s_1(x) \in \Sigma_n$ بر اساس لم ۲، $\dot{V}(x) - l_2(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) - l_2(x) \le 0$، در نتیجه قید (۷) شرط (۴) در لم ۱ را برقرار می کند و بنابراین Ω_γ تخمینی از DA برای مبدا سیستم (۱) خواهد بود. با توجه به اینکه مسئله بهینه سازی (۵) بدنبال یافتن بیشترین مقدار γ است، در صورت وجود جواب، بزرگترین تخمین DA بدست خواهد آمد.

۳- نتایج اصلی

سیستم زمان پیوسته چندجمله ای با معادلات حالت زیر مفروض است.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y = h(x(t)) \end{cases}, \qquad (۸)$$
$$x(0) = x_0, \qquad u_{Min} \le u(t) \le u_{Max}$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}, f, g, h \in \mathbb{R}_n$ و $x(0)$ شرایط اولیه سیستم که دارای نقطه تعادل پایدار در مبدا $f(0)) = 0$ است. هدف طراحی مشاهده گر به منظور تخمین متغیرهای حالت سیستم از روی خروجی و همچنین طراحی کنترل‌گر فیدبک متغیرهای حالت تخمین زده شده به منظور پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته در مبدا است. در ادامه ابتدا طراحی OBC فرمول بندی می شود و سپس مسئله به SOS دوخطی تبدیل و برای حل آن یک الگوریتم پیشنهاد می گردد.

۳-۱- طراحی OBC

$\hat{x}$ را تخمین متغیرهای حالت سیستم در نظر بگیرید، بنابراین می توان معادلات حالت مشاهده گر را به صورت

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})u + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = h(\hat{x}) \end{cases} \qquad (۹)$$

که $L \in \mathbb{R}_n^n$ یک تابع برداری چندجمله‌ای است. در صورتی که OBC به صورت $u(\hat{x}) = K(\hat{x})$ و $e = x - \hat{x}$ تعریف شود، بنابراین

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = f(x) - f(\hat{x}) + \big(g(x) - g(\hat{x})\big)K(\hat{x}) + L\big(h(x) - h(\hat{x})\big)$$

با تعریف متغیرهای حالت سیستم حلقه بسته به صورت $z = \binom{x}{e}$ معادلات حالت سیستم حلقه بسته برابر است با

$$\begin{cases} \dot{z} = f_c(z) \\ y = h_c(z) \end{cases} \qquad z(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 - \hat{x}_0 \end{pmatrix} \qquad (۱۰)$$

که در آن

$$f_c(z) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) + g(x)K(x - e) \\ f(x) - f(x - e) + \big(g(x) - g(x - e)\big)K(x - e) + L\big(h(x) - h(x - e)\big) \end{pmatrix}$$

$h_c(z) = h(x)$ و $\hat{x}_0$ مقدار اولیه متغیر $\hat{x}(t)$ است. در صورتی که $L(0) = 0$ باشد، مبدا نقطه تعادل سیستم حلقه بسته خواهد بود، بنابراین اگر $z(0)$ در ناحیه جذب سیستم (۱۰) برای نقطه تعادل $z_e = 0$ قرار داشته باشد، آنگاه $\lim_{t\to\infty} z(t) \to 0$. بنابراین $\lim_{t\to\infty} x(t) \to 0$ نتیجه می شود که به مفهوم پایداری سیستم حلقه بسته توسط کنترل‌گر و مشاهده گر طراحی شده است و همچنین $\lim_{t\to\infty} e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \to 0$ تضمین می کند که مشاهده گر به درستی متغیرهای حالت سیستم را تخمین زده است.

۳-۲- توسعه ناحیه جذب

با هدف طراحی هم زمان کنترل‌گر، مشاهده گر و تابع لیاپانوف به منظور پایداری مجانبی سیستم، تخمین متغیرهای حالت و توسعه ناحیه جذب سیستم (۱۰)، با تعریف تابع لیاپانوف $V_c(z) \in \mathbb{R}_{2n}$ و

$$\Omega_{c\gamma} := \{z | \gamma - V_c(z) \ge 0\} \qquad (۱۱)$$

بر اساس لم ۳ در صورتی که

$$\max_{\gamma\in\mathbb{R},\ V_c\in\mathbb{R}_{2n},\ K,\ L\in\mathbb{R}_n,\ s_1(z)\in\Sigma_{2n}} \gamma \qquad (۱۲)$$
$$s.t\ V_c(z) - l_1(z) \in \Sigma_{2n} \qquad (۱۳)$$
$$-\left(\frac{\partial V_c}{\partial z} f_c(z) - l_2(z)\right) - s_1(z)\big(\gamma - V_c(z)\big) \in \Sigma_{2n} \qquad (۱۴)$$

