مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۳، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۸، صفحه ۱۴-۱

تعیین مسیر بهینه ناظر در ردیابی اهداف متحرک تنها با زاویه سمت با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبی‌شف

مهدی اردشیری [۱]، علیرضا الفی [۲]

[۱] دانشجوی دکتری برق-کنترل، دانشکده مهندسی برق و رباتیک - دانشگاه صنعتی شاهرود، ardeshiri_mahdi@shahroodut.ac.ir
[۲] استاد تمام، دانشکده مهندسی برق و رباتیک - دانشگاه صنعتی شاهرود، a_alfi@shahroodut.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۶/۱۰/۱۶ ویرایش: ۱۳۹۷/۰۲/۱۰ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۳/۹

چکیده: در این مقاله مساله بهینه‌سازی مسیر حرکت ناظر در ردیابی مکان اهداف متحرک سطحی با اندازه‌گیری زاویه سمت به تنهایی مطالعه می‌شود. عملکرد ردیابی هدف با زاویه سمت به تنهایی، به میزان رویت‌پذیری موقعیت اهداف در مسیرحرکتی ناظر/هدف یا مانور بهینه ناظر وابسته است. بدین منظور معیار بهینگی مستقل از تخمین‌گر هدف، بیشینه دترمینان باند پایین ماتریس اطلاعات فیشر انتخاب می‌شود. ابتدا مدل‌سازی مساله کنترل بهینه مسیر رویت‌گر به روش چندجمله‌ای متعامد چبی‌شف انجام می‌شود. سپس با بهینه‌سازی مستقیم عددی، قانون کنترل برای حرکت رویت‌گر مستقل از شرایط اولیه بدست می‌آید. مزایای مدل‌سازی پیشنهادی بیشینه کردن رویت‌پذیری کل زمان مانور، محاسبه قانون کنترل در زمان شروع مانور و انعطاف بالا در اعمال محدودیت‌های مسیر حرکت ناظر می‌باشد. کارایی روش ارائه شده توسط شبیه‌سازی با روش مونت‌کارلو با روش‌های مرسوم بهینه‌سازی مسیر به طور جامع مقایسه می‌گردد. همچنین عملکرد در سناریوهای مختلف برای ردیابی اهداف دور، نزدیک، متحرک و ساکن ارزیابی شده و قابل اعتماد بودن آن بررسی می‌شود. این روش در مساله کاربردی ردیابی یک شناور سطحی توسط زیردریایی با استفاده از سونار نیز استفاده می‌شود.

کلمات کلیدی: رهگیری سمت به‌تنهایی، رؤیت‌پذیری هدف، ماتریس اطلاعات فیشر، مسیر بهینه رویتگر، چندجمله‌ای چبی‌شف.

Optimal Observer Path Planning For Bearings-Only Moving Targets Tracking Using Chebyshev Polynomials

Mahdi Ardeshiri, Alireza Alfi

Abstract: In this paper, an optimization problem for the observer trajectory in the bearings-only surface moving target tracking (BOT) is studied. The BOT depends directly on the observability of the target's position in the target/observer geometry or the optimal observer maneuver. Therefore, the maximum lower band of the Fisher information matrix is opted as an independent criterion of the target estimator. First, modeling of the optimal control problem of the observer path is presented based on the orthogonal Chebyshev polynomial. Then, a control law for the observer direction, which is independent of the initial conditions, is obtained using the direct numerical optimization. The advantages of the proposed model include maximization of the total maneuver time, calculation of the control law at the start time of the maneuver, and high flexibility in applying the tracking constraints of the observer's motion. The efficiency of the proposed algorithm is compared with the conventional path optimization methods using the Monte Carlo. In addition, the performance of the algorithm is evaluated in different scenarios for target tracking, including remote, near, moving, and stationary, and its reliability is investigated. It is also applied in the surface submarine tracking problem using sonar.

Keywords: Bearings only tracking, Target observability, Fisher information matrix, Optimal observer path planning, Chebyshev polynomial.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.5.0]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.1]

۱- مقدمه

رهگیری اهداف در شرایطی که محدودیت اندازه‌گیری پارامترهای هدف با حساسه‌های فعال وجود دارد، تنها با اندازه‌گیری زاویه سمت اهداف توسط حس‌گرهای غیرفعال انجام می‌پذیرد که اصطلاحا رهگیری سمت به تنهایی (BOT[1]) نامیده می‌شود و کاربردهای زیادی خاصه در صنایع نظامی و تجاری دارد. مساله BOT با توجه به تعداد و موقعیت حساسه‌ها، تعداد اهداف و ابعاد حرکتی اهداف دسته بندی شده است. در بسیاری از مسائل کاربردی، موقعیت و شرایط اولیه هدف نیز در مساله BOT نامعلوم است. همچنین تعقیب با کمترین مانور با توجه به محدودیت‌ها و موانع مسیر حرکت ناظر، از الزامات اساسی این مساله کاربردی خاصه در عمل می‌باشد. مانور بالا موجب تولید نویزهای صوتی و آشکارپذیری بیشتر ناظر می‌گردد. در دهه‌های اخیر مساله BOT و تحلیل حرکت هدف (TMA[2]) موضوع مورد علاقه محققین بوده است. این موضوع برای مسائل اکوستیکی (زیردریایی که سونار غیرفعال دارد) و تجهیزات الکترو مغناطیسی (مراقب‌ها با حسگرهای ESM) و تجهیزات اپتیکی (در ماهواره‌ها و دوربین‌های مادون قرمز) مورد استفاده بوده است [۱-۳]. تحقیقات زیادی در خصوص‌انواع مساله BOT انجام شده است که می‌توان به کتاب‌های مهم این موضوع در مراجع [۴-۶] اشاره نمود.

نسخه استاندارد تحلیل حرکت سمت به تنهایی (BOTMA) شامل دو متحرک در یک سطح دو بعدی است که ناظر (تعقیب‌کننده) و هدف با سرعت شبه خطی با سرعت و جهت ثابت در طول زمان رهگیری، حرکت می‌کند. بدین ترتیب منظور از BOTMA کلاسیک، محاسبه چهار پارامتر شامل دو مختصات موقعیت جغرافیایی، سرعت و کورس (جهت حرکت) هدف است که با جمع‌آوری و اندازه‌گیری سمت هدف توسط حساسه سمت‌یاب یک ناظر انجام می‌پذیرد. تحت این فرض کلاسیک، اگر بردار سرعت ثابت باشد، ناظر نمی‌تواند هدف را شناسایی کند و لذا مسئله رویت‌پذیر نیست [۷-۹]. در دهه ۸۰ میلادی تاثیر مانور ناظر بر افزایش رویت‌پذیری هدف در مساله BOT مورد بحث قرار گرفته است [۷]. زمانی‌که رویت‌پذیری قطعی است با توجه به آمیختگی اندازه‌گیری سمت با خطا، دقت BOT به شدت به مانور رویت‌گر وابسته است. در مرجع [۸] نشان داده شده است که بیشینه نمودن رویت‌پذیری مساله BOT، از تعامل دو شرط متقابل که یکی کاهش فاصله ناظر تا هدف و دیگری حرکت متعامد ناظر بر خط دید هدف است، محقق می‌گردد. در برخی موارد، محققین از مسیرهای تقریبی حرکتی با مانور S شکل جهت تحقق الزام رویت‌پذیری استفاده نموده اند، لیکن این موضوع علاوه‌بر تولید نویز صوتی، موجب آشکارپذیری ناظر (شناور خودی) و هزینه طی مسیر اضافی است.

عمده مسایل اصلی کنترل مانور بهینه رویت‌گر برای موقعیت‌یابی[3] هدف (هدف ساکن) انجام شده است [۱۰-۱۵]. در مرجع [۱۰]، حرکت حامل بر دو مسیر مستقیم‌الخط بررسی و تاثیر مسیر حرکت مقایسه گردیده است. با فرض کورس ثابت در گام اول مسیر، محاسبه کورس رویت‌گر در گام دوم مسیر به منظور بیشینه کردن دقت محاسبه فاصله هدف انجام شده است. در مرجع [۱۱]، برای یک مسئله موقعیت‌یابی، با تعریف تابع لیاپانوف محدودیت تقرب، مسئله بهینه‌سازی هامیلتونین-جاکوبی با افزونگی باند پایین آشکارپذیری FIM برای مسئله BOT ارائه شده است. در [۱۲]، با بهره‌گیری از روش‌های حساب تغییرات (روش‌های غیرمستقیم بهینه‌سازی)، حل بسته‌ای برای مانور بهینه (وابسته به پارامتر ورودی ضریب تقرب) درمسئله موقعیت‌یابی (هدف ساکن) مطالعه شده است. در مراجع اخیر الزام برقراری این دو شرط متقابل، مسیر حرکت ناظر در مسائل کاربردی را به صورت مارپیچی(S شکل) [۳] تعریف نموده‌اند. اهمیت این روش علاوه‌بر سادگی محاسبات برخط[4]، عدم وابستگی محاسبات به نامعلوم بودن شرایط اولیه است. در این مراجع، روش ریاضی برای محاسبه سایر خصوصیات بهینه مانور مارپیچی از جمله سرعت چرخش ارائه نشده و عموما رهگیری با بیشینه مانور حامل توصیه شده است. هزینه این روش، مسیر طولانی و نامطلوب مانور ناظر، امکان عدم رویت‌پذیری در برخی جهت‌های حرکتی از جمله مسیر فرار هدف، و بهینه نبودن زمان پایانی مانور نسبت به کل مانور می‌باشد. کمینه بودن مسیر حرکتی ناظر در جهت تقرب به هدف، علاوه‌بر بهبود شرط رویت‌پذیری در سناریوهای دورشونده هدف، باعث تخمین دقیق در زمان انتهایی مانور می‌گردد. به عنوان یک مثال جامع از روش حل غیرمستقیم، در مرجع [۱۲] ، با تشکیل یک مساله مقدار مرزی هامیلتونی (HBVP) و با استفاده از نظریه حساب تغییرات، رابطه‌ای بین جهت حرکت ناظر و زاویه سمت هدف در مسیر بهینه ارائه شده است. دشواری حل، فرض شرایط مرزی نهایی و معلوم بودن موقعیت اولیه هدف از محدودیت‌های این روش است. از طرف دیگر، روش‌هایی که زمان نهایی مانور را بررسی کرده‌اند، در ابتدای مسیر، تقرب ناظر به هدف و در انتهای مسیر، دور زدن هدف را توصیه می‌کنند [۱۳]. همچنین در مرجع [۱۵]، مسیریابی ناظر در جهت کاهش کواریانس خطای تخمین انجام شده و نتایج با مرجع [۱۲] مقایسه شده است.

