

طراحی کنترل کننده تناسبی متغیر با زمان برای دستیابی به سناریوی زمانی مطلوب خروجی

مهديه حسينقلي زاده آلاشتي^۱، جعفر حيراني نوبري^۲

^۱ دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، mah.gholizadeh@gmail.com

^۲ استادیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، nobari@eetd.kntu.ac.ir

پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۲۵

ویرایش دوم: ۱۳۹۷/۱۱/۰۲

ویرایش اول: ۱۳۹۷/۱۰/۰۷

دریافت: ۱۳۹۷/۰۳/۱۱

چکیده: یکی از پرکاربردترین و در عین حال ساده‌ترین کنترل کننده‌ها که همواره جهت دستیابی به عملکرد مناسب سیستم حلقه بسته مورد توجه مهندسين کنترل است، کنترل کننده تناسبی می‌باشد. عملکرد مناسبی که برای یک سیستم در حضور کنترل کننده تعریف می‌شود به بیان‌های مختلفی همچون زمان خیز، زمان نشست و حداکثر بالادگی ارائه می‌شود. اما از نگاه این مقاله عملکرد مناسب سیستم همان مقادیر مشخصی است که خروجی می‌تواند در زمان‌های از پیش تعیین شده‌ای بپذیرد و این است که تعیین می‌کند بهره‌های کنترل کننده‌ی تناسبی در بازه‌های زمانی مختلف چه مقادیری داشته باشند. در حقیقت سناریویی برای خروجی مدنظر قرار می‌گیرد که مقدار خروجی را در چند زمان تعیین می‌کند و این زمان‌ها سازنده‌ی بازه‌های زمانی‌ای هستند که باید بهره‌های متغیر با همین بازه‌ها، بر سیستم اعمال شود. برای اینکه وجود بهره‌ی کنترل کننده‌ی تناسبی برای رسیدن به این هدف تضمین شود، لازم است مقدار خروجی در هر زمان مشخص در محدوده‌ی مجازی انتخاب شود. در مقاله‌ی حاضر این محدوده‌ی مجاز برای انواع حالت‌های پارامتر سیستم و انواع شرایط اولیه بدست آمده است. همچنین بهره کنترل کننده در برخی محدوده‌های مجاز خروجی یکتا نبوده و هر انتخابی از آن ویژگی خاص خود را دارد. با توجه به اینکه در مقاله‌ی حاضر، این کار با فرض شرایط اولیه غیر صفر نیز انجام شده است، می‌توانیم به خوبی بین چند کنترل کننده‌ی تناسبی در چند مرحله سوئیچ کنیم تا روند خروجی در زمان، روند سناریویی از پیش تعیین شده باشد.

کلمات کلیدی: روند رفتار زمانی خروجی سیستم، بهره متناظر مقدار مطلوب خروجی، کنترل کننده تناسبی متغیر با زمان.

Designing of P controller to obtain desired time domain scenario of the output

Mahdieh Hosseingholizadeh Alashti, Jafar Heyrani Nobari

Abstract: One of the most applicable and simple controllers, which always attracts the researcher's attention to obtain a proper closed-loop performance, is the P controller. Proper performance of a system defined in the presence of controller has been proposed with different expressions like rising time, settling time and maximum overshoot. But in the view of this paper, the proper performance of the system is the output's specific value at predefined times and it determines the controller gains at time intervals. In reality, a scenario is considered for the output which defines output's values at several times. These times make time intervals and variable gains in these intervals must be applied to the system. To ensure the existence of the P controller gains for this purpose, the output value must be in an admissible range at any specific time. In this paper, this admissible range is obtained for different cases of a system parameter and initial value. Also, controller gain in some admissible ranges wasn't unique and each choice of it has its specific properties. Since in the present paper, this work is done with initial values, we can properly switch between several P controllers in some phases to achieve a predefined scenario of the output in the time domain.

Key words: scenario of system output in time domain, corresponding gain of desired output value, time variable P controller.

۱- مقدمه

کنترل کننده های PID از معروف ترین کنترل کننده ها در کنترل فرآیندهای صنعتی هستند که در کنترل فرآیند، درایو موتور و کنترل پرواز کاربردهای بسیاری دارند [۱]. البته تعیین بهره های بهینه ی PID بسیار چالش برانگیز است و پژوهشگران بسیاری سعی کرده اند تا الگوریتم یا استراتژی جدیدی برای تعیین بهره های PID ارائه دهند. البته کنترل کننده ی مقاله حاضر تنها تناسبی است ولی می توان ایده ی این مقاله را به کنترل کننده های PD و PID گسترش داد.

روش های تعیین پارامترهای PID به دو دسته روش های کلاسیک و هوشمند تقسیم می شوند. با استفاده از روش های کلاسیک همچون زیگلر-نیکولز [۲] نوسان شدید یا بالازدگی بزرگی در پاسخ سیستم مشاهده می شود. اخیراً روش های هوشمند همچون الگوریتم ژنتیک [۳] و بهینه سازی ازدحام ذرات^۱ برای بهینه سازی PID ارائه شده است. با تأثیر چشم گیر میکروپروسورها بر کنترل کننده های PID، ویژگی های جدیدی از جمله تنظیم خودکار، زمان بندی بهره^۲ [۴] و تطبیق همیشگی [۵] به کنترل کننده های PID افزوده شده است [۶، ۷]. در مبحث کنترل تطبیقی با فرض اینکه تغییراتی در مدل سیستم رخ می دهد، بهره های کنترل کننده تغییر می کند، مانند آنچه در [۸] و [۹] انجام شده است. اما آنچه که در این مقاله به آن پرداخته شده این است که برای یک سیستم مشخص و ثابت، به منظور قرارگرفتن خروجی در مقادیری مشخص در زمان هایی از پیش تعیین شده، ضرایب کنترل کننده برای هر بازه ی زمانی تعیین می شوند.

روش های کلاسیک مانند زیگلر-نیکولز با بررسی پاسخ پله سیستم، سعی در یافتن بهره های مناسب PID دارند [۱۰]. الگوریتم های هوش مصنوعی نیز براساس تابع برازش، سعی در یافتن پارامتر بهینه کنترل کننده ی PID دارند. برخی پژوهشگران با ترکیب PID کلاسیک و فازی توانستند به پاسخ گذرا و ماندگار بهتری دست پیدا کنند [۱۱]. در مقاله حاضر سیستم به صورت کلاسیک و با بررسی پاسخ پله سیستم کنترل می شود ولی بهره های کنترل کننده به روش جدید و به گونه ای تعیین می شوند که در نهایت برای یک سری بازه های زمانی، بهره های مختلفی بدست آمده و به سیستم اعمال می شود.

در کنترل کلاسیک ابتدا پاسخ مطلوب براساس مواردی از جمله حداکثر بالازدگی، زمان نشست، زمان خیز و یا خطای حالت ماندگار تعریف

می شود. اما در مقاله ی حاضر پاسخ مطلوب با مقادیر مشخص خروجی در یک سری لحظات خاص تعریف می شود.

