

## پایداری محلی برای کلاسی از سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای غیرخطی با نایقینی‌های صفر نشونده تحت ورودی کنترل با نُرم محدود

محسن قلعه نوئی<sup>۱</sup>، محمدرضا اکبرزاده توتونچی<sup>۳</sup>، ناصر پرزیز<sup>۴</sup>

<sup>۱</sup> استادیار گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و رباتیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، ghalhnoie@shahroodut.ac.ir

<sup>۲</sup> فارغ التحصیل دکتری تخصصی مهندسی برق، گرایش کنترل، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

<sup>۳</sup> استاد گروه مهندسی برق گرایش کنترل، قطب علمی رایانش نرم و پردازش هوشمند اطلاعات، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد،

akbazar@um.ac.ir

<sup>۴</sup> استاد گروه مهندسی برق گرایش کنترل، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، n-pariz@um.ac.ir

پذیرش: ۱۳۹۷/۰۵/۱

ویرایش: ۱۳۹۷/۰۱/۱۶

دریافت: ۱۳۹۶/۰۱/۱۶

**چکیده:** اگرچه پایداری و پایداری محلی سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است ولی همچنان مسائلی مانند اشباع محرک‌ها بطور کامل بررسی نشده است. این مقاله، پایداری محلی کلاسی از سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای غیرخطی را بررسی می‌کند که منابع مختلفی از نایقینی‌های صفر نشونده را در بردارد و در آن سیگنال کنترل دارای نُرم محدود است. به دلیل محدود بودن سیگنال کنترل، پایداری محلی مورد توجه این مقاله می‌باشد. به منظور استخراج شرایط پایداری محلی، در ابتدا برای یک مدل جامع‌تر از سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای، بر اساس تکنیک توابع لیاپانوف چندگانه و حداقل زمان مابین دو سوئیچ متوالی، شرایط کافی تحت هر قاعده سوئیچ دلخواه ارائه می‌گردد. شرایط بیان شده خود نیز به صورت محلی بوده که نسبت به تکنیک‌های سراسری موجود، شانس دستیابی به هدف را بیشتر می‌نماید. همچنین برخلاف تکنیک‌های رایج در توابع لیاپانوف چندگانه، این مقاله همگرایی به یک کران غایی به اندازه کافی کوچک را در نظر دارد چرا که نایقینی‌های مورد نظر صفر نشونده می‌باشند. در ادامه، نتایج حاصل از مدل جامع به سیستم مورد نظر اعمال شده و شرایط کافی پایداری به شکل نامساوی‌های ماتریسی خطی و دوخطی بیان می‌گردد. پس از این، به منظور رسیدن به پارامترهای سیگنال کنترل پایدارکننده به همراه بزرگترین ناحیه همگرایی و کوچکترین کران غایی، یک مسأله بهینه‌سازی معرفی شده است. در نهایت، با بیان چند مثال، کارایی روش ارائه شده نشان داده شده است.

**کلمات کلیدی:** پایداری محلی، سیستم سوئیچ ضربه‌ای غیرخطی، فیدبک حالت، نایقینی صفر نشونده، ورودی با نُرم محدود.

### Local stabilization for a class of nonlinear impulsive switched system with non-vanishing uncertainties under a norm-bounded control input

Ghalhnoie M., Akbarzadeh-T. M.R., Pariz N.

**Abstract:** Stability and stabilization of impulsive switched system have been considered in recent decades, but there are some issues that are not yet fully addressed such as actuator saturation. This paper deals with exponential stabilization for a class of nonlinear impulsive switched systems with different types of non-vanishing uncertainties under the norm-bounded control input. Due to the constrained control signal, the local stabilization is here considered. To establish local stabilization criteria, at first, based on multiple Lyapunov functions technique and minimum dwell-time approach, sufficient conditions for a more general model of impulsive switched systems are proposed. These conditions are also local which increases the chances of achieving the goals compared to existing

global techniques. Also, unlike conventional mul-tiple Lyapunov function techniques, this paper considers converging to a sufficient small ultimate bound because of non-vanishing property of the uncertainties. Secondly, the proposed conditions for the general model are applied to the given system and the sufficient stability conditions are formed into linear and bi-linear matrix inequalities. After these, to achieve the parameters of stabilizing control signal along with the largest convergence area and smallest ultimate bound, an optimization problem is proposed. Finally, some illustrative numerical examples are presented to demonstrate the proposed approach.

**Keywords:** Exponential stability, Nonlinear impulsive switched systems, Non-vanishing uncertainty, Norm-bounded input, State feedback.

از متوسط زمان فعال بودن هر زیرسیستم برای بیان شرایط پایداری بهره گرفته می‌شود [۲۶-۲۴]. لازم به ذکر است که در روش‌های مبتنی بر حداقل زمان توقف (به عبارت دیگر حداقل زمان بین دو سوئیچ متوالی) معمولاً شرایط بگونه‌ای بیان می‌شوند که برای هر یک از رویدادهای سوئیچ، روند کاهش تابع کاندیدای لیاپانوف در طول مدت فعال بودن زیرسیستم، نسبت به افزایش آن در زمان جهش بیشتر باشد. این در حالی است که برای روش‌های مبتنی بر میانگین زمان توقف، ممکن است در یک سوئیچ، میزان توقف بر روی زیرسیستم فعال، کوتاه باشد و در طول این مدت، میزان کاهش در تابع لیاپانوف از میزان افزایش آن در لحظه سوئیچ بعدی کمتر گردد و در نتیجه شاهد افزایش در مقدار تابع لیاپانوف باشیم. البته در کل دوره عملکرد سیستم، با توجه به میانگین زمان توقف، روند کلی در تغییرات تابع لیاپانوف کاهشی خواهد بود. بدین ترتیب، روش‌های مبتنی بر میانگین زمان توقف، دارای محافظه کاری کمتری نسبت به روش‌های مبتنی بر حداقل زمان توقف هستند ولی باید توجه داشت که در این روش‌ها ممکن است برای لحظاتی به دلیل افزایش در مقدار تابع کاندیدای لیاپانوف، مسیر حالت از مبدأ دور گردد. این حالت هنگامی که ناحیه اعتبار<sup>۵</sup> برای متغیرهای حالت (ناشی از فیزیک مسئله) محدود می‌باشد، مطلوب نبوده و کاربرد روش‌های مبتنی بر حداقل زمان توقف در این موارد معقولانه‌تر است.

از طرف دیگر، در مورد سیگنال‌های سوئیچ محدود شده، پیدا کردن یک تابع لیاپانوف مشترک سبب اعمال محافظه کاری شدیدی بر روی زمان سوئیچ‌ها خواهد شد. در این موارد، تکنیک توابع لیاپانوف چندگانه<sup>۶</sup> (MLF) نتایج بهتری را در پی دارد. ایده اصلی در تکنیک MLF بر این حقیقت استوار است که لزوماً نباید کاندیدای لیاپانوف مربوط به هر زیرسیستم همواره دارای مشتق زمانی غیرمثبت باشد [۲۴، ۲۹-۲۷]. در نوع خاصی از روش‌های MLF توابع لیاپانوف سنتی به کمک سیگنال سوئیچ با یکدیگر ترکیب می‌شوند تا بک تابع لیاپانوف جدید تولید گردد [۱۹، ۲۱،

## ۱- مقدمه

امروزه سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای<sup>۱</sup> کاربردهای فراوانی در مدلسازی و شبیه‌سازی فرآیندهای مدرن دارند که از آن جمله می‌توان به تزریق و پخش دارو در بدن [۱، ۲]، بوم‌شناسی جمعیت [۳، ۴]، رباتیک و سیستم‌های مکانیکی [۵، ۶]، سیستم‌های آشوب [۹-۷] و پایدارسازی مبدل‌های باک [۱۰] اشاره نمود. رفتار چنین سیستم‌هایی، به دلیل در هم تنیدگی دینامیک-های پیوسته زمان و گسسته زمان، نسبت به سیستم‌های سنتی پیچیده‌تر می-باشد [۱۱، ۱۲].

در دهه اخیر، محققان به مسائل بنیادین علم کنترل در سیستم‌های سوئیچ و/یا سیستم‌های ضربه‌ای توجه بخصوصی داشته‌اند. در اغلب این مطالعات، روش لیاپانوف به عنوان یک ابزار قدرتمند جهت تحلیل پایداری استفاده شده است که به دو گروه اصلی قابل طبقه‌بندی است: (الف) تحت هر قاعده سوئیچ دلخواه، (ب) تحت سیگنال‌های سوئیچ محدود شده و مقید. واضح است که پایداری تحت هر قاعده سوئیچ دلخواه تنها زمانی ممکن است که همه زیرسیستم‌ها پایدار بوده و بتوان یک تابع کاندیدای لیاپانوف مشترک برای همه زیرسیستم‌ها یافت بگونه‌ای که حتی با وجود ضربه در متغیرهای حالت، این کاندیدای لیاپانوف روند کاهشی را نشان دهد. با این اوصاف، پایداری و پایدارسازی سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای تحت هر سیگنال سوئیچ دلخواه همواره ممکن نخواهد بود [۱۳].

در گروه دوم که غالباً سیگنال‌های سوئیچ وابسته به زمان را مطالعه می‌کنند، محدودیت‌های مختلفی مورد توجه قرار گرفته است. بطور مثال در مطالعاتی همانند [۱۷-۱۴] زمان مابین دو سوئیچ متوالی<sup>۲</sup> (DT) برای بیان شرایط پایداری مطالعه می‌شود. همچنین در مواردی مانند [۲۳-۱۸] نیز متوسط زمان مابین دو سوئیچ متوالی<sup>۳</sup> (ADT) استفاده شده است. در تکنیک پیشرفته‌تر متوسط زمان سوئیچ وابسته به مد کاری<sup>۴</sup> (MDADT)،

<sup>۴</sup> Mode-dependent average dwell-time

<sup>۵</sup> Region of validity

<sup>۶</sup> Multiple Lyapunov Functions

<sup>۱</sup> Impulsive switched systems

<sup>۲</sup> Dwell-time

<sup>۳</sup> Average dwell-time

نقطه تعادل است، مد نظر می‌باشد. این در حالی است که در اغلب فعالیت‌های مشابه، همگرایی به مبدأ مورد توجه قرار گرفته و شرایط پایداری استخراج شده است که در کاربردهای عملی محافظه کارانه است (به عنوان نمونه به [۲۴، ۳۶، ۳۷] رجوع شود). (ب) همانطور که بیان شد، به دلیل محدود بودن ترم سیگنال کنترل و محدودیت‌های ناشی از مسائل فیزیکی و عملیاتی، پایدارسازی محلی مورد توجه قرار دارد. بنابراین در ابتدا برای یک مدل جامع تر شرایط کافی پایداری بگونه‌ای بیان شده‌اند که تنها باید در یک زیرفضا شامل مبدأ برقرار باشند. این دیدگاه محلی شانس بیشتری را برای رسیدن به سیگنال کنترل مناسب نسبت به دیدگاه‌های سراسری خواهد داشت. سپس، برای سیستم سوئیچ ضربه‌ای مورد نظر تحت یک سیگنال فیدبک حالت سوئیچ شونده، شرایط محلی فوق به کمک لم-اس<sup>۳</sup> و لم مکمل شور<sup>۴</sup> به صورت نامساوی‌های ماتریسی خطی و دوخطی بازنویسی می‌شوند. اگرچه این مقاله به دلیل ارائه شرایط به صورت محلی دارای محافظه کاری کمتری نسبت به کارهای پیشین است ولی بایستی اذعان نمود که بیان شرایط پایداری سراسری به صورت نامساوی‌های ماتریسی، با متغیرهای تصمیم کمتری همراه خواهد بود که حل عددی آنها را راحت تر می‌نماید (به عنوان نمونه شرایط پایداری بیان شده در [۱۰، ۱۸، ۲۳] را با این مقاله مقایسه نمایید). (ج) از آنجا که این شرایط در یک زیرفضای محلی دارای اعتبار هستند، به منظور تضمین نتایج استخراج شده، مسیر حالت بایستی همواره درون این زیر فضا باقی بماند. لذا، در اینجا تکنیک ADT قابل اعمال نبوده و از تکنیک DT بهره گرفته می‌شود. (د) سیگنال کنترل طراحی شده مجموعه‌ای از فیدبک‌های حالت بوده که توسط قاعده سوئیچ با یکدیگر ترکیب شده‌اند. به منظور تضمین محدود بودن ترم سیگنال کنترل، هر یک از این فیدبک‌های حالت با ترم محدود طراحی می‌شوند. (ه) به منظور دستیابی به حداکثر ناحیه همگرایی و حداقل کران غایی، یک مسأله بهینه سازی ارائه شده است که توسط روش‌های لاگرائزین افزوده<sup>۵</sup> قابل حل است. جعبه‌ابزارهای مختلفی بر اساس این روش‌ها توسعه داده شده است که در این مقاله از جعبه ابزار PENBMI استفاده می‌گردد [۳۸].