در این مقاله، بهینه‌سازی مسیر یک ناظر (یک حساسه اندازه‌گیر سمت هدف) در رهگیری حرکت دو بعدی یک هدف متحرک مورد نظر است. چنانکه در بالا ذکر شد، اگر بردار سرعت ناظر ثابت باشد، مساله رویت‌پذیر نبوده و شناسایی ممکن نیست. از طرفی دیگر، به دلیل غیرخطی و نامعلوم بودن مدل و پارامترهای اولیه سیستم، تعیین معیاری که به‌وسیله آن به صورت برخط بتوان رویت‌پذیری سیستم را سنجید و یا بهبود داد اغلب غیرممکن است. در مساله بهبود مسیر ناظر، محدودیت در

[1] Bearings-Only Tracking
[2] Target Motion Analysis
[3] Localization
[4] Online

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.5.0]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.1]

مسیر حرکت و میدان دید ناظر تاثیرگذار است. کنترل بهینه ناظر در مسیری که باعث کاهش بیشتر کوواریانس خطای تخمین باشد می‌تواند موجب افزایش رویت‌پذیری شود. البته این معیار وابسته به نوع تخمینگر می‌باشد. عموما درکارهای ارائه شده در مراجع، تابعی اسکالر از ماتریس اطلاعات فیشر[1](FIM) بیشینه می‌گردد [۸] و در برخی مراجع کمینه باند پایین کرامر رائو[۲](CRLB)، از معکوس ماتریس فیشر محاسبه [۱۶] به عنوان معیار بهینگی استفاده می‌شود. در مرجع [۱۲]، یکسان بودن عملکرد این دو معیار بر تعیین مسیر بهینه ناظر نشان داده شده است.

حل مسائل کنترل بهینه را می‌توان به روش‌های مستقیم[۳] و غیرمستقیم[۴] دسته‌بندی کرد [۱۷]. در روش‌های غیرمستقیم، اساس کار بر یافتن جواب مبتنی بر شرایط لازم بهینگی است که از روش‌های حساب تغییرات و اصل پونتریاگین بدست می‌آید. حساسیت روش‌های بهینه‌سازی حساب تغییرات، مبتنی بر تحقق شرط لازم (مشتق مرتبه اول) و شرایط مرزی مساله است. در مقابل روش‌های مستقیم، بهینه‌سازی مبتنی بر گسسته‌سازی مساله کنترل بهینه و تبدیل آن به یک مساله حل عددی NLPP[5] است که برای حل آن از روش های بهینه‌سازی عددی استفاده می‌شود. مزیت اصلی روش‌های مستقیم، عدم نیاز به یافتن شرایط لازم مرتبه اول روش‌های غیرمستقیم HBVP[6] است. از جمله روش‌های مستقیم بهینه‌سازی جواب، استفاده از تقریب چندجمله‌ای‌های متعامد توابع لژاندر[۷]، چبی‌شف[۸]، هرمیت[۹]، لاگنِر[۱۰] و دسته توابع سری فوریه می‌باشند. از جمله ویژگی‌هایی که تکنیک‌های مبتنی بر چندجمله‌ای‌های لژاندر و چبی‌شف را برای حل مسئله کنترل بهینه، از بقیه روش‌های عددی متمایز می‌کند می‌توان به ساده بودن فرآیند گسسته‌سازی و دقت بالا اشاره کرد. در این روش‌ها پارامترهای متغیرهای حالت و کنترل، به طور همزمان گسسته‌سازی می‌شوند. بنابراین معادلات دیفرانسیل به یک سری قیود جبری تبدیل و به NLPP اضافه می‌گردند [۱۸]. موضوع مهم و تاثیرگذار بر تعیین مسیر بهینه، کران زمانی است که معیار رویت‌پذیری در آن بهینه می‌گردد. از این منظر، پژوهش‌های انجام شده شامل بهینگی در یک گام جلوتر یا در زمان نهایی دسته‌بندی شده‌اند. عموما بهره‌گیری از روش‌های بیشینه نمودن تابع معیار در یک گام جلوتر، حرکت ناظر به صورت مارپیچ حول هدف می‌باشد. البته روش‌های کلاسیک نظریه کنترل بهینه می‌توانند به قوانین کنترلی موثرتری منتهی گردند، لیکن با توجه به غیرخطی و نامعلوم بودن پارامترهای مساله BOT، حل این توابع دشوار و در برخی موارد با خطای زیاد توام می‌گردد.

با توجه به توضیحات داده شده، این مقاله به طراحی مسیر یک ناظر به روش کنترل بهینه برای حرکت در صفحه (برای اهداف سطحی شناوری) می‌پردازد. فرض شده است که ناظر قابلیت اندازه‌گیری فقط زاویه سمت یک هدف را دارد و با داشتن موقعیت ناظر در هر لحظه، موقعیت هدف تخمین زده می‌شود. طراحی مسیر ناظر با هدف رویت‌پذیری هرچه بیشتر موقعیت هدف صورت پذیرفته است. مدلسازی و حل مساله کنترل رویت‌پذیر بهینه با استفاده از روش‌های عددی انجام می‌شود و با بهره‌گیری از ویژگی‌های بهینه‌سازی مسیرمانور تا زمان نهایی آن، تابع کنترل مسیر مستقل از شرایط و فاصله اولیه هدف محاسبه می‌گردد. پس از مدل‌سازی مساله کنترل بهینه مسیر ناظر، برای حل مسئله از چندجمله‌ای متعامد چبی‌شف استفاده می‌شود و قانون کنترل برای حرکت ناظر بدست می‌آید. سپس کارایی روش ارائه شده توسط شبیه‌سازی مونت کارلو با روش‌های دیگر بهینه‌سازی مسیر مقایسه می‌شود. معیار بهینگی تخمین هدف، افزونگی دترمینان باند پایین FIM انتخاب شده است. در این تحقیق همگرایی سریع، محاسبات آسان و انعطاف در طرح‌ریزی سناریو از ویژگی‌های این روش است. بازه رهگیری از زمان $[0,\infty)$ به بازه متناهی $(-1,1)$ تبدیل می‌گردد و کلیه قیود دیفرانسیلی و انتگرالی با تقریب مناسبی به توابع چندجمله‌ای متعامد نگاشت می‌شوند. سپس با روش‌های بهینه‌سازی معمول، قانون کنترل شامل رابطه مسیر حرکت ناظر با زاویه سمت هدف تعیین می‌گردد. با توجه به محدودیت‌های مساله BOT از جمله پارامترهای نامعلوم اولیه و انتهایی خاصه فاصله تا هدف و شرایط مرزی انتهایی مانور ناظر، در روش پیشنهادی این مقاله موارد ذیل لحاظ شده است:

۱- طراحی رویتگر بهینه مساله BOT با تعریف تابع هامیلتونین، به منظور بهره‌گیری از دقت بالای بهینه‌سازی روش‌های کلاسیک (دقت بالای روش‌های بهینه‌سازی غیرمستقیم)

۲- نگاشت مساله رویتگر بهینه کلاسیک به یک مساله حل عددی NLPP با استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد چبی‌شف به منظور گسسته‌سازی در طول زمان مانور و بهینه‌سازی مساله در بردارهای متعامد، که این امر به دلیل دشواری و محدودیت‌های روش‌های حل تحلیلی رویتگر بهینه در مساله BOT انجام شده‌است.

۳- عدم نیاز به معلوم بودن شرایط اولیه و مرزی که از الزامات و محدودیت‌های حل تحلیلی به روش‌های کلاسیک است.

۴- ارائه تابع کنترلی منحصر به فرد مسیر بهینه رویتگر (برای فواصل مختلف) برای اهداف ساکن، سرعت ثابت و یا مانوردار، که در ابتدای مانور ناظر متناسب با محدودیت‌های حرکت آن محاسبه می‌شود و در اهداف متحرک متناسب با زاویه نسبی دید و مانور آنها، مسیر بهینه به‌صورت برخط تطبیق داده می‌شود.

۵- استفاده از تابع هزینه باند پایین FIM جهت طراحی رویتگر به عنوان یک معیار رویت‌پذیری مستقل از پارامترهای تخمین.

[1] Fisher Information Matrix (FIM)
[2] Cramer-Rao Lower Bound (CRLB)
[3] Direct
[4] Indirect
[5] Nonlinear Programming Problem
[6] Hamiltonian Boundary Value Problem
[7] Legender Ploynominal
[8] Chebyshef Ploynominal
[9] Hermit Ploynominal
[10] Lagnerre

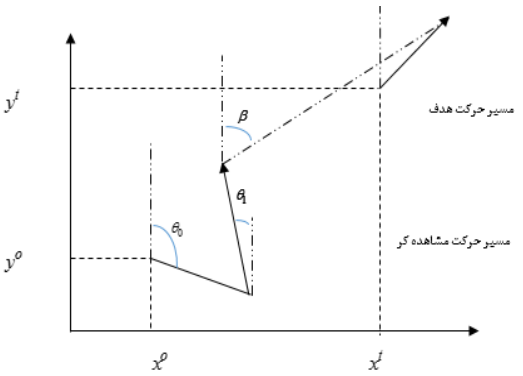
[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.5.0]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.1]

۶- قابلیت کاهش خطای روش پیشنهادی در ابتدا و انتهای مانور ناظر که باعث همگرایی سریع مساله BOT و کاهش خطای تخمین نسبت به سایر روش‌های یک گام به جلوی بهینه‌سازی می‌گردد.

جهت بررسی روش پیشنهادی، عملکرد آن با مهمترین روش‌های بهینه‌سازی غیرمستقیم [۱۲] و مراجع ارائه شده اخیر بهینه‌سازی به روش مستقیم [۱۵] مقایسه می‌شود. در ادامه مقاله در بخش ۲ پس از تعریف هندسه مساله، معیارهای رویت‌پذیری FIM و همگرایی CRLB ارائه می‌شود. پس از ارائه روش پیشنهادی در بخش ۳، عملکرد آن در مقایسه با روش‌های غیرمستقیم و مستقیم در بخش ۴ نشان داده می‌شود. در بخش انتهایی، نتیجه‌گیری و فعالیت‌های آتی پیشنهادات می‌شود. معرفی پارامترهایی که در متن تعریف نشده اند در پیوست الف آمده است.

۲- تعاریف و مدل‌سازی مساله BOT

شکل ۱ هندسه دو بعدی مساله BOT را نشان می‌دهد. متغیرهای استفاده شده در مقاله مطابق شکل ۱ عبارتند از:



شکل ۱: هندسه دوبعدی مساله BOT [۱۳]

مساله عمومی BOT تخمین مسیر حرکت هدف (سرعت و موقعیت هدف) با اندازه‌گیری داده‌های حساسه سمت آغشته به نویز، توسط یک ناظر در حال مانور(حامل حساسه) تعریف می‌شود. در ادامه برای تعریف ریاضی مساله BOT در حالت هدف با سرعت و جهت ثابت (بدون مانور)، از دستگاه مختصات کارتزین استفاده می‌شود. بنابراین مدلسازی هدف و معادلات حالت مساله رهگیری BOT همراه تابع اندازه‌گیری غیرخطی مساله BOT با گسسته‌سازی در لحظه kام به‌صورت روابط ذیل تعریف می‌شود [۵].