بدین معنی که در تعیین بهره ی تناسبی تنها مسأله ای که مطرح است مقدار نقطه ای خروجی است. این که خروجی در زمان T در مقدار $y(T)$ که طراح تعیین می کند قرار داشته باشد تنها هدفی است که مدنظر قرار می گیرد. لذا فرم خروجی در زمان های بین نقطه ای اصلاً مطرح نیست؛ می تواند بالازدگی، پایین زدگی و هر فرمی داشته باشد. در این کار مسأله ی مهم نگاه نقطه ای به خروجی است. نتایج این مقاله برای سیستم هایی کاربرد دارد که بتوانند با سیستم مرتبه اول تقریب زده شوند و با توجه به اینکه برای سیستم های مرتبه اول تنها با یک بهره ی تناسبی می توان به اهداف موردنظر دست یافت و نیازی به کنترل کننده ی PD، PI یا PID نیست، در مقاله ی حاضر کنترل کننده، تناسبی در نظر گرفته شده است و نشان داده می شود که همین بهره برای تأمین اهداف موردنظر کفایت می کند. لذا در ادامه ی مقاله، برای سیستم مرتبه اول، هم بدون شرایط اولیه و هم با شرایط اولیه، با فرض زمان مشخص T ، نمودارهای خروجی برحسب بهره ی کنترل کننده ی تناسبی رسم شده است تا محدوده ای که اگر $y(T)$ در آن انتخاب شود حتماً بهره های کنترل کننده تناسبی وجود دارند بدست آید. در حقیقت با انتخاب درست $y(T)$ طبق نمودارها، بهره های کنترل کننده تناسبی حتماً بدست می آیند (وجود بهره). در برخی محدوده ها بهره یکتا نبوده و هر کدام از آن ها تأثیر خاصی روی سیستم حلقه بسته خواهند داشت (یکتایی بهره). در نهایت برای هر حالت مثالی آورده شده که بهره های با استفاده از توابعی در MATLAB بدست آمده است و سپس سیمولینک سیستم حلقه بسته اجرا شده است و نمودار خروجی نیز نشان داده شده است. همه ی این مثال ها تأییدی بر صحت این نکته هستند که انتخاب درست $y(T)$ حتماً ما را به بهره کنترل کننده تناسبی مناسب می رساند.

این مطالب، در دو بخش ۲ و ۳ ارائه شدند که هر کدام شامل دو زیر بخش نیز هستند. بخش ۲ برای حالتی است که مقدار اولیه خروجی صفر است و در بخش ۳ مقدار اولیه ی خروجی غیر صفر لحاظ شده است. دو زیربخش نیز برای هر کدام به ازای پارامتر a مثبت و پارامتر a منفی تعریف شده اند. در نهایت نکته ای راجع به تحمیل شدن سناریو بر خروجی بیان شده است و پس از شرح گام های تعیین بهره کنترل کننده تناسبی و نتیجه ی مقاله، در پیوست های الف تا ی اثبات قسمت هایی از مقاله آورده شده است تا در صورت نیاز، خواننده به آن مراجعه کرده و بدنه ی مقاله افزایش نیابد.

² Gain Scheduling

Journal of Control, Vol. 14, No. 3, Fall 2020

¹ Particle Swarm Optimization (PSO)

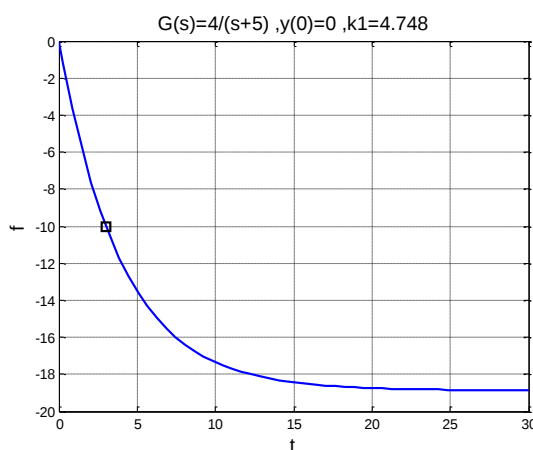
مجله کنترل، جلد ۱۴، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۹

با توجه به اکیداً صعودی بودن هر دو تابع $\frac{k_1}{a+k_1}$ و $(1 - e^{-(a+k_1)T})$ ، حاصل ضرب دو تابع یعنی تابع f نیز اکیداً صعودی است. توجه دارید که در نقطه $(-a, -aT)$ تابع f تعریف نشده است و هیچ گاه نباید انتظار داشت در زمان T به مقدار $-aT$ رسید. برای رسم تابع f دانستن نقاط اکسترم آن لازم است یعنی مشخص شود به ازای چه k_1 هایی مشتق تابع f صفر است و در آن جا تغییر علامت نیز می دهد. با توجه به روابطی که در پیوست الف ارائه شده است، اثبات می شود که مشتق تابع f هیچ گاه صفر نمی شود و منحنی f هیچ نقطه اکسترمی ندارد و به صورت شکل ۱ خواهد بود.

قاعده ۱: در یک سیستم مرتبه اول با مقدار اولیه صفر خروجی و با استفاده از کنترل کننده تناسبی، به ازای $a > 0$ در یک T خاص می توان به هر مقدار کمتر از واحدی به غیر از مقدار $-Ta$ برای خروجی یا $f(k_1)$ رسید و k_1 بدست آمده یکتاست.

دلیل: برد تابع $f(k_1)$ برابر $(-\infty, 1)$ به غیر از $-Ta$ است و تابع کاملاً یکنواست (مطابق با شکل ۱).

تبصره ۱-۱: k_1 متناظر باید از حل رابطه ی غیرخطی (۱) بدست آید و می توان از تابع f solve نرم افزار MATLAB بدین منظور بهره برد. البته با انتخاب مقداری کوچک برای پارامتر $Tolfun$ یا خطای مجاز پاسخ، پاسخ تقریبی عددی تا حد زیادی دقیقاً همان پاسخ مطلوب است. نکته ۱-۱: تنها نکته ای که در استفاده از تابع f solve مطرح می شود انتخاب حدس اولیه مناسب برای k_1 است که با توجه به شکل ۱، به راحتی مقداری مثبت یا منفی به عنوان حدس اولیه در نظر گرفته می شود، البته با توجه همزمان به اینکه مقدار خروجی در یک زمان خاص، در محدوده ی جواب رابطه ی غیرخطی (۱) یعنی مطابق شکل ۱ انتخاب شده باشد.



شکل ۲- نمودار خروجی مثال ۱

۲- سیستم مرتبه اول، کنترل کننده تناسبی و مقدار اولیه صفر خروجی

در این مقاله سیستم مرتبه اولی به صورت $G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b}{s+a}$ و کنترل کننده ی تناسبی با بهره ی k در نظر گرفته می شود. ورودی مرجع پله و مقدار اولیه خروجی نیز صفر فرض شده است. رابطه ی زمانی خروجی با فرض $k_1 = bk$ به صورت زیر خواهد بود.

$$y(t) = \frac{k_1}{a+k_1} (1 - e^{-(a+k_1)t}) \quad (۱)$$

برای رسیدن به پاسخ این سوال که آیا برای هر انتخابی از t و $y(t)$ می توان حتماً به k ای دست یافت و آیا این k منحصر به فرد است یا خیر، لازم است زمان را مقدار ثابت و مثبت T در نظر بگیریم و رابطه ی (۱) را برحسب k_1 رسم کنیم. تابع جدید که تنها متغیر آن k_1 است را f می نامیم. یعنی:

$$f(k_1) = y(T)$$

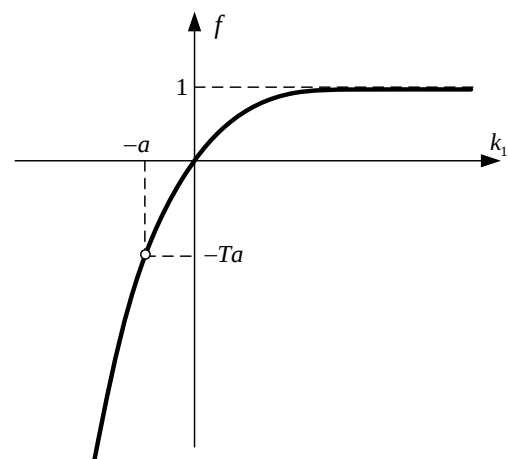
با این مفروضات و به ازای علامت های مختلف a بررسی دو حالت در این بخش ارائه می گردد.