ادامه این مقاله به این صورت سازماندهی می‌شود. در بخش ۲، بیان مسأله مورد نظر به همراه چندین تعریف و لم مفید می‌آید. در بخش ۳، در ابتدا شرایط کافی پایداری بر حسب مجموعه‌ای از توابع لیاپانوف برای یک مدل جامع تر نسبت به سیستم مورد نظر تبیین می‌گردد. در نهایت این شرایط برای سیستم هدف به صورت نامساوی‌های ماتریسی خطی و دوخطی بازنویسی می‌شوند. همچنین یک مسأله بهینه‌سازی برای رسیدن به پارامترهای کنترلی که حداکثر ناحیه همگرایی و حداقل کران غایی را به دنبال دارد، در این بخش ارائه می‌گردد. نتایج شبیه‌سازی برای چند مثال

۲۲، ۲۵، ۳۰-۳۲]. ما این تابع لیاپانوف جدید را تابع لیاپانوف سوئیچ شونده<sup>۱</sup> (SLF) می‌نامیم. در روش‌های مبتنی بر SLF، هنگام فعال بودن یک زیرسیستم، تابع لیاپانوف متناظر از سمت بالا محدود می‌شود و در زمان سوئیچ نیز ارتباط تابع لیاپانوف جاری و تابع لیاپانوف آتی بیان می‌گردد.

از دیدگاه عملی، بویژه زمانی که قاعده سوئیچ غیر قابل دستکاری است، طراحی یک سیگنال کنترل پایدارکننده بسیار حائز اهمیت است. در این حیطه، مطالعات فوق‌الذکر دارای دو محدودیت عمده می‌باشند. اولاً، غالب این مطالعات اشباع محرک‌ها را در نظر ندارند. ثانیاً شرایط پایداری استخراج شده بصورت سراسری بیان شده‌اند که همانگونه که در پاراگراف بعد بیان می‌گردد این عمل محافظه کارانه خواهد بود.

بر اساس مطالعات ما، فعالیت‌های کمی در زمینه سیستم‌های سوئیچ و سیستم‌های ضربه‌ای انجام شده است که موضوع اشباع محرک‌ها را در نظر گرفته‌اند [۱۶، ۲۰، ۳۵-۳۳]. به هر حال، چندین جنبه مهم از سیستم‌های سوئیچ که در عمل بطور همزمان دیده می‌شوند، در این فعالیت‌ها نیز لحاظ نشده است. این مسائل عبارتند از جهش در لحظات سوئیچ، غیرخطی بودن مدل زیرسیستم‌ها، نایقینی‌های خطی و غیرخطی، صفر نشونده بودن نایقینی‌ها، و محدود بودن ترم سیگنال کنترل. همانگونه که در [۱۶] و [۳۶] گزارش شده است، باید توجه داشت که دستیابی به سیگنال پایدارساز سراسری با ترم محدود برای سیستم‌های عملی مشکل است. علاوه بر این، در بسیاری از کاربردهای عملی، به دلایل فیزیکی و عملیاتی، ناحیه اعتبار برای متغیرهای حالت محدود بوده و تعیین شرایط پایداری به صورت سراسری به معنی افزایش محافظه کاری است، چرا که ممکن است یک تابع کاندیدای لیاپانوف در یک ناحیه محدود شرایط لازم را برای اثبات پایداری برآورده نموده، درحالی که بر روی کل فضا این شرایط برای آن تابع لیاپانوف صادق نباشد. لذا، کفایت که شرایط پایداری/پایدارسازی استخراج شده تنها بر روی یک زیرفضای شامل نقطه تعادل برقرار باشند. در این مقاله نیز، بجای پایدارسازی سراسری، بر روی پایدارسازی محلی سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای تمرکز شده است که از جمله مهمترین وجه تمایز این مقاله با سایر فعالیت‌ها می‌باشد.

در این مقاله، سیگنال کنترلی با ترم محدود برای کلاس خاصی از سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای غیرخطی تحت هر سیگنال سوئیچ محدود شده دلخواه ارائه شده است. جنبه‌های مختلف این روش را می‌توان در چند بخش خلاصه نمود. (الف) مدل در نظر گرفته شده انواع مختلفی از نایقینی‌ها و اغتشاشات پارامتری و غیرپارامتری را پوشش می‌دهد. از آنجا که فرض شده است که این نایقینی‌ها صفرشونده نیستند، بجای همگرایی به نقطه تعادل، همگرایی به یک کران غایی<sup>۲</sup> به اندازه کافی کوچک که شامل

<sup>۱</sup> Schur Complement

<sup>۵</sup> Augmented Lagrangian methods

<sup>۱</sup> Switched Lyapunov Function

<sup>۲</sup> Ultimate bound

<sup>۳</sup> S-Lemma

سوئیچ متوالی  $\tau_{min}$  شناخته شده است. این زمان را به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$\tau_{min} := \inf_{k \in \mathbb{N}^+} (t_k - t_{k-1}), \quad (2)$$

علاوه بر این، فرضیات اساسی زیر نیز در این مقاله مفروض می باشند.

**فرض ۱:** جملات نایقینی در سیستم (۱) شکل زیر را برآورده نمایند،

$$[A_i(t) \ B_i(t) \ \phi_i(t)] = D_i F_i(t) [E_{ai} \ E_{bi} \ E_{\phi i}],$$

که در آن  $D_i, E_{ai}, E_{bi}, E_{\phi i}$  ماتریس های ثابت معلوم بوده و  $F_i(t)$  یک ماتریس نامعلوم متغیر با زمان است. المان های این ماتریس متغیر با زمان، اندازه پذیر لبگ<sup>۱</sup> بوده بطوری که برای هر  $t \in \mathbb{R}^+$  شرط  $F_i^T(t) F_i(t) \leq I$  برقرار است.

**فرض ۲:** تابع برداری  $f_{ci}(x)$  برای هر بردار دلخواه  $x$  و  $y$  در فضای همگرایی، شرط لیب شیتز زیر را برآورده نماید،

$$\|f_{ci}(x) - f_{ci}(y)\| \leq \|M_i(x - y)\|,$$

که در آن  $M_i$  یک ماتریس ثابت با ابعاد مناسب می باشد. با استفاده از شرط فوق داریم،

$$f_{ci}(x)^T f_{ci}(x) = \|f_{ci}(x)\|^2 \leq \|M_i x\|^2 = x^T M_i^T M_i x.$$

پیش از توسعه نتایج اصلی، در این قسمت چندین لم و تعریف بنیادین ارائه می شود. در ادامه از این لم ها و تعاریف برای بیان نتایج اصلی و اثبات قضایا استفاده می گردد.

**لم ۱ [۳۹]:** ماتریس های حقیقی  $S_1, S_2$  و  $S_3$  را در نظر بگیرید. فرض کنید که ابعاد این ماتریس ها مناسب باشند. اگر  $S_3$  یک ماتریس معین مثبت حقیقی متقارن باشد، آنگاه به ازای هر اسکالر حقیقی  $\zeta > 0$ ، نامساوی زیر برقرار است،

$$S_1^T S_2 + S_2^T S_1 \leq \zeta S_1^T S_3 S_1 + \zeta^{-1} S_2^T S_3^{-1} S_2.$$

**لم ۲ [۴۰]:** ماتریس های  $D, E$  و  $F$  را با ابعاد مناسب در نظر بگیرید. اگر  $F^T F \leq I$  باشد آنگاه برای هر اسکالر  $\gamma > 0$  نامساوی زیر برقرار است،

$$DFE + E^T F^T D^T \leq \gamma DD^T + \gamma^{-1} E^T E.$$

**لم ۳ (لم مکمل شور در [۴۱]):** فرض کنید که ماتریس های  $A, B, C$  و  $D$  به ترتیب دارای ابعاد  $n \times n, n \times p, p \times n$  و  $p \times p$  باشند. همچنین فرض کنید که ماتریس  $D$  معکوس پذیر باشد. ماتریس زیر را در نظر بگیرید،

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

مکمل شور متناسب با بلوک  $D$  از ماتریس  $M$ ، ماتریس  $A - BD^{-1}C$  است که دارای ابعاد  $n \times n$  می باشد. فرض کنید که ماتریس  $D$  معین مثبت باشد. آنگاه ماتریس  $M$  معین مثبت است اگر و تنها اگر مکمل شور بلوک  $D$  در ماتریس  $M$  معین مثبت باشد.

عددی و کاربردی در بخش ۴ آمده و در نهایت، نتیجه گیری در بخش ۵ صورت می گیرد.

**نمادها:** نمادهای استفاده شده در سرتاسر این مقاله استاندارد می باشند. ماتریس معین (یا نیمه) معین مثبت  $A$  با نماد  $A > 0$  (یا  $A \geq 0$ ) مشخص می گردد. ماتریس صفر و ماتریس یک به ترتیب با  $0$  و  $I$  نشان داده می شود. همچنین بیضی گون  $\mathcal{E}(P, r)$  که در ارتباط با ماتریس  $P > 0$  و اسکالر  $r > 0$  می باشد به صورت  $\{x \in \mathbb{R}^n: x^T P x \leq r\}$  تعریف می گردد. افزون بر این موارد، علامت "\*" در نامساوی های ماتریسی بیانگر بخش های متقارن در ماتریس می باشد. در نهایت باید تأکید نمود که اگر ابعاد بعضی از ماتریس ها به صراحت بیان نشده است، فرض بر این می باشد که ابعاد مناسبی برای اعمال جبری دارند.