دارای جواب باشد، آنگاه $\Omega_{c\gamma}$ تخمین DA سیستم حلقه بسته (۱۰) در مبدا خواهد بود که در آن $l_i(z) = \epsilon z' z,\ \ i = 1,2$. اما به منظور برقراری اشباع بر روی ورودی به صورت $u_{Min} \le u \le u_{Max}$، کافی است

$$\Omega_{c\gamma} \subseteq \{z | u - u_{Min} \ge 0\} \qquad (۱۵)$$
$$\Omega_{c\gamma} \subseteq \{z | u_{Max} - u \ge 0\} \qquad (۱۶)$$

شرایط (۱۵) و (۱۶) تضمین می کند که $\Omega_{c\gamma}$ شرایط اشباع بر روی ورودی را برآورده کند. در صورت وجود $s_2(z), s_3(z) \in \Sigma_{2n}$ و تعریف $K_c(z) = u(\hat{x}) = K(x - e)$ اگر دو شرط(۱۷) و (۱۸) بصورت زیر برقرار باشد

$$(K_c(z) - u_{Min}) - s_2(z)\big(\gamma - V_c(z)\big) \in \Sigma_{2n} \qquad (۱۷)$$
$$(u_{Max} - K_c(z)) - s_3(z)\big(\gamma - V_c(z)\big) \in \Sigma_{2n} \qquad (۱۸)$$

آنگاه با توجه به لم (۲) شرایط (۱۵) و (۱۶) برآورده خواهد شد.

در نهایت مسئله طراحی OBC به منظور پایداری مجانبی در مبدا و توسعه ناحیه جذب سیستم (۸) به صورت مساله بهینه سازی زیر جمع بندی می شود

$$\max_{\gamma\in\mathbb{R},\ V_c\in\mathbb{R}_{2n},\ K,\ L\in\mathbb{R}_n,\ s_1 s_2, s_3\in\Sigma_{2n}} \gamma \qquad (۱۹)$$
$$s.t\ V_c(z) - l_1(z) \in \Sigma_{2n} \qquad (۲۰)$$
$$-\left(\frac{\partial V_c}{\partial z} f_c(z) - l_2(z)\right) - s_1(z)\big(\gamma - V_c(z)\big) \in \Sigma_{2n} \qquad (۲۱)$$
$$(K_c(z) - u_{Min}) - s_2(z)\big(\gamma - V_c(z)\big) \in \Sigma_{2n} \qquad (۲۲)$$
$$(u_{Max} - K_c(z)) - s_3(z)\big(\gamma - V_c(z)\big) \in \Sigma_{2n} \qquad (۲۳)$$

که در آن γ_{new} مقدار γ در تکرار جاری و γ_{old} مقدار آن در تکرار قبل است و ϵ_1 یک عدد حقیقی مثبت کوچک، در نظر گرفته شده است. پس از حل این مسئله بهینه سازی در صورت قابل حل بودن، $\Omega_{c\gamma}$ تخمینی از ناحیه جذب سیستم (۱۰) را برای مبدا می دهد. با تصویر کردن $\Omega_{c\gamma}$ برمتغیرهای x، با تعریف $V(x) = V_c(z)_{|z=\binom{x}{0}}$، $\Omega_\gamma := \{x | \gamma - V(x) \ge 0\}$ بدست می آید که تخمینی از DA سیستم (۸) در مبدا با کنترل‌گر و مشاهده گر طراحی شده خواهد بود. برای حل مسئله بهینه سازی در مرحله ۲ و ۳ از نرم افزار MATLAB ، ابزار YALMIP [35] برای ورود مسئله بهینه سازی بفرم SOS و ابزار SOSTOOLS4 [36] برای تبدیل به مسئله

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-01]

بهینه سازی LMI و سپس بکارگیری ابزار SeDuMi [37] برای حل LMI، استفاده شده است.

٤- مثال های عددی

در این بخش مثال های عددی به منظور نشان دادن توانایی روش پیشنهادی در توسعه ناحیه جذب تخمین زده شده نسبت به فیدبک خروجی و طراحی OBC در مقالات دیگر، بیان شده است. ضمنا مقدار $\epsilon = \epsilon_1 = 10^{-4}$ در نظر گرفته شده است، همچنین با توجه به اینکه $\Omega_\gamma := \{x|\gamma - V(x) \geq 0\}$ می توان به جای آن تخمین DA را به صورت $\Omega_1 := \{x|1 - V^*(x) \geq 0\}$ در نظر گرفت که $V^*(x) = \frac{V(x)}{\gamma}$. در ادامه DA با Ω_1 بیان شده که در آن تابع لیاپانوف $V^*(x)$ نمایش داده می شود.