۲-۱- پارامتر a مثبت باشد

به جهت اینکه رسم خروجی برحسب k_1 مدنظر است، لازم است به ازای چند مقدار مهم k_1 ، مقدار خروجی بدست آید، لذا:

$$\begin{aligned} k_1 = 0 &\Rightarrow f = 0 \\ k_1 \rightarrow +\infty &\Rightarrow f \rightarrow 1 \\ k_1 \rightarrow -\infty &\Rightarrow f \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (۲)$$

$$k_1 = -a \Rightarrow f = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hopital}} f = \frac{1 - e^{-(a+k_1)T} + Tk_1 e^{-(a+k_1)T}}{1} \rightarrow f = -aT$$



شکل ۱- نمودار خروجی سیستم مرتبه اول با کنترل کننده تناسبی به ازای $y(0) = 0$ و $a > 0$

قاعده ۲: در یک سیستم مرتبه اول با مقدار اولیه صفر و با استفاده از کنترل کننده تناسبی، به ازای $a < 0$ در یک T خاص به هر مقدار کمتر از واحدی برای خروجی با $f(k_1)$ می توان دست یافت که k_1 آن یکتا است و مقادیر بیشتر از یک آن محدود بوده و k_1 آن یکتا نیست و به مقدار $-Ta$ نیز نمی توان رسید.

دلیل: برد تابع $f(k_1)$ از منفی بی نهایت تا مقداری بزرگتر از واحد است (مطابق شکل ۳).

تبصره ۱-۲: در صورت لزوم، برای بدست آوردن حداکثر مقدار بزرگتر از واحد نیز کافی است پاسخ غیر از پاسخ بدیهی $k_1 = -a$ را با حل معادله ی غیر خطی (۶) بدست آورد.

تبصره ۲-۲: در صورتی که $-aT = 2$ باشد به مقادیر بیشتر از ۲ نمی توان رسید.

نکته ۱-۲: توجه دارید که در مقایسه با بخش ۱ علامت پارامتر a چقدر در محدوده ی خروجی تأثیر گذار بوده و مرز پایداری و ناپایداری سیستم حلقه بسته جابجا شده است.

مثال ۲- با فرض $G(s) = \frac{5}{s-4}$ و مقدار اولیه صفر خروجی؛ بهره k_1 کنترل کننده تناسبی چند باشد تا خروجی در ثانیه ۰.۵ در مقدار ۱.۹۹ باشد.

پاسخ: در این حالت $-Ta = 2$ است. لذا براساس شکل ۳ می توان حداکثر به مقدار ۲ رسید. همچنین مقدار ۱.۹۹ می تواند به ازای دو مقدار از بهره بدست آید. یکی از آن ها پاسخ پایدار دارد و دیگری ناپایدار. با توجه به مقدار $a = 4$ - که در مرز قرار گرفته یکبار حدس اولیه بهره ۴.۱ انتخاب شد. بدین ترتیب f solve بهره ۴.۵۲۲ را بدست آورد که خروجی پایدار شد. بار دیگر حدس اولیه ۳.۵ انتخاب شد و f solve مقدار بهره را ۳.۵۳۸ بدست آورد که خروجی ناپایدار شد. این نتایج در شکل ۴ نشان داده شده است. توجه داشتید که با دانستن نمودار خروجی با دقت و دوراندیشی حدس اولیه بهره انتخاب شد و هدف مورد نظر بدست آمد.

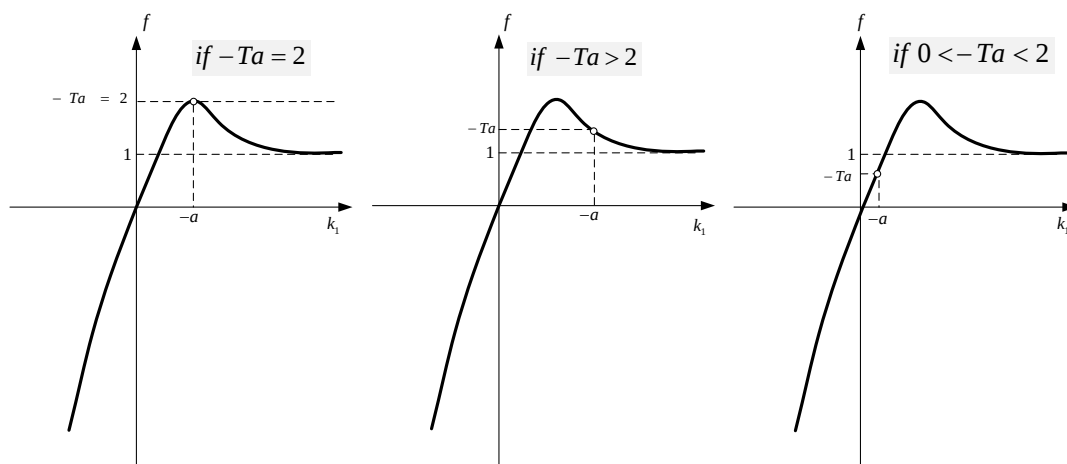
نکته ۱-۲: نکته جالب توجه دیگر در مورد شکل ۱ این است که نقطه ناپوستگی نمودار یعنی $(-a, -Ta)$ دقیقاً در مرز پایداری و ناپایداری سیستم حلقه بسته رخ داده است و اگر در نهایت سیستم حلقه بسته ی پایدار مدنظر باشد، مقادیر $k > -a$ به ازای پارامتر b مثبت و مقادیر $k < -a$ به ازای پارامتر b منفی باید انتخاب شوند.

مثال ۱- با فرض $G(s) = \frac{4}{s+5}$ و مقدار اولیه صفر خروجی؛ بهره $k_1 = bk$ کنترل کننده تناسبی چند باشد تا خروجی در ثانیه سوم در مقدار ۱۰- باشد.

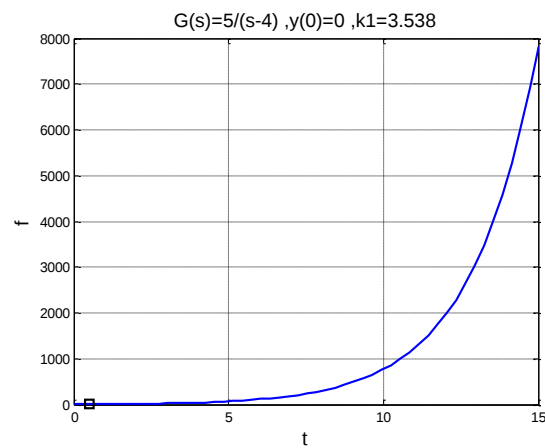
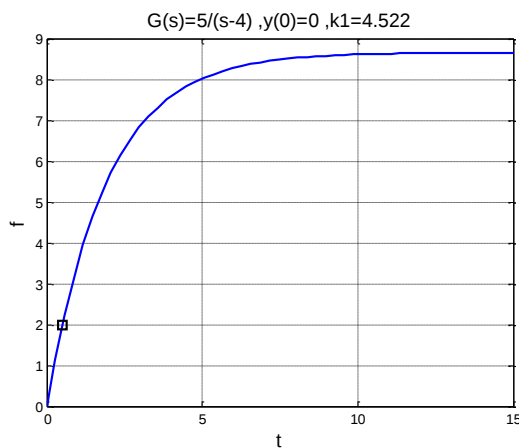
پاسخ: از آن جایی که $-aT = -15$ است و با توجه به شکل ۱، مقدار ۱۰- در محدوده ی پایدار جواب قرار گرفته و حتماً بهره ی یکتایی وجود خواهد داشت. با توجه به نزدیکی مقدار $-aT$ به ۱۰-، حدس اولیه بهره ۳- در نظر گرفته می شود (در حدود مقدار $-a$). تابع f solve بهره ۴.۷۴۸ را بدست آورد و خروجی به صورت شکل ۲ بدست آمد که مقداری پایدار داشته و در ثانیه سوم در مقدار مورد نظر قرار گرفته است. توجه داشتید که با دانستن دقیق نمودار خروجی بر حسب k_1 چقدر با اطمینان و به سرعت این کار انجام شد.