## ۲- بیان مسأله

در این مقاله پایدارسازی سیستم سوئیچ ضربه ای غیرخطی زیر مطالعه می شود. در این سیستم نایقینی های خطی و غیرخطی بوده و ورودی کنترل  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  دارای نرم محدود است. این مدل را می توان به صورت زیر بیان نمود،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_i(t, x, u) + \phi_i(t), & t \neq t_k, k \in \mathbb{N}^+ \\ x(t^+) = C_i x(t), & t = t_k, k \in \mathbb{N}^+ \end{cases} \quad (1)$$

که در آن،

$$f_i(t, x, u) = (A_i + \Delta A_i)x + f_{ci}(x) + (B_i + \Delta B_i)u(t),$$

و  $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} := \{t_1, t_2, \dots, t_k, \dots\}$  مجموعه ای اکیداً افزایشی از لحظات سوئیچ (ضربه) است که توسط سیگنال سوئیچ

$$\sigma(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \{1, 2, \dots, m\},$$

شکل داده می شود. همچنین  $m$  تعداد زیرسیستم ها را نشان می دهد. در زمان های ضربه، هنگامی که زیرسیستم جاری به یک زیرسیستم دیگر سوئیچ می نماید، بردار حالت  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  بطور ناگهانی دچار جهش می گردد. این جهش مطابق با ماتریس ثابت و معلوم  $C_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  صورت می گیرد. فرض بر این است که بردار حالت  $x(t)$  در لحظه ضربه از سمت چپ پیوسته است بگونه ای که،

$$x(t_k) = x(t_k^-) = \lim_{\zeta \rightarrow 0^+} x(t_k - \zeta).$$

در سیستم (۱)، ماتریس های  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  و  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  نیز معلوم و ثابت فرض می شوند. همچنین تابع برداری  $f_{ci}(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  بیانگر دینامیک های معلوم و غیرخطی زیرسیستم  $i$  می باشد. در اینجا فرض بر این است که  $f_{ci}(0) = 0$  باشد. علاوه بر این موارد،  $\Delta A_i, \Delta B_i$  و  $\phi_i(t)$  معرفی کننده انواع مختلفی از نایقینی ها و اغتشاشات ناشناخته برای زیرسیستم  $i$  هستند. در این مقاله همچنین فرض می کنیم که حداقل زمان مابین دو

<sup>۱</sup> Lebesgue measurable

$$\rho - \ln \mu / \tau_{\min} > 0, \quad (V)$$

که  $\tau_{\min}$  در (۲) تعریف شده است. بدین ترتیب، به ازای هر شرط اولیه که  $x_0 \in \Omega_c := \bigcap_{i=1}^m v(V_i, r)$ ، مسیر حالت در سیستم (۳) به کران غایی  $\Omega_f := \bigcup_{i=1}^m v(V_i, \delta')$  همگرا خواهد شد.

**برهان:** در ابتدا نشان می‌دهیم که به ازای هر  $x_0 \in \Omega_c$  مسیر حالت درون فضای  $\Omega_c$  خواهد ماند. برای این منظور فرض کنید که در بازه زمانی  $[t_0, t_1]$ ، زیر سیستم  $i$  فعال باشد. با توجه به شرط (۴) خواهیم داشت،

$$V_i(t) \leq V_i(t_0) \exp(-\rho(t - t_0)), \forall t \in [t_0, t_1].$$

بنابراین در لحظه  $t_1$  داریم،

$$V_i(t_1) \leq V_i(t_0) \exp(-\rho(t_1 - t_0)) \leq r \exp(-\rho\tau_{\min}),$$

که یقیناً مقداری کوچک‌تر از  $r$  خواهد بود. همچنین فرض کنید که در لحظه  $t_1$ ، زیر سیستم  $i$  به زیر سیستم  $j$  سوئیچ کند. مطابق (۵) داریم،

$$V_j(t_1^+) \leq \mu V_i(t_1) \leq \mu r \exp(-\rho\tau_{\min}).$$

از آنجایی که بر اساس (۷) مقدار  $\mu \exp(-\rho\tau_{\min})$  کمتر از یک می‌باشد، می‌توان نتیجه گرفت که،

$$V_j(t_1^+) \leq r.$$

با ادامه این روند برای سایر بازه‌های زمانی  $(t_k, t_{k+1})$  می‌توان بیان نمود که مسیر حالت درون  $\Omega_c$  باقی خواهد ماند.

حال نشان می‌دهیم که اگر در زمان فعال بودن زیر سیستم  $i$ ، مسیر حالت به  $v(V_i, \delta)$  همگرا شود، پس از آن هرگز از  $\Omega_f$  خارج نخواهد شد. برای این منظور فرض کنید که این رویداد در بازه زمانی  $(t_k, t_{k+1})$  رخ دهد. با توجه به بسته بودن تابع لیاپانوف  $V_i$  و شرط (۴)، مسیر حالت تا پایان زمان فعال بودن این زیر سیستم، درون  $v(V_i, \delta)$  باقی خواهد ماند. شرط (۵) الزام می‌کند که مسیر حالت پس از جهش درون زیر فضای  $v(V_j, \delta')$  قرار بگیرد. به دلیل شرط (۴)، مقدار تابع لیاپانوف در طول بازه فعال بودن زیر سیستم  $j$  کاهش خواهد یافت. حال اگر در این مدت مسیر حالت به بازه  $v(V_j, \delta)$  همگرا شود درون آن باقی خواهد ماند تا زمانی که زیر سیستم بعدی فعال شود که همین روال را به دنبال خواهد داشت. ولی اگر مسیر حالت در طول فعال بودن زیر سیستم  $j$  (یعنی در طول بازه زمانی  $[t_{k+1}, t_{k+2}]$ ) به زیر فضای  $v(V_j, \delta)$  همگرا نگردد، مطابق شرط (۴) به ازای هر  $t \in (t_{k+1}, t_{k+2})$  خواهیم داشت،

$$V_j(t) \leq V_j(t_{k+1}^+) \exp(-\rho(t - t_{k+1})) \leq \delta' \exp(-\rho(t - t_{k+1})).$$

بنابراین در لحظه  $t_{k+2}$  داریم،

$$V_j(t_{k+2}) \leq \delta' \exp(-\rho(t_{k+2} - t_{k+1})) \leq \delta' \exp(-\rho\tau_{\min}).$$

شرط (۶) و (۷) تضمین می‌کند که مقدار تابع لیاپانوف برای زیر سیستم بعدی در لحظه  $t_{k+2}^+$  کمتر از  $\delta'$  باشد. لذا در کل می‌توان نتیجه گرفت که اگر در طول فعال بودن زیر سیستم  $i$ ، مسیر حالت به  $v(V_i, \delta)$  همگرا شود، مسیر حالت برای زمان‌های آتی درون  $\Omega_f$  باقی می‌ماند.

**لم ۴ (لم-اس در [۳۶]):** ماتریس‌های حقیقی  $A_i$  با ابعاد  $n \times n$  را در نظر بگیرید که در آن  $i \in \{0, \dots, m\}$  است. تابع  $f_i(x) = x^T A_i x$  را تعریف کنید که در آن  $x \in \mathbb{R}^n$  می‌باشد. همچنین فرض کنید که اسکالرهای حقیقی  $\alpha_i$ ، بردار حقیقی  $\mu \in \mathbb{R}^m$  و بردار  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  وجود دارند بگونه‌ای که  $x \in \Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : f_0(x) \leq \alpha_0, \dots, f_m(x) < \alpha_m\}$  گزاره  $f_i(x^0) < \alpha_i$  و  $\sum_{i=1}^m \mu_i A_i > 0$  است اگر و تنها اگر اسکالرهای حقیقی  $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0, \dots, \tau_m \geq 0$  وجود داشته باشد بطوری که،

$$\begin{aligned} \alpha_0 - \tau_1 \alpha_1 - \tau_2 \alpha_2 - \dots - \tau_m \alpha_m &\geq 0, \\ \tau_1 A_1 + \tau_2 A_2 + \dots + \tau_m A_m - A_0 &\geq 0. \end{aligned}$$

**تعریف:** کاندیدای تابع لیاپانوف  $V(x(t)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{>0}$  را تابع لیاپانوف بسته می‌نامیم اگر به ازای هر اسکالر حقیقی مثبت  $\sigma > 0$  مجموعه تعریف شده زیر بسته باشد،

$$v(V, r) := \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \leq r\}.$$

بسته بودن تابع لیاپانوف  $V$  را با نماد  $V \in v_c$  نمایش می‌دهیم که در آن  $v_c$  مجموعه همه توابع لیاپانوف بسته می‌باشد.

### ۳- نتایج اصلی

در این بخش، در ابتدا شرایط کافی پایداری نمایی غایی برای یک سیستم سوئیچ ضربه‌ای جامع‌تر نسبت به سیستم (۱) ارائه می‌شود. مدل این سیستم به صورت زیر است،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_i(x(t)), & t \neq t_k, k \in \mathbb{N}^+ \\ x(t^+) = g_i(x(t)), & t = t_k, k \in \mathbb{N}^+ \end{cases} \quad (۳)$$

که در آن توابع  $f_i$  و  $g_i$  به ترتیب بیانگر دینامیک‌های پیوسته زمان و گسسته زمان در زیر سیستم فعال می‌باشد. در اینجا نیز فرض بر این است که سیگنال سوئیچ  $\sigma(t)$  با حداقل زمان مابین دو سوئیچ متوالی  $\tau_{\min}$  بر این سیستم حاکم می‌باشد. پس از بیان شرایط کافی پایداری برای سیستم (۳) و اثبات آن، این شرایط به سیستم مورد نظر (۱) که در آن سیگنال کنترل یک فیدبک حالت با نرَم محدود می‌باشد، اعمال می‌گردد. در نهایت، به منظور دستیابی به حداکثر ناحیه پایداری و کمترین کران غایی تحت چنین سیگنال کنترلی، یک مسأله بهینه‌سازی تعریف می‌گردد. با حل این مسأله بهینه‌سازی علاوه بر رسیدن به اهداف مذکور، پارامترهای کنترل‌کننده نیز تعیین می‌شود.

**قضیه ۱:** اسکالرهای حقیقی  $0 < \delta < r$  را در نظر بگیرید. فرض کنید که مجموعه‌ای از توابع لیاپانوف بسته  $V_i \in v_c$  به همراه اسکالرهای حقیقی مثبت  $\mu, \rho \geq 1$  و  $\delta' > \delta$  وجود داشته باشد بگونه‌ای که نامساوی‌های زیر به ازای هر  $i \neq j \in \{1, 2, \dots, m\}$  برقرار باشند،

$$\dot{V}_i \leq -\rho V_i, \forall x \in v(V_i, r) \setminus v(V_i, \delta), \quad (۴)$$

$$V_j(t_k^+) \leq \mu V_i(t_k), \forall x \in v(V_i, r) \setminus v(V_i, \delta), \quad (۵)$$

$$V_j(t_k^+) \leq \delta', \forall x \in v(V_i, \delta), \quad (۶)$$

به مبدأ مد نظر می‌باشد، لذا شرطی همانند شرط (۶) در آنها دیده نمی‌شود. در حقیقت شرط (۶) در قضیه ۱ برای همگرایی غایی منظور شده است چرا که در سیستم (۳) نایقینی های صفر نشونده در نظر گرفته شده است. (ب) شرایط بیان شده در منابع موجود غالباً سراسری بوده ولی در اینجا ما شرایطی را بیان نموده‌ایم که تنها کافی است به صورت محلی برقرار باشند. لذا در ابتدای اثبات قضیه نشان می‌دهیم که مسیر حالت هیچگاه از این زیرفضای محلی خارج نخواهد شد.

