مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۴، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۹، صفحه ۴۵-۳۵

کنترل تعقیب مسیر یک ربات چرخدار در حرکت‌های رو به عقب و رو به جلو

علی کیماسی خلجی[۱]، ابوالفضل یزدانی[۲]

[۱] استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران ، keymasi@khu.ac.ir

[۲] دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران، abolfazlyazdani71@yahoo.com

دریافت: ۱۳۹۷/۰۱/۲۱ ویرایش سوم: ۱۳۹۷/۰۷/۱۳ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۲/۲۵

چکیده: ربات متحرک چرخدار، یکی از مهمترین انواع ربات‌های متحرک می‌باشد. یک دسته از این ربات‌ها سیستم‌های دارای تریلر می‌باشد. مسئله کنترل حرکت این دسته از ربات‌ها مخصوصاً در حرکت رو به عقب، یکی از چالش برانگیزترین مباحث پژوهشی در این حوزه می‌باشد. در این مقاله روشی برای کنترل حرکت یک ربات متحرک دارای تریلر در تعقیب مسیرهای کارتزین ارائه شده است که همزمان توانایی کنترل حرکت رو به عقب و رو به جلو ربات دارای تریلر را برای ما فراهم می‌آورد. برای این منظور، ابتدا معادلات سینماتیکی ربات دارای تریلر استخراج شده و سپس مسیر مرجع مورد نظر برای ربات تعریف می‌گردد. معادلات تعقیب مسیرهای کارتزین علاوه بر معادلات حرکت ربات، بیان‌گر حرکت ربات نسبت به مسیر مرجع نیز می‌باشد. سپس با استفاده از تبدیلاتی معادلات سیستم را در یک فضای جدید بیان نموده و در پی آن، کنترل‌کننده‌ای برای سیستم ارائه گردیده است. قانون کنترلی طراحی شده سیستم را به صورت مجانبی به سمت مسیر مرجع پایدار می‌سازد. در پایان نتایج بدست آمده به عنوان تضمین کنترل‌کننده طراحی شده ارائه گردیده است.

کلمات کلیدی: ربات متحرک چرخدار، پایداری مجانبی، حرکت رو به عقب.

Backward and forward path following control of a wheeled robot

Ali Keymasi Khalaji, Abolfazl Yazdani

Abstract: A wheeled mobile robot is one of the most important types of mobile robots. A subcategory of these robots is wheeled robots towing trailer(s). Motion control problem, especially in backward motion is one of the challenging research topics in this field. In this article, a control algorithm for path-following problem of a tractor-trailer system is provided, which at the same time provides the ability to control the backward and forward motions of the tractor-trailer robot. To this end, first the kinematic equations of a wheeled robot with a trailer is extracted and then reference paths for the robot are defined. Path following equations, in addition to the robot mathematical equations, also represent the robot movement with respect to the reference path. Then, by using transformations the system equations are expressed in a new space and subsequently a control algorithm is proposed for the system. The investigated control law make the system asymptotically stable around the reference path. Finally, obtained results have been presented which guarantee the designed controller.

Keywords: Wheeled mobile robot, Asymptotic stability, Backward motion.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-07-22]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.4.4]

[DOI: 10.29252/joc.14.2.35]

۱- مقدمه

ربات‌های دارای تریلر، ربات‌هایی هستند که معمولاً شامل یک ترکتور فعال می‌باشند و این ترکتور یک واحد با چرخ‌های دیفرانسیلی بوده و تعداد دلخواهی تریلر غیرفعال را جابجا و هدایت می‌کند. در این سیستم‌ها اجزای مستقل سیستم که شامل ترکتور و تریلرها می‌باشد، به وسیله مفاصل دورانی خنثی با هم ارتباط دارند. با توجه به نوع اتصال بین اجزای سیستم که بر روی محور چرخ‌ها یا خارج از آن قرار گیرد، این سیستم‌ها به سه دسته طبقه بندی می‌شود: ۱- ربات‌های دارای تریلر استاندارد[1]، که در آن محل اتصال، بر روی محور چرخ‌های ربات قرار دارند [۱, ۲]. ۲- ربات‌های دارای تریلر غیر استاندارد[2]، که در آن محل اتصال، خارج از محور چرخ‌های ربات می‌باشند[۳]. ۳- ربات‌های دارای تریلر عمومی[3]، که در آن محل اتصال به صورتی ترکیبی، در برخی بر روی محور چرخ‌های واحد قبلی و در برخی دیگر، خارج از محور قرار گرفته اند، [۴].

از مهمترین دلایل اهمیت کنترل حرکت سیستم‌های دارای تریلر، می‌توان به معادلات حرکتی بسیار غیرخطی، وجود محدودیت‌های حرکتی، قرارگیری تریلرها و زیر سیستم‌ها در حالت تکین و بوجود آمدن حالت‌های خاص در آرایش سیستم و زیر سیستم‌های آن مانند پدیده قیچی شدن اشاره نمود، [۵]. از لحاظ کمی، در پژوهش‌های مربوط به ربات‌های دارای تریلر، برخی متخصصان راه‌حل‌های مختلفی برای کنترل این سیستم‌ها ارائه داده‌اند، [۱۱-۶]. پژوهش‌های کمتری در زمینه ربات‌های دارای تریلر با تعداد تریلر دلخواه، ارائه شده است [۱۵-۱۲] (که در آنها قوانین کنترل برای ربات‌های دارای تریلر استاندارد پیشنهاد شده است). یکی از مهمترین ویژگی‌های سینماتیکی در این دسته از ربات‌ها، این است که از نظر دیفرانسیلی مسطح نیستند و در محاسبات کنترلی، با خطی‌سازی فیدبک نمی‌توان آنها را به طور مجانبی پایدار نمود، [۱۶]. با توجه به محدودیت‌های موجود و کاربردهای فراوان این سیستم‌ها به نظر می‌رسد تحولات و پتانسیل‌های پژوهشی زیادی در زمینه کنترل این دسته از ربات‌ها وجود داشته باشد. استفاده از ربات‌های متحرک دارای تریلر از نظر هزینه‌ها نیز در مقایسه با تعدادی واحد مجزای فعال، به صرفه‌تر می‌باشد. این مزایای ربات‌های متحرک دارای تریلر در سال‌های اخیر به تحقیقات زیادی تا رسیدن به نمونه‌های تجاری آن منجر شده است. این سیستم‌ها کاربردهای فراوانی در حوزه حمل و نقل محموله‌های بزرگ، انتقال بار در فرودگاه‌ها و ایستگاه‌های راه آهن و خدمات داخلی در کارگاه‌ها و همچنین کشاورزی دارند، [۱۷]. با توجه به حضور قیدهای غیرهولونومیک در سینماتیک این سیستم‌ها ربات‌های متحرک دارای تریلر به عنوان یک دسته از سیستم‌های غیرهولونومیک در نظر گرفته می‌شوند. برخی از مسائل مهم کنترلی برای این سیستم‌ها، عبارتند از: تعقیب مسیر در فضایی دکارتی [۱۲]، پایدارسازی حول پیکربندی مطلوب [۱۸, ۱۹] و ردیابی مسیرهای زمانی [۲۰, ۲۱]. در تحقیقات قبلی، الگوریتم‌های مختلف کنترلی برای این سیستم‌ها ارائه شده است. از جمله این قوانین می‌توان به کنترل تطبیقی [۲۲, ۲۳]، کنترل مود لغزشی [۲۳] ،روش‌های کنترلی بر اساس عدم وابستگی به مدل سیستم [۲۴, ۲۵] ،کنترل فازی [۲۶] و کنترل سوئیچینگ [۱۸, ۱۹]اشاره نمود. عمده پژوهش‌های انجام شده بر روی حرکت رو به جلوی این دسته از ربات‌ها بوده است. از سوی دیگر، کنترل حرکت رو به عقب ربات‌های متحرک دارای تریلر بسیار دشوارتر است، زیرا این سیستم‌ها در حرکت رو به عقب خود به صورت حلقه باز ناپایدار می‌باشند و در صورت عدم وجود هماهنگی لازم در کنترل سیستم باعث پدیده قیچی‌شدن یا برخورد میان اجزای سیستم رخ می‌دهد، [۲۷].تحقیقات بر روی مشکلات کنترل ربات متحرک با یک یا چند تریلر در حال انجام است، مانند پایدارسازی فیدبک در پیکربندی داده شده، ردیابی مسیر مرجع، پارکینگ موازی، برنامه ریزی حرکت در محیط‌های پیچیده و کنترل آرایش این سیستم‌ها. در برخی پژوهش‌ها اثر قیچی‌شدن در حرکت رو به عقب سیستم مورد توجه قرار گرفته است و برخی از قوانین کنترل فیدبک به منظور متعادل کردن این پدیده ارائه شده است، [۲۸, ۲۹] .