۲-۲- پارامتر a منفی باشد

مشابه زیربخش قبل برای رسم تابع f نیاز است نقاط اکسترمم آن مشخص شوند. با توجه به استدلالی که در پیوست ب آورده شده است، خروجی به ازای $a < 0$ می تواند به سه صورت شکل ۳ باشد. بنابراین وقتی $-Ta = 2$ است، حداکثر مقداری که خروجی در زمان مشخص T می تواند داشته باشد کمتر از ۲ است و نقطه ی ناپوستگی تابع در ماکزیمم مقدار آن قرار می گیرد. و زمانی که $-Ta \neq 2$ است نیز بالازدگی ای در خروجی وجود خواهد داشت که نمی توان به بیشتر از این مقدار در زمان T رسید و باید بر حسب a و T بدست آید. همچنین نباید انتظار داشت به مقدار $-Ta$ در زمان T دست یافت.



شکل ۳- نمودار خروجی سیستم مرتبه اول با کنترل کننده تناسبی به ازای $a < 0$ و $y(0) = 0$



شکل ۴- نمودار خروجی مثال ۲ به ازای دو بهره‌ی متفاوت با دو پاسخ پایدار و ناپایدار

۱-۳- پارامتر a مثبت باشد

عبارت f_2 نیز به ازای $y(0)$ های مختلف و با توجه به علامت مثبت a می‌تواند به یکی از دو صورت شکل ۵ باشد.

به این ترتیب با استفاده از f_1 نشان داده شده در شکل ۱ و f_2 نشان داده شده در شکل ۵، نمودار f بدست می‌آید. برای حالتی که در آن‌ها $y(0) < 0$ است به دلیل اکیداً صعودی بودن دو نمودار، این کار آسان بوده و به صورت شکل ۶ می‌باشد.

مثال ۳- با فرض $G(s) = \frac{4}{s+0.5}$ و مقدار اولیه 0.8 خروجی؛ بهره k_1 کنترل کننده تناسبی چند باشد تا خروجی در ثانیه 10 در مقدار -3.5 باشد.

پاسخ: با توجه به اینکه $-Ta + y_0 = -4.2$ و $a = 0.5$ است، انتظار می‌رود خروجی به ازای بهره‌ی مورد نظر مقداری پایدار داشته باشد. حدس اولیه بهره -0.2 انتخاب شد و f_{solve} بهره را -0.4715 بدست آورد که خروجی مطابق انتظار پایدار و به صورت شکل ۷ است. همچنین توجه دارید که با اشراف به نمودار f بر حسب k_1 با اطمینان مقداری برای بهره بدست آمد.

با توجه به اینکه به ازای $0 < y(0) < 1$ تابع f_1 اکیداً صعودی و تابع f_2 اکیداً نزولی است، فرم تابع f باید تعیین شود. به این منظور باید ابتدا اکستریم‌های آن بدست آید. با توجه به پیوست ج در این حالت تابع اکستریمی ندارد و نمودار آن مجدداً مطابق شکل ۶ است.

حال در ادامه‌ی مقاله یک گام فراتر رفته و با فرض مقدار اولیه‌ی غیر صفر، محدوده‌ی خروجی بدست می‌آید.

۳- سیستم مرتبه اول و کنترل کننده تناسبی و مقدار اولیه غیر صفر خروجی

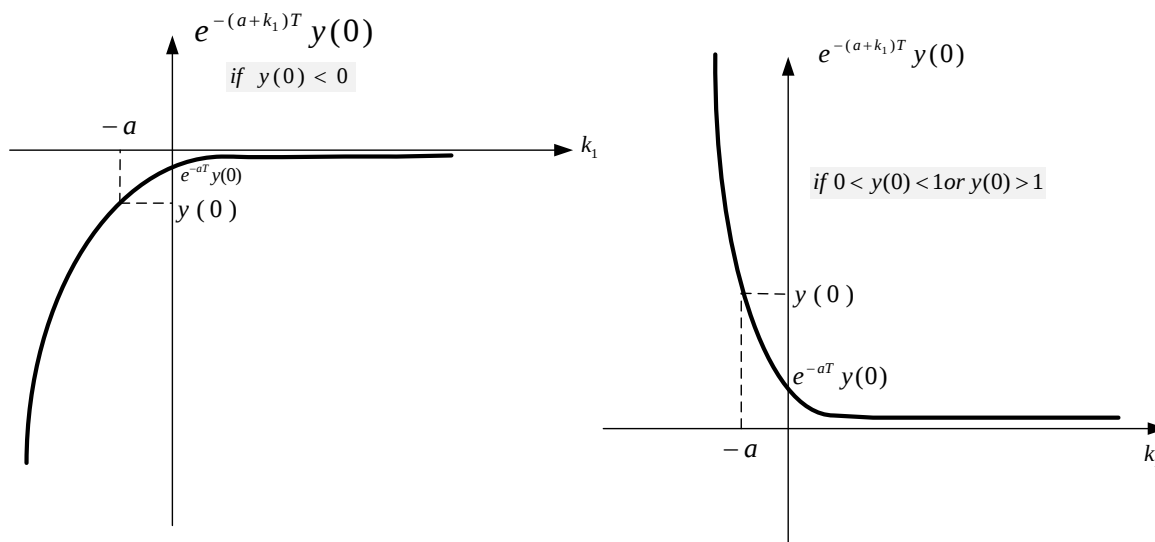
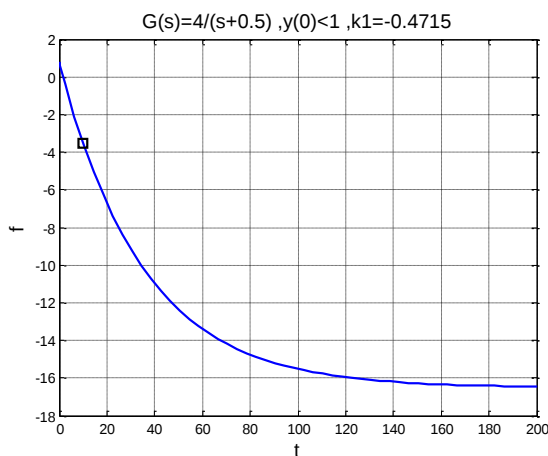
مشابه بخش قبل، سیستم مرتبه اول به صورت $G(s) = \frac{b}{s+a}$ و کنترل کننده‌ی تناسبی با بهره‌ی k می‌باشد. ورودی مرجع پله است و مقدار اولیه خروجی $y(0)$ است. رابطه‌ی زمانی خروجی با فرض $k_1 = bk$ و زمان مشخص T به صورت زیر خواهد بود.