مثال ۱: سیستم با معادلات حالت زیر را در نظر بگیرید (مثال ۱ در مرجع [۲۵])

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_1^2 - x_2^3 + x_1 u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 - x_1^2 + u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (۳۲)$$

برای سیستم (۳۲) در [۲۵] با انتخاب تابع لیاپانوف درجه دو $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ و بکارگیری کنترل‌گر فیدبک خروجی بفرم درجه دو $u = u_1 y + u_2 y^2$ که در آن

$$u_i \in \{-1,1\}, i = 1,2 \quad (۳۳)$$

مسئله طراحی u_1, u_2 به منظور افزایش ناحیه جذب سیستم به SOS و سپس LMI تبدیل شده است که نتیجه در **Error! Reference source not found.** دیده می شود. با توجه به DA بدست آمده $-2.48 \leq y = x_1 \leq 2.48$ از طرفی قانون کنترل طراحی شده $u = 0.92606x_1 - 0.10835x_1^2$ در بازه $-2.963 \leq u \leq 1.63$ تغییر می کند. برای استفاده از روش پیشنهادی با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف درجه ۲، کنترل‌گر درجه ۲، چند جمله ای L به صورت درجه ۳ و $u_{Min} = -2.963,\ u_{Max} = 1.63$ پس از حل مسئله بهینه سازی ارائه شده در الگوریتم پیشنهادی

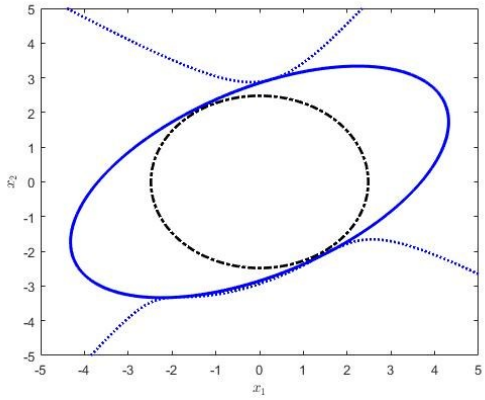
$$V(x) = 0.07342x_1^2 - 0.09865x_1x_2 + 0.123x_2^2,$$

$$u = \hat{x}_1 - \hat{x}_2 - 0.4475\hat{x}_1^2 - 0.0838\hat{x}_1\hat{x}_2 + 0.0203\hat{x}_2^2$$

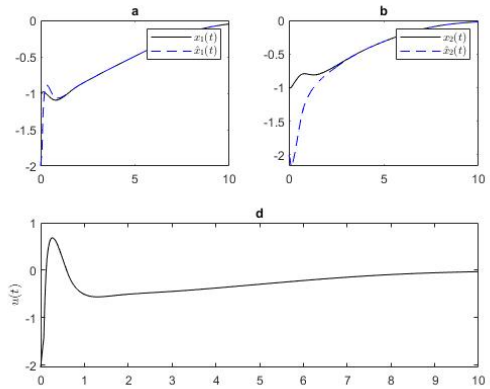
$$L = \begin{pmatrix} 38.9681(y-\hat{y}) + 0.3104(y-\hat{y})^2 - 4.0903(y-\hat{y})^3 \\ -12.2340(y-\hat{y}) + 1.1748(y-\hat{y})^2 - 2.9689(y-\hat{y})^3 \end{pmatrix}$$

$$s.t\ \hat{y} = \hat{x}_1$$

که $\Omega_1 := \{x|1 - V(x) \geq 0\}$ تخمین DA برای مبدا سیستم **Error! Reference source not found.**(۳۲) است و در **Error! Reference source not found.** نشان داده شده است. همان گونه که در شکل دیده می شود استفاده از OBC نسبت به فیدبک خروجی در شرایط یکسان منجر به DA بزرگتر گردیده است. منحنی $\dot{V}(x) = 0$ در **Error! Reference source not found.** رسم شده که همانطور که مشخص است در نقاطی بر Ω_1 مماس است که این به مفهوم همگرا شدن مسئله بهینه سازی به جواب بهینه است. متغیرهای حالت و تخمین آنها به همراه ورودی برای شرایط اولیه $z(0) = (-1\ \ -1\ \ 1\ \ 1)'$ در شکل ۲ رسم شده است که در آن پایداری مجانبی و تخمین متغیرهای حالت مشاهده می گردد. از طرفی همان گونه که دیده می شود شرط $-2.963 \leq u \leq 1.63$ نیز برآورده شده است.