**توضیح ۲:** به منظور اینکه اطمینان حاصل کنیم که هیچ‌گاه مسیر حالت از زیرفضاهای تعریف شده خارج نمی‌شوند، از حداقل زمان مابین دو سوئیچ متوالی بهره گرفته شده است و روش های مبتنی بر ADT و MDADT قابل استفاده نمی‌باشند.

در ادامه، شرایط بیان شده در قضیه ۱ برای سیستم (۱) (که همان سیستم مورد نظر این مقاله است) بازنویسی می‌شود. برای این منظور، سیگنال کنترل زیر را در نظر بگیرید،

$$u(t) = u_{\sigma(t)}, \quad (10)$$

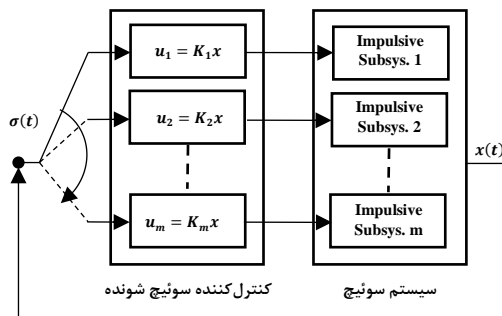
که در آن  $u_i = -K_i x$  سیگنال‌های کنترل فیدبک حالت مناسبی است که در زمان فعال بودن زیرسیستم  $i$  عمل می‌نماید. به عبارت دیگر، بر اساس سیگنال سوئیچ  $\sigma(t)$ ، سیگنال کنترل  $u_i$  زمانی فعال است که زیرسیستم  $i$  فعال باشد (شکل ۱ را ببینید). علاوه بر این، تابع لیاپانوف مربعی  $V_i = x^T P_i x$  را در نظر بگیرید که در آن  $P_i > 0$  یک ماتریس معین مثبت مناسب می‌باشد. مشتق زمانی این تابع لیاپانوف هنگامی که زیرسیستم  $i$  فعال است (یعنی زمانی که  $\sigma(t) = i$  خواهد بود) عبارت است از،

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= \dot{x}^T P_i x + x^T P_i \dot{x} \\ &= ((A_i + \Delta A_i)x + f_{ci} + (B_i + \Delta B_i)u_i + \phi_i)^T P_i x \\ &\quad + x^T P_i ((A_i + \Delta A_i)x + f_{ci} + (B_i + \Delta B_i)u_i + \phi_i), \end{aligned}$$

که در آن  $\Delta A_i, \Delta B_i$  و  $\phi_i$  نایقینی های مربوط به زیرسیستم  $i$  است. ساختار این نایقینی ها در فرض ۱ تعریف شده است. بایستی یادآور شد که در این مدت، سیگنال کنترل  $u_i = -K_i x$  عمل می‌نماید. بدین ترتیب داریم،

$$\dot{V}_i = x^T (A_i^T P_i + P_i A_i - K_i^T B_i^T P_i - P_i B_i K_i)x + Y_i, \quad (11)$$

که در آن،



شکل ۱: طرح کنترلی پیشنهادی برای یک سیستم سوئیچ ضربه‌ای.

در نهایت قصد داریم نشان دهیم که مسیر حالت به ازای هر مقدار اولیه  $x_0 \in \Omega_c$  به صورت نمایی کاهش خواهد داشت. برای این منظور تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید،

$$V(t) = V_{\sigma(t)}(t).$$

بر اساس (۴)، به ازای  $t \in [t_0, t_1]$  داریم،

$$V(t) \leq V(t_0) \exp(-\rho(t - t_0)).$$

لذا برای  $t = t_1$  خواهیم داشت،

$$V(t_1) \leq V(t_0) \exp(-\rho(t_1 - t_0)),$$

و بر اساس (۵) می‌توان نتیجه گرفت که،

$$V(t_1^+) \leq \mu V(t_1) \leq \mu V(t_0) \exp(-\rho(t_1 - t_0)). \quad (8)$$

برای بازه زمانی  $(t_1, t_2]$  مطابق با (۴) داریم،

$$V(t) \leq V(t_1^+) \exp(-\rho(t - t_1)).$$

با جایگذاری (۸) در نامساوی فوق خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} V(t) &\leq \mu V(t_0) \exp(-\rho(t_1 - t_0)) \exp(-\rho(t - t_1)) \\ &= \mu V(t_0) \exp(-\rho(t - t_0)), \end{aligned}$$

و در نتیجه داریم،

$$V(t_2) \leq \mu V(t_0) \exp(-\rho(t_2 - t_0)).$$

عبارت فوق و شرط (۵) ما را به نامساوی زیر می‌رساند،

$$V(t_2^+) \leq \mu V(t_2) \leq \mu^2 V(t_0) \exp(-\rho(t_2 - t_0)).$$

با ادامه این روند برای سایر بازه‌های زمانی می‌توان نتیجه گرفت که به

ازای هر  $t \in (t_k, t_{k+1}]$  داریم،

$$\begin{aligned} V(t) &\leq \mu^k V(t_0) \exp(-\rho(t - t_0)) \\ &= V(t_0) \exp\left(-\left(\rho - \frac{k}{t - t_0} \ln \mu\right)(t - t_0)\right) \\ &\leq V(t_0) \exp\left(-\left(\rho - \frac{k}{t_k - t_0} \ln \mu\right)(t - t_0)\right). \end{aligned}$$

از طرف دیگر مطابق تعریف (۲) می‌توان بیان کرد که،

$$\frac{t_k - t_0}{k} \geq \tau_{min}.$$

در نتیجه می‌توان گفت که،

$$V(t) \leq V(t_0) \exp\left(-\left(\rho - \frac{\ln \mu}{\tau_{min}}\right)(t - t_0)\right). \quad (9)$$

با توجه به شرط (۷) می‌توان نتیجه گرفت که تابع لیاپانوف به صورت نمایی و با نرخ  $\rho - \ln \mu / \tau_{min}$  کاهش خواهد داشت. بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود.

□

**توضیح ۱:** در منابع مختلفی اثبات‌هایی مشابه وجود دارد (برای نمونه به [۲۴، ۳۶] رجوع شود). البته این اثبات‌ها تفاوت‌های فاحشی نیز با مورد بیان شده در قضیه ۱ دارند که عبارتند از: (الف) در اثبات‌های مشابه، پایداری

همچنین می توان رابطه (۱۷) را به صورت زیر بازنویسی نمود،

$$\begin{bmatrix} \Psi_i & M_i^T & E_{ai}^T & K_i^T E_{bi}^T \\ * & \zeta_i I & 0 & 0 \\ * & * & \gamma_{ai} I & 0 \\ * & * & * & \gamma_{bi} I \end{bmatrix} \geq 0,$$

که در آن،

$$\Psi_i = \tau_i^1 P_i - \tau_i^2 P_i - A_i^T P_i - P_i A_i - \rho P_i + K_i^T B_i^T P_i + P_i B_i K_i - \zeta_i P_i P_i - (\gamma_{\phi i} + \gamma_{ai} + \gamma_{bi}) P_i D_i D_i^T P_i.$$

با ضرب ماتریس  $diag(P_i^{-1}, I, I, I)$  از سمت چپ و راست در

نامساوی ماتریسی فوق، خواهیم داشت،

$$\begin{bmatrix} \psi_i & P_i^{-1} M_i^T & P_i^{-1} E_{ai}^T & P_i^{-1} K_i^T E_{bi}^T \\ * & \zeta_i I & 0 & 0 \\ * & * & \gamma_{ai} I & 0 \\ * & * & * & \gamma_{bi} I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (19)$$

که در آن،

$$\psi_i = \tau_i^1 P_i^{-1} - \tau_i^2 P_i^{-1} - P_i^{-1} A_i^T - A_i P_i^{-1} - \rho P_i^{-1} + P_i^{-1} K_i^T B_i^T + B_i K_i P_i^{-1} - \zeta_i - (\gamma_{\phi i} + \gamma_{ai} + \gamma_{bi}) D_i^T D_i.$$

بطور خلاصه، اگر نامساوی های (۱۸) و (۱۹) برقرار باشند، شرط (۴)

برقرار خواهد بود. در کنار این موارد، بگونه ای مشابه، شرط (۵) را نیز می

توان به صورت نامساوی های ماتریسی بیان نمود. برای این منظور، از تابع

لیانوف  $V_i = x^T P_i x$  و شرط (۵) داریم،

$$x^T (t_k^+) P_j x (t_k^+) \leq \mu x^T (t_k) P_i x (t_k), \forall x \in \mathcal{E}(P_i, r) \setminus \mathcal{E}(P_i, \delta).$$

به کمک تابع جهش مربوط به زیرسیستم  $n$ ، رابطه فوق را می توان به

صورت زیر بازنویسی نمود،

$$x^T (t_k) (C_i^T P_j C_i - \mu P_i) x (t_k) \leq 0, \forall x \in \mathcal{E}(P_i, r) \setminus \mathcal{E}(P_i, \delta).$$

مجدداً بر اساس لم-اس، رابطه فوق برقرار است اگر اسکالرهایی

حقیقی مثبت  $\tau_{ij}^3$  و  $\tau_{ij}^4$  وجود داشته باشند بگونه ای که،

$$-\tau_{ij}^3 r + \tau_{ij}^4 \delta \geq 0, \quad (20)$$

$$\tau_{ij}^3 P_i - \tau_{ij}^4 P_i - (C_i^T P_j C_i - \mu P_i) \geq 0. \quad (21)$$

با استفاده از مکمل شور برای رابطه (۲۱) و سپس ضرب کردن

ماتریس  $diag(P_i^{-1}, I)$  از سمت چپ و راست در ماتریس حاصل از مکمل

شور، خواهیم داشت،

$$\begin{bmatrix} \tau_{ij}^3 P_i^{-1} - \tau_{ij}^4 P_i^{-1} + \mu P_i^{-1} & P_i^{-1} C_i^T \\ * & P_j^{-1} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (22)$$

بطور مشابه، با استفاده از لم-اس می توان استدلال کرد که شرط (۶)

نیز برقرار است اگر اسکالر حقیقی مثبت  $\tau_{ij}^5$  وجود داشته باشد بگونه ای

که،

$$\delta' - \tau_{ij}^5 \delta \geq 0, \quad (23)$$

$$\tau_{ij}^5 P_i - C_i^T P_j C_i \geq 0. \quad (24)$$

مجدداً با اعمال مکمل شور و ضرب کردن حاصل در ماتریس

$diag(P_i^{-1}, I)$  رابطه (۲۴) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد،

$$\begin{aligned} Y_i = & f_{ci}^T P_i x + x^T P_i f_{ci} + x^T E_{ai}^T F_i^T D_i^T P_i x + x^T P_i D_i F_i E_{ai} x \\ & + (-x)^T K_i^T E_{bi}^T F_i^T D_i^T P_i x + x^T P_i D_i F_i E_{bi} K_i (-x) \\ & + E_{\phi i}^T F_i^T D_i^T P_i x + x^T P_i D_i F_i E_{\phi i}. \end{aligned}$$