$$y(T) = \frac{k_1}{a+k_1} (1 - e^{-(a+k_1)T}) + e^{-(a+k_1)T} y(0) \quad (3)$$

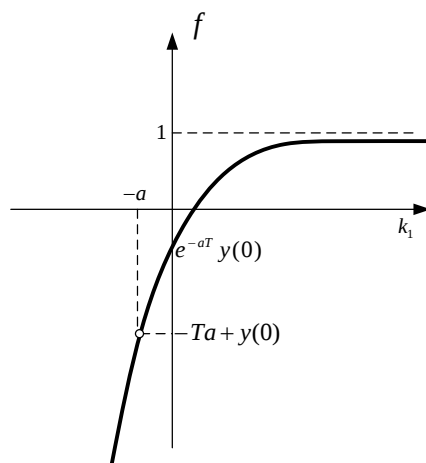
طبق رابطه‌ی (۱)، غیر صفر بودن $y(0)$ عبارتی را به خروجی اضافه نموده است. در حقیقت $y(T)$ تابعی از k_1 است و آن را با f نشان داده و برای استفاده از تحلیل بخش قبل، به دو بخش، به صورت $f_1 + f_2$ تقسیم می‌شود. که در آن:

$$f(k_1) = y(T), \begin{cases} f_1(k_1) = \frac{k_1}{a+k_1} (1 - e^{-(a+k_1)T}) \\ f_2(k_1) = e^{-(a+k_1)T} y(0) \end{cases} \quad (4)$$

مطابق رابطه‌ی (۴) عبارت f_1 کاملاً برابر عبارتی است که در بخش قبل تحت عنوان f و به صورت نمودار شکل ۱ به ازای a مثبت و به صورت شکل ۳ به ازای a منفی ارائه شده است. حال به ازای علامت‌های مختلف a محدوده‌ی f_2 بدست می‌آید تا با استفاده از نتایج بخش قبل، محدوده‌ی f تعیین شود.

شکل ۵- نمودار f_2 به ازای $y(0)$ های مختلف و $a > 0$ 

شکل ۷- نمودار خروجی مثال ۳

شکل ۶- نمودار خروجی سیستم مرتبه اول با کنترل کننده تناسبی و به ازای $y(0) < 1$ و $a > 0$

$$f_1 = \frac{k_1}{a + k_1} \left(1 - \frac{f_2}{y(0)} \right)$$

$$f = f_1 + f_2 = \frac{k_1}{a + k_1} \left(1 - \frac{f_2}{y(0)} \right) + f_2$$

$$\text{if } k_1 \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{k_1}{a + k_1} \rightarrow 1$$

و با توجه به مقدار $y(0)$ و طبق شکل ۵:

$$y(0) > 1 \rightarrow \frac{1}{y(0)} < 1 \xrightarrow{f_2 > 0} \frac{f_2}{y(0)} < f_2 \rightarrow -\frac{f_2}{y(0)} > -f_2$$

اگر Δ را مقداری مثبت تعریف کنیم:

$$-\frac{f_2}{y(0)} = -f_2 + \Delta$$

قاعده ۳: در یک سیستم مرتبه اول با استفاده از کنترل کننده تناسبی، به ازای $a > 0$ و $y(0) < 1$ در یک T خاص به هر مقدار کمتر از واحدی به غیر از $-Ta + y(0)$ برای $f(k_1)$ می توان رسید و k_1 یکتاست.

دلیل: برد تابع $f(k_1)$ $(-\infty, 1)$ به غیر از نقطه $-Ta + y(0)$ است (مطابق شکل ۶ شکل ۶).

حال مقادیری که f به ازای $y(0) > 1$ می پذیرد، بدست خواهد آمد. با توجه به اینکه عبارت f_1 اکیداً صعودی است ولی عبارت f_2 اکیداً نزولی است ابتدا اثبات می شود که به ازای بهره های در بی نهایت خروجی در چه مقادیری قرار خواهد داشت.

به این ترتیب:

تبصره ۴-۱: مقدار بهره برای مقادیر کمتر از یک، یکتا نبوده و هم پاسخ پایدار و هم پاسخ ناپایدار می تواند بدست آید.

مثال ۴- با فرض $G(s) = \frac{4}{s+0.5}$ و مقدار اولیه ۲ خروجی؛ بهره k_1 کنترل کننده تناسبی چند باشد تا خروجی در ثانیه ۱۰ در مقدار ۲- باشد.

پاسخ: $-3 = -Ta + y(0)$ است و ۲- در بازه $(-3, +\infty)$ قرار دارد و چون کمتر از یک است k_1 آن یکتا نیست. با دو انتخاب برای حدس اولیه بهره f_{solve} ، دو خروجی پایدار و ناپایدار بدست آمد. با حدس اولیه ۰.۳- پاسخی پایدار و به ازای حدس اولیه ۱- پاسخ ناپایدار حاصل شد که در شکل ۹ ملاحظه می شود.

۲-۳- پارامتر a منفی باشد

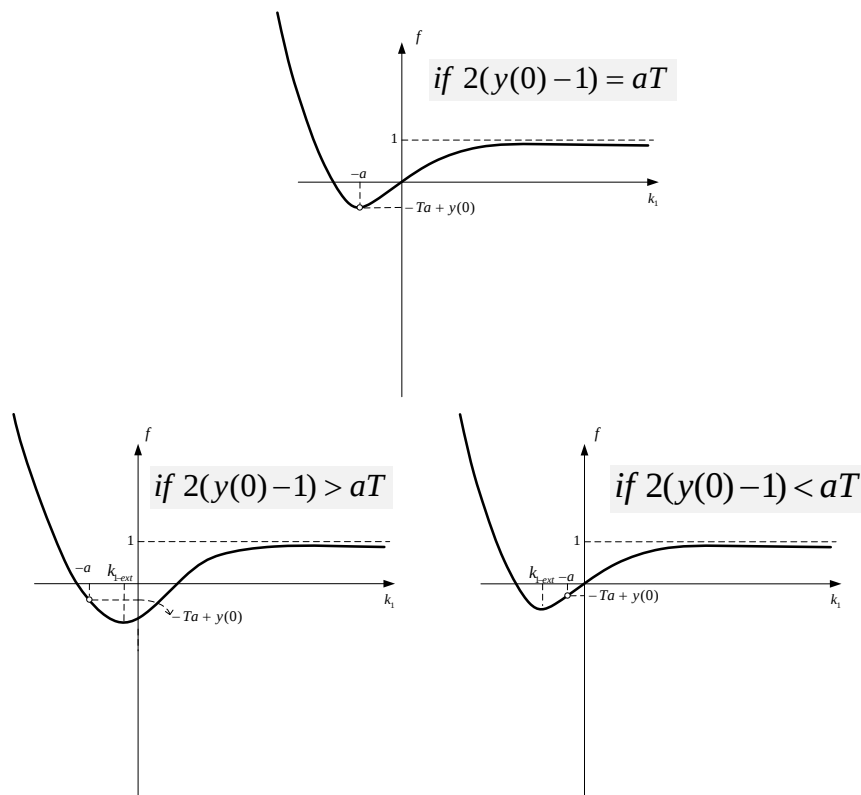
با توجه به نتیجه ای که از قبل بدست آمد، عبارت f_1 به ازای $a < 0$ می تواند به یکی از سه صورت شکل ۳ باشد. عبارت f_2 نیز به ازای $y(0)$ های مختلف به صورت شکل ۱۰ می باشد.