شکل ۱: منحنی سیاه خط چین تخمین ناحیه جذب بر اساس فیدبک خروجی [۲۵] ، منحنی آبی خط پیوسته تخمین DA با روش پیشنهادی، منحنی آبی نقطه چین $\dot{V}(x) = 0$



شکل ۲: (a) متغیر x_1 (سیاه پیوسته)، متغیر $\hat{x}_1$ (آبی خط چین)، (b) متغیر x_2 (سیاه پیوسته)، متغیر $\hat{x}_2$ (آبی خط چین)، (d) سیگنال ورودی

مثال ۲: DA سیستم چندجمله ای با معادلات حالت (۳۴) و محدودیت $|u(t)| \leq 0.2$ در [۲۲] توسط کنترل‌گر فیدبک حالت با بکارگیری معادلات ریکاتی وابسته به حالت[1] (SDRE) و فاکتور شکل دهی[2] توسعه داده شده است.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 - x_2 + x_1^2 x_2 + u \\ y = x_2 \end{cases} \quad (۳۴)$$

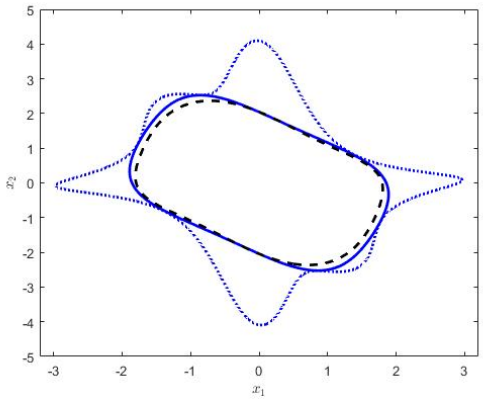
[1] State-Dependent Riccati Equation

[2] Shape Factor

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-01]

با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف درجه ۶ و قانون کنترل درجه ۳، DA برای مبدا در **Error! Reference source not found.** نشان داده شده است. با استفاده از تابع لیاپانوف درجه ۴، قانون کنترل درجه ۳ و تابع برداری L از درجه ۳ پس از طراحی با روش پیشنهادی

$$V(x) = 0.03195x_1^4 - 0.03444x_1^3x2 + 0.1025x_1^2x_2^2 + 0.1806x_1^2 + 0.05964x_1x_2^3 + 0.2937x_1x_2 + 0.01721x_2^4 + 0.168x_2^2$$
$$u = -0.1327\hat{x}_1 - 0.1674\hat{x}_2 + 0.0093\hat{x}_1^3 + 0.0329\hat{x}_1^2\hat{x}_2 + 0.041\hat{x}_1\hat{x}_2^2 + 0.0179\hat{x}_2^3$$
$$L = \begin{pmatrix} -0.668(y-\hat{y}) - 3.224(y-\hat{y})^3 \\ 8.045(y-\hat{y}) + 10.984(y-\hat{y})^3 \end{pmatrix} \quad s.t\ \hat{y} = \hat{x}_2$$



شکل ۳: منحنی سیاه خط چین تخمین ناحیه جذب بر اساس فیدبک حالت[۲۲] ، منحنی آبی خط پیوسته تخمین DA با روش پیشنهادی، منحنی آبی نقطه چین $\dot{V}(x) = 0$

بدست آمده و DA در **Error! Reference source not found.** رسم شده است. علی رغم استفاده از تابع لیاپانوف درجه ۶ و فیدبک حالت در [۲۲]، DA تخمین زده شده در روش پیشنهادی با استفاده از OBC و همچنین تابع لیاپانوف با درجه پایین تر، وسیع تر است که دلیل آن احتمالا بکارگیری SDRE در [۲۲] است. به ازای شرایط اولیه $z(0) = (1\ -1\ \ 1\ \ -1)'$، متغیرهای حالت و تخمین آنها و همچنین سیگنال کنترل در **Error! Reference source not found.** رسم شده است. همان گونه که مشخص است محدودیت بر روی ورودی به درستی برآورده شده است.