در [۳۰]، یک روش به منظور کنترل یک ربات متحرک دارای تریلر ارائه داده است که می‌تواند مساله ردیابی مسیر ربات را در یک پیکربندی بیان شده، حل کند. در [۶]، یک روش کنترلی برای پایدارسازی حرکت رو به عقب در مسیرهای ساده را برای یک وسیله نقلیه کوچک ساخته شده از یک ترکتور دارای هدایتگر زاویه فرمان و یک تریلر پیشنهاد شده است. یک قانون کنترلی برای پایدارسازی فیدبک از طریق بسط دینامیک سیستم و خطی‌سازی آن برای یک ربات متحرک دارای تریلر در [۳۱] پیشنهاد شده است. در [۳۲] یک کنترل‌کننده فازی بر مبنای مدل‌های فازی گسسته که برای سیستم ربات متحرک دارای تریلر ارائه شده است که در این کنترل‌کننده شرایط پایداری از معیار پایداری لیاپانوف بدست آمده است. برای مساله ردیابی مسیر، یک راه حل عملی در [۳۳] با استفاده از مکانیزم مبتنی بر مکان‌یابی که با آن ربات می‌تواند به آرامی به سمت مسیر حرکت کند، پیشنهاد شده است. یک کنترل فیدبک تطبیقی خطی‌سازی شده‌ی دینامیکی در [۲۲] پیشنهاد گردیده که می‌تواند بر عدم‌قطعیت و اغتشاشات خارجی در طی ردیابی مسیر مرجع غلبه کند. در [۳۴] یک قانون کنترل فیدبک بر اساس تبدیلات زنجیره‌ای برای رفع خطای ردیابی مسیرهای مرجع پیشنهاد شده است. در [۲۳] یک کنترل کننده مود لغزشی تطبیقی برای کنترل ربات متحرک در حضور اغتشاشات و عدم قطعیت‌های خارجی ارائه شده است که پایدارسازی خطاهای ردیابی مسیر مرجع را فراهم می‌آورد. یکی از مسائل مطرح در مورد سیستم‌های دارای تریلر کنترل سیستم برای پارک کردن آن می‌باشد. در [۱۰] روشی به منظور پارک کردن موازی و مستقل این دسته از سیستم‌ها پیشنهاد شده است. در [۳۵]، مکانیزمی ایجاد شده به منظور بهبود عملکرد کنترل یک سیستم دارای تریلر در حرکت رو به عقب ارائه شده است. پژوهش‌های صورت

[1] Standard N-Trailers (SNT)
[2] Non-Standard N-Trailers (NSNT)
[3] General N-Trailers (GNT)

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-07-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.4.4]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.35]

گرفته عمدتاً در زمینه تعقیب مسیرهای حرکت زمانی بوده و مسأله تعقیب مسیرهای کارتزین کمتر مورد توجه قرار گرفته است. همچنین غالباً حرکت‌های رو به جلوی این دسته از ربات‌ها مورد بررسی قرار گرفته است و کنترل هم‌زمان حرکت‌های رو به عقب و رو به جلو در مسئله تعقیب مسیرهای کارتزین در پژوهش‌های انجام پذیرفته تاکنون گزارش نشده است که در این مقاله این موارد مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای کنترل همزمان روبه عقب و روبه جلوی ربات‌های چرخدار در این پژوهش از تغییر متغیرهای زنجیری استفاده شده است و با استخراج معادلات در فضای جدید سینماتیکی، به کنترل سیستم پرداخته شده است. بنابراین دستاوردهای این مقاله عبارتند از:

- مدلسازی سیستم ربات دارای تریلر در دستگاه فرنه نسبت به مسیرهای مرجع در صفحه کارتزین
- ارائه روش کنترلی بر مبنای تغییر متغیرهای زنجیری برای حل مسأله تعقیب مسیر در فضای کارتزین در حرکت رو به جلو و رو به عقب ربات چرخدار دارای تریلر
- تحلیل پایداری روش ارائه شده با تئوری لیاپانوف

در این مقاله کنترل حرکت یک ربات متحرک دارای یک تریلر، در حرکت‌های رو به عقب و رو به جلو مورد بررسی قرار گرفته است. روال کاری بدین ترتیب می‌باشد که در ابتدا برای توصیف حرکت سیستم، معادلات سینماتیکی ربات را در فضای دکارتی استخراج گردیده است. سپس با تبدیلات مناسب ورودی‌های کنترلی سیستم طراحی شده است. با استفاده از تبدیلات مورد نظر، امکان کنترل مناسب سیستم در حرکت‌های رو به جلو و رو به عقب مهیا گردیده است. در ادامه پایداریسیستم حلقه بسته تحلیل گردیده است. نتایج به دست آمده عملکرد مناسب الگوریتم کنترلی طراحی شده را نشان می‌دهد. بدین ترتیب در بخش ۲ مدلسازی ریاضی ربات دارای یک تریلر در تعقیب یک مسیر در فضای کارتزین ارائه شده است. در بخش ۳، به طراحی قانون کنترل فیدبک با استفاده از تبدیلات زنجیره‌ای و انتقال معادلات از فضای دکارتی به فضایی جدید پرداخته شده است و پایداری سیستم حلقه بسته مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. در بخش ۴، نتایج بدست آمده از اعمال الگوریتم کنترلی طراحی شده به سیستم، ارائه و تحلیل گردیده است. در بخش ۵ جمع‌بندی نتایج حاصل از روش پیشنهادی صورت پذیرفته است.

۲- مدلسازی ربات متحرک دارای تریلر و فرمول‌بندی مسأله

یکی از مهمترین ویژگی‌های رباتهای متحرک چرخدار در بحث سینماتیک، وجود قیدهای غیرهولونومیک می‌باشد. به عبارت دیگر فرض می‌شود حرکت ربات صفحه‌ای است و از لغزش چرخ‌های ربات در حرکت رو به جلو و رو به عقب صرف نظر می‌شود. قیود غیرهولونومیک رابطه‌ای میان مختصات تعمیم یافته سیستم و سرعت‌های تعمیم یافته سیستم می‌باشند. از لحاظ مفهومی، این قیود مربوط به عدم لغزش بین چرخ و سطحی است که ربات بر روی آن حرکت می‌کند. حضور قیود غیرهولونومیک یک پدیده مهم در سینماتیک این نوع سیستم‌ها می‌باشد، [۳۶]. رابطه بین سینماتیک کلی ربات و قیود مختلف آن از جمله قیود غیر هولونومیک نسبت به سرعتهای تعمیم یافته سیستم، خطی بوده و می‌توان این رابطه را به صورت زیر بیان نمود:

$$A^T(\xi)\dot{\xi} = 0 \qquad (۱)$$

که در آن $A(\xi)$ ماتریس $n\times m$ می‌باشد که n تعداد قیدهای سیستم و m تعداد مختصات تعمیم یافته سیستم است. با توجه به شکل ۱ وضعیت ربات متحرک نسبت به دستگاه مرجع با بردار $\xi = (x \quad y \quad \theta_0 \quad \theta_1)^T$ نشان داده می‌شود، که در آن (x, y) مختصات نقطه‌ی P_m می‌باشد و θ_0 جهت‌گیری ترکتور و θ_1 جهت‌گیری تریلر نسبت به دستگاه مرجع را نشان می‌دهد. d فاصله بین مفصل روی ترکتور و P_m (نقطه مرجع بر روی تریلر) می‌باشد. برای ربات متحرک چرخدارِ دارای یک تریلر ماتریس قیدی به صورت زیر می‌باشد:

$$A(\xi) = \begin{bmatrix} \sin\theta_0 & -\cos\theta_0 & 0 & -d\cos(\theta_0-\theta_1) \\ \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