بردار حالت هدف با سرعت خطی V_t: $X_k^t = [x_k^t \; y_k^t \; \dot{x}_k^t \; \dot{y}_k^t \;]^T$

بردار حالت ناظر با سرعت خطی V_o: $X_k^o = [x_k^o \; y_k^o \; \dot{x}_k^o \; \dot{y}_k^o]^T$

بردار حرکت نسبی هدف:

$$X_k = X_k^t - X_k^o = [x_k \;\; y_k \; \dot{x}_k \;\; \dot{y}_k \;]^T$$

زاویه سمت واقعی هدف ومقدار اندازه‌گیری آن به‌ترتیب: β_k, z_k

معادلات دینامیکی گسسته فضای حالت هدف، با سرعت ثابت، با فرض نامعلوم بودن شتاب و اعمال آن در مدل به صورت نویز مستقل گوسی به صورت $W_k = \left[w_{x_k}, w_{y_k}\right]^T = [\ddot{x}_k, \ddot{y}_k]^T$ به شرح ذیل می باشد:

$$X_{k+1} = F_k X_k + G_k W_k - U_{k,k+1} \qquad (۱)$$

$$F_k = \nabla_x f(x_k)|_{x_k=\hat{x}_{k-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G_k = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{T^2}{2} \\ T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

$$U_{k-1,k} = \begin{bmatrix} u_{k1} \\ u_{k2} \\ u_{k3} \\ u_{k4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k^o - x_{k-1}^o - T\dot{x}_{k-1}^o \\ y_k^o - y_{k-1}^o - T\dot{y}_{k-1}^o \\ \dot{x}_k^o - \dot{x}_{k-1}^o \\ \dot{y}_k^o - \dot{y}_{k-1}^o \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

ماتریس انتقال حالت مدل در لحظه k برابر F_k است و بردار $U_{k,k+1}$ به طور دقیق با حساسه‌های ناوبری ناظر مانند GPS اندازه‌گیری می‌شود.

همچنین معادلات غیرخطی بردار اندازه‌گیری زمان گسسته z_k با نویز اندازه‌گیری گوسی با میانگین صفر $v_k \sim N(0, R_k^j)$:

مقادیر اولیه نامعلوم و غیرخطی مساله BOT در نمونه برداری اولیه z_0:

$$x_0 = r_0.sin(z_0) \qquad r_0 = \sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2} \qquad (۴)$$

$$y_0 = r_0.cos(z_0)$$

همچنین، معادلات غیرخطی اندازه- گیری سمت هدف به صورت ذیل است:

$$z_k = h(X_k) + v_k = \beta_k + v_k \qquad (۵)$$

$$h(X_k) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \qquad (۶)$$

$$x = r.\sin(z)$$
$$y = r.\cos(z) \qquad (۷)$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

۲-۱ تخمین هدف در مساله BOT

مساله TMA در مختصات کارتزین برای معادلات اندازه‌گیری رابطه (۶) غیرخطی است. بنابراین الگوریتم فیلترهای خطی کارآمد نیست. در این تحقیق در مواقع لزوم از فیلترتوسعه‌یافته کالمن[1] جهت تخمین بردارهای حالت به شرح ذیل استفاده می‌شود.

- پیش‌بینی بردار حالت و ماتریس کواریانس خطا

$$\hat{X}_{k+1|k} = F_k.\hat{X}_{k|k} - U_{k,k+1} \qquad (۸)$$

$$P_{k+1|k} = F_k.P_{k|k}F_k' + Q_k \qquad (۹)$$

- بهره فیلترکالمن توسعه‌یافته

$$G_{k+1} = P_{k+1|k}\widehat{H}_{k+1}'\left[\widehat{H}_{k+1}P_{k+1|k} + \widehat{H}_{k+1}' + \delta_{\beta_{k+1}}^2\right]^{-1} \qquad (۱۰)$$

- محاسبه بردار خطی اندازه‌گیری با استفاده از محاسبات بردار تخمین

$$\widehat{H}_k = \frac{dh(X_k)}{dX}|_{x=\hat{X}_{k+1|k}} = \left[\frac{\hat{y}_{k+1|k}}{\hat{r}^2} \quad -\frac{\hat{x}_{k+1|k}}{\hat{r}^2} \quad 0 \quad 0\right] \qquad (۱۱)$$

- بروزرسانی بردار تخمین و کواریانس خطا

$$\hat{X}_{k+1|k+1} = \hat{X}_{k+1|k} + G_{k+1}\left[z_{k+1} - \hat{\beta}_{k+1|k}\right] \qquad (۱۲)$$

[1] Extended Kalman Filter (EKF)

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.5.0]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.1]

$$P_{k+1|k+1} = \left[I_{4\times4} - G_{k+1}\hat{H}_{k+1}P_{k+1|k}\right] \quad (۱۳)$$

برای عملکرد مناسب EKF در مساله BOT، تنظیم مقادیر اولیه و تطبیق کواریانس تخمین اهمیت دارد. همچنین بهره‌گیری از اطلاعات قبلی[1] فاصله و سرعت هدف مفید است. لذا می‌توان از فیلترهای تطبیقی جهت به‌روزرسانی کواریانس تخمین بهره‌گیری نمود [۱۹]. در این تحقیق از الگوریتم‌های بهینه تطبیقی برای همگرایی سریع کواریانس خطا به دینامیک حرکت هدف استفاده می‌شود.

$$\hat{X}_{0|0} = [\,\bar{r}.sin\,z_0; \bar{r}.cos\,z_0; 0; 0] \quad (۱۴)$$

$$P_{0|0} = \mathrm{diag}[\sigma_r^2; \sigma_r^2; \sigma_s^2; \sigma_s^2] \quad (۱۵)$$

۲-۲ معیار سنجش رویت‌پذیری مسیرحرکت ناظر

استفاده از معادلات شبه‌خطی سنجش رویت‌پذیری در توابع غیرخطی، برای بررسی یکتایی تخمین مرسوم است. لیکن، این روش گزارشی از کیفیت رویت‌پذیری ارائه نمی‌دهد. در عمده مراجع افزایش دترمینان FIM و یا کاهش معکوس آن، معادل دترمینان CRLM که در فیلتر بدون بایاس معادل کمینه کواریانس خطا است، معیارهای مرسوم رویت‌پذیری تخمینگرهای غیرخطی هستند. بنابراین، بیشینه FIM و یا کمینه CRLM، معیارهای بهینه مستقل از پارامترهای تخمینگر برای تشخیص رویت‌پذیری هدف می‌باشد. لذا در این مقاله از این معیار بهره‌گیری شده است. رابطه کلی FIM در یک تخمین بدون بایاس برای بردار Z_kشامل دنباله اندازه‌گیری$\{z_1, \dots, z_k\}$، از چگالی احتمال شرطی بردار اندازه‌گیری به بردار مسیر حالت $P_{Z^k|x_k}(Z^k|x_k)$ تعریف می‌شود [۱۵].

$$FIM = -E\left[\frac{\partial^2 LnP\left(\frac{Z^k}{x_k}\right)}{\partial {x_k}^2}\right] = E\left[\frac{\partial LnP\left(\frac{Z^k}{x_k}\right)}{\partial x_k}\right]^2 \quad (۱۶)$$

ماتریس FIM به روش بازگشتی به صورت زیر محاسبه می‌شود [۱۵].

$$FIM = J_{k+1} = [F_k^{-1}]' J_k F_k^{-1} + \frac{1}{\sigma_\beta^2(k)}[H_{k+1}]'.H_{k+1} \quad (۱۷)$$

رابطه اساسی ذیل در تخمینگرهای بدون بایاس برای CRLM و کواریانس خطای تخمین برقرار است که در تخمین ایده‌ال به تساوی تبدیل می‌گردد [۶].

$$P_{k|k} \triangleq E\left\{\left(\hat{x}_{k|k} - x_k\right)\left(\hat{x}_{k|k} - x_k\right)^T\right\} \geq J_k^{-1} \quad (۱۸)$$

ماتریس کوواریانس خطا یک ماتریس نیمه‌معین مثبت است. فرم درجه دو خطای موقعیت به شکل بیضیگون نمایش داده می‌شود که مقدار آن با مقادیر ویژه ماتریس کورایانس خطا P برابر است و چرخش محورهای خطا با بردارهای ویژه آن معین می‌شود. محدوده خطا برابر است با

$$A_{1\sigma} = \pi\sqrt{\det P} \quad (۱۹)$$

بنابراین، مانور بهینه ناظر، افزایش رویت‌پذیری مسیر حرکت ناظر بر مبنای کاهش ناحیه خطا مطابق با رابطه (۱۸) است. برای یک تخمینگر کارآمد ناحیه عدم قطعیت دو بعدی خطا مطابق رابطه ذیل است که کاهش آن با افزایش FIM میسر می‌گردد.

$$A_{1\sigma} = \frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{FIM}}} \quad (۲۰)$$

۳-۲ انتخاب تابع هزینه بهینه‌سازی مسیر ناظر

اساس بحث بهینه‌سازی مسیر BOT بر مبنای بیشینه FIM با مانور ناظر محقق می‌شود. قاعده مانور ناظر بر اساس هندسه حرکتی مورد علاقه و مطلوب ناظر و هدف تعیین می‌گردد که بایستی موجب افزایش رویت‌پذیری هدف و کاهش ناحیه عدم‌قطعیت به منظور بالابردن دقت تخمین‌گردد. توابع هزینه متعددی برای بهینه‌سازی مسیر معرفی شده‌اند که عمدتا به افزایش رویت‌پذیری مسیر ناظر مرتبط می‌گردد. از موارد مهم می‌توان به ماتریس اطلاعات متقابل[2]، کاهش CRLB، کاهش کواریانس خطای تخمین، افزایش دترمینان FIM و یا افزایش باند پایین دترمینان FIM اشاره نمود. هرچند استفاده از کمینه خطای کواریانس تخمین در برخی از مقالات به‌عنوان یک معیار، به‌طور مستقیم کاهش خطای تخمین را هدف قرار داده است [۷]؛ لیکن این معیار وابسته به تخمینگر بوده و تنها بهینه‌سازی در یک گام جلوتر را هدف قرار می‌دهد. در این تحقیق بیشینه باند پایین دترمینان FIM، به شرح ذیل استفاده می‌شود. لازم به ذکر است این معیار علاوه بر کاهش باند خطای CRLB، نیازی به محاسبات دشوار ماتریس معکوس FIM ندارد و مشابه معیار CRLB عمل می‌کند [۱۲]. همچنین، درکل زمان مانور مسیر بهینه محاسبه می‌شود.

$$W = \left(-\sigma_\beta^2 \int_0^{t_f} \left(\frac{\dot{\beta}}{r^2}\right) \mathrm{d}\tau\right) \quad (۲۱)$$

هرچند مشخصات یک تخمینگر در بهینه‌سازی‌های الگوریتم تخمین موثر است، لیکن در این مقاله مورد بحث نبوده و تنها در شبیه‌سازی‌ها به عنوان مقایسه، مطابق سایر مقالات، بهره‌گیری شده است.