مثال ۳: سیستم غیرخطی دو ورودی با معادلات حالت

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 - x_1^3 - x_1x_2^2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 - x_1^2x_2 - x_2^3 + u_2 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (۳۵)$$

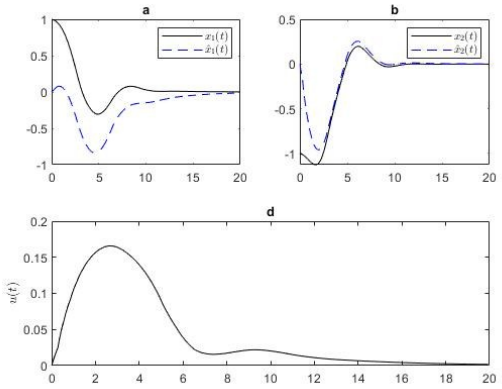
با محدودیت $|u_i| \le 15,\ i = 1,2$ مفروض است. در [۲۸] توسعه DA سیستم های OSL بر اساس طراحی OBC و تبدیل به مسئله LMI انجام گرفته است. با استفاده از تابع لیاپانوف درجه ۲ و قانون کنترل و مشاهده‌گر درجه ۱، DA برای مبدا سیستم (۳۵) در شکل ۵ رسم شده است. برای استفاده از روش پیشنهادی با توجه به اینکه سیستم دو ورودی است، $u_2 = 0$ و u_1 به منظور طراحی استفاده شده است. پس از طراحی با تابع لیاپانوف درجه ۲، قانون کنترل و مشاهده گر درجه ۱ به صورت

$$V(x) = ۰.۰۳۷۸۲x_1^2 - 0.07572x_1x_2 + 0.08145x_2^2$$
$$u = -2.2452\hat{x}_1 + 1.4177\hat{x}_2$$
$$L = \begin{pmatrix} 2.743(y-\hat{y}) \\ 2.503(y-\hat{y}) \end{pmatrix} \quad s.t\ \hat{y} = \hat{x}_1$$

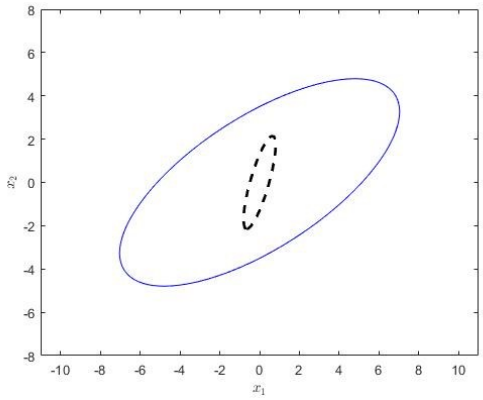
DA تخمین زده شده در شکل ۵ رسم شده است. متغیرهای حالت و تخمین آنها به همراه سیگنال کنترل به ازای یک مقدار از شرایط اولیه درون DA در شکل ۶ نشان داده شده است. نکته دیگری که در این مثال وجود دارد، $\dot{V}(t) = -P'(x)P(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$ که در آن

$$P(x) = \begin{pmatrix} -0.116x_1^2 - 0.183x_2^2 + 0.35x_1x_2 \\ 0.118x_1^2 - 0.231x_2^2 + 0.35x_1x_2 \\ 0.123x_1^2 + 0.041x_2^2 + 0.062x_1x_2 \\ 0.0017x_1 - 0.0019x_2 \\ 5.876x_1 + 5.203x_2 \end{pmatrix}$$

و به این معنی است که اگراشباع بر روی ورودی وجود نداشت، سیستم حلقه بسته در مبدا پایدار مجانبی سراسری می گردید.

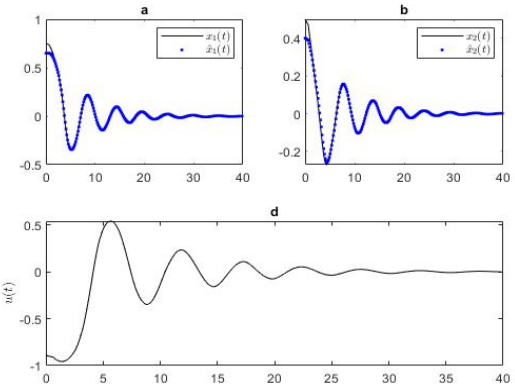


شکل ۴: (a) متغیر x_1 (سیاه پیوسته)، متغیر $\hat{x}_1$ (آبی خط چین)، (b) متغیر x_2 (سیاه پیوسته)، متغیر $\hat{x}_2$ (آبی خط چین)، (d) سیگنال ورودی



شکل ۵: منحنی سیاه خط چین تخمین ناحیه جذب بر اساس OBC[۲۸] ، منحنی آبی خط پیوسته تخمین DA با روش پیشنهادی