برای این ماتریس $A(\xi)$، یک ماتریس $S(\xi)$ وجود دارد که رابطه زیر را ارضا می‌کند:

$$S^T(\xi)A^T(\xi) \qquad (۳)$$

ماتریس $S(\xi)$ برای یک ربات یک تریلر، به صورت رابطه زیر می‌باشد:

$$S(\xi) = \begin{pmatrix} \cos\theta_0\cos(\theta_0-\theta_1) & 0 \\ \sin\theta_0\cos(\theta_0-\theta_1) & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{d}\sin(\theta_0-\theta_1) & 0 \end{pmatrix} \qquad (۴)$$

و بدین ترتیب می‌توان مدل سینماتیکی سیستم را به صورت زیر بیان کرد:

$$\dot{\xi} = S(\xi)\,u \qquad (۵)$$

که در این رابطه، $u = [u_1 \quad u_2]^T$ بردار ورودی‌های سیستم می‌باشد که در آن u_1، ورودی سرعت خطی ترکتور بوده و u_2 ورودی سرعت دورانی ترکتور می‌باشد. برای معرفی ورودی‌های u_1 و u_2 باید با توجه به اینکه ربات به صورت مستقل زاویه فرمان جدا نمی‌گیرد و این زاویه فرمان از طریق اختلاف در سرعت و دوران چرخ‌های محوری ترکتور به وجود می‌آید. با این تعاریف، u_1 به عنوان اولین ورودی کنترلی سینماتیکی سیستم به صورت زیر تعریف می‌گردد:

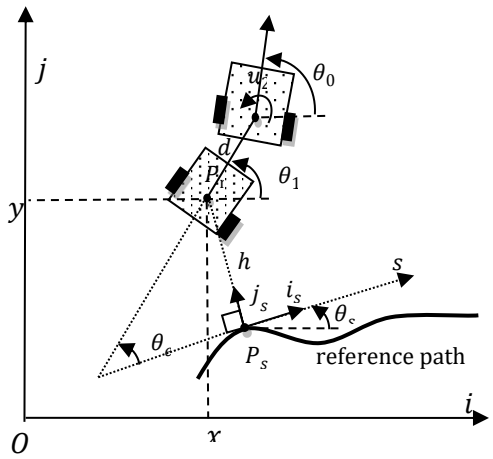
$$u_1 = \frac{r}{2}\left(\dot{\delta}_r + \dot{\delta}_l\right) \qquad (۶)$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-07-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.4.4]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.35]

که در آن زاویه دوران چرخ راست ترکتور δ_r و زاویه دوران چرخ چپ ترکتور δ_l می‌باشد و r شعاع چرخ‌های ترکتور می‌باشد. بنابراین ورودی کنترلی سینماتیکی فرمان نیز به ترتیب زیر به دست می‌آید.

$$u_2 = \frac{r}{b}\left(\dot{\delta}_r - \dot{\delta}_l\right) \qquad (۷)$$

که درآن b فاصله بین چرخ‌های ترکتور یا همان طول محور حرکتی ترکتور می‌باشد. با توجه به شکل ۱ برای توصیف سیستم، ربات مورد نظر یک ربات چرخ‌دار دارای یک تریلر می‌باشد که نحوه دریافت فرمان برای ربات بدین ترتیب است که با ایجاد اختلاف سرعت به اندازه‌ی مناسب، ربات را به زاویه و جهت مطلوب آن می‌رساند. s متغیر مسیر مطلوب ربات و h بیان کننده فاصله تریلر از مسیر مطلوب می‌باشد. همچنین θ_e بیان‌کننده زاویه بین بردار مماس بر مسیر با راستای محور تریلر می‌باشد. وضعیت ربات متحرک دارای تریلر در مسأله تعقیب مسیر با بردار مختصات تعمیم یافته $q = (s \quad h \quad \theta_e \quad x \quad y \quad \theta_0 \quad \theta_1)^T$، نشان داده می‌شود. در شکل 1، ربات دارای تریلر با یک شرایط اولیه دلخواه نسبت به مسیر مرجع مشخص شده است.



شکل ۱: ربات متحرک دارای تریلر و مسیر مرجع

فاصله عمودی نقطه P_m تا مسیر مرجع را h می‌نامیم. هدف از کنترل سیستم آن است که با اعمال ورودی‌های کنترلی ربات را به سمت مسیر مرجع هدایت نمایند تا خطای انحراف ربات از مسیر مطلوب، به صفر میل کند. از آنجایی که طبق رابطه زیر، θ_e پارامتر تعریف کننده زاویه تریلر نسبت مسیر مرجع می‌باشد، می‌توانیم خطای زاویه تریلر نسبت به مسیر مرجع را به صورت زیر بیان کنیم.

$$\theta_e = \theta_1 - \theta_s \qquad (۸)$$

با توجه به تعریف انحنای مسیر C(s) را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$C(s) = \frac{\partial \theta_s}{\partial s} \qquad (۹)$$

برای ساده‌سازی عبارت فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$C(s) = \frac{d\theta_s}{dt}\frac{dt}{ds} \qquad (۱۰)$$

بدین ترتیب نرخ تغییرات زاویه محور تریلر نسبت به مسیر مرجع بر حسب زمان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{\theta}_s = C(s)\dot{s} \qquad (۱۱)$$

با جایگذاری رابطه (۱۱) در مشتق رابطه‌ی (۸) داریم:

$$\dot{\theta}_e = u_2' - C(s)\dot{s} \qquad (۱۲)$$

که در آن $u_2' = \dot{\theta}_1$ ورودی دورانی اعمال شده به تریلر می‌باشد. از معادلات هندسی نیز به راحتی می‌توان رابطه‌ی زیر را نوشت:

$$OP_m = OP_s + P_sP_m \qquad (۱۳)$$

که در آن $P_sP_m = hj_s$. با مشتق‌گیری از بردار مکانی OP_s نیز می‌توان نوشت:

$$\frac{dOP_s}{dt} = \dot{s}j_s \qquad (۱۴)$$

مشتق‌گیری از رابطه (۱۳) با استفاده از رابطه (۱۴) داریم:

$$\frac{\partial OP_m}{\partial t} = \frac{\partial OP_s}{\partial t} + \dot{h}j_s - hC(s)\dot{s}i_s \qquad (۱۵)$$

پس از مشتق گیری و ساده‌سازی جملات خواهیم داشت:

$$\frac{\partial OP_m}{\partial t} = \dot{s}(1 - hC(s))i_s + \dot{h}j_s \qquad (۱۶)$$

از سوی دیگر توجه به سینماتیک ربات متحرک می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial OP_m}{\partial t} = u_1 \cos\theta_e \cos(\theta_0 - \theta_1)\, i_s + u_1 \sin\theta_e \cos(\theta_0 - \theta_1)\, j_s \qquad (۱۷)$$

بدین ترتیب با برابر قرار دادن مولفه‌های روابط (۱۶) و (۱۷) در کنار معادله‌ی (۱۲) روابط بیان کننده $\dot{s}$، $\dot{h}$ و $\dot{\theta}_e$ طبق معادلات زیر به دست می‌آیند که سینماتیک کلی سیستم را بر حسب ورودی‌ها بیان می‌کنند.