۳ بهینه‌سازی مستقیم مساله BOT به روش چبی‌شف با طرح‌یزی سناریوی دلخواه

با توجه به مدل‌سازی مساله BOT در بخش قبل و تعریف تابع هزینه رویت‌پذیری هدف، معادلات دینامیکی هدف و محدودیت‌های مسیر حرکت ناظر با تعریف ورودی کنترل، مسیر بهینه زمان پیوسته به یک مساله کنترل بهینه مسیر به شکل روابط (۲۲) تعریف می‌گردد.

[1] Priori Knowledge

[2] Mutual Information

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.5.0]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.1]

$$\begin{aligned} &\text{Min W} = \text{Min}\left(-\sigma_{\dot\beta}^2 \int_0^{t_f} \left(\frac{\dot\beta}{r^2}\right) \mathrm{d}\tau\right) \\ &\dot x = \dot r . sin\theta \\ &\dot y = \dot r . cos\theta \\ &S_i(x,u,t) \le 0\,,\ \ \mathrm{i} = 0,1,\dots N \end{aligned} \tag{۲۲}$$

همانطورکه در مقدمه در خصوص پژوهش‌های انجام شده در یافتن مسیر بهینه مساله BOT عنوان شد، روش‌های عددی ارائه شده با فرض معلوم بودن شرایط اولیه (فاصله اولیه هدف) و برای مساله موقعیت‌یابی اهداف ساکن ارائه شده‌اند. هدف این مقاله، یافتن مسیر بهینه منحصر بفرد با فرض نامعلوم بودن شرایط اولیه است که نسبت به اهداف متحرک نیز کارآمد باشد. لذا ورودی کنترل مستقل از پارامترهای مجهول زاویه نسبی مشاهده هدف، کورس ناظر درنظر گرفته شده‌اند.

با توجه به وجود عامل انتگرالی در تابع هزینه طراحی مسیر رویت پذیر بهینه (۲۲)، پیش‌بینی مسیرهای ممکن با پارامتر مجهول فاصله هدف (r) درکل زمان مانور جهت محاسبه کمینه رابطه (۲۲) با ابزارهای حل مستقیم بسیار دشوار و زمان‌بر است. لذا برای حل این مساله، روش بهینه‌سازی چندجمله‌ای‌های متعامد برای مساله BOT پیشنهاد می‌شود. بدین منظور از توابع پایه‌ای قطعه‌ای پیوسته چبی‌شف استفاده می‌گردد. بهینه‌سازی تابع معیار در چند نقطه در طول مسیر مطابق با ابعاد انتخابی پایه‌های متعامد انجام می‌شود. بنابراین بهینه‌سازی در طول زمان مانور به روش مستقیم در زمان شروع مانور امکان‌پذیر شده است. انتخاب پارامترهای ورودی کنترل‌پذیر در پایداری این نوع بهینه‌سازی اهمیت دارد. ویژگی دیگر استفاده از چندجمله‌ای های متعامد، گسسته‌سازی همزمان متغیرهای حالت و کنترل قیود موجود در مساله BOT به‌طور همزمان است. بنابراین معادلات دیفرانسیل و انتگرال‌گیر به یک دسته از قیود جبری تبدیل و به NLPP اضافه می‌شوند. ابتدا فرض می‌کنیم تابع $f(t)$ در فاصله $(-1,1)$ تعریف شده است. مقدار تقریب تابع بر اساس چندجمله‌ای‌های متعامد چبی‌شف $T_n(x)$ به صورت رابطه (۲۳) می‌باشد [۲۰].

$$f(x) = \sum_{r=0}^{N} a_r T_r(x) \tag{۲۳}$$

$$a_r = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N} f(x_j)\, T_r(x_j) \tag{۲۴}$$

$$x_j = cos(\frac{j\pi}{N}), j = 0,1,\dots,N. \tag{۲۵}$$

مطابق تعریف توابع متعامد چبی‌شف داریم:

$$\begin{aligned} &T_{0=1/2}\ \ , T_1 = x \\ &T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\ &T_n = T_n/2, \qquad n = 1,2,\dots. \end{aligned} \tag{۲۶}$$

برای روابط انتگرالی در مساله بهینه‌سازی از تبدیلات ارائه شده در (۲۷) و روابط مشتقی (۲۸) استفاده می‌شود [۲۱].

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} \quad f(x)dx = \sum_{s=0}^{N} \quad b_{Ns} f_s,\ \ s = 1,2,\dots,N \\ &b_{Ns} = \frac{4}{N}\sum_{j=0}^{N/2} \quad \frac{1}{1-4j^2} cos\frac{2j\pi s}{N} \\ &b_{N0} = b_{NN} = \frac{.5}{N^2-1} \end{aligned} \tag{۲۷}$$

$$\begin{aligned} &f' = (x_i) = \sum_{j=0}^{N} \quad d_{ij} f(x), \qquad i = 0,1,\dots N \\ &d_{ij} = \frac{4\theta_j}{N}\sum_{n=0}^{N} \quad \sum_{\substack{l=0 \\ (n+1)odd}}^{n-1} \quad \frac{\theta_n n}{c_l} T_n(x_j) T_l(x_j), \\ &i = 0,1,\dots N \\ &\theta_0 = \theta_N = 1/2,\ \ \theta_j = 1\ \ for\ \ j = 1,2,\dots,N-1 \\ &if\ \ i \ge 1\ \ c_i = 1\ \ \ else\ \ c_i = 1, \end{aligned} \tag{۲۸}$$

براین اساس، حل الگوریتم بهینه‌سازی BOT به شکل ذیل طرح‌ریزی می‌گردد.

گام اول:

- انتخاب ورودی کنترل
- انتخاب زمان مانور t_f
- انتخاب مرتبه چندجمله‌ای چبی‌شف N
- تغییر متغیر $\tau = \frac{T_f}{2}(1+t)$ از $[0, t_f]$ به $[-1,1]$
- انتخاب $\varepsilon_2, \varepsilon_1$ به‌عنوان کران‌های تابع معیار و کران‌های مورد قبول

گام دوم:

- تنظیم اولیه مسیر مورد نظر در پایه‌های چندجمله‌ای که به‌منظور دستیابی به مسیر یکتای بهینه تعادل دو شرط مخالف، بیشینه رویت‌پذیری شامل حرکت متعامد بر مسیر(در جهت افزایش $\dot\beta$) و تقرب به هدف (در جهت کاهش فاصله تا هدف)، مد نظر قرار می‌گیرد. یکی از مزایای روش پیشنهادی امکان کنترل بهینه مسیر درکل زمان مانور است.
- انتخاب زاویه سمت نسبی هدف به عنوان ورودی مانور ناظر جهت استقلال مسیر بهینه به دینامیک مسیر حرکت
- تقریب مشتق توابع چبی‌شف مطابق رابطه (۲۸) برای معادلات دینامیکی حرکت (۱) به شرح ذیل

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{N} \quad d_{ij} x(t_i) = V sin\big(\theta(t_i)\big) \\ &\sum_{j=0}^{N} \quad d_{ij} y(t_i) = V cos\big(\theta(t_i)\big) \\ &\theta_i = \theta(t_i) = \sum_{j=0}^{N} \quad a_j T_j(t_i) \\ &u_i = \theta(t_i) - \beta(t_i) \end{aligned} \tag{۲۹}$$

که در آن N مرتبه چندجمله‌ای چبی‌شف، a_j و d_{ij} به ترتیب از روابط (۲۴) و (۲۸) محاسبه می‌شوند. d_{ij}

تابع هزینه مسیر بهینه با استفاده از روابط (۱) و (۲۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.5.0]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.1]

$$Min\ J_N = F(x_i.c_i)$$
$$J_N = \sum_0^N \quad b_{Ni} L[x(t_i).y(t_i).\theta(t_i).t_i]. \quad t_i \in [-1.1]$$
$$L[x(t_i).y(t_i).\theta(t_i).t_i] = \frac{V sin(\theta(t_i))}{\sqrt[2]{(x(t_i)^2 + y(t_i)^2)^3}} \qquad (۳۰)$$

که b_{Ni} از رابطه (۲۷) جایگزین می‌شود.

گام سوم: حل مساله بهینه‌سازی با شرایط مرزی دلخواه

ممکن است در طول مسیر مساله BOT محدودیت‌های برای پارامترهای ورودی و سینماتیکی ناظر مانند محدودیت در زاویه دید و یا عبور از موانع مدنظر باشد. این محدودیت‌ها نیز به صورت زیر لحاظ می‌شوند.

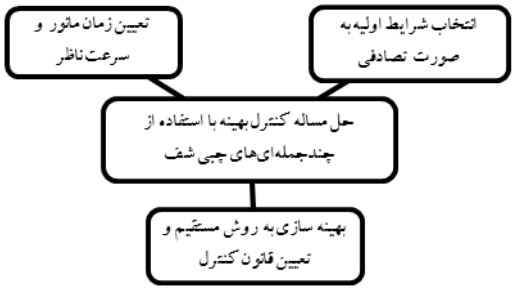
$$Equality\ constrains$$
$$G(x_i, c_i, t_i) = 0\ , \quad i = 0,1,\dots N \qquad (۳۱)$$
$$constrains:$$
$$S(x_i, c_i, t_i) = 0\ , \quad i = 0,1,\dots N$$

گام چهارم: شرط توقف بهینه‌سازی

$$|J_{N+1} - J_N| < \varepsilon_1,$$
$$[\sum(G^2 + S^2)]^{1/2} < \varepsilon_2 \qquad (۳۲)$$

اگر شرایط گام چهارم مهیا نشود، $k = k + 1$ مراحل از گام سوم تکرار می‌گردد.

این بخش از بهینه سازی مسیر به صورت برون‌خط اجرا و قانون کنترل محاسبه می‌گردد. قانون کنترل بر اساس پارامترهای از پیش تعیین‌شده t_f و v_{max}^o در صورت وجود شرایط مرزی و محدودیت‌های مسیر محاسبه می‌گردد. روند تخمین مسیر با تحقق قانون کنترل در شکل ۲ آورده شده است. در بخش بعدی با استفاده از شبیه‌سازی، عملکرد روش بهینه‌سازی پیشنهادی با چندجمله‌ای چبی‌شف برای مساله BOT مقایسه و کارآمدی آن ارائه می‌شود.