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-01]



شکل ۶: (a) متغیر x_1 (سیاه پیوسته)، متغیر $\hat{x}_1$ (آبی خط چین)، (b) متغیر x_2 (سیاه پیوسته)، متغیر $\hat{x}_2$ (آبی خط چین)، (d) سیگنال ورودی

مثال ٤: معادلات حالت سیستم غیرخطی به فرم OSL

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2.548x_1 + 9.1x_2 + \frac{1}{2}|x_1+1| - \frac{1}{2}|x_1-1| + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -14.2x_2 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (۳۶)$$

با محدودیت $|u| \le 15$ مفروض است. در [۲۸] با طراحی OBC ناحیه جذب برای مبدا در شکل ۷ نشان داده شده است. برای استفاده از روش پیشنهادی باید معادلات حالت (۳۶) به فرم چندجمله ای باشد. در صورتی که $-1 \le x_1 \le 1$ تضمین شود، معادلات حالت سیستم به صورت خطی

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1.548x_1 + 9.1x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -14.2x_2 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (۳۷)$$

تبدیل می شود. با توجه به اینکه با شروع متغیرهای حالت از درون Ω_{cy}، با گذر زمان، متغیرهای حالت درون آن باقی خواهند ماند، در صورتی که $\Omega_{cy} \subseteq \{x|1-x_1^2 \ge 0\}$ آنگاه $1-x_1^2 \ge 0$ و یا $|x_1| \le 1$ تضمین می گردد. بر اساس لم ۲ کافی است $s_4 \in \Sigma_{2n}$ وجود داشته باشد که

$$(1-x_1^2) - s_4(z)\big(\gamma - V_c(z)\big) \in \Sigma_{2n} \quad (۳۸)$$

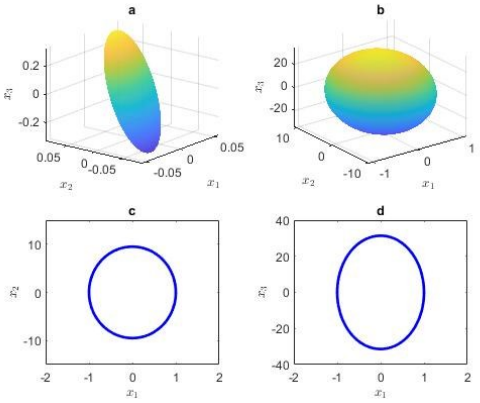
با اضافه کردن قید (۳۸) به قیود (۲۰)-(۲۳) با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف درجه ۲ و کنترل‌گر و مشاهده گر از درجه ۱ پس از حل الگوریتم پیشنهادی، DA تخمین زده شده در شکل ۷ رسم شده است که در آن

$$V(x) = x_1^2 + 3.155 * 10^{-5}x_1x_2 - 1.09 * 10^{-5}x_1x_3 + 0.01108x_2^2 - 0.0007628x_2x_3 + 0.001014x_3^2$$

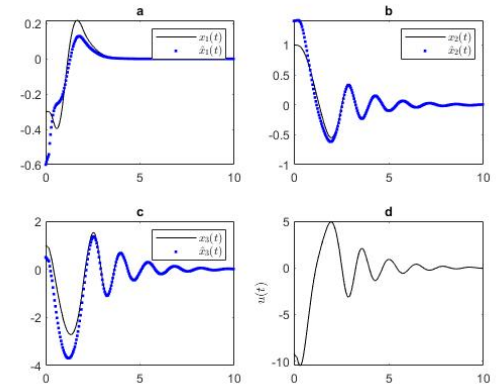
$$u = -5.864\hat{x}_1 - 9.098\hat{x}_2 + 0.00377\hat{x}_3$$

$$L = \begin{pmatrix} 11.656(y-\hat{y}) \\ 9.736(y-\hat{y}) \\ -3.497(y-\hat{y}) \end{pmatrix}, \qquad \hat{y} = \hat{x}_1$$

همان گونه که دیده می شود روش بکار رفته در [۲۸] به تخمین DA به مراتب کوچکتر از روش پیشنهادی رسیده است که می تواند به دلیل استفاده از مفهوم OSL باشد. در شکل ۸ متغیرهای حالت و تخمین آنها به همراه سیگنال ورودی نمایش داده شده است.



شکل ۷: DA (a) تخمین زده شده با طراحی OBC در [۲۸]، (b) DA تخمین زده شده با روش پیشنهادی و تصویر آن در صفحه $x_1 - x_2$ (c)، $x_1 - x_3$ (d).