$$\begin{cases} \dot{s} = \frac{u_1 \cos(\theta_e)\cos(\theta_0-\theta_1)}{1-h\,C(s)} \\ \dot{h} = u_1 \sin\theta_e \cos(\theta_0 - \theta_1) \\ \dot{\theta}_e = \frac{u_1}{d}\sin(\theta_0 - \theta_1) - \dot{s}\,C(s) \\ \dot{x} = u_1 \cos\theta_0 \cos(\theta_0 - \theta_1) \\ \dot{y} = u_1 \sin\theta_0 \cos(\theta_0 - \theta_1) \\ \dot{\theta}_1 = \frac{u_1}{d}\sin(\theta_0 - \theta_1) \\ \dot{\theta}_0 = u_2 \end{cases} \qquad (۱۸)$$

در این سیستم، u_1 به عنوان ورودی اول، امکان کنترل سرعت خطی ربات را فراهم می‌آورد و u_2 نیز به عنوان دومین ورودی به سیستم، امکان کنترل زاویه دوران و فرمان ربات را فراهم می‌کند و طبق قوانین کنترلی، باید به

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-07-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.4.4]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.35]

گونه عمل شود تا تریلر بتواند به مکان مطلوبش بر روی مسیر مرجع برسد، [۳۷]. برای به دست آوردن $\dot{s}$، $\dot{h}$ و $\dot{\theta}_e$ به ترتیب زیر عمل می‌شود. تفسیر هر کدام از متغیرهای سینماتیکی سیستم در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱: پارامترهای سینماتیکی ربات دارای یک تریلر

پارامتر	توصیف
θ_0	زاویه ترکتور نسبت به افق
θ_1	زاویه تریلر نسبت به افق
θ_e	زاویه تریلر نسبت به محور مماس بر مسیر
h	فاصله تریلر نسبت به مسیر مرجع
s	متغیر مسیر
x	موقعیت افقی محل مرکز خط واصل چرخ‌های تریلر
y	موقعیت عمودی محل مرکز خط واصل چرخ‌های تریلر

۳- طراحی قانون کنترلی تعقیب مسیر مرجع

در این مسئله هدف طراحی قوانین کنترلی لازم به منظور تعقیب مسیرهای مرجع مطلوب در فضای کارتزین می‌باشد. به صورت کلی کنترل حرکت یکی از مسائل مهم در زمینه ربات‌های متحرک می‌باشد. در این مسأله ربات متحرک با شروع از یک شرایط اولیه مشخص به دنبال تعقیب یک مسیر مرجع مطلوب در فضای کارتزین است، که در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است. در صورتی که قانون کنترلی پایدار طراحی شود، ربات متحرک با ورودی‌های اعمالی به آن به سمت مسیر مطلوب همگرا می‌شود، [38]. این موضوع را می‌توان به این صورت تحلیل کرد که در هر لحظه ربات متحرک یک نقطه مشخص از مسیر زمانی را به عنوان نقطه مرجع در نظر می‌گیرد و سرعت خطی و دورانی معینی را برای رسیدن به آن نقطه از مسیر تعیین می‌کند و در لحظات بعد نیز دوباره یک نقطه‌ی دیگر را به عنوان هدف مسیر درنظر می‌گیرد. با توجه به این توضیحات، ورودی های کنترلی سیستم به گونه ای طراحی می‌شوند که خطای تعقیب با گذشت زمان از بین رفته و ربات متحرک به مسیر مرجع میل می‌کند.

برای طراحی مسیر مرجع، ابتدا $x_r = x_r(t)$, $y_r = y_r(t)$ را به عنوان مسیر مطلوب در نظر می‌گیریم، سپس با گرفتن مشتق اول و دوم از این عبارت‌ها، پارامترهای مورد نیاز مسیر مرجع مطلوب که در محاسبات آن استفاده می‌شود را به دست می‌آوریم. نخستین پارامتر مورد نیاز انحنای مسیر است که در معادلات (۱۸) نیز ظاهر شده بود، این پارامتر را برای یک مسیر تابع زمان در صفحه می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$C = \frac{\dot{x}_r\ddot{y}_r - \ddot{y}_r\dot{x}_r}{(\dot{x}_r{}^2 + \dot{y}_r{}^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (۱۹)$$

این پارامتر می‌تواند ثابت یا متغیر با زمان باشد.

برای طراحی قانون کنترلی سیستم ابتدا معادلات سیستم را با استفاده از تبدیلات زنجیره‌ای، به فضای جدیدی انتقال می‌دهیم. برای این منظور سه معادله نخست معادلات (۱۸) را با تبدیلاتی به معادلات (۲۰) انتقال می‌دهیم:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = v_1 \\ \dot{z}_2 = v_1 z_3 \\ \dot{z}_3 = v_2 \end{cases} \qquad (۲۰)$$

بدین منظور با معرفی مناسب z_i ها و v_i ها، سیستم را می‌توان به صورت فوق توصیف کرد. برای رسیدن به قالب زنجیره‌ای، z_1 و در پی آن v_1 را به ترتیب زیر تعریف می‌کنیم:

$$z_1 = s \qquad (۲۱)$$

با مشتق‌گیری از s، v_1 به ترتیب زیر به دست می‌آید:

$$v_1 = \dot{s} = \frac{u_1 \cos\theta_e \cos(\theta_0 - \theta_1)}{1 - hC(s)} \qquad (۲۲)$$

بنابراین رابطه $\dot{z}_1 = v_1$ برقرار است. از روابط (۱۸) که معرف معادلات سینماتیک سیستم است نیز داریم:

$$\dot{h} = u_1 \sin\theta_e \cos(\theta_0 - \theta_1) \qquad (۲۳)$$

برای ساده‌سازی و اینکه بتوانیم $\dot{h}$ را بر حسب v_1 مرتب کنیم رابطه فوق را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\dot{h} = \frac{u_1 \cos(\theta_0 - \theta_1)}{1 - hC(s)}\big(1 - hC(s)\big)\cos\theta_e \tan\theta_e \qquad (۲۴)$$

با جایگذاری از (۲۲) داریم:

$$\dot{h} = v_1\big(1 - hC(s)\big)\tan\theta_e \qquad (۲۵)$$

بنابراین با انتخاب $z_2 = h$ رابطه فوق معادله $\dot{z}_2 = v_1 z_3$ را محقق می‌سازد. حال برای رسیدن به رابطه سوم معادلات زنجیره‌ای، z_3 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$z_3 = \big(1 - hC(s)\big)\tan\theta_e \qquad (۲۶)$$

با مشتق گرفتن از رابطه‌ی فوق، v_2 به صورت رابطه (۲۷) به دست می‌آید.

$$\dot{z}_3 = \left(-\dot{h}C(s) - h\frac{\partial C}{\partial s}\dot{s}\right)\tan\theta_e + \big(1 - hC(s)\big)(1 + \tan^2\theta_e)\dot{\theta}_e = v_2 \qquad (۲۷)$$

بنابراین رابطه سوم معادلات زنجیره‌ای نیز به صورت $\dot{z}_3 = v_2$ برقرار است. برای تعیین ورودی‌های کنترلی اعمالی به سیستم، با توجه به اینکه دو ورودی به منظور کنترل سرعت خطی و همچنین کنترل سرعت دورانی ترکتور برای هدایت تریلر به سمت مسیر مرجع داریم، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم. برای تعیین ورودی کنترلی سرعت خطی ترکتور از رابطه (۲۲) به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$u_1 = \frac{v_1(1 - hC(s))}{\cos\theta_e \cos(\theta_0 - \theta_1)} \qquad (۲۸)$$

در این روش سرعت رو به جلوی ربات را ثابت فرض می‌کنیم. برای کنترل این سیستم از تئوری لیاپانوف استفاده می‌شود و برای این منظور، شرایط زیر را در نظر می‌گیریم (لازم به ذکر است که ارضای این شرایط

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-07-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.4.4]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.35]