شکل ۲: محاسبه قانون کنترل رویتگر مساله BOT

٤ بررسی کارایی روش پیشنهادی در طراحی سناریوهای بهینه در یک مساله کاربردی

در مساله تعیین مسیر رویتگر همواره مصالحه‌ای بین زمان و خطای نهایی رویت‌پذیری وجود دارد. در این مقاله هدف یافتن مسیر بهینه یکتایی است که بدون وابستگی به نامعلوم بودن شرایط اولیه فاصله تا هدف درکوتاهترین زمان ممکن خطای رویت‌پذیری کمینه شود. عمدتا در مقالات در روش‌های تحلیلی [۳] و عددی [۶ و۷] از پارامتر بی‌بعدی به نام نسبت تقرب استفاده شده است که با توجه به حداکثر زمان لازم برای رسیدن رویتگر به هدف در حرکت مستقیم تعریف می‌شود.

$$t_f = \rho\ \frac{\|x^t - x^o \quad y^t - y^o\|}{V_o} \qquad (۳۳)$$

در مراجع اشاره شده با کاهش کواریانس خطا و یا افزایش باند کرامر رائو، متناسب با ضریب ρ به عنوان نسبت زمانی تقرب به هدف، مسیرهای مشابه‌ای را به روش تحلیلی غیرمستقیم و یا عددی (مستقیم) ارائه نموده‌اند. در این مقاله، بهینه‌سازی کل مسیر با رابطه (۲۱) و یافتن مسیر مستقل از فاصله اولیه و یا ضریب تقرب در کمینه زمان ممکن مدنظر است.

۴-۱ تعیین مسیر بهینه با روش پیشنهادی چندجمله‌ای‌های چبی‌شف در مساله کاربردی دریایی

در این بخش کارآمدی روش پیشنهادی در مساله کاربردی BOT در رهگیری اهداف دریایی سطحی بررسی می‌شود. بدین منظور محاسبه مسیر رویت‌پذیر در بازه ۵۰۰ متر الی ۱۵۰۰۰ متر، با سرعت ثابت و بیشینه رویتگر معادل ۱۰ گره دریایی در زمان تقرب ۱۰ تا ۱۰۰ درصد مسیر مستقیم تا رسیدن به هدف انجام پذیرفته است. همچنین بیشینه محدوده دید سونار ۹۰ درجه نسبت به خط دید هدف به عنوان شرایط محدودکننده مطابق رابطه (۳۱) و نرخ نمونه‌برداری حساسه سونار، در هر ثانیه ۱ بار می‌باشد. با بهره‌گیری الگوریتم مدل‌سازی چبی‌شف مرتبه ۴ و استفاده از تابع fmincon نرم‌افزارمتلب جهت محاسبه کمینه تابع هزینه رابطه (۲۲)، پاسخ مشابه‌ای برای تمامی سناریوهای ارائه شده منتج گردید. در مجموع کمینه تابع هزینه بهینه، در مسیری با مانوری معادل ۱۰ درصد کل زمان تقرب مستقیم به هدف قابل دستیابی است. واضح است کمینه زمان تقرب در تخمین پارامترهای هدف علاوه بر رویت‌پذیری مسیر به باند خطای حساسه اندازه‌گیر نیز وابسته است. مطابق نتایج جدول ۱ مشاهده می‌شود مسیر بهینه با تابع کنترلی θ_{NJ} با تقریب مناسبی به فاصله هدف وابسته نمی‌باشد. حساسیت کمینه تابع هزینه بهینه‌سازی (۲۱) نسبت به پارامتر فاصله مطابق رابطه (۳۴) از درجه ۳- است که به پارامتر کنترلی مفروض وابسته نمی‌باشد. بنابراین مسیر بهینه می‌تواند مستقل از فاصله محاسبه شود. اهمیت این موضوع در محاسبه برخط مسیر بهینه می‌باشد. زیرا هرچند مسیر بهینه پیشنهادی مطابق جدول ۱ تقریبا یکتا است، لیکن در برخی موارد با افزودن شرایط محدودکننده رویتگر نیاز به محاسبه مجدد مسیر بهینه مطابق شرایط جدید مسیر است.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.5.0]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.1]

جدول ۱: مقایسه کمینه تابع هزینه و مسیر بهینه برای مساله BOT

برای فواصل ۰/۵ تا ۱۵ کیلومتری فاصله هدف در ۱۰ درصد زمان تقرب با سرعت ۱۰ گره دریایی ناظر با روش بهینه‌سازی چبی‌شف مرتبه ۴

$r(km)$	0.5	1.5	3	4.5	6	7.5	9	10.5	12	15
J_N $\rho = 10\%$	-.1722 *1-e-17	-0.2368 *1-e-18	-0.3702 *1-e-20	-.3251 *1-e-21	-0.5787 *1-e-22	-.1517 *1-e-22	-0.5081 *1-e-23	-0.2015 *1-e-23	-.9044 -*1-e 24	-0.2371 *1-e-24
$)_{Nj}(deg)$	-70.83 -13.00 61.540 88.958 45.711	-72.84 -14.06 60.9178 89.0597 45.1459	-73.36 -14.32 60.7615 89.0910 45.0027	-73.53 -14.41 60.79 89.10 44.95	-73.62 -14.45 60.682 89.107 44.930	-73.67 -4.485 60.667 89.111 44.916	-73.70 -14.50 60.657 89.113 44.906	-73.73 -14.51 60.647 89.115 44.898	-73.75 -14.52 60.64 89.11 44.894	-73.77 -14.53 60.63 89.11 44.88

$$S_r^J = \frac{r}{J}\frac{\delta}{\delta r}\left(\frac{\dot{\beta}}{r^2}\right) = -3 \qquad (۳۴)$$

درمجموع برای تخمین یک هدف، با انتخاب زمان مناسب تقرب (متناسب با خطای حساسه ناظر) می‌توان مسیر بهینه مانور را مستقل از فاصله اولیه مطابق شکل ۲ در ابتدای مانور محاسبه نمود. اهمیت روش پیشنهادی در انتخاب تابع هزینه مستقل از تخمین‌گر و ارائه یک روش بهینه‌سازی در کل زمان مانور با محاسبات کمینه (مطابق با ابعاد بردارهای متعامد) به منظور اعمال شرایط محدودکننده دلخواه می‌باشد. برای اثبات این ادعا در بخش بعد عملکرد مهمترین روش‌های ارائه شده در مقالات با روش پیشنهادی بررسی می‌شود.

۲-۴ مقایسه کارآمدی روش پیشنهادی به روش‌های ارائه شده در حالت هدف ساکن

عموما مقایسه ردیابی‌های مختلف برمبنای شبیه‌سازی‌های مونت کارلو انجام می‌شود. در مراجع مختلف برای ارزیابی عملکردی مساله BOT از توابع مختلفی استفاده شده است. از جمله توابع معیار کارآمدی ردیابی می‌توان به ۱) باند کرامر رائو به عنوان شاخص بیشینه عملکرد ممکن تخمینگر و یا مقایسه کارآمدی مسیر بهینه BOT، ۲) معیار ریشه میانگین مربعات خطای فاصله(RMS[1]) به‌عنوان متوسط خطای مونت کارلو در هر مرحله از تخمین، ۳) معیار کارآمدی[2] η فیلتر برای نمایش نرخ همگرایی تخمین به CRLB، و ۴) معیار ریشه زمانی میانگین متوسط خطا (RTAMS[3]) برای عملکرد زمانی تخمین، نام برد. این معیارها برای مقایسه عملکرد فیلترهای مختلف در حالت شبیه‌سازی نیز استفاده می‌شوند [۱۳].

$$CRLB(RMS_k) = \sqrt{J_k^{-1}(x) + J_k^{-1}(y)} \qquad (۳۵)$$

$$\mathrm{RMS}_k = \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(\hat{x}_k^i - x_k^i\right)^2 + \left(\hat{y}_k^i - y_k^i\right)^2} \qquad (۳۶)$$

$$\eta_k \triangleq (\mathrm{CRLB}(\mathrm{RMS}_k))/(\mathrm{RMS}_k) \times 100\% \qquad (۳۷)$$

$$\mathrm{RTAMS} = \sqrt{\frac{1}{(t_f - t_1)M}\sum_{k=t_1+1}^{t_f}\sum_{i=1}^{M}\left(\hat{x}_k^i - x_k^i\right)^2 + (} \qquad (۳۸)$$

در این بخش برای مقایسه و ارزیابی روش‌پیشنهادی، برخی روش‌های معروف ارائه شده در مراجع معرفی شده است.

تنها روش تحلیلی با تعریف تابع همیلتونین و حل کلاسیک کنترل مسیر بهینه رویت‌پذیر توسط Hammel در مرجع [۱۲] ارائه شده است. با توجه به دشواری حل مسائل کنترل بهینه غیرخطی، در این طراحی جهت امکان‌پذیری حل مساله، مقادیر اولیه معلوم و سمت نسبی مشاهده هدف در زمان نهایی ۹۰ درجه فرض شده است. رابطه کورس بهینه رویتگر و سمت هدف به صورت زیر محاسبه شده است:

$$\theta^{\circ} = 3\beta_f - 2\beta + pi/2 \qquad (۳۹)$$

که سمت نهایی هدف با رابطه غیرخطی ذیل به نسبت زمانی تقرب مسیر مستقیم (ρ) وابسته است.

$$\rho = cos^{1/3}\left[3(\beta_f - \beta_0)\right]\int_{(\beta_0}^{\beta_f}\frac{d\beta}{cos^{4/3}\left[3(\beta_f - \beta)\right]} \qquad (۴۰)$$

از روش‌های متداول طراحی مسیر رویتگر به روش حل مستقیم عددی در مرجع [۶] ارائه شده است. در اینگونه روش‌ها، بهینه‌سازی مسیر برای یک گام جلوتر به روش عددی انجام می‌گیرد. اشکال اساسی این روش عدم تضمین بهینه نتایج نهایی و حجم محاسبات بالا به جهت لزوم تکرار حل مساله بهینه در هرگام است. هرچند در مرجع [۱۵]، رابطه خطی کسری (۴۰) برای $\rho = \%50$ با بهره‌گیری از بسته نرم‌افزاری خاص به روش‌حل عددی شبه‌گوسی استفاده شده است، لیکن در این مرجع ابزار و رابطه جامعی برای طراحی در تمامی مسائل کاربردی ارائه نشده است.

$$\theta^{\circ} = \beta + \frac{\alpha}{2}, \quad if\ (\beta) < \frac{\alpha}{2}$$
$$\theta^{\circ} - \beta_0 = a(\beta - \beta_0) + b + \frac{c}{\beta - \beta_0 + d} \qquad (۴۱)$$
$$a = 1.045, b = 1.47, c = 0.06794, d = -0.04875$$