$$\text{if } k_1 \rightarrow -\infty \Rightarrow f = f_1 + f_2 = 1 - f_2 + \Delta + f_2 = 1 + \Delta > 1$$

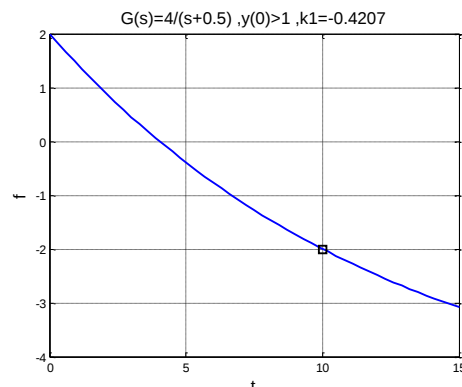
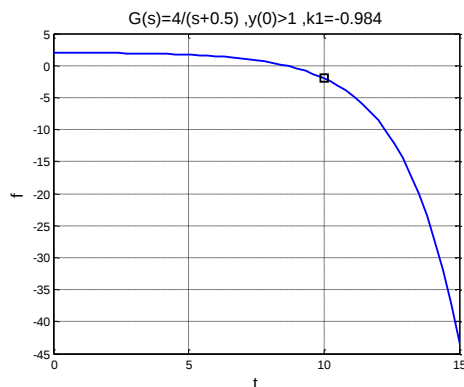
بنابراین $y(T)$ در مقادیر بزرگ k_1 مقداری مثبت خواهد داشت. اما برای دانستن رفتار کامل آن باید اکستریم های f بدست آید. با توجه به استدلالی که در پیوست د آورده شده است، $y(T)$ حتماً در یک نقطه اکستریم و در نقطه ای $k_1 = -a$ ناپیوستگی دارد و اگر $2(y(0) - 1) = aT$ باشد نقطه ناپیوستگی با نقطه اکستریم برابر است. پس در زمان مشخص T خروجی f می تواند به یکی از سه صورت شکل ۸ باشد.

قاعده ۴: در یک سیستم مرتبه اول با استفاده از کنترل کننده ی تناسبی، به ازای $a > 0$ و $y(0) > 1$ در یک T خاص به مقادیری در بازه $(-Ta + y(0), +\infty)$ برای $f(k_1)$ حتماً می توان رسید و مقدار کمتر از $-Ta + y(0)$ آن سقفی دارد که باید برای هر T و a ای طبق رابطه ی (۱۰) بدست آورده شود.

دلیل: برد تابع $f(k_1)$ از مقداری کمتر از $-Ta + y(0)$ تا مثبت بی نهایت، به غیر از نقطه ای $-Ta + y(0)$ است (مطابق شکل ۸).



شکل ۸- نمودار خروجی سیستم مرتبه اول با کنترل کننده تناسبی و به ازای $a > 0$ و $y(0) > 1$



شکل ۹- نمودار خروجی مثال ۴ به ازای دو بهره متفاوت

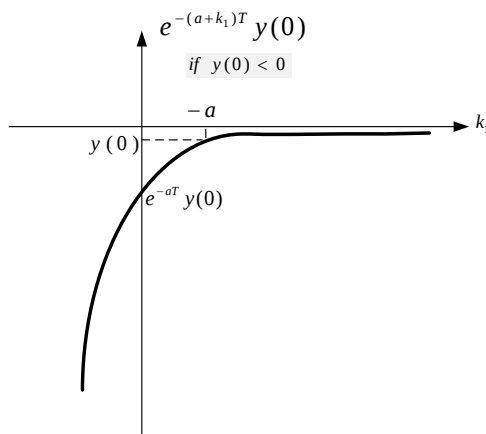
به ازای $k_1 \rightarrow -\infty$ عبارت $\frac{k_1}{a+k_1}$ با تقریب خوبی برابر واحد است و حد عبارت f به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}\lim_{k_1 \rightarrow -\infty} f &= \lim_{k_1 \rightarrow -\infty} \frac{k_1}{a+k_1} (1 - e^{-(a+k_1)T}) \\ &\quad + e^{-(a+k_1)T} y(0) \\ &= \lim_{k_1 \rightarrow -\infty} 1 \\ &\quad + (y(0) - 1)e^{-(a+k_1)T}\end{aligned}$$

و چون $0 < y(0) < 1$ است عبارت $(y(0) - 1)$ مقداری منفی خواهد داشت و لذا:

$$\lim_{k_1 \rightarrow -\infty} 1 + (y(0) - 1)e^{-(a+k_1)T} = -\infty$$

با توجه به پیوسته می توان گفت به ازای $0 < y(0) < 1$ و $a < 0$ همواره خروجی یک اکستریم و یک ناپیوستگی دارد و اگر $aT = 2(y(0) - 1)$ باشد نقطه ناپیوستگی تابع همان نقطه اکستریم آن خواهد شد. بنابراین نمودار f به صورت شکل ۱۲ خواهد بود.

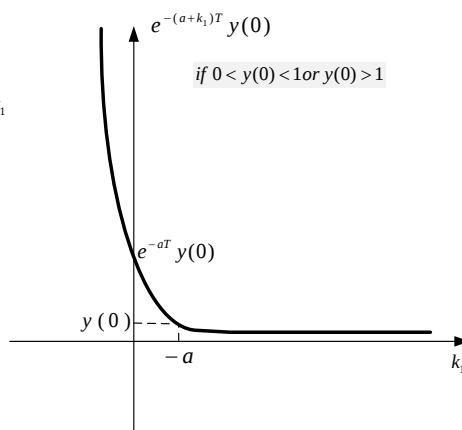


به ازای $y(0) < 0$ ، جمع دو عبارت f_1 و f_2 برای ساخت f ، با توجه به اکیداً صعودی بودن دو نمودار، کار آسانی بوده و به صورت شکل ۱۱ می باشد.

قاعده ۵: در یک سیستم مرتبه اول با استفاده از کنترل کننده تناسبی، به ازای $a < 0$ و $y(0) < 0$ در یک T خاص به هر مقدار کمتر از واحدی به غیر از $-Ta + y(0)$ برای $f(k_1)$ می توان رسید و مقدار بزرگتر از واحد آن سقفی دارد که باید برای هر T و a بدست آورده شود.

دلیل: برد تابع $f(k_1)$ از منفی بی نهایت تا مقداری بزرگتر از واحد، به غیر از نقطه $-Ta + y(0)$ است (مطابق شکل ۱۱).

برای حالتی که $0 < y(0) < 1$ و $y(0) > 1$ است، عبارت f_1 اکیداً صعودی است ولی عبارت f_2 اکیداً نزولی است. لذا ابتدا اثبات می شود به ازای بهره های در بی نهایت خروجی در چه مقادیری قرار خواهد داشت.

شکل ۱۰- نمودار f_2 به ازای $y(0)$ های مختلف و $a < 0$

از واحدی به غیر از $-Ta + y(0)$ برای $f(k_1)$ می توان رسید و مقدار بزرگتر از واحد نیز وجود خواهد داشت که سقفی داشته و باید برای هر T و a بدست آورده شود.

دلیل: برد تابع $f(k_1)$ از منفی بی نهایت تا مقداری بزرگتر از یک، به غیر از نقطه‌ی $-Ta + y(0)$ است (مطابق شکل ۱۲).