برای جلوگیری از قرار گیری سیستم در حالت تکین و رخ دادن پدیده‌هایی همچون پدیده قیچی شدن لازم و ضروری است):

$$|\theta_e| < \frac{\pi}{2} \quad (۲۹)$$

$$|\theta_0 - \theta_1| < \frac{\pi}{2} \quad (۳۰)$$

$$0 < hC(s) < 1 \quad (۳۱)$$

برای تحلیل پایداری سیستم از آنجا که هدف میل کردن متغیرهای h و θ_e به صفر است، بنابراین تابع کاندیدای لیاپانوف را به صورت (۳۲) در نظر می‌گیریم:

$$V = \frac{1}{2}\left(z_2^2 + \frac{1}{k_2} z_3^2\right) \quad (۳۲)$$

با مشتق گرفتن از آن داریم:

$$\dot{V} = z_2 v_1 z_3 + \frac{1}{k_2} z_3 v_2 \quad (۳۳)$$

برای پایدار شدن سیستم به صورت مجانبی، v_2 را به صورت رابطه (۳۴) در نظر می‌گیریم که نحوه انتخاب آن، در ادامه توضیح داده شده است.

$$v_2 = -k_2 z_2 v_1 - k_3 z_3 |v_1| - k_0 |v_1| \int_0^t z_2 v_1 \, dt \quad (۳۴)$$

برای پایدار شدن سیستم باید مشتق تابع کاندیدای لیاپانوف ($\dot{V}$) منفی معین گردد. بدین منظور از اعمال تابع v_2 که به صورت بالا معرفی گردیده، استفاده می‌شود. دو جمله اول v_2 برای منفی معین کردن مشتق تابع کاندیدای لیاپانوف استفاده شده است. با اعمال (۳۴) در (۳۳) خواهیم داشت: $\dot{V} = -\frac{k_3}{k_2}|v_1| z_3^2 - \frac{k_0}{k_2}|v_1| z_3 \int_0^t z_2 v_1 \, dt$ همانگونه که مشاهده می‌شود جمله نخست منفی است و جمله دوم با داشتن انتگرال‌گیر باعث از بین رفتن خطای حالت ماندگار می‌گردد که اثر آن در منفی معین شدن مشتق تابع کاندیدای لیاپانوف نیز در زیر تحلیل گردیده است. جمله دوم در مشتق تابع لیاپانوف را به صورت زیر با جایگذاری از (۲۶) بررسی می‌کنیم:

$$-\frac{k_0}{k_2}|v_1| z_3 \int_0^t z_2 v_1 \, dt \overset{(26)}{\Longrightarrow} -\frac{k_0}{k_2}|v_1|\big(1 - hC(s)\big) \tan\theta_e \int_0^t z_2 v_1 \, dt \quad (۳۵)$$

می‌دانیم که با توجه به فرض (۳۱) داریم:

$$\frac{k_0}{k_2}|v_1|\big(1 - hC(s)\big) > 0 \quad (۳۶)$$

همچنین در رابطه (۳۵) عبارت زیر را داریم:

$$\tan\theta_e \int_0^t z_2 v_1 \, dt \overset{(22)}{\Longrightarrow} \tan\theta_e \int_0^t \left(\frac{u_1 \cos\theta_e \cos(\theta_0 - \theta_1)}{1 - hC(s)} h\right) dt \quad (۳۷)$$

با اعمال شرط‌های (۲۹)، (۳۰) و (۳۱) به عبارت زیر می‌رسیم:

$$\tan\theta_e \int_0^t \left(\frac{u_1 \cos\theta_e \cos(\theta_0 - \theta_1)}{1 - hC(s)} h\right) dt > 0 \quad (۳۸)$$

در نتیجه با توجه به روابط (۳۶) و (۳۸) می‌توان نتیجه گرفت که $-\frac{k_0}{k_2}|v_1| z_3 \int_0^t z_2 v_1 \, dt < 0$ و بدین ترتیب شرط لیاپانوف ارضا می‌شود و پایداری مسئله اثبات می‌شود.

با اثبات پایداری سیستم در فضای زنجیره‌ای حال برای کنترل سیستم ورودی‌های کنترلی فیزیکی باید محاسبه گردند. با داشتن v_2 از رابطه‌ی (۳۴) ورودی کنترلی دورانی سیستم را از رابطه (۲۷) باید محاسبه نمود که به صورت زیر است:

$$v_2 = \left(-\dot{h}C(s) - h\frac{\partial C(s)}{\partial s}\dot{s}\right)\tan\theta_e + \big(1 - hC(s)\big)\big(1 + \tan^2\theta_e\big)\dot{\theta}_e \quad (۳۹)$$

با جایگذاری از (۱۲) در (۳۹) و محاسبه‌ی u_2' داریم:

$$u_2' = \frac{v_2 + \left(\dot{h}C(s) + h\frac{\partial C}{\partial s}\dot{s}\right)\tan\theta_e}{\big(1 - hC(s)\big)\big(1 + \tan^2\theta_e\big)} + C(s)\dot{s} \quad (۴۰)$$

با جایگذاری از (۳۴) خواهیم داشت:

$$u_2' = \frac{-k_2 z_2 v_1 - k_3 z_3 |v_1| - k_0 |v_1| \int_0^t z_2 v_1 \, dt}{\big(1 - hC(s)\big)\big(1 + \tan^2\theta_e\big)} + \frac{\left(\dot{h}C(s) + h\frac{\partial C}{\partial s}\dot{s}\right)\tan\theta_e}{\big(1 - hC(s)\big)\big(1 + \tan^2\theta_e\big)} + C(s)\dot{s} \quad (۴۱)$$

با توجه به آنکه u_2' در رابطه (۴۱) سرعت زاویه‌ای تریلر می‌باشد، اما ورودی کنترلی دوم در سیستم ربات دارای تریلر سرعت زاویه‌ای ترکتور است، با استفاده از رابطه‌ی $\dot{\theta}_1$ در معادلات (۱۸) داریم:

$$u_2' = \frac{u_1}{d}\sin(\theta_0 - \theta_1) \quad (۴۲)$$

با مشتق‌گیری از معادله‌ی (۴۲) داریم:

$$\dot{u}_2' = \frac{\dot{u}_1}{d}\sin(\theta_0 - \theta_1) + \frac{u_1}{d}\left(u_2 - \frac{u_1}{d}\sin(\theta_0 - \theta_1)\right)\cos(\theta_0 - \theta_1) \quad (۴۳)$$

در نتیجه ورودی کنترلی فرمان بر روی ترکتور به ترتیب زیر به دست می‌آید:

$$u_2 = \frac{\left(\dot{u}_2' - \frac{\dot{u}_1}{d}\sin(\theta_0 - \theta_1)\right) d}{u_1 \cos(\theta_0 - \theta_1) + \frac{u_1}{d}\sin(\theta_0 - \theta_1)} \quad (۴۴)$$

بنابراین بدین ترتیب ورودی‌های کنترلی سیستم به دست می‌آیند.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-07-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.4.4]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.35]

٤- نتایج بدست آمده

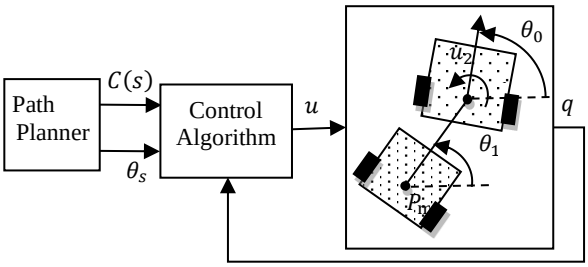
با اعمال ورودی‌های کنترلی طراحی شده و در نظر گرفتن ضرایب کنترلی و پارامترهای هندسی بر اساس جدول ۲، نتایج بدست آمده ارائه می‌شود.

همانگونه که در دیاگرام کنترلی دیده می‌شود، الگوریتم کنترلی پارامترهای مسیر مرجع را در هر لحظه دریافت می‌کند و قوانین کنترلی را تولید نموده و به سیستم اعمال می‌نماید.