[1] Root-Mean Square
[2] Efficiency
[3] Root Time Averaged Mean Square

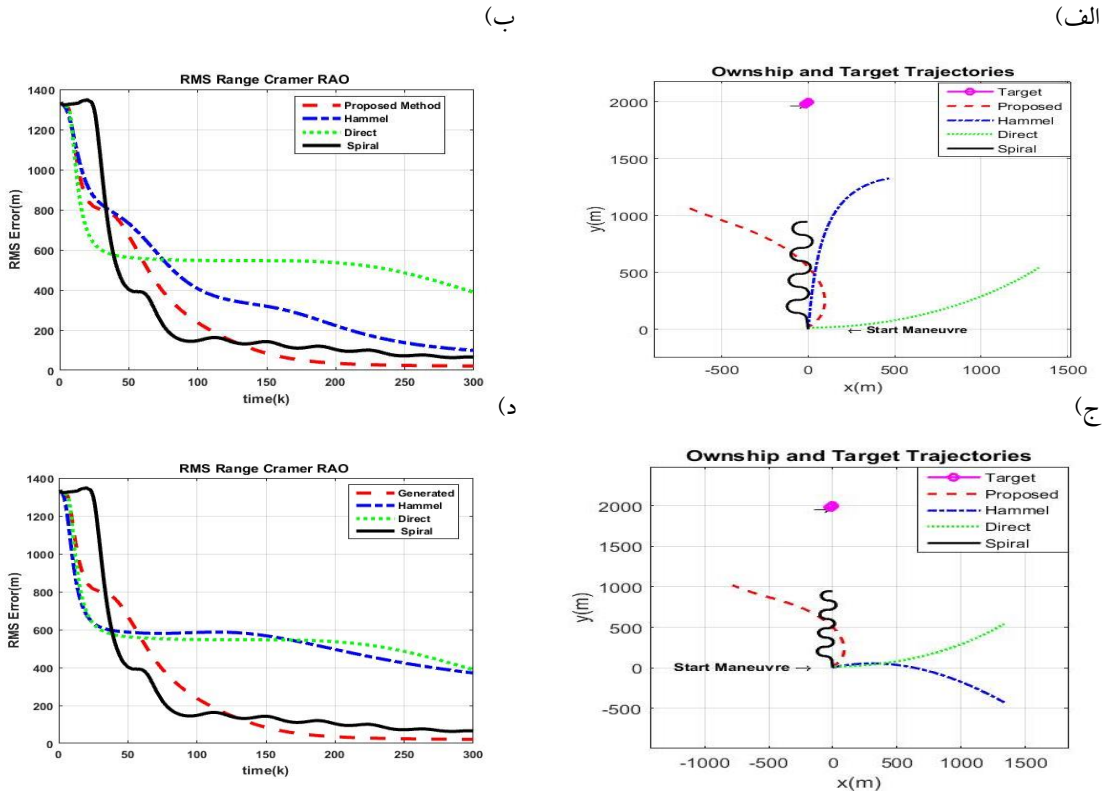
[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.5.0]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.1]

علاوه بر روش‌های فوق، یک مسیر مارپیچ بهینه S شکل (Spiral) در مسیر مستقیم به هدف برای ارزیابی روش پیشنهادی طراحی می‌شود. همانطور که در بخش مقدمه عنوان شد، هدف این مقاله، کاهش هزینه حرکتی در مانور S شکل و طراحی مسیر یکتای بهینه مانور رویتگر در حالت نامعلوم بودن شرایط اولیه تخمین پارامتر فاصله تا هدف است که انعطاف لازم جهت اعمال محدودیت های مانورهای تاکتیکی را داشته باشد. همچنین، روش پیشنهادی با اعمال تابع هزینه در طول مسیر، بایستی بهترین عملکرد را در زمان نهایی نسبت به روش‌های مرسوم دارا باشد. برای همسان‌سازی با محدودیت‌های سایر مانورها، مسیر بهینه پیشنهادی با محدودیت زاویه نسبی دید هدف کمتر از ۹۰ درجه و شرایط نهایی مرزی ۹۰ درجه حل می‌شود. با توجه به اینکه رابطه بین کورس رویتگر و هدف یک رابطه ثابت است، تنها در یک جهت شبیه‌سازی انجام شده است و در این سناریوها سمت هدف صفر درجه نسبت به شمال، سرعت ناظر ۱۰ گره دریایی (۵ متر برثانیه)، خطای حساسه ناظر گوسی و با انحراف معیار ۳ درجه فرض می‌شود. مسیر بهینه و خطای رویت‌پذیری با فرض شرایط اولیه معلوم، برای فاصله ۲ کیلومتر با مانور معادل ۳۰۰ ثانیه در شکل‌های ۳-الف و ۲-ب نشان داده شده است. همچنین، برای بررسی حساسیت روش‌ها به شرایط اولیه، نتایج حل در شرایط نامعلوم در قسمت شکل ۳-ج و ۲-د ارائه شده است. در روش پیشنهادی در شکل ۳-ب و ۳-د از ثانیه ۱۴۰ به بعد خطای رویت‌پذیری به کمتر از ۱۰۰ متر بهبود یافته است. با توجه به اینکه در این روش بهینه‌سازی پیشنهادی در تمام مسیر جهت رسیدن به نتیجه نهایی بهینه مدنظر بوده، در۵۰ درصد نهایی مسیر، باند خطای مطلوبی حاصل می‌شود. همچنین، عدم حساسیت به شرایط اولیه نامعلوم در شکل ۲-ج و ۲-د مشاهده می‌شود. در روش کلاسیک (Hammel)، کنترل مسیر بهینه در شرایط مرزی (انتهای مسیر) به دقت مناسبی همگرا می‌شود، لیکن زمان همگرایی با شرایط معلوم در انتهای زمان رهگیری در شکل ۲-ب و حساسیت بالا به معلوم بودن شرایط اولیه و عدم همگرایی در شکل۲-د نشان ضعف این روش در طراحی مسیر بهینه مساله BOT است. با توجه به اینکه روش مستقیم همواره برای یک گام جلوتر مسیر بهینه محاسبه می‌گردد، در مجموع در زمان نهایی نتیجه مطلوب حاصل نشده است. مانور S که عمدتا در مسائل کاربردی استفاده شده است، با طی تلفات مسیر اضافی توام بوده و البته به دقت مطلوب در بسیاری شرایط منجر نمی‌شود. به منظور بررسی رویتگر بهینه در کاهش خطای تخمین فاصله هدف، از تخمینگرEKF مطابق روابط (۱۲) استفاده شده‌است. نتایج خطای تخمین رویتگرهای بهینه مثال قبل در شکل ۴ آمده است. خطای روش پیشنهادی در انتهای مانور از سایر روش‌ها کمتر است ضمن اینکه مقایسه میزان خطا در شکل ۴ از میزان کاهش خطای کرامررائو در شکل ۳-ب و ۳-د تبعیت می‌کند. برای بررسی جامع نتایج در فواصل خیلی نزدیک ۰/۵ الی ۱۵ کیلومتر، طراحی مسیر بهینه به روش‌های ذکر شده صورت گرفته و خطای تخمین و توابع معیار در زمان نهایی به شرح جدول ۲ محاسبه می‌شوند. نتایج خطای CRLB نشان می‌دهد مسیر بهینه طراحی شده با روش پیشنهادی نسبت به روش‌های دیگر در تمامی حالات کمینه بوده است. کمینه بودن این خطا به‌طور مستقیم در RMS خطای تخمین فاصله موثر است. بدیهی است درصورت بهره‌گیری از تخمینگرهای مناسب، کاهش‌خطا تا باند کرامر رائو امکان بهبود دارد. همچنین کمینه بودن متوسط خطا در طول زمان رهگیری خاصه در بردهای بالا در روش پیشنهادی بهینه است، چراکه در این روش طراحی مسیر بهینه در کل مسیرمد نظر بوده است. هرچند در روش مستقیم در بردهای کوتاه، متوسط زمانی مناسب است، لیکن خطای زمان نهایی از روش پیشنهادی بیشتر است. لازم به ذکر است با توجه به حساسیت روش تحلیلی و مستقیم، پارامتر فاصله اولیه در این دو حالت معلوم فرض شده است.

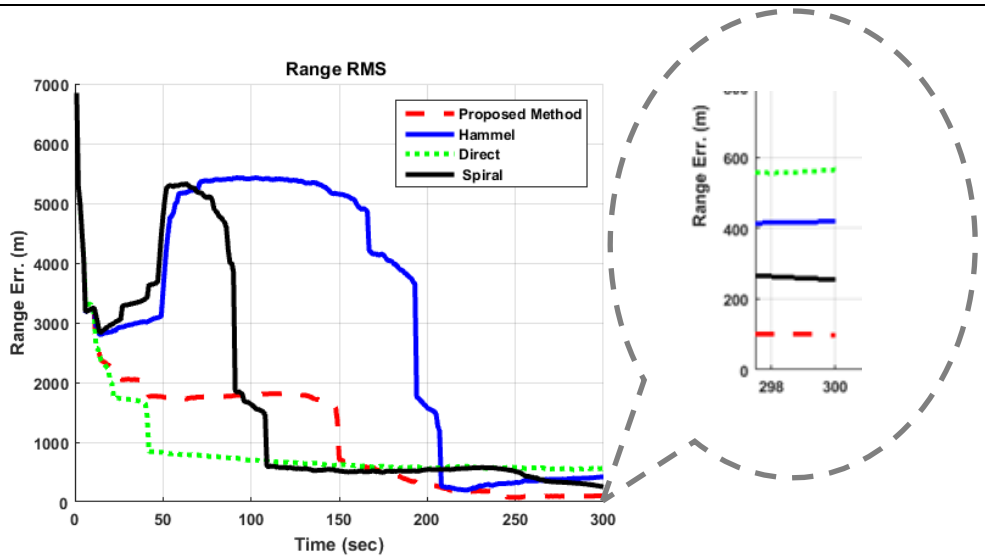
جدول ۲: مقایسه خطای مسیر بهینه (CRLB) ، متوسط خطای تخمین در طول مسیر(RTAMS)، خطای تخمین فاصله در زمان نهاییt_f

Distance\ time	500m/80s			2Km/300s			7km/600s			10km/800s			15km/1000s		
Method	CRLB (m)	RTAMS (m)	RMS (m)	CRLB (m)	RTAMS (m)	RMS (m)	CRLB (m)	RTAMS (m)	RMS (m)	CRLB (m)	RTAMS (m)	RMS (m)	CRLB (m)	RTAMS (m)	RMS (m)
Proposed	6.4	1878	259	18	324	94	146	1164	786	145	1572	236	240	3087	780
Hammel	8.9	2318	482	24	1674	384	655	3248	2811	282	5446	5987	394	9800	10300
Direct	110	941	707	388	403	393	783	3633	3703	760	5453	7317	546	11098	12302
Spiral	7.8	2612	572	65	5569	3210	280	1961	2270	560	1661	3673	1135	8236	7918

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.5.0]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.1]