شکل ۸: (a) متغیر x_1 (سیاه پیوسته)، متغیر $\hat{x}_1$ (آبی خط چین)، (b) متغیر x_2 (سیاه پیوسته)، متغیر $\hat{x}_2$ (آبی خط چین)، (c) متغیر x_3 (سیاه پیوسته)، متغیر $\hat{x}_3$ (آبی خط چین)، (d) سیگنال ورودی

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله به توسعه ناحیه جذب سیستم های چندجمله ای به همراه اشباع بر روی ورودی پرداخته شده است. طراحی تابع لیاپانوف، OBC و مشاهده گر به منظور توسعه ناحیه جذب تبدیل به مسئله بهینه سازی SOS دوخطی گردیده که توسط یک الگوریتم دو مرحله ای تکراری و تبدیل به SOS خطی حل شده است. طراحی OBC منجر به نتایج بهتری نسبت به طراحی کنترل‌گر فیدبک خروجی و همچنین تلاش مشابه برای طراحی OBC گردیده است. علاوه بر این همانطور که در مثال ۴ نشان داده شده، به جز قیود بر روی ورودی می توان قیود بر روی متغیرهای حالت را هم به SOS تبدیل کرد.

مراجع

[1] V. I. Zubov, "Methods of AM Lyapunov and their application," *(No Title),* 1964.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-01]

[2] W. F. Guerrero-Sanchez, J. Guerrero-Castellanos, and V. V. Alexandrov, "A computational method for the determination of attraction regions," in *2009 6th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, 2009: IEEE, pp. 1-7.

[3] O. Hachicho, "A novel LMI-based optimization algorithm for the guaranteed estimation of the domain of attraction using rational Lyapunov functions," *Journal of the Franklin Institute,* vol. 344, no. 5, pp. 535-552, 2007.

[4] F. Hamidi, H. Jerbi, W. Aggoune, M. Djemai, and M. N. Abdelkrim, "Enlarging the domain of attraction in nonlinear polynomial systems," *International Journal of Computers Communications & Control,* vol. 8, no. 4, pp. 538-547, 2013.

[5] A. Vannelli and M. Vidyasagar, "Maximal Lyapunov functions and domains of attraction for autonomous nonlinear systems," *Automatica,* vol. 21, no. 1, pp. 69-80, 1985.

[6] A. Iannelli, A. Marcos, and M. Lowenberg, "Estimating the region of attraction of uncertain systems with invariant sets," *IFAC-PapersOnLine,* vol. 51, no. 25, pp. 246-251, 2018.

[7] T.C. Wang, S. Lall, and M. West, "Polynomial level-set method for polynomial system reachable set estimation," *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. 58, no. 10, pp. 2508-2521, 2013.

[8] G. Valmorbida and J. Anderson, "Region of attraction analysis via invariant sets," in *2014 American control conference*, 2014: IEEE, pp. 3591-3596.

[9] G. Valmorbida and J. Anderson, "Region of attraction estimation using invariant sets and rational Lyapunov functions," *Automatica,* vol. 75, pp. 37-45, 2017.

[10] A. Iannelli, A. Marcos, and M. Lowenberg, "Robust estimations of the region of attraction using invariant sets," *Journal of the Franklin Institute,* vol. 356, no. 8, pp. 4622-4647, 2019.

[11] A. Levin, "An analytical method of estimating the domain of attraction for polynomial differential equations," *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. 39, no. 12, pp. 2471-2475, 1994.

[12] J. Awrejcewicz, D. Bilichenko, A. K. Cheib, N. Losyeva, and V. Puzyrov, "Estimating the region of attraction based on a polynomial Lyapunov function," *Applied Mathematical Modelling,* vol. 90, pp. 1143-1152, 2021.

[13] D. Li, D. Ignatyev, A. Tsourdos, and Z. Wang, "Estimation of non-symmetric and unbounded region of attraction using shifted shape function and R-composition," *ISA transactions,* vol. 136, pp. 308-322, 2023.

[14] L. Khodadadi, B. Samadi, and H. Khaloozadeh, "Estimation of region of attraction for polynomial nonlinear systems: A numerical method," *ISA transactions,* vol. 53, no. 1, pp. 25-32, 2014.

[15] S. Wang, Z. She, and S. S. Ge, "Inner-estimating domains of attraction for nonpolynomial systems with polynomial differential inclusions," *IEEE transactions on cybernetics,* vol. 52, no. 3, pp. 1628-1641, 2020.