با استفاده از لم های بیان شده در بخش ۲ می توان عبارت فوق را به فرم

مربعی بازنویسی نمود. بدین ترتیب می توان شرط (۴) را به صورت پاره ای

از نامساوی های ماتریسی دوخطی بازنویسی کرد. به عنوان مثال، با استفاده

از لم ۱،

$$f_{ci}^T P_i x + x^T P_i f_{ci} \leq \zeta_i x^T P_i P_i x + \zeta_i^{-1} f_{ci}^T f_{ci},$$

و سپس فرض ۲ داریم،

$$f_{ci}^T P_i x + x^T P_i f_{ci} \leq x^T (\zeta_i P_i P_i + \zeta_i^{-1} M_i^T M_i) x, \quad (12)$$

که در آن  $\zeta_i$  یک اسکالر حقیقی مثبت بوده و  $M_i$  ماتریس ثوابت لپ-شیتز

مربوط به تابع برداری  $f_{ci}$  می باشد. بعلاوه، با استفاده از لم ۲، می توانیم

نامساوی های زیر را بدست آوریم،

$$E_{\phi i}^T F_i^T D_i^T P_i x + x^T P_i D_i F_i E_{\phi i} \leq \gamma_{\phi i} x^T P_i D_i D_i^T P_i x + \gamma_{\phi i}^{-1} E_{\phi i}^T E_{\phi i} x, \quad (13)$$

$$x^T E_{ai}^T F_i^T D_i^T P_i x + x^T P_i D_i F_i E_{ai} x \leq \gamma_{ai} x^T P_i D_i D_i^T P_i x + \gamma_{ai}^{-1} x^T E_{ai}^T E_{ai} x, \quad (14)$$

$$(-x)^T K_i^T E_{bi}^T F_i^T D_i^T P_i x + x^T P_i D_i F_i E_{bi} K_i (-x) \leq \gamma_{bi}^{-1} x^T E_{bi}^T E_{bi} K_i x, \quad (15)$$

$$\gamma_{bi} x^T P_i D_i D_i^T P_i x + \gamma_{bi}^{-1} x^T K_i^T E_{bi}^T E_{bi} K_i x,$$

که در آن اسکالرهایی حقیقی مثبت می باشند. با جایگذاری

(۱۲) الی (۱۵) در (۱۱) داریم،

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & x^T (A_i^T P + P A_i - K_i^T B_i^T P - P B_i K_i + \zeta_i P P + \zeta_i^{-1} M_i^T M_i \\ & + \gamma_{\phi i} P D_i D_i^T P + \gamma_{ai} P D_i D_i^T P + \gamma_{bi} P D_i D_i^T P + \gamma_{ai}^{-1} E_{ai}^T E_{ai} \\ & + \gamma_{bi}^{-1} K_i^T E_{bi}^T E_{bi} K_i) x + \gamma_{\phi i}^{-1} E_{\phi i}^T E_{\phi i} x. \end{aligned}$$

مطابق (۴)، باید به ازای هر  $x \in \Omega_i := \mathcal{E}(P_i, r) \setminus \mathcal{E}(P_i, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n | x^T P_i x \leq r, x^T P_i x \geq \delta\}$

شرط زیر برقرار باشد،

$$\dot{V}_i \leq -\rho V_i = -\rho x^T P_i x.$$

اگر به ازای هر  $x \in \Omega_i$  شرط زیر برقرار باشد، یقیناً نامساوی فوق نیز

معتبر خواهد بود،

$$\begin{aligned} x^T (A_i^T P_i + P_i A_i - K_i^T B_i^T P_i - P_i B_i K_i + \zeta_i P_i P_i + \zeta_i^{-1} M_i^T M_i \\ + (\gamma_{\phi i} + \gamma_{ai} + \gamma_{bi}) P_i D_i D_i^T P_i + \gamma_{ai}^{-1} E_{ai}^T E_{ai} \\ + \gamma_{bi}^{-1} K_i^T E_{bi}^T E_{bi} K_i + \rho P_i) x \leq -\gamma_{\phi i}^{-1} E_{\phi i}^T E_{\phi i} x. \end{aligned}$$

بر اساس لم-اس، شرط فوق برقرار است اگر اسکالرهایی حقیقی مثبت

$\tau_i^1$  و  $\tau_i^2$  وجود داشته باشند بگونه ای که،

$$-\gamma_{\phi i}^{-1} E_{\phi i}^T E_{\phi i} x - \tau_i^1 r + \tau_i^2 \delta \geq 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tau_i^1 P_i - \tau_i^2 P_i - (A_i^T P_i + P_i A_i - K_i^T B_i^T P_i - P_i B_i K_i + \zeta_i P_i P_i + \\ \zeta_i^{-1} M_i^T M_i + (\gamma_{\phi i} + \gamma_{ai} + \gamma_{bi}) P_i D_i D_i^T P_i + \gamma_{ai}^{-1} E_{ai}^T E_{ai} + \\ \gamma_{bi}^{-1} K_i^T E_{bi}^T E_{bi} K_i + \rho P_i) \geq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

بر اساس مکمل شور، رابطه (۱۶) معادل نامساوی ماتریسی زیر می

باشد،

$$\begin{bmatrix} -\tau_i^1 r + \tau_i^2 \delta & E_{\phi i}^T \\ * & \gamma_{\phi i} I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_i & L_i M_i^T & L_i E_{ai}^T & W_i^T E_{bi}^T \\ * & \zeta_i I & 0 & 0 \\ * & * & \gamma_{ai} I & 0 \\ * & * & * & \gamma_{bi} I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (32)$$

$$-\tau_{ij}^3 r + \tau_{ij}^4 \delta \geq 0, \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{ij}^3 L_i - \tau_{ij}^4 L_i + \mu L_i & L_i C_i^T \\ * & L_j \end{bmatrix} \geq 0. \quad (34)$$

$$\delta' - \tau_{ij}^5 \delta \geq 0, \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{ij}^5 L_i & L_i C_i^T \\ * & L_j \end{bmatrix} \geq 0, \quad (36)$$

$$u_{max}^2 - \tau_i^6 r \geq 0, \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_i^6 L_i & W_i^T \\ * & I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (38)$$

که در آن  $\tau_{min}$  در (۲) تعریف شده است. همچنین،

$$\psi_i = \tau_i^1 L_i - \tau_i^2 L_i - L_i A_i^T - A_i L_i - \rho L_i + W_i^T B_i^T + B_i W_i - \zeta_i - (\gamma_{\phi i} + \gamma_{ai} + \gamma_{bi}) D_i^T D_i,$$

می باشد. آنگاه، سیستم سوئیچ ضربه ای (۱) تحت سیگنال سوئیچ شونده کنترل فیدبک (۱۰) با  $u_i = -K_i x = -W_i L_i^{-1} x$  به ازای هر شرط اولیه  $\Omega_f :=$  زیرفضای  $x_0 \in \Omega_c := \bigcap_{i=1}^m \mathcal{E}(L_i^{-1}, r)$ ، همچنین نرم سیگنال کنترل محدود خواهد بود بگونه ای که  $\|u\|^2 = u^T u \leq u_{max}^2$  است.

**برهان:** همانطور که پیش از بیان این نتیجه بحث شد، این نتیجه

مستقیماً از قضیه ۱ استخراج می شود. برای این منظور کافی است  $L_i = P_i^{-1}$  و  $W_i = K_i P_i^{-1}$  را در نظر بگیرید و سپس آنها را در روابط (۱۹)، (۲۲)، (۲۵) و (۲۹) قرار دهید. بدین ترتیب اثبات کامل می شود.

□

**توضیح ۳:** پاره ای از شرایط در نتیجه ۱ به صورت دوخطی می باشد. این اتفاق به دلیل استفاده از لم-اس می باشد که ناشی از محلی در نظر گرفتن شرایط بوده است. اگر چه حل مسائل بهینه سازی با محدودیت های دوخطی نسبت به محدودیت های خطی پیچیده تر می باشد ولی باید توجه کرد که شانس یافتن توابع لیاپانوف در حالتی که شرایط محلی هستند به مراتب بیشتر از حالتی است که شرایط باید به صورت سراسری برقرار باشند.

**توضیح ۴:** اغلب شرایط در نتیجه ۱، خطی یا دوخطی می باشند که انگیزه استفاده از جعبه ابزار PENBMI برای دستیابی به پارامترهای کنترل کننده می باشد. جعبه ابزار PENBMI یک برنامه کامپیوتری است که برای حل مسائل بهینه سازی با تابع هدف مربعی و محدودیت هایی به صورت نامساوی های ماتریسی دوخطی (BMD) کاربرد دارد. بهرحال، شرط (۳۰) غیرخطی می باشد که بایستی به فرم خطی، دوخطی و یا چند جمله ای بازگو شود. از آنجا که  $\mu \geq 1$  می باشد، رابطه  $\ln(\mu) \leq \mu - 1$  برقرار خواهد بود. بنابراین، رابطه (۳۰) را می توان با شرط زیر جایگزین نمود،

$$\rho - (\mu - 1) / \tau_{min} > 0, \quad (39)$$

البته شرط (۳۹) تا حدودی نسبت به شرط (۳۰) محافظه کارانه تر می باشد.

$$\begin{bmatrix} \tau_{ij}^5 P_i^{-1} & P_i^{-1} C_i^T \\ * & P_j^{-1} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (25)$$

بدین ترتیب برای سیستم (۱)، همه شرایط قضیه ۱ را می توان به صورت نامساوی های ماتریسی خطی و دوخطی بازگو کرد. همانطور که در بحث فوق دیده شد، برای این منظور سیگنال کنترل (۱۰) مورد توجه قرار گرفت. بهرحال باید توجه داشت که هدف اصلی این مقاله طراحی کنترل کننده با نرم محدود می باشد. لذا، در انتها شرایطی را بنیان خواهیم گذاشت که محدود بودن نرم سیگنال کنترل تحت آن شرایط تضمین شود. به عبارت دیگر تحت این شرایط خواهیم داشت،

$$\|u\|^2 = u^T u \leq u_{max}^2,$$

که در آن  $u_{max}$  یک اسکالر حقیقی مثبت می باشد. مجدداً یادآوری می شود که مطابق برهان قضیه ۱، در زمان فعال بودن هر یک از زیرسیستم ها، مسیر حالت درون بیضی گون مربوطه باقی خواهد ماند. بطور مثال اگر زیر-سیستم  $i$  فعال باشد، مسیر حالت درون  $\mathcal{E}(P_i, r)$  باقی خواهد ماند. از آنجایی که در طول این مدت داریم  $u = u_i = -K_i x$ ، لذا بایستی عبارت زیر برای هر  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  برقرار باشد،

$$\|u_i\|^2 = u_i^T u_i = x^T K_i^T K_i x \leq u_{max}^2, \quad \forall x \in \mathcal{E}(P_i, r).$$

با اعمال لم-اس به نامساوی فوق خواهیم داشت،

$$u_{max}^2 - \tau_i^6 r \geq 0, \quad (26)$$

$$\tau_i^6 P_i - K_i^T K_i \geq 0. \quad (27)$$

که در آن اسکالر حقیقی مثبت می باشد. مجدداً بر اساس مکمل شور، رابطه (۲۷) را می توان به صورت زیر بیان نمود،

$$\begin{bmatrix} \tau_i^6 P_i & K_i^T \\ * & I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (28)$$

حال با ضرب کردن  $diag(P_i^{-1}, I)$  از سمت چپ و راست در ماتریس رابطه (۲۸) خواهیم داشت،

$$\begin{bmatrix} \tau_i^6 P_i^{-1} & P_i^{-1} K_i^T \\ * & I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (29)$$

بنابراین، محدود بودن نرم ورودی کنترل (۱۰) تضمین شده است اگر روابط (۲۶) و (۲۹) برقرار باشند. بحث فوق در نتیجه ۱ به صورت خلاصه و یکپارچه بیان شده است.