شکل ۳: شرایط اولیه معلوم الف) مسیر بهینه، ب) خطای رویت‌پذیری- شرایط اولیه نامعلوم، ج) مسیر بهینه، د) خطای رویت‌پذیری



شکل ۴: خطای تخمین فاصله با تخمینگر EKF هدف ساکن (سناریو شکل۳-الف)

۳-۴ بررسی کارآمدی روش پیشنهادی در رهگیری اهداف متحرک

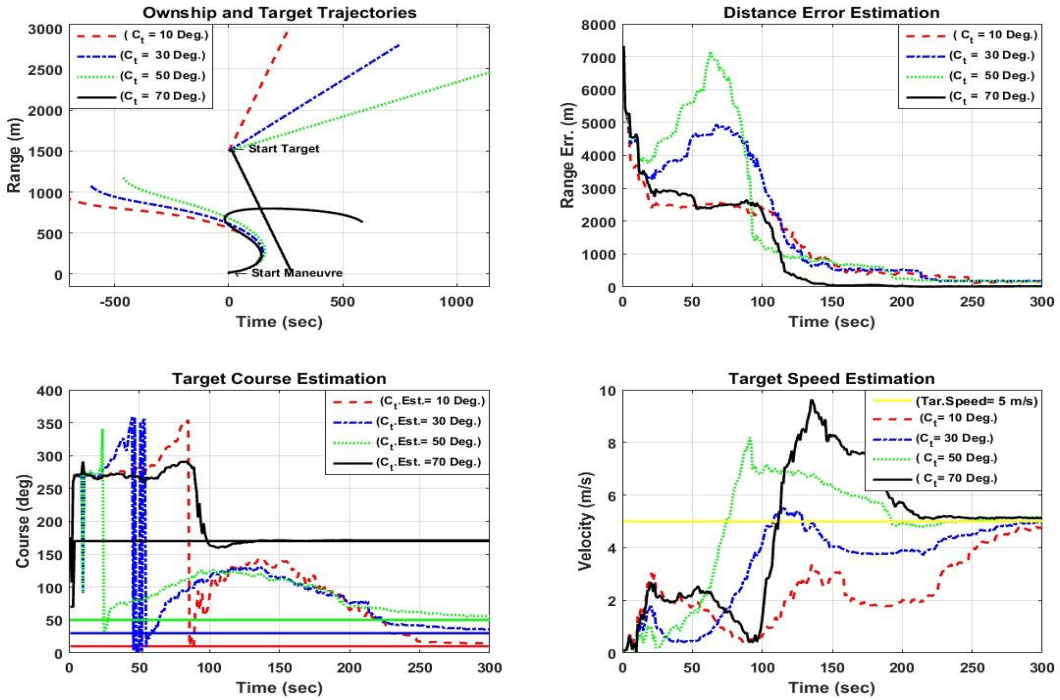
هدف اصلی این مقاله ارائه یک روش مستقل از پارامترهای مجهول رهگیری اهداف متحرک جهت کنترل مسیر بهینه رویتگر است. با توجه به اینکه تنها پارامتر کنترل‌پذیر رویتگر سمت حرکت خود و سمت نسبی دید هدف می باشد، پارامتر سمت نسبی رویتگر را به عنوان پارامتر ورودی درنظر گرفته و رابطه (۲۹) را به شکل ذیل بازنویسی و گام‌های طراحی مجددا اجرا می‌شوند.

$$u_i = \theta(t_i) - \beta(t_i) \qquad (۴۲)$$

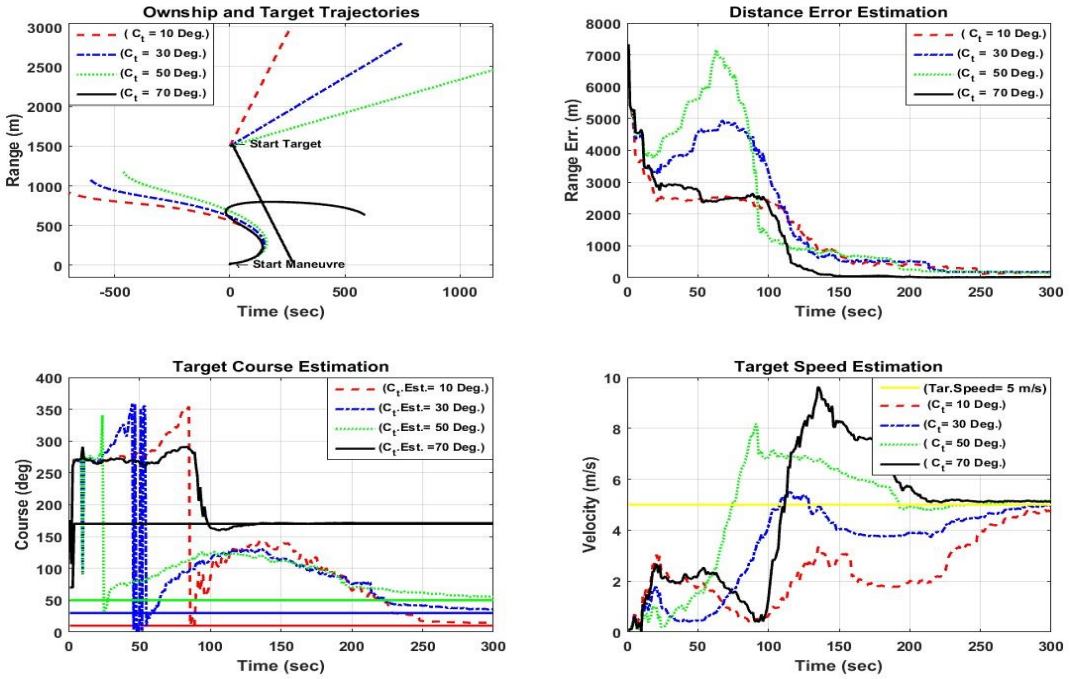
در این بخش برای عمومیت‌بخشی به حالات ممکن، در دو حالت اهداف دورشونده و نزدیک‌شونده شبیه‌سازی مونت کارلو اجرا شده است. کارامدی روش پیشنهادی در ردیابی شناورهای سطحی در فضای دو

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.5.0]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.1]

بعدی با فرض نامعلوم بودن شرایط اولیه هدف، مطابق سناریوهای مندرج در جدول ۳ بررسی شده است. نتایج تخمین مطابق سناریوی جدول ۳ در حالت الف و ب به ترتیب در شکل‌های ۵ و ۶ آمده است. متناسب با نرخ رویت‌پذیری مسیرهدف با کورس حرکتی مسیرهای نزدیک‌شونده خطای فاصله کاهش یافته است. همگرایی تخمین کورس و سرعت هدف به مقدار واقعی از ثانیه ۴۰۰ به بالا در برد بلند در شکل ۵ و برد کوتاه از ثانیه ۱۵۰ در شکل ۶ نشان داده شده است. بدیهی است زمان همگرایی در برد کوتاه در شکل ۶ سریعتر از برد بلند در شکل ۵ است.



شکل ۵: نتایج تخمین هدف برد مطابق سناریوهای جدول ۳-الف



شکل ۶: نتایج تخمین هدف برد مطابق سناریوهای جدول ۳-ب

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.5.0]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.1]

جدول ۳- الف : هدف نزدیک‌شونده در محدوده برد بلند ردیابی اهداف سطحی توسط ناظر زیردریایی

No.	$V_{o\ m/s}$	$\sigma_{deg.}$	$V_{t\ m/s}$	r_{Km}	$C_{t\,deg.}$	$t_{f\ Sec.}$
1	5	3	5	7	110	800
2	5	3	5	7	130	800
3	5	3	5	7	150	800
4	5	3	5	7	170	800

جدول ۳- ب: هدف دورشونده در محدوده برد کوتاه ردیابی اهداف سطحی توسط ناظر زیردریایی

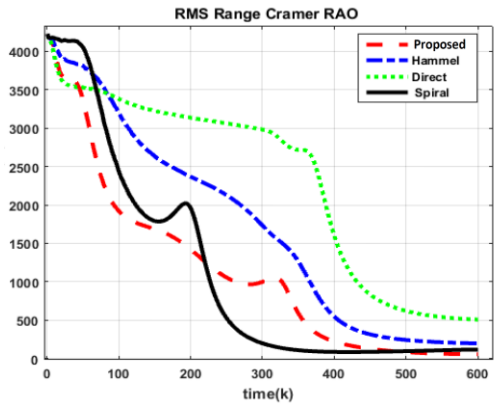
No.	$V_{o\ m/s}$	$\sigma_{deg.}$	$V_{t\ m/s}$	r_{Km}	$C_{t\,deg.}$	$t_{f\ Sec.}$
1	5	3	5	1.5	10	300
2	5	3	5	1.5	30	300
3	5	3	5	1.5	50	300
4	5	3	5	1.5	70	300

۴-۴ طراحی انواع سناریوهای بهینه و در اهداف مانوردار

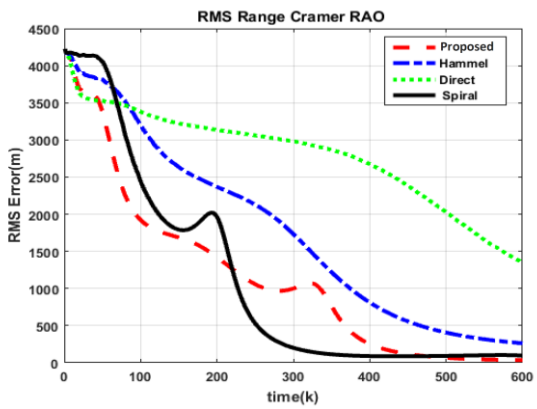
در این بخش به اختصار، روش پیشنهادی در حالت مانور اهداف با یک مثال بررسی می‌شود. طراحی مسیر رویتگر در ۶۰۰ ثانیه مانور ناظر و تخمین هدف با سناریوی حرکتی در برد ۷ کیلومتر مطابق جدول ۳ و با مانور ۹۰ درجه در ثانیه ۳۰۰، ردیابی مطابق شکل ۷ انجام شده است. همانگونه که پیش‌بینی می‌شد مطابق شکل۷-الف و ۷-ب در روش پیشنهادی متناسب با زاویه نسبی دید هدف مسیر رویتگر تغییرات کمی بعد از ثانیه ۳۰۰ داشته است. مقایسه شکل ۷-ج و ۷-د نیز این موضوع را تایید می‌کنند. در روش مستقیم، مانور هدف رویت‌پذیری را در این مثال افزایش داده، لیکن میزان آن از سایر روش‌ها کمتر است. مقایسه خطای تخمین فاصله در شکل ۷-ه و ۷- و نشان می‌دهد مانور باعث افزایش خطای تخمین فاصله شده است. این موضوع به دلیل خطای کواریانس تخمینگر در زمان مانور منتج شده است که بایستی با بهینه‌سازی تخمینگر بهبود یابد که البته موردنظر این تحقیق نمی‌باشد.