جدول ۲ پارامترهای هندسی و کنترلی سیستم

پارامتر	توصیف	مقدار
k_0	بهره کنترلی (رابطه ۳۴)	2
k_2	بهره کنترلی (رابطه ۳۴)	2
k_3	بهره کنترلی (رابطه ۳۴)	2
d	طول محور اتصال میان ترکتور و تریلر (رابطه ۱۸)	$0.15m$
r	شعاع چرخ‌های ربات	$0.03m$
b	فاصله بین چرخ‌های ترکتور	$0.12m$

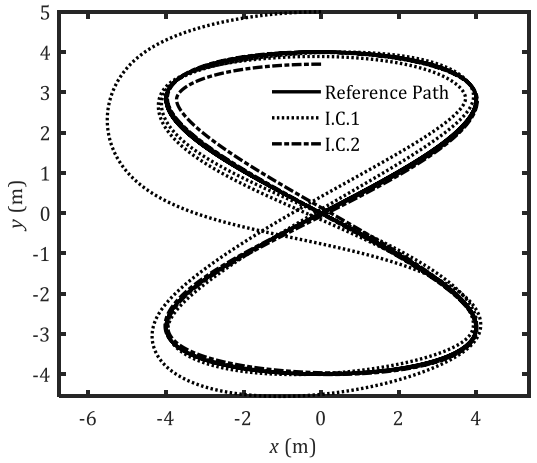
در شکل ۲ دیاگرام کنترلی سیستم نمایش داده شده است.



شکل ۲: دیاگرام کنترلی سیستم

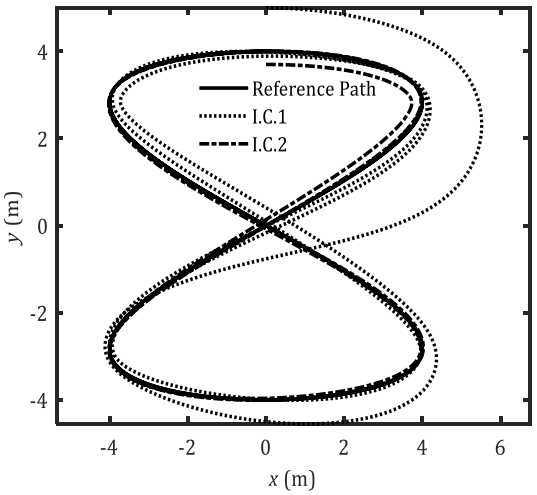
درباره پارامترهای کنترلی لازم است توجه شود که بهره‌های کنترلی به منظور برآورده نمودن پایداری سیستم حلقه بسته مقادیری مثبتی فرض شده‌اند. از طرفی شرایط (۲۹)، (۳۰) و (۳۱) نیز باید برای جلوگیری از قرارگیری ربات در حالت تکین و یا روبرو شدن ربات با پدیده قیچی، در روابط لحاظ شوند. بنابراین برای داشتن هم زمان عملکرد مناسب و ورودی‌های کنترلی معقول، بهره‌های کنترلی با استفاده از روش سعی و خطا و بررسی همزمان عملکرد سیستم حلقه بسته و مقدار ورودی‌های کنترلی انتخاب گردیده‌اند. از آنجایی‌که پایداری مسئله تعقیب مسیرهای حرکت زمانی ربات با اعمال ورودی‌های مناسب اثبات شده است، بنابراین انتظار می‌رود با شروع از شرایط اولیه مختلف و با گذشت زمان محدودی، خطاهای تعقیب مسیر ربات، حول صفر همگرا شده و پاسخ‌های گذرای سیستم از بین رفته و ربات مسیرهای حرکت مرجع را دنبال کند. در شکل ۳ مسیر مرجع ۸ شکل در صفحه کارتزین توسط ربات دارای یک تریلر و با شروع از شرایط اولیه I. C. 1 و I. C. 2 هم از داخل مسیر و هم از خارج آن در حرکت رو به جلو تعقیب می‌شود. شرایط اولیه به صورت زیر انتخاب شده است.

$$I.C.1 = [0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 5 \quad \pi \quad \pi]^T$$
$$I.C.2 = [0 \quad 0.2 \quad 0 \quad 0 \quad 3.8 \quad \pi \quad \pi]^T$$



شکل ۳: مسیر حرکت ربات و مسیر مرجع ۸ شکل در حرکت رو به جلو

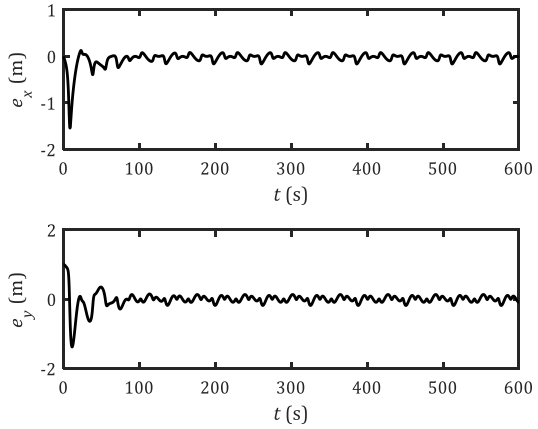
در شکل ۳، همانگونه که ملاحظه می‌شود، تریلر ربات به صورت مجانبی به مسیر مرجع میل می‌کند و با شروع از شرایط اولیه مختلف مسیر مرجع را در حرکت رو به جلو دنبال می‌کند. در شکل ۴ مسیر مرجع 8 شکل در صفحه کارتزین توسط ربات دارای یک تریلر و با شروع از شرایط اولیه I.C.1 و I.C.2 هم از داخل مسیر و هم از خارج آن در حرکت رو به جلو تعقیب می‌شود.



شکل ۴: مسیر حرکت ربات و مسیر مرجع 8 شکل در حرکت رو به عقب

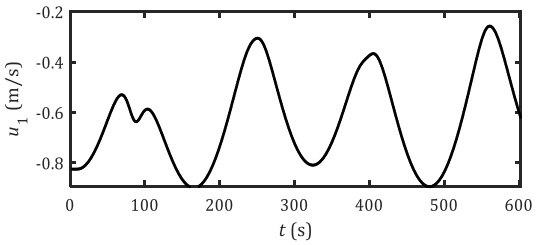
همچنان که ملاحظه می‌شود، تریلر ربات به صورت مجانبی به مسیر مرجع میل می‌کند. در شکل ۵ نمودارهای خطای تعقیب مسیر تریلر برای شرایط اولیه I. C. 1 در حرکت رو به عقب ارائه شده است.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-07-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.4.4]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.35]



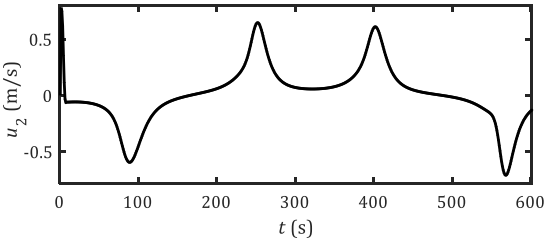
شکل ۵: سیگنال‌های خطای تعقیب مسیر برای شرایط اولیه I. C. 1

همانطور که دیده می‌شود مقادیر خطای سیستم در راستاهای x و y رسم شده‌اند. این نمودارها به صورت کلی بیانگر آن‌اند که مقادیر خطای موقعیتی ربات با گذشت یک زمان محدود از بین رفته و در حاشیه مناسبی از مسیر مرجع قرار گرفته‌اند. در شکل ۶، با اعمال شرایط اولیه I. C. 1 در حرکت رو به عقب، ورودی سینماتیکی اول مورد نیاز سیستم برای پایداری مجانبی سیستم را مشاهده می‌کنیم.