**نتیجه ۱:** اسکالره های حقیقی مثبت  $0 < \delta < r$  و  $0 < u_{max}$  را در نظر بگیرید. فرض کنید که ماتریس های حقیقی معین مثبت متقارن  $l_i > 0$ ، ماتریس های حقیقی  $W_i$  با ابعاد مناسب، اسکالره های حقیقی مثبت  $\rho, \mu \geq 1, \delta' > \mu$ ،  $\delta, \zeta_i, \gamma_{ai}, \gamma_{bi}, \gamma_{\phi i}, \tau_i^1, \tau_i^2, \tau_{ij}^2, \tau_{ij}^3, \tau_{ij}^4, \tau_{ij}^5, \tau_i^6$  که در آن  $i \neq j \in \{1, 2, \dots, m\}$  است، وجود داشته باشند بگونه ای که شرایط زیر برقرار باشد،

$$\rho - \ln \mu / \tau_{min} > 0, \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} -\tau_i^1 r + \tau_i^2 \delta & E_{\phi i}^T \\ * & \gamma_{\phi i} I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (31)$$

ابتدا سیستم موتور بدون ضربه فرض شده و پس از قیاس روش پیشنهادی با روش ارائه شده در [۳۶]، دینامیک ضربه نیز در این مثال لحاظ شده و عملکرد مناسب روش پیشنهادی در حضور ضربه نیز بررسی می گردد.

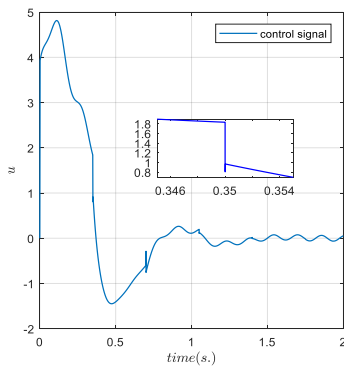
**مثال ۱:** برای این منظور سیستم (۱) با دو زیرسیستم را در نظر بگیرید که پارامترهای آن به صورت ماتریس های زیر تعریف می شوند،

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 5 \\ 1.7 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ f_{c1}(x) = 0.5 \begin{bmatrix} \tanh x_1 \\ \tanh x_2 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix}, \\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2.2 \\ 5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ f_{c2}(x) = 0.5 \begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_2| \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix},$$

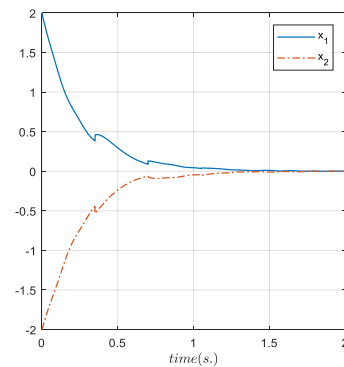
همچنین نایقینی های این دو زیرسیستم به صورت زیر در نظر گرفته شده اند،

$$D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, F_1(t) = F_2(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) & 0 \\ 0 & \cos(t) \end{bmatrix}, \\ E_{\phi_1} = E_{\phi_2} = E_{b1} = E_{b2} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, E_{a1} = E_{a2} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

واضح است که توابع برداری  $f_{ci}(x)$ ، شرط لیپ شیتز معرفی شده در فرض ۲ را با  $M_i = 0.5 \times I_{2 \times 2}$  برآورده می سازند. برای شبیه سازی عددی در حوزه زمان، سیستم داده شده بر روی بازه زمانی  $[0, 2]$  تحت سیگنال سوئیچ  $\sigma(t)$  با دنباله زمانی  $\{0.35 \ 0.70 \ 1.05 \ 1.40 \ 1.75\}$  و  $\sigma(0) = 1$  شبیه سازی می شود. فرض بر این است که در هر زمان سوئیچ، یک زیرسیستم به زیرسیستم دیگر سوئیچ می نماید. چنین سیگنال سوئیچی



(الف)



(ب)

شکل ۲: (الف) تلاش کنترلی پایدارساز که دارای محدودیت در مقدار نرم می باشد و (ب) همگرایی متغیرهای حالت به سوی کران غایی به ازای شرایط اولیه  $x(0) = [+5 \ -5]$

**توضیح ۵:** به منظور دستیابی به حداکثر ناحیه همگرایی و کوچک ترین کران غایی، پارامترهای  $\delta$  و  $r$  نیز به عنوان متغیرهای مسأله در نظر گرفته شده و مسأله بهینه سازی زیر معرفی می شود،

$$\min \delta' - \omega r \\ \text{s. t. } (30) - (39), 0 < \delta \leq r, 1 \leq \mu \quad (40)$$

که در آن  $\omega > 0$  یک اسکالر حقیقی مثبت است و به عنوان ضریب مصالحه بین حداقل کردن  $\delta'$  و حداکثر کردن  $r$  استفاده می شود.

**توضیح ۶:** بر اساس نامساوی رایلی و برای یک تابع کاندیدای لیاپانوف مربعی  $V_i = x^T P_i x$  داریم،

$$\lambda_{\min}(P_i) \|x(t)\|^2 \leq x^T P_i x \leq \lambda_{\max}(P_i) \|x(t)\|^2.$$

از طرف دیگر برای تابع کاندیدای لیاپانوف تعریف شده در این مقاله (یعنی  $V(t) = V_{\sigma(t)}(t) = x^T P_{\sigma(t)} x$ ) واضح است که،

$$V(t) \leq \left\{ \max_{i \in \{1,2,\dots,m\}} x^T P_i x \right\} \leq \left\{ \max_{i \in \{1,2,\dots,m\}} \lambda_{\max}(P_i) \|x(t)\|^2 \right\} \\ = \left\{ \max_{i \in \{1,2,\dots,m\}} \lambda_{\max}(P_i) \right\} \|x(t)\|^2, \\ V(t) \geq \left\{ \min_{i \in \{1,2,\dots,m\}} x^T P_i x \right\} \geq \left\{ \min_{i \in \{1,2,\dots,m\}} \lambda_{\min}(P_i) \|x(t)\|^2 \right\} \\ = \left\{ \min_{i \in \{1,2,\dots,m\}} \lambda_{\min}(P_i) \right\} \|x(t)\|^2.$$

لذا از رابطه (۹) می توان نتیجه گرفت،

$$\left\{ \min_{i \in \{1,2,\dots,m\}} \lambda_{\min}(P_i) \right\} \|x(t)\|^2 \\ \leq \left\{ \max_{i \in \{1,2,\dots,m\}} \lambda_{\max}(P_i) \right\} \|x_0\|^2 \exp \left( - \left( \rho - \frac{\ln \mu}{\tau_{\min}} \right) (t - t_0) \right).$$

بنابراین،

$$\|x(t)\| \\ \leq \sqrt{\frac{\max_{i \in \{1,2,\dots,m\}} \lambda_{\max}(P_i)}{\min_{i \in \{1,2,\dots,m\}} \lambda_{\min}(P_i)}} \|x_0\| \exp \left( - \left( \rho - \frac{\ln \mu}{\tau_{\min}} \right) \frac{(t - t_0)}{2} \right).$$

بدین ترتیب می توان گفت که مسیر حالت با نرخ  $0.5(\rho - \ln \mu / \tau_{\min})$  به سمت  $\Omega_f$  همگرا خواهد شد. لذا به منظور رسیدن به یک نرخ همگرایی مطلوب، می توان شرط (۳۹) در مسأله بهینه سازی (۴۰) را با شرط زیر جایگزین نمود،

$$\rho - (\mu - 1) / \tau_{\min} > 2\rho_{desired}.$$

## ۴- شبیه سازی عددی

به منظور نشان دادن کارایی کنترل معرفی شده، در اینجا چند مثال ارائه می شود. در گام اول یک مثال عددی بیان شده و کارایی روش پیشنهادی در آن ارزیابی می گردد. در گام دوم، دینامیک یک موتور DC با تحریک مستقل و اینرسی سوئیچ شونده مورد بررسی قرار می گیرد. البته از آنجا که هدف مقایسه کارایی روش ارائه شده با روش های مشابه در مراجع دیگر است و با توجه به اینکه نزدیک ترین فعالیت انجام شده با روش پیشنهادی از نظر ساختار و دینامیک مورد بررسی، برای سیستم های غیرخطی سوئیچ فاقد ضربه می باشد (ارائه شده در [۳۶])، لذا در این مثال

جدول ۱: مقادیر پارامترها در مثال ۲.

مقدار	پارامتر	مقدار	پارامتر
50 mH	$L_s$	0.03 Wb/rad	$c_m$
0.009 N.m.s	$B_m$	0.001 Kg.m <sup>2</sup>	$J_1$
120 rad/s	$\omega_{ref}$	0.004 Kg.m <sup>2</sup>	$J_2$
0.1 A	$I_{ref}$	0.5 Ω	$R_r$
15 Wb	$\phi_{ref}$	85 Ω	$R_s$
		8.9 mH	$L_r$

که در آن اندیس  $ref$  نشان دهنده نقطه مرجع می باشد، سیستم معادل به صورت (۱) بدست می آید. در این سیستم معادل پارامترهای شناخته شده به صورت زیر است:

$$A_{\sigma(t)} = \begin{bmatrix} -\frac{B_m}{J_{\sigma(t)}} & -\frac{c_m}{J_{\sigma(t)}}\phi_{ref} & \frac{c_m}{J_{\sigma(t)}}I_{ref} \\ -\frac{c_m}{L_r}\phi_{ref} & -\frac{R_r}{L_r} & -\frac{c_m}{L_r}\omega_{ref} \\ 0 & 0 & -R_s \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad f_{\sigma(t)} = c_m x_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{J_{\sigma(t)}}x_2 \\ \frac{1}{L_r}x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در این سیستم معادل، دینامیک های غیرخطی بر روی کل فضا شرط لیپشیتز را برآورده نمی کنند، چرا که:

$$f_{\sigma(t)}^T f_{\sigma(t)} = c_m x_3^2 \left( \frac{x_1}{L_r} \right)^2 + c_m x_3^2 \left( \frac{x_2}{J_{\sigma(t)}} \right)^2.$$

کران بالای نرم تابع برداری  $f_{\sigma(t)}$  بر روی فضایی که  $|x_3| \leq \phi_{ref}$  باشد، عبارت است از:

$$f_{\sigma(t)}^T f_{\sigma(t)} \leq c_m^2 \phi_{ref}^2 (x_1 \ x_2 \ x_3) \text{diag} \left( \left( \frac{1}{L_r} \right)^2, \left( \frac{1}{J_{\sigma(t)}} \right)^2, 0 \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

بنابراین داریم:

$$M_{\sigma(t)} = M_{\sigma(t)}^T = c_m \phi_{ref} \text{diag} \left( \frac{1}{L_r}, \frac{1}{J_{\sigma(t)}}, 0 \right).$$