شکل۷- الف: مسیر رویتگر هدف با مانور (فاصله 7km)

شکل۷- ب: مسیر رویتگر هدف بدون مانور (فاصله 7km)

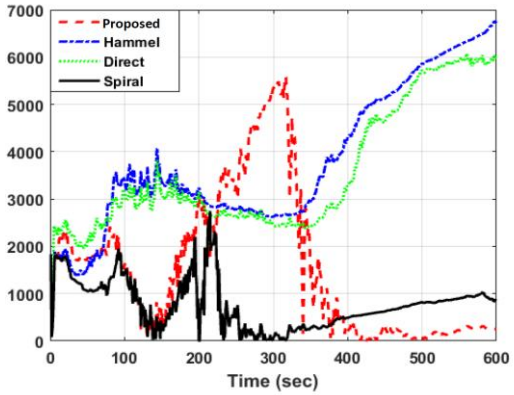


شکل ۷-ج: خطای رویت‌پذیری فاصله هدف با مانور (فاصله 7km)

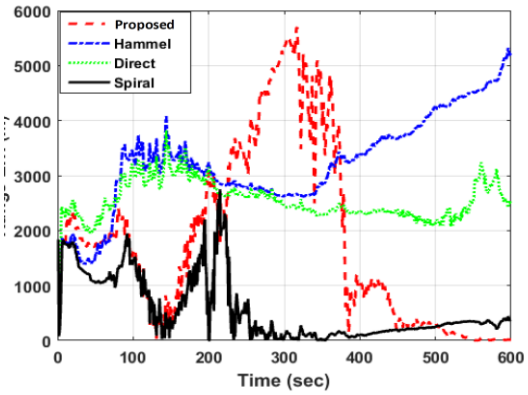


شکل ۷-د: خطای رویت‌پذیری فاصله هدف بدون مانور (فاصله 7km)

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.5.0]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.1]



شکل ۷- ه: خطای تخمین فاصله هدف با مانور (فاصله 7km)



شکل ۷- و: خطای تخمین فاصله هدف بدون مانور (فاصله 7km)

۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این مقاله با روش شبیه‌سازی مونت کارلو نشان داده شد که روش پیشنهادی بهینه‌سازی با چندجمله‌ای‌های چبی‌شف برای طراحی مسیر بهینه رویتگر مساله BOT با یک تابع‌کنترل منحصربه‌فرد و مستقل از پارامترهای نامعلوم اولیه قابل محاسبه است.کارآمدی روش پیشنهادی برای اهداف ساکن و متحرک با مانور ارزیابی شد. بهره‌گیری از دقت بالای روش‌های بهینه‌سازی کلاسیک (روش‌های غیرمستقیم) در مدل‌سازی اولیه بهمراه بهره‌گیری از روش‌های حل مستقیم به‌دلیل پایداری بالا به پارامترهای نامعلوم و افزایش سرعت حل بااستفاده از چندجمله‌ای متعامد (جهت رفع پیچیدگی‌های حل تحلیلی تابع هامیلتونین) مشخصه اصلی این روش است. از دیگر مزایای طراحی مسیر با تعقیب و تقرب دلخواه، در ابتدای شروع مانور است. علاوه‌برآن همگرایی بالا، سرعت و حجم محاسبات پایین (نسبت به سایر روش‌های حل مستقیم) و همچنین استقلال محاسبه مسیر بهینه از پارامترهای نامعلوم اولیه و مرزی در مسائل کاربردی BOT نشان داده شد. هرچند در حالت اندازه‌گیری بدون خطا محاسبه زمان همگرایی قابل محاسبه است، لیکن با وجود خطای حساسه اندازه‌گیر، کمینه زمان در این پژوهش از شبیه‌سازی محاسبه شده است. تحقیقات آتی در این حوزه شامل محاسبه زمان بهینه جهت همگرایی مورد نظر متناسب با خطای حساسه اندازه‌گیر است تا به صورت برخط همگرایی مساله BOT تضمین گردد. همچنین بررسی عملکرد روش پیشنهادی برای اهداف مانوردار و یافتن معیارهای تطبیقی سریع متناسب با توابع معیار رویت‌پذیری برای همگرایی تخمینگرهای اهداف مانوردار مدنظر تحقیقات بعدی می‌باشد.

مراجع:

[1] K. Dogancay, "UAV path planning for passive emitter localization," IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. 48, no. 2, pp. 1150-1166, 2012.

[2] P. I. Reji and V. S. Dharun, "Recursive Multistage Estimator for Bearings only Passive Target Tracking in ESM EW Systems," Indian J. Sci. Technol., vol. 8, no. 26, pp. 1-7, 2015.

[3] B. Omkar Lakshmi Jagan, S. Koteswara Rao, A. Jawahar, and S. B. Karishma, "Passive target tracking using intercept sonar measurements," Indian J. Sci. Technol., vol. 9, no. 12, pp. 10–13, 2016.

[4] Bar-Shalom, Yaakov, X. Rong Li, and Thiagalingam Kirubarajan. Estimation with applications to tracking and navigation: theory algorithms and software. John Wiley & Sons, 2004.

[5] Ristic, Branko, Sanjeev Arulampalam, and Neil Gordon. Beyond the Kalman filter: Particle filters for tracking applications. Artech house, 2004.

[6] Mahler, Ronald PS. Advances in statistical multisource-multitarget information fusion. Artech House, 2014.

[7] S. C. Nardone, A. G. Lindgren, K. A. I. F. Gong, and M. Er, "Fundamental Properties and Performance of Conventional Bearings-Only Target Motion Analysis," IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-29, no. 9, Sep.1984 .

[8] J.-P. Le Cadre, "Discrete-Time Observability and Estimability Analysis for Bearings-Only Target Motion Analysis," IEEE Trans. Aerosp. Elect. Syst. VOL. 33, NO. 1 JANUARY 1997.

[9] K. Gerlach, "Comments on Discrete-Time Observability and Esimability for Bearing-Only Target Motion Analysis," IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., no. 13, pp. 1361-1367, 1998.

[10] J. a. Fawcett, "Effect of course maneuvers on bearings-only range estimation.," IEEE Trans. Acoust., vol. 36, no. 8, pp. 1193-1199, 1988.

[11] P. T. Liu, "An optimum approach in target tracking with bearing measurements," J. Optim. Theory Appl., vol. 56, no. 2, pp. 205-214, 1988.

[12] S. E. Hammel, P. T. Liu, E. J. Hilliard, and K. F. Gong, "Optimal observer motion for localization with bearing measurements," Comput. Math. with Appl., vol. 18, no. 1-3, pp. 171-180, 1989.

[13] Y. Oshman and P. Davidson, "Optimization of observer trajectories for bearings-only target localization," IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. 35, no. 3, pp. 892-902, 1999.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.5.0]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.1]

[14] A.N. Bishop, “Bearing-Only Localization using Geometrically Constrained Optimization,” IEEE Trans. Aeros. Elect. Syst. Vol. 45, Jan. 2009 .

[۱۵] امیر حسین نایبی، ناصر پریز، "تعیین مسیر رویت گر در موقعیت یابی تنها با زاویه سمت با در نظر گرفتن محدودیت میدان دید،" مجله کنترل جلد ۸، بهار ۱۳۹۳و صفحه ۷۱-۵۵ ۲۰۰۸-۸۳۴۵، Journal of Control, Vol. 10, No. 2, Summer 2016 ISSN

[16] J. P. Helferty and D. R. Mudgett, “Optimal observer trajectories for bearings only tracking by minimizing the trace of the Cramer-Rao lowerbound,” Proc. 32nd IEEE Conf. Decis. Control, pp. 936–939, 1993.

[17] J. T. Betts, “Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization,” J. Guid. Control. Dyn., vol. 21, no. 2, pp. 193-207, 1998.

[18] Mezzadri, Francesco, and Emanuele Galligani. "A Chebyshev technique for the solution of optimal control problems with nonlinear programming methods." Math. Comput. Simul. Vol. 121, pp. 95-108, 2016.

[۱۹] مقداد محمدی، حسین قلی زاده نرم، "تطبیق کوواریانس های نویز فیلتر کالمن توسعه یافته در ردیابی هدف از روی سمت به روش بازگشتی," مجله کنترل جلد ۱۰،تابستان ۱۳۹۵، صفحه ۷۲-۵۵ ISSN 2008-8345, Journal of Control, Vol. 10, No. 2, Summer 2016.

[20] Elsayed ME, and M. El-Kady. "Chebyshev finite difference approximation for the boundary value problems." Math. Comput. Simul. vol. 139.2-3, pp. 513-523, 2003.

[21] P. Taylor, “A Chebyshev Finite Difference Method For Solving A Class Of Optimal Control Problems,” Int. J. Comput., no. February 2013, pp. 37-41, 2010.

پیوست الف:

متغیرهای استفاده شده در مقاله به شرح ذیل می‌باشند:

- سرعت نسبی، حدس اولیه با واریانس $\sigma_{\dot{r}}^2$	$\dot{r} = [\dot{x} \quad \dot{y}], \bar{r}$
- فاصله نسبی هدف، تخمین فاصله، حدس اولیه با توزیع واریانس σ_r^2	$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \hat{r}, \ \bar{r}$
- ماتریس انتقال حالت در لحظه k	F_k
- زاویه سمت واقعی و اندازه گیری شده هدف و تخمین آن به ترتیب	$\beta, \ z \ , \ \hat{\beta}$
- نرخ تغییرات سمت هدف	$\dot{\beta}$
- جهت حرکت ناظر (کورس ناظر)	θ
- عدم قطعیت سرعت نسبی هدف درجهت x و y به صورت مستقل با میانگین صفر و کواریانس σ_x^2 و σ_y^2	$\omega = [\omega_x ; \omega_y]$
- ماتریس کواریانس متغیر تصادفی بردار w	$Q = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$
- نویز اندازه‌گیری گوسی $N(0, \delta_\beta^2)$	ν
- بردار تخمین حالت در لحظه k و تنظیم شرایط اولیه	$\hat{X}_{k\|k}, \hat{X}_{0\|0}$
- ماتریس کواریانس خطای تخمین در لحظه k و تنظیم کواریانس اولیه	$P_{k\|k}, \ P_{0\|0}$
- بردار پیش‌بینی تخمین حالت و کواریانس خطا	$\hat{X}_{k+1\|k}, \ P_{k+1\|k}$
- ماتریس اطلاعات فیشر و کرامر رائو	$FIM = J, \ J^{-1}$
- گرادیان بردار اندازه‌گیری به بردار حالت و تخمین آن	$H, \hat{H}$
- زمان نمونه‌برداری، زمان نهایی مانور و نسبت زمان مانور به زمان رسیدن به هدف در مسیر مستقیم	T, t_f, ρ
ترانهاده بردار X	X^T

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.5.0]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.1]