تبصره ۶-۱: حداکثر مقدار بزرگتر از واحدی که می تواند خروجی داشته باشد حتماً مقداری کمتر از ۲ است.

مثال ۵- با فرض $G(s) = \frac{4}{s-5}$ و مقدار اولیه ۰.۵ خروجی؛ بهره k_1 کنترل کننده تناسبی چند باشد تا خروجی در ثانیه ۳ در مقدار ۱۵.۳ باشد. پاسخ: $-Ta + y(0) = 15.5$ است و $Ta < 2(y(0) - 1)$ است. با دو انتخاب برای حدس اولیه بهره f_{solve} ، دو خروجی پایدار و ناپایدار بدست آمد. با حدس اولیه ۷ پاسخی پایدار با بهره‌ی ۵.۰۱ و به ازای حدس اولیه ۷- پاسخ ناپایدار با بهره ۵- حاصل شد که در شکل ۱۳ ملاحظه می شود.

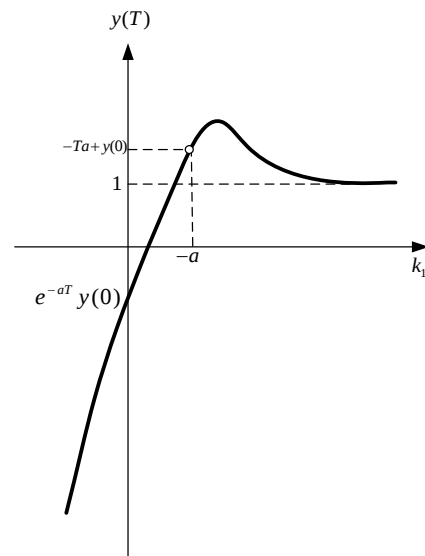
در ادامه به ازای $y(0) > 1$ مقادیری که f می تواند بپذیرد را بررسی می کنیم.

مشابه استدلالی که برای $0 < y(0) < 1$ به ازای بهره در بی نهایت شد، به ازای $y(0) > 1$ عبارت $(y(0) - 1)$ مقداری مثبت خواهد داشت و لذا:

$$\lim_{k_1 \rightarrow -\infty} 1 + (y(0) - 1)e^{-(a+k_1)T} = +\infty$$

$$\lim_{k_1 \rightarrow +\infty} f \rightarrow 1$$

بنابراین می توان گفت به ازای $y(0) > 1$ ، f مقداری مثبت خواهد داشت. همچنین به دلیل منفی بودن علامت a عبارت $-Ta + y(0)$ مثبت و بزرگتر از یک است.



شکل ۱۱- نمودار خروجی سیستم مرتبه اول با کنترل کننده تناسبی و به

ازای $a < 0$ و $y(0) < 0$

خوب است محدوده‌ی $-Ta + y(0)$ نیز برای هر حالت بدست آید.

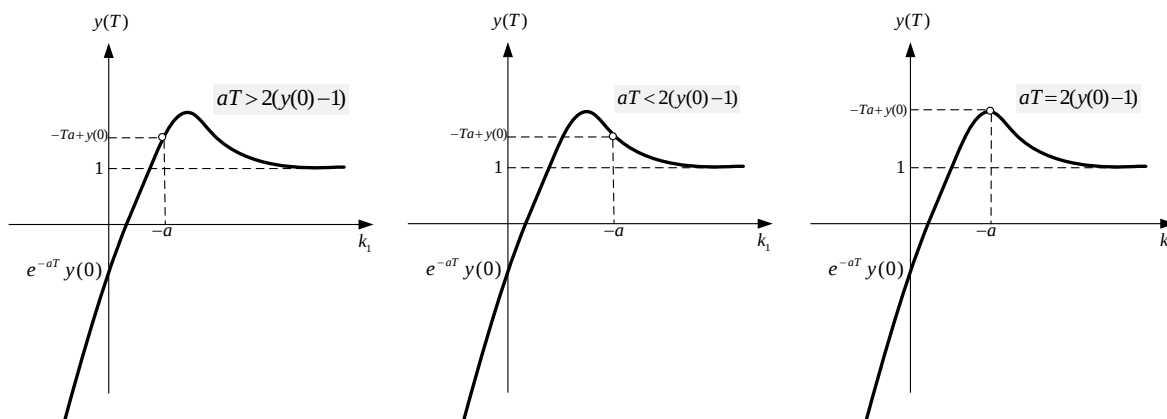
$$\begin{aligned} \text{if } Ta > 2(y(0) - 1) &\rightarrow (2 - y(0)) \\ &> (-Ta + y(0)) \\ \xrightarrow{(2-y(0)) \in (1,2)} &(-Ta + y(0)) < 2 \\ \text{if } Ta < 2(y(0) - 1) &\rightarrow (2 - y(0)) \\ &< (-Ta + y(0)) \\ \xrightarrow{(2-y(0)) \in (1,2)} &(-Ta + y(0)) > 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{if } Ta = 2(y(0) - 1) &\rightarrow (2 - y(0)) \\ &= (-Ta + y(0)) \end{aligned}$$

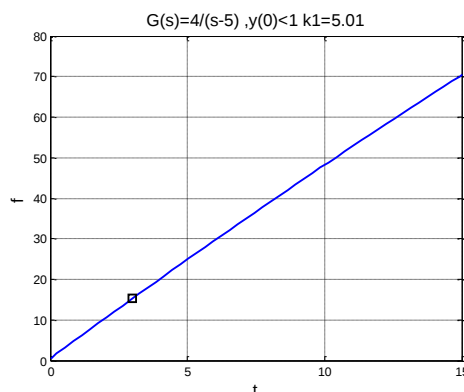
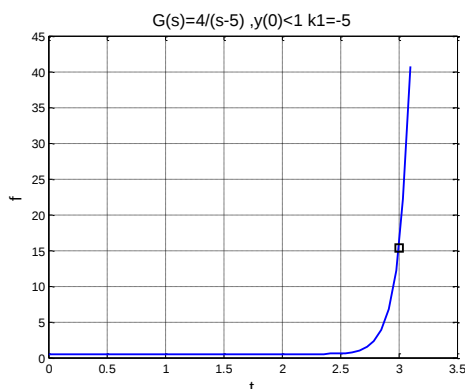
$$\xrightarrow{(2-y(0)) \in (1,2)} 1 < (-Ta + y(0)) < 2$$

لذا حداکثر مقداری که تابع می تواند داشته باشد ۲ خواهد بود.

قاعده ۶: در یک سیستم مرتبه اول با استفاده از کنترل کننده‌ی تناسبی، به ازای $a < 0$ و $0 < y(0) < 1$ در یک T خاص به هر مقدار کمتر



شکل ۱۲- نمودار خروجی سیستم مرتبه اول با کنترل کننده تناسبی و به ازای $a < 0$ و $0 < y(0) < 1$



شکل ۱۳- نمودار خروجی مثال ۵ به ازای دو بهره متفاوت

پاسخ: $-Ta + y_0 = 31$ است. با انتخاب -1 برای حدس اولیه بهره f_{solve} ، دو خروجی پایدار که در آن در زمان خاص در مقدار 30 قرار دارد و ناپایدار که در همان زمان در مقدار 33 قرار دارد بدست آمده. نتایج در شکل ۱۵ نشان داده شده است که مطابق دانسته های بدست آمده از شکل ۱۴ است.