پارامترهای این سیستم در جدول ۱ آورده شده است. با انتخاب  $\tau_{min} = 0.12 \text{ s}$ ,  $u_{max} = 1000$  و نایقینی ها به صورت زیر،

$$D_1 = D_2 = 0.1 \times I, \quad E_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_{\phi} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad E_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

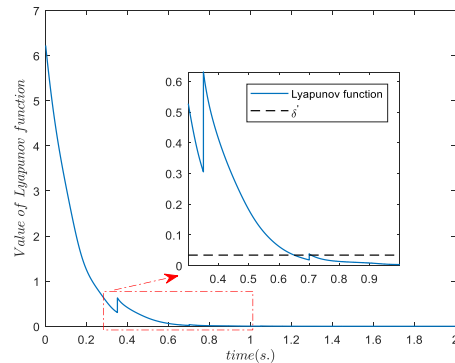
و اعمال روش پیشنهادی در بخش ۳ خواهیم داشت،

$$L_1 = L_2 = \begin{bmatrix} +0.0959 & -0.0046 & -0.0003 \\ -0.0046 & +0.0023 & -0.0000 \\ -0.0003 & -0.0000 & +0.0002 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.0000 & +0.0001 & -0.0026 \\ +0.0004 & -0.0044 & +0.0067 \\ -0.0006 & +0.0004 & -0.0035 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} +0.0273 & -0.0230 & +0.0526 \end{bmatrix}.$$

با مقایسه بهره کنترل کننده های ارائه شده در این مقاله و مقادیر بیان شده در [۳۶] کاملاً مشهود است که بهره بدست آمده در این مقاله بسیار



شکل ۳: مقدار تابع لیاپانوف مربوط به مثال عددی. در زمان های ضربه مقدار تابع لیاپانوف افزایش می یابد ولی این افزایش در طول زمان بگونه ای کاهش می یابد که در کل روند نزولی را نشان می دهد. این امر تا رسیدن به کران غایی ادامه خواهد داشت.

حداقل زمان مابین دو سوئیچ متوالی  $\tau_{min} = 0.35 \text{ sec}$  را برآورده می کند. همچنین در اینجا، مقادیر  $r = 10$  و  $u_{max} = 10$  فرض می شود. به منظور دستیابی به پارامترهای کنترل کننده معرفی شده در (۱۰)، مسأله بهینه سازی (۴۰) حل می گردد. نتایج حاصل به قرار زیر است،

$$W_1 = [0.2475 \quad 2.0679], \quad W_2 = [1.7402 \quad 0.2430],$$

$$\delta = 0.0164, \quad \delta' = 0.0339,$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} +0.7022 & -0.6100 \\ -0.6100 & +0.6605 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} +0.4897 & -0.4254 \\ -0.4254 & +0.4606 \end{bmatrix}.$$

نتایج شبیه سازی در شکل های ۲ و ۳ نمایش داده شده اند. همانطور که مشاهده می شود در زمان سوئیچ مقدار تابع لیاپانوف ممکن است افزایش داشته باشد ولی این افزایش در طول دوره زمانی تا لحظه سوئیچ بعدی بگونه ای جبران می شود که در مجموع مقدار تابع لیاپانوف به صورت نمایی کاهش خواهد داشت.

**مثال ۲:** در اینجا به منظور بررسی عملکرد روش پیشنهادی بر روی یک سیستم واقعی و مقایسه آن با سایر روش های موجود در مراجع، دینامیک یک موتور DC تحریک مستقل در نظر گرفته می شود. مدل زیر دینامیک یک موتور با اینرسی سوئیچ شونده را توصیف می کند [۳۶]:

$$J_{\sigma(t)} \frac{d\omega(t)}{dt} = c_m \phi_s(t) i_r(t) - B_m \omega(t) - \eta_1(t),$$

$$L_r \frac{di_r(t)}{dt} = U_r(t) - R_r i_r(t) - c_m \phi_s(t) \omega(t) + \eta_2(t),$$

$$\frac{d\phi_s(t)}{dt} = U_s(t) - R_s \phi_s(t) + \eta_3(t),$$

که در آن  $\omega(t)$  سرعت زاویه ای شفت موتور،  $i_r(t)$  جریان آرمیچر،  $L_r$  و  $R_s$  به ترتیب مقاومت های اهمی مدار آرمیچر و مدار تحریک، اندوکتانس مدار آرمیچر،  $\phi_s(t)$  شار تحریک،  $\{J_1, J_2\} \in J_{\sigma(t)}$  و  $B_m$  به ترتیب ممان اینرسی روتور و ضریب اصطکاک چسبندگی،  $\eta_1$ ،  $\eta_2$  و  $\eta_3$  نایقینی های مدل نشده و اغتشاشات،  $c_m$  پارامتر ثابت و  $U_r(t)$  و  $U_s(t)$  ولتاژ تغذیه روتور و استاتور می باشد. با انتخاب متغیرهای کمکی به صورت زیر:

$$x_1 = \omega - \omega_{ref}, \quad x_2 = i_a - I_{ref}, \quad x_3 = \phi - \phi_{ref},$$

$$u_r = U_r - U_{r,ref}, \quad u_s = U_s - U_{s,ref},$$

شکل ۵ دیده می‌شود. باید توجه داشت که مسیر حالت به سوی کران غایی همگرا شده و درون آن برای سایر زمان‌های آتی باقی می‌ماند.

حال برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی در مورد سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای، به مثال مربوط به موتور DC تحریک مستقل، پارامتر ضربه به صورت  $C_1 = C_2 = \text{diag}(-1, 1, 1)$  را نیز اضافه نموده و اقدام به حل مسأله بهینه‌سازی می‌شود. پارامترهای کنترل‌کننده‌های طراحی شده عبارتند از،

$$L_1 = \begin{bmatrix} +0.0274 & +0.0004 & +0.0001 \\ +0.0004 & +0.0025 & -0.0000 \\ +0.0001 & -0.0000 & +0.0002 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} +0.0274 & -0.0004 & -0.0001 \\ -0.0004 & +0.0025 & -0.0000 \\ -0.0001 & -0.0000 & +0.0002 \end{bmatrix},$$

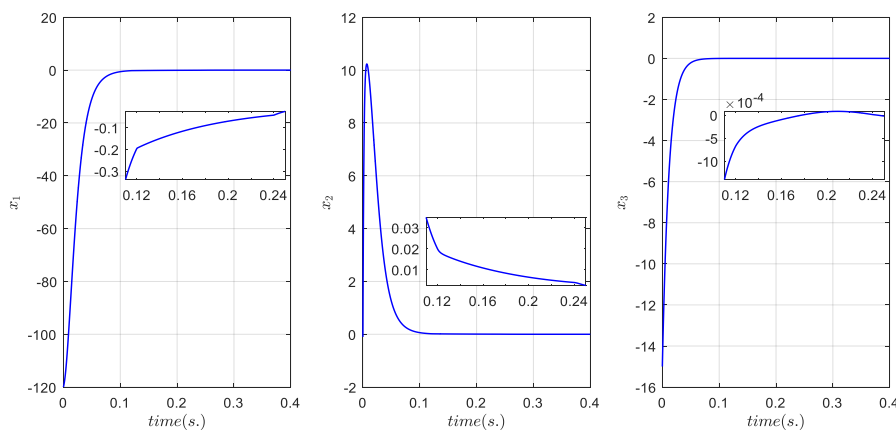
$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.0018 & -0.0002 & -0.0032 \\ +0.0596 & -0.0077 & -0.0302 \\ -0.0013 & +0.0003 & -0.0031 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} +0.0593 & -0.0151 & +0.0391 \end{bmatrix}.$$

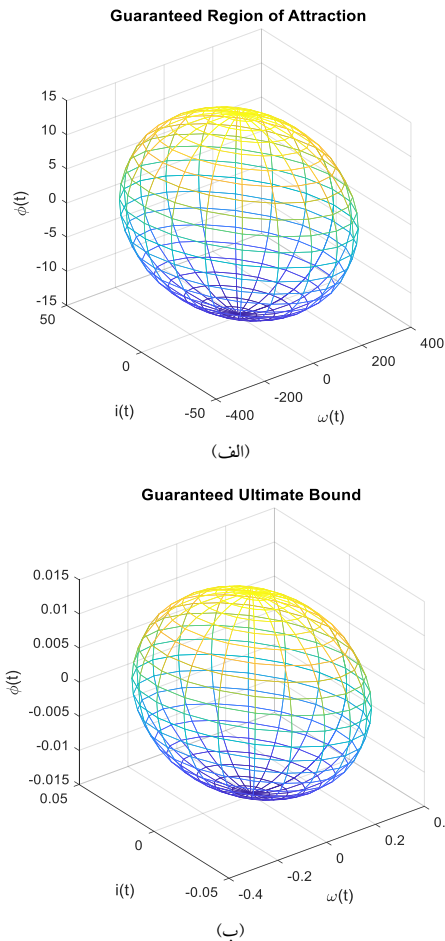
شبیه‌سازی‌ها مجدداً همگرایی به کران غایی را با وجود ضربه در متغیرهای حالت را نشان می‌دهد. همگرایی به کران غایی به ازای یک شرط اولیه و همچنین ناحیه جذب تضمین شده در شکل ۶ آورده شده است.

## ۵- نتیجه‌گیری

جلوگیری از اشباع محرک‌ها و به تبع آن محدود بودن نرم سیگنال کنترل یک از مسائلی است که به خوبی در حیطه سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای بررسی نشده است. بایستی دقت داشت که دستیابی به یک سیگنال کنترل فیدبک حالت که به صورت سراسری دارای نرم محدود باشد تقریباً غیرممکن می‌باشد. بنابراین این مقاله، پایدارسازی محلی کلاسی از سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای غیرخطی را مورد بررسی قرار می‌دهد که نه تنها نرم ورودی کنترل در آن محدود می‌باشد بلکه هر زیرسیستم با منابع مختلفی از ناپیچینی‌های صفر نشونده روبرو می‌باشد. برای این منظور، در ابتدا پاره‌ای از شرایط محلی را بر حسب مجموعه‌ای از توابع لیاپانوف بسته ارائه می‌دهیم که تحت این شرایط پایدار یک سیستم سوئیچ ضربه‌ای جامع‌تر را تضمین می‌کند. سپس، این شرایط به صورت مجموعه‌ای از نامساوی‌های ماتریسی خطی و دوخطی برای سیستم هدف بیان می‌گردد.

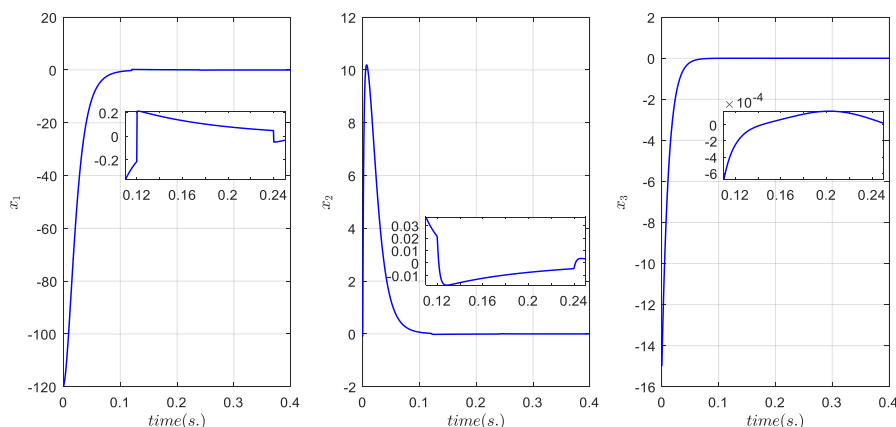


شکل ۵: همگرایی متغیرهای حالت به کران غایی به ازای یک شرط اولیه برای موتور DC تحریک مستقل بدون وجود ضربه.