شکل ۶: اولین ورودی کنترلی سینماتیکی برای شرایط اولیه I. C. 1 در حرکت رو به عقب

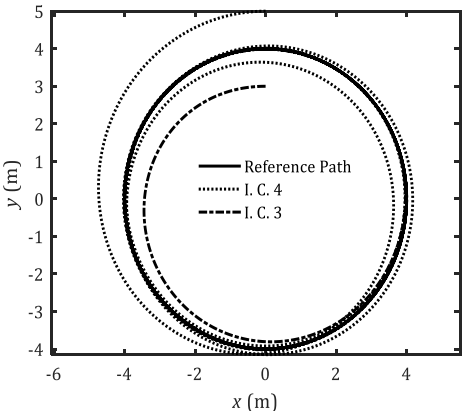
در شکل ۷، با اعمال شرایط اولیه I. C. 1، نمودار ورودی سینماتیکی دوم سیستم برای رساندن آن به مسیر مرجع را مشاهده می‌کنیم.



شکل ۷: ورودی سینماتیکی دوم برای شرایط اولیه I. C. 1 در حرکت رو به عقب

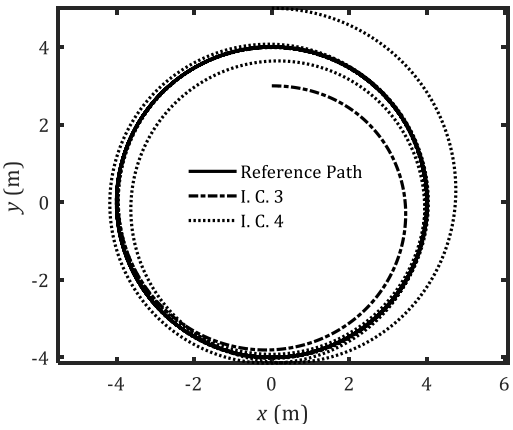
همانطور که در نمودار مشاهده می‌شود، دامنه تغییرات ورودی‌های کنترلی سیستم مناسب می‌باشند. در ورودی‌های کنترلی نوسانات نامناسب دیده نمی‌شود و نمودار آنها هموار می‌باشد. در شکل ۸ مشاهده می‌شود که مسیر مرجع دایره‌ای شکل در صفحه کارتزین توسط ربات دارای یک تریلر با شروع از شرایط اولیه I. C. 3 و I. C. 4 هم از داخل مسیر و هم از خارج آن در حرکت رو به جلو تعقیب می‌شود. شرایط اولیه برای این مسیر مرجع را به ترتیب زیر اعمال می‌کنیم:

$$\mathrm{I.C.3} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad \pi \quad \pi]^{\mathrm{T}}$$
$$\mathrm{I.C.4} = [0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 5 \quad \pi \quad \pi]^{\mathrm{T}}$$



شکل ۸: مسیر حرکت ربات و مسیر مرجع دایره ای در حرکت رو به جلو

همانگونه که ملاحظه می‌شود، تریلر ربات با شروع از شرایط اولیه مختلف در حرکت رو به جلو به صورت مجانبی به مسیر مرجع دایره‌ای میل می‌کند. در شکل ۹ مسیر حرکت تریلر در تعقیب مسیر مرجع دایروی در حرکت رو به عقب با شرایط اولیه مختلف نشان داده شده است.

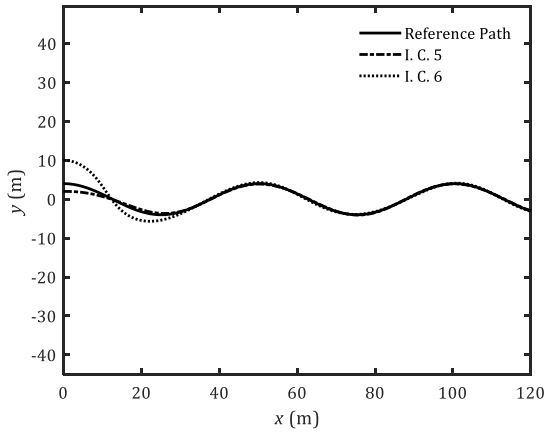


شکل ۹ مسیر حرکت ربات و مسیر مرجع در یک مسیر دایره ای

همانطور که ملاحظه می‌شود با شروع از شرایط اولیه مختلف داخل و بیرون مسیر مرجع، ربات به مسیر مرجع همگرا می‌شود که با تغییر ضرایب کنترلی می‌توان سرعت و دقت تعقیب را به هزینه ورودی‌های کنترلی بالاتر افزایش داد. در شکل ۱۰، مسیر مرجع سینوسی شکل در صفحه کارتزین توسط ربات دارای تریلر با شروع از شرایط اولیه I. C. 5 و I. C. 6 تعقیب شده است. شرایط اولیه برای این مسیر مرجع را به ترتیب زیر اعمال می‌کنیم:

$$\mathrm{I.C.5} = [0 \quad 6 \quad 0 \quad 0 \quad 10 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$$
$$\mathrm{I.C.6} = [0 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-07-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.4.4]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.35]



شکل ۱۰ مسیر حرکت ربات و مسیر مرجع سینوسی در حرکت رو به جلو

در این شکل نیز همچنان که ملاحظه می‌شود، تریلر به صورت مجانبی به مسیر مرجع سینوسی میل می‌کند. لازم به ذکر است با توجه به اینکه مسیر مرجع سینوسی در شکل ۱۰ یک مسیر بسته نیست، لذا در حرکت رو به عقب برای این مسیر، ربات در خلاف جهت مسیر حرکت کرده و با دقت و سرعت بسیار مناسبی به این مسیر می‌رسد و ادامه حرکت سیستم در این حالت به این گونه است که تریلر بر روی مسیر مرجع به صورت رو به عقب به حرکت خود را ادامه می‌دهد.

از نتایج بدست آمده مشخص است که الگوریتم کنترلی در تعقیب مسیرهای مرجع دکارتی در حرکت‌های رو به عقب و رو به جلو به خوبی عمل می‌نماید. ورودی‌های کنترلی هموار بوده و در محدوده مناسبی قرار دارند. همچنین الگوریتم کنترلی پیشنهاد شده دارای این قابلیت است که آن را برای سایر سیستم‌های غیرهولونومیک نیز اعمال نمود.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی برای کنترل تعقیب مسیر در فضای دکارتی برای یک ربات متحرک چرخ‌دار دارای تریلر در حرکت‌های رو به عقب و رو به جلو ارائه شده است. بر مبنای این روش با استفاده از معادلات حرکت در فضای فرنه و با استفاده از تبدیلات زنجیره‌ای، ورودی‌های کنترلی تولید شده و به سیستم اعمال گردیدند. برای تحلیل پایداری سیستم نیز از روش لیاپانوف استفاده شد. ورودی‌های کنترلی سیستم بر مبنای منفی معین ساختن مشتق تابع لیاپانوف به منظور تضمین پایداری سیستم حلقه بسته استخراج گردیدند. نتایج بدست آمده با مسیرهای مختلف نشان دهنده کارآمدی روش ارائه شده برای کنترل تعقیب مسیر در حرکت‌های رو به عقب و رو به جلو در هدایت ربات دارای یک تریلر است. قابلیت تنظیم بهره‌های الگوریتم ارائه شده امکان استخراج پاسخ‌های با سرعت و دقت مناسب را به هزینه ورودی‌های کنترلی مختلف مهیا می‌سازد. با نتایج دریافتی از کارهای انجام شده در این مقاله می‌بینیم که سیستم با ورودی-های کنترلی ارائه شده به خوبی در حرکت‌های رو به عقب و رو به جلو به سمت مسیر مرجع میل می‌کند. همچنین با تعمیم الگوریتم ارائه شده می‌توان سیستم‌های دارای تعداد بیشتری تریلر را کنترل نمود. ورودی‌های کنترلی سیستم نیز بدون نوسانات شدید بوده و مقادیر مناسبی دارند. همچنین الگوریتم کنترلی پیشنهاد شده برای سایر سیستم‌های غیرهولونومیک نیز با تغییراتی اندک قابل تعمیم و بهره‌برداری است.