[16] P. Polcz and G. Szederkényi, "Lyapunov function computation for autonomous systems with complex dynamic behavior," *European Journal of Control,* vol. 65, p. 100619, 2022.

[17] M. Yadipour, F. Hashemzadeh, and M. Baradarannia, "Controller design to enlarge the domain of attraction for a class of nonlinear systems," in *2017 International Conference on Research and Education in Mechatronics (REM)*, 2017: IEEE, pp. 1-5.

[18] D. Henrion and M. Korda, "Convex computation of the region of attraction of polynomial control systems," *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. 59, no. 2, pp. 297-312, 2013.

[19] G. Valmorbida, S. Tarbouriech, and G. Garcia, "Design of polynomial control laws for polynomial systems subject to actuator saturation," *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. 58, no. 7, pp. 1758-1770, 2013.

[20] M. Barkhordari, M. R. J. Motlagh, and M. Keshavarz, "Enlarging region of attraction in input-output linearization method," in *2008 10th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision*, 2008: IEEE, pp. 2244-2249.

[21] S. Haghighatnia and R. K. Moghaddam, "Enlarging the guaranteed region of attraction in nonlinear systems with bounded parametric uncertainty," *Journal of Zhejiang University SCIENCE C,* vol. 14, pp. 214-221, 2013.

[22] J. Alizadeh and H. Khaloozadeh, "Enlarging the region of attraction for nonlinear systems through the sum-of-squares programming," *Control and Optimization in Applied Mathematics,* vol. 4, no. 2, pp. 19-37, 2019.

[23] D. Chowdhury, N. Kant, R. Mukherjee, and H. K. Khalil, "Enlarging the region of attraction of equilibria of underactuated systems using sum of squares and impulse manifold method," in *2017 American Control Conference (ACC)*, 2017: IEEE, pp. 893-898.

[24] A. Shirin, M. Martínez-Ramón, and R. Fierro, "Kernel Machine to Estimate a Lyapunov Function and Region of Attraction (ROA) for Nonlinear Systems," *IEEE Access,* 2023.

[25] G. Chesi, "Computing output feedback controllers to enlarge the domain of attraction in polynomial systems," *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. 49, no. 10, pp. 1846-1853, 2004.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-01]

[26] E. Ahbe, P. Listov, A. Iannelli, and R. S. Smith, "Feedback control design maximizing the region of attraction of stochastic systems using Polynomial Chaos Expansion," *IFAC-PapersOnLine,* vol. 53, no. 2, pp. 7197-7203, 2020.

[27] D. Xu, X. Wang, Y. Hong, Z.-P. Jiang, and S. Xu, "Output feedback stabilization and estimation of the region of attraction for nonlinear systems: A vector control Lyapunov function perspective," *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. 61, no. 12, pp. 4034-4040, 2016.

[28] M. Shahbazzadeh, H. Salehifar, and S. Jalil Sadati, "Observer-based control with enlarged domain of attraction for one-sided Lipschitz systems subject to input saturation," *Optimal Control Applications and Methods,* vol. 43, no. 2, pp. 495-511, 2022.

[29] S. Jiang, B. Natura, and O. Weinstein, "A faster interior-point method for sum-of-squares optimization," *Algorithmica,* pp. 1-42, 2023.

[30] L. Kapelevich, C. Coey, and J. P. Vielma, "Sum of squares generalizations for conic sets," *Mathematical Programming,* vol. 199, no. 1-2, pp. 1417-1429, 2023.

[31] G. Chesi, "Rational Lyapunov functions for estimating and controlling the robust domain of attraction," *Automatica,* vol. 49, no. 4, pp. 1051-1057, 2013.

[32] W. Tan and A. Packard, "Stability region analysis using polynomial and composite polynomial Lyapunov functions and sum-of-squares programming," *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. 53, no. 2, pp. 565-571, 2008.

[33] G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino, "Solving quadratic distance problems: an LMI-based approach," *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. 48, no. 2, pp. 200-212, 2003.

[34] U. Topcu and A. Packard, "Local stability analysis for uncertain nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. 54, no. 5, pp. 1042-1047, 2009.

[35] J. Lofberg, "YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB," in *2004 IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508)*, 2004: IEEE, pp. 284-289.

[36] S. Prajna, A. Papachristodoulou, and P. A. Parrilo, "Introducing SOSTOOLS: A general purpose sum of squares programming solver," in *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002.*, 2002, vol. 1: IEEE, pp. 741-746.

[37] J. F. Sturm, "Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones," *Optimization methods and software,* vol. 11, no. 1-4, pp. 625-653, 1999.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-01]