شکل ۴: (الف) ناحیه جذب تضمین شده و (ب) کران غایی تضمین شده برای حالتی که هیچ یک از متغیرهای حالت دچار جهش نشوند.

کوچک‌تر است که به معنای این است که فضای جذب که درون آن سیگنال کنترل دارای نرم محدود تعیین شده است به مراتب از فضای جذب در وسیع‌تر خواهد بود. فضای همگرایی و کران غایی بدست آمده در این مقاله در شکل ۴ نشان داده شده است. همچنین همگرایی مسیر حالت به کران غایی به ازای شرط اولیه  $x(0) = (-120 \quad -0.1 \quad -15)^T$  در

شکل ۶: همگرایی مسیرهای حالت به سوی کران غایی با وجود ضربه در متغیر حالت  $x_1$ 

- [6] M. Posa, M. Tobenkin, R. Tedrake, Stability Analysis and Control of Rigid-Body Systems with Impacts and Friction, IEEE Trans. Automat. Contr. (2015) 1423–1437.
- [7] Z.-G. Wu, P. Shi, H. Su, J. Chu, Sampled-Data Fuzzy Control of Chaotic Systems Based on a T-S Fuzzy Model, IEEE Trans. Fuzzy Syst. 22 (2014) 153–163.
- [8] X. Wan, J. Sun, Adaptive-impulsive synchronization of chaotic systems, Math. Comput. Simul. 81 (2011) 1609–1617.
- [9] T. Fang, J. Sun, Stability of complex-valued impulsive and switching system and application to the Lü system, Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 14 (2014) 38–46.

[۱۰] ملا احمدیان کاسب حامد، کریم پور علی، پریز ناصر، سیستم های تکه ای خطی تبار مستقیم: کلاس جدیدی از سیستم های هایبرید با دینامیک های خطی تبار و مرزهای کلیدزنی قابل تنظیم. مجله کنترل. ۲۱-۲۹: (۱) ۶؛ ۱۳۹۱

- [11] Zhi-Hong Guan, D.J. Hill, Xuemin Shen, On hybrid impulsive and switching systems and application to nonlinear control, IEEE Trans. Automat. Contr. 50 (2005) 1058–1062.
- [12] W.M. Haddad, V. Chellaboina, S.G. Nersesov, Impulsive and Hybrid Dynamical Systems: Stability, Dissipativity, and Control, Princeton University Press, 2006.
- [13] H. Lin, P.J. Antsaklis, Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results, IEEE Trans. Automat. Contr. 54 (2009) 308–322.
- [14] F. Xu, L. Dong, D. Wang, X. Li, R. Rakkhyappan, Globally exponential stability of nonlinear impulsive switched systems, Math. Notes. 97 (2015) 803–810.
- [15] H. Xu, K.L. Teo, Exponential Stability With  $L_2$ -Gain Condition of Nonlinear Impulsive Switched Systems, IEEE Trans. Automat. Contr. 55 (2010) 2429–2433.
- [16] Y. Chen, S. Fei, K. Zhang, Stabilization of impulsive switched linear systems with saturated control input, Nonlinear Dyn. 69 (2012) 793–804.

[۱۷] اقرزاده کوهبنانی محمد علی، قیصری جعفر، عسکری جواد، مجیری

محسن. پایدارسازی مقاوم سیستم های سوئیچینگ خطی با استفاده از

فیدبک حالت مبتنی بر رویتگر و سیگنال سوئیچ با حداقل زمان اقامت

مشخص. مجله کنترل. ۱۳۹۳؛ ۸ (۴): ۵۵–۶۴.

- [18] Y. Tian, Y. Cai, Y. Sun, H. Gao, Finite-time stability for impulsive switched delay systems with nonlinear disturbances, J. Franklin Inst. 353 (2016) 3578–3594.
- [19] S. Li, Z. Xiang, Stability and  $L_1$ -gain control for positive impulsive switched systems with mixed time-varying delays, IMA J. Math. Control Inf. (2016) dnw030.
- [20] Y. Yang, G. Chen, Finite-time stability of fractional order impulsive switched systems, Int. J. Robust Nonlinear Control. 25 (2014) 2207–2222.
- [21] G. Zong, Q. Wang, Robust resilient control for impulsive switched systems under asynchronous switching, Int. J. Comput. Math. 92 (2015) 1143–1159.

جنبه های مختلف روش بیان شده در این مقاله به قرار زیر است. (الف) شرایط بیان شده کافی است به صورت محلی برقرار باشند که نسبت به قضایایی که شرایط را سراسری در نظر می گیرند، شانس یافتن توابع لیاپانوف مناسب و در نتیجه سیگنال کنترل پایدارساز را افزایش می دهد. (ب) انواع مختلفی از نایقینی های خطی و غیرخطی صفر نشونده در این روش در نظر گرفته شده است. (ج) روش ارائه شده از تکنیک توابع لیاپانوف چندگانه بهره می گیرد که مراتب نسبت به تکنیک تابع لیاپانوف مشترک کارایی بالاتری دارد. (د) برخلاف تکنیک های رایج توابع لیاپانوف چندگانه، در روش ارائه شده همگرایی به یک کران غایی منظور شده است. (ه) به منظور دستیابی به پارامترهای سیگنال کنترل، یک مسأله بهینه سازی معرفی می شود که در آن محدودیت های مسأله به صورت نامساوی های ماتریسی خطی و دوخطی می باشند. با حل این مسأله، ضمن تضمین محدود بودن نرم سیگنال کنترل می توان به حداکثر ناحیه همگرایی و حداقل کران غایی دست یافت.

به عنوان گام بعدی در این پژوهش، امید است که بتوان مسأله بهینه سازی را برای رسیدن به سیگنال پایدارساز برای سایر انواع دینامیک های غیرخطی، نایقینی ها و توابع جهش بازنویسی نمود. علاوه بر این، امیدواریم که بتوانیم از روش های رایانش نرم برای تعیین پارامترهای بهینه مسأله معرفی شده بهره بگیریم.

## مراجع

- [1] R. Shi, X. Jiang, L. Chen, The effect of impulsive vaccination on an SIR epidemic model, Appl. Math. Comput. 212 (2009) 305–311.
- [2] X.-M. Sun, W. Wang, Integral input-to-state stability for hybrid delayed systems with unstable continuous dynamics, Automatica. 48 (2012) 2359–2364.
- [3] G. Pang, Z. Liang, W. Xu, L. Li, G. Fu, A Pest Management Model with Stage Structure and Impulsive State Feedback Control, Discret. Dyn. Nat. Soc. 2015 (2015) 1–12.
- [4] J. Jiao, S. Cai, L. Chen, Dynamics of a plankton-nutrient chemostat model with hibernation and it described by impulsive switched systems, J. Appl. Math. Comput. 53 (2017) 583–598.
- [5] A.D. Ames, K. Galloway, K. Sreenath, J.W. Grizzle, Rapidly Exponentially Stabilizing Control Lyapunov Functions and Hybrid Zero Dynamics, IEEE Trans. Automat. Contr. 59 (2014) 876–891.

- [22] G. Feng, J. Cao, Stability analysis of impulsive switched singular systems, *IET Control Theory Appl.* 9 (2015) 863–870.
- [۲۳] اعظم بالغی نصراله، شفیعی محمد حسین. تحلیل پایداری سیستم‌های سوئیچ‌شونده خطی گسسته‌زمان با در نظر گرفتن تاخیر زمانی و عدم قطعیت پارامتری. *مجله کنترل*. ۱۳۹۴؛ ۹ (۴): ۷۷–۸۵.
- [24] X. Zhao, P. Shi, Y. Yin, S.K. Nguang, New Results on Stability of Slowly Switched Systems: A Multiple Discontinuous Lyapunov Function Approach, *IEEE Trans. Automat. Contr.* 62 (2017) 3502–3509.
- [25] B. Wang, H. Zhang, G. Wang, C. Dang, S. Zhong, Asynchronous control of discrete-time impulsive switched systems with mode-dependent average dwell time, *ISA Trans.* 53 (2014) 367–372.
- [26] X. Zhao, L. Zhang, P. Shi, M. Liu, Stability and Stabilization of Switched Linear Systems With Mode-Dependent Average Dwell Time, *IEEE Trans. Automat. Contr.* 57 (2012) 1809–1815.
- [27] M.S. Branicky, Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.* 43 (1998) 475–482.
- [28] Hui Ye, A.N. Michel, Ling Hou, Stability theory for hybrid dynamical systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.* 43 (1998) 461–474.
- [29] W. Xiang, J. Xiao, Stabilization of switched continuous-time systems with all modes unstable via dwell time switching, *Automatica*. 50 (2014) 940–945.
- [30] X. Xie, H. Xu, R. Zhang, Exponential Stabilization of Impulsive Switched Systems with Time Delays Using Guaranteed Cost Control, *Abstr. Appl. Anal.* 2014 (2014) 1–8.
- [31] L. Gao, D. Wang, Input-to-state stability and integral input-to-state stability for impulsive switched systems with time-delay under asynchronous switching, *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.* 20 (2016) 55–71.
- [32] P. Li, J. Lam, K.C. Cheung, Stability, stabilization and L2-gain analysis of periodic piecewise linear systems, *Automatica*. 61 (2015) 218–226.
- [33] L. Lu, Z. Lin, Design of Switched Linear Systems in the Presence of Actuator Saturation, *IEEE Trans. Automat. Contr.* 53 (2008) 1536–1542.
- [34] A. Benzaouia, O. Akhrif, L. Saydy, Stabilisation and control synthesis of switching systems subject to actuator saturation, *Int. J. Syst. Sci.* 41 (2010) 397–409.
- [35] W. Ni, D. Cheng, Control of switched linear systems with input saturation, *Int. J. Syst. Sci.* 41 (2010) 1057–1065.
- [36] A. Poznyak, A. Polyakov, V. Azhmyakov, *Attractive Ellipsoids in Robust Control*, Springer International Publishing, Cham, 2014.
- [37] H. Yang, B. Jiang, J. Zhao, On Finite-Time Stability of Cyclic Switched Nonlinear Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.* 60 (2015) 2201–2206.
- [38] M. Kocvara, M. Stingl, PENNON: Software for Linear and Nonlinear Matrix Inequalities, in: M.F. Anjos, J.B. Lasserre (Eds.), *Handb. Semidefinite, Conic Polynomial Optim.*, Springer US, 2012: pp. 755–791.
- [39] X. Liao, G. Chen, E.N. Sanchez, Delay-dependent exponential stability analysis of delayed neural networks: an LMI approach, *Neural Networks*. 15 (2002) 855–866.
- [40] L. V. Hien, V.N. Phat, Exponential stabilization for a class of hybrid systems with mixed delays in state and control, *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.* 3 (2009) 259–265.
- [41] K. Derinkuyu, M.Ç. Pinar, On the S-procedure and Some Variants, *Math. Methods Oper. Res.* 64 (2006) 55–77.