مراجع

[1] F. Jean, The car with n trailers: characterization of the singular configurations, *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*, Vol. 1, pp. 241-266, 1996.

[2] J.-P. Laumond, Controllability of a multibody mobile robot, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 9, No. 6, pp. 755-763, 1993.

[3] M. Michałek, Application of the VFO method to set-point control for the N-trailer vehicle with off-axle hitching, *International Journal of Control*, Vol. 85, No. 5, pp. 502-521, 2012.

[4] C. Altafini, Some properties of the general n-trailer, *International Journal of Control*, Vol. 74, No. 4, pp. 409-424, 2001.

[5] M. Michałek, Non-minimum-phase property of N-trailer kinematics resulting from off-axle interconnections, *International Journal of Control*, Vol. 86, No. 4, pp. 740-758, 2013.

[6] C. Altafini, A. Speranzon, B. Wahlberg, A feedback control scheme for reversing a truck and trailer vehicle, *IEEE Transactions on robotics and automation*, Vol. 17, No. 6, pp. 915-922, 2001.

[7] A. Astolfi, P. Bolzern, A. Locatelli, Path-tracking of a tractor-trailer vehicle along rectilinear and circular paths: a Lyapunov-based approach, *IEEE transactions on robotics and automation*, Vol. 20, No. 1, pp. 154-160, 2004.

[8] P. Bolzern, R. M. DeSantis, A. Locatelli, D. Masciocchi, Path-tracking for articulated vehicles with off-axle hitching, *IEEE Transactions on control systems technology*, Vol. 6, No. 4, pp. 515-523, 1998.

[9] C. Cariou, R. Lenain, B. Thuilot, P. Martinet, Path following of a vehicle-trailer system in presence of sliding: Application to automatic guidance of a towed agricultural implement, in *Proceeding of*, IEEE, pp. 4976-4981.

[10] F. Cuesta, F. Gómez-Bravo, A. Ollero, Parking maneuvers of industrial-like electrical vehicles with and without trailer, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 51, No. 2, pp. 257-269, 2004.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-07-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.4.4]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.35]

[11] A. Ferrara, L. Magnani, Hybrid variable structure path tracking control of articulated vehicles, IEEE American Control Conference, Boston, USA, pp. 2777-2782, 2004.

[12] P. Morin, C. Samson, Transverse function control of a class of non-invariant driftless systems. Application to vehicles with trailers, in *Proceeding of*, IEEE, pp. 4312-4319.

[13] T. Ren, N. Kwok, C. Sui, D. Wang, J. Luo, W. Su, Controller design of a truck and multiple trailer system, in *Proceeding of*, IEEE, pp. 294-299.

[14] P. Rouchon, M. Fliess, J. Levine, P. Martin, Flatness and motion planning: the car with n trailers, in *Proceeding of*, 1518-1522.

[15] C. Samson, Control of chained systems application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots, *IEEE transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 1, pp. 64-77, 1995.

[16] P. Rouchon, M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, Flatness, motion planning and trailer systems, in *Proceeding of*, IEEE, pp. 2700-2705, 1993.

[17] J. David, P. Manivannan, Control of truck-trailer mobile robots: a survey, *Intelligent Service Robotics*, Vol. 7, No. 4, pp. 245-258, 2014.

[18] A. Keymasi Khalaji, S. A. A. Moosavian, Stabilization of a tractor-trailer wheeled robot, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 30, No. 1, pp. 421-428, 2016.

[19] A. Keymasi Khalaji, S. A. A. Moosavian, Switching Control of a Tractor-Trailer Wheeled Robot, *International Journal of Robotics and Automation*, Vol. 30, No. 2, 2015.

[20] A. Keymasi Khalaji, S. A. A. Moosavian, Dynamic modeling and tracking control of a car with n-trailers, *Multibody System Dynamics*, Vol. 37, No. 2, pp. 211-225, 2016.

[21] A. Khanpoor, A. Keymasi Khalaji, S. A. A. Moosavian, Modeling and control of an underactuated tractor–trailer wheeled mobile robot, *Robotica*, pp. 1-22, 2017.

[22] A. Keymasi Khalaji, S. A. A. Moosavian, Robust adaptive controller for a tractor–trailer mobile robot, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 19, No. 3, pp. 943-953, 2014.

[23] A. Keymasi Khalaji, S. A. A. Moosavian, Adaptive sliding mode control of a wheeled mobile robot towing a trailer, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, Vol. 229, No. 2, pp. 169-183, 2015.

[24] A. Keymasi Khalaji, M. Rahimi Bidgoli, S. A. A. Moosavian, Non-model-based control for a wheeled mobile robot towing two trailers, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, Vol. 229, No. 1, pp. 97-108, 2015.

[25] A. Keymasi Khalaji, S. A. A. Moosavian, Modified transpose Jacobian control of a tractor-trailer wheeled robot, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 29, No. 9, pp. 3961-3969, 2015.

[26] M. Rahimi Bidgol, A. Keymasi Khalaji and S. Ali A. Moosavian, Trajectory tracking control of a wheeled mobile robot by a non-model-based control algorithm using PD-action filtered errors, *Journal of Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 12, pp. 171-178, 2014. (In Persian)

[27] J. L. Martínez, J. Morales, A. Mandow, A. García-Cerezo, Steering limitations for a vehicle pulling passive trailers, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 16, No. 4, pp. 809-818, 2008.

[28] J. Stergiopoulos, S. Manesis, Anti-jackknife state feedback control law for nonholonomic vehicles with trailer sliding mechanism, *International Journal of Systems, Control and Communications*, Vol. 1, No. 3, pp. 297-311, 2009.

[29] L. Chen, Y. Shieh, Jackknife prevention for articulated vehicles using model reference adaptive control, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, Vol. 225, No. 1, pp. 28-42, 2011.

[30] F. Lamiraux, J.-P. Laumond, A practical approach to feedback control for a mobile robot with trailer, in *Proceeding of*, IEEE, pp. 3291-3296.

[31] J. Cheng, Y. Zhang, S. Hou, B. Song, Stabilization control of a backward tractor-trailer mobile robot, IEEE World Congress on Intelligent Control and Automation, pp. 2136-2141, Jinan, China, 2010.

[32] W.-J. Chang, P.-H. Chen, Stabilization for truck-trailer mobile robot system via discrete LPV TS fuzzy models, in: *Intelligent Autonomous Systems 12*, Eds., pp. 209-217: Springer, 2013.

[33] O. Lefebvre, F. Lamiraux, Localization and trajectory following for multi-body wheeled mobile robots, IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 3086-3091, Roma, Italy, 2007.

[34] A. Keymasi Khalaji, S. A. A. Moosavian, M. R. Bidgoli, Trajectory tracking control law for a

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-07-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.4.4]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.35]

tractor-trailer wheeled mobile robot, in *Proceeding of* Second RSI/ISM International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM), pp. 767-772, 2014.

[35] K. Yoo, W. Chung, Pushing motion control of n passive off-hooked trailers by a car-like mobile robot, in *Proceeding of*, IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), pp. 4928-4933.

[36] A. Keymasi Khalaji, Formation control of a differential drive wheeled robot in trajectory tracking, *Journal of Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 11, pp. 103-112, 2017. (In Persian)

[37] A. Khanpoor, A. Keymasi Khalaji and S. Ali A. Moosavian, Dynamics and Control of a Wheeled Mobile Robot Attached by a Trailer with Passive Spherical Wheels, *Journal of Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 8, pp. 216-224, 2015. (In Persian)

[38] A. Keymasi Khalaji and S. Ali A. Moosavian, Non-Model-Based Control Law for a Wheeled Robot Towing a Trailer, *Journal of Control*, Vol. 7, No. 2, pp.1-10, 2013 (In Persian).

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-07-22]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.2.4.4]
[DOI: 10.29252/joc.14.2.35]