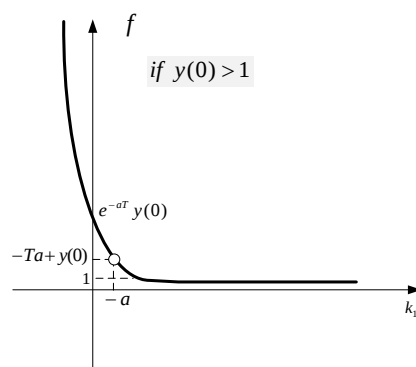
۴- تحمیل شدن سناریو به خروجی

با توجه به نتایج بدست آمده، نکته ی جالب توجهی بوجود آمده است که در این بخش توضیح داده می شود. این نکته تحمیل روند سناریو به خروجی سیستم حلقه بسته ی مرتبه اول با کنترل کننده ی تناسبی است. به این معنی که بسته به علامت پارامتر a تنها می توان سناریوهای خاصی به خروجی نسبت داد.

به فرض اگر پارامتر a مثبت باشد و مقدار لحظه ی صفر خروجی، کمتر از واحد باشد با توجه به شکل ۶ خروجی هیچ گاه در گام اول سناریو نمی تواند مقدار بزرگتر از یک بپذیرد و مجدداً با توجه به شکل ۶ در گام های بعدی سناریو نیز نمی تواند هیچ گاه مقدار بزرگتر از یک داشته باشد. یعنی در این حالت حتماً سناریوی خروجی در تمام زمان ها باید نمایی کمتر از واحد ترتیب داده شود.

همچنین اگر پارامتر a مثبت بوده و مقدار لحظه ی صفر خروجی بزرگتر از یک باشد، با توجه به شکل ۸ در گام اول به مقادیر بزرگتر از یک و کمتر از یک (البته با سقف مشخص) می توان رسید. اما در هر گامی از سناریو که خروجی به مقدار کمتر از واحد برسد با توجه به شکل ۶، از آن به بعد دیگر نمی توان به مقدار بیشتر از واحدی در خروجی دست یافت. پس نمی توان هیچ گاه برای این سیستم همزمان بالا زدگی و پایین زدگی (نسبت به مقدار یک) مشاهده کرد که کاملاً درست و مطابق انتظار است.

اما برای دانستن رفتار کامل آن باید اکستریم های آن بدست آید که براساس پیوست ی هیچ اکستریمی وجود ندارد. لذا تابع f به صورت شکل ۱۴ خواهد بود. بنابراین به ازای $a < 0$ و مقادیر $y(0) > 1$ به هر مقدار بزرگتر از یک برای $y(T)$ می توان دست یافت.

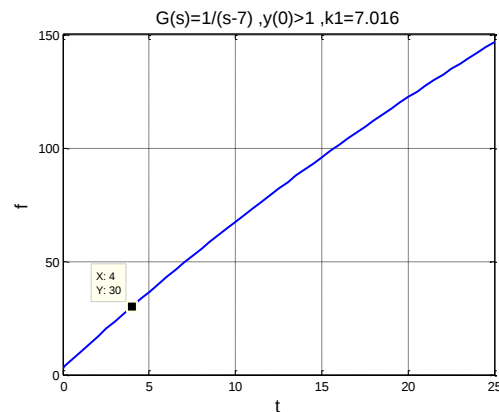
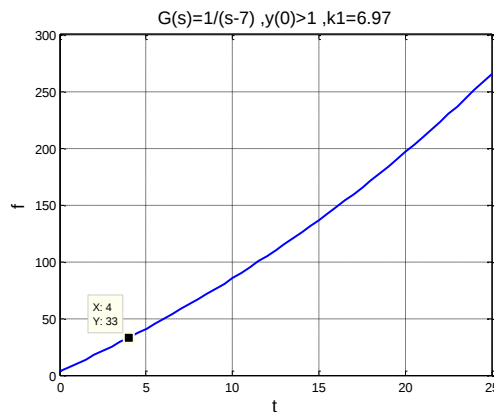


شکل ۱۴- نمودار خروجی سیستم مرتبه اول با کنترل کننده تناسبی و به

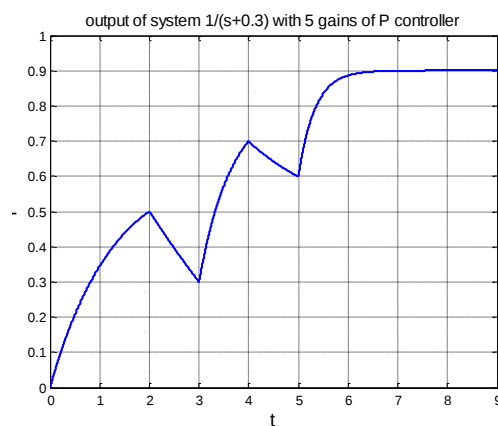
ازای $a < 0$ و $y(0) > 1$

قاعده ۷: در یک سیستم مرتبه اول با استفاده از کنترل کننده ی تناسبی، به ازای $a < 0$ و $y(0) > 1$ در یک T خاص به هر مقدار بزرگتر از واحدی به غیر از $-Ta + y(0)$ برای $f(k_1)$ می توان رسید. دلیل: برد تابع $f(k_1)$ از $(1, +\infty)$ به غیر از نقطه ی $-Ta + y(0)$ است (مطابق شکل ۱۴).

مثال ۶- با فرض $G(s) = \frac{1}{s-7}$ و مقدار اولیه 3 خروجی؛ بهره k_1 کنترل کننده تناسبی چند باشد تا خروجی در ثانیه 4 در مقدار 30 باشد. همچنین بهره k_1 کنترل کننده تناسبی چند باشد تا خروجی در ثانیه 4 در مقدار 33 باشد.



شکل ۱۵- نمودار خروجی مثال ۶ به ازای دو بهره متفاوت

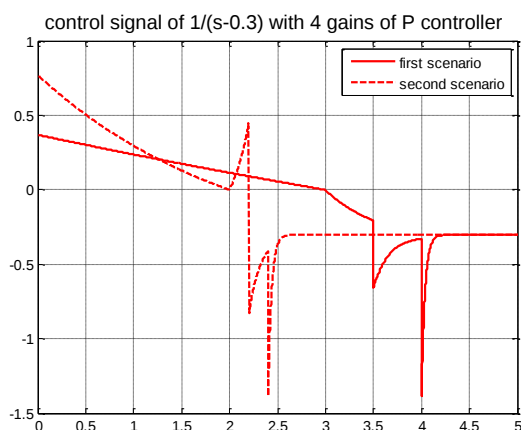
شکل ۱۶- نمودار خروجی سیستم $\frac{1}{s+0.3}$ با پنج بهره ی متغیر با زمان کنترل کننده ی تناسبی

نتایج نمونه ای دیگر که مربوط به سیستمی با a منفی است در شکل ۱۷ و شکل ۱۸ نشان داده شده است. در این نمونه دو سناریو برای خروجی ترتیب داده شده است. سناریوی اول در زمان $4/5$ ثانیه به پایان می رسد و زمان بین سوئیچ ها $0/5$ ثانیه ای است و سناریوی دوم که با خط چین نشان داده شده است در زمان $2/6$ به پایان می رسد و زمان بین سوئیچ ها $0/2$ ثانیه ای است. در سناریوی اول برای اینکه خروجی سیستم حلقه بسته در زمان های سه، سه و نیم، چهار و چهارونیم ثانیه به ترتیب در $1/05$ ، $1/1$ ، $1/05$ و $1/01$ قرار گیرد بهره های $0/36$ ، $2/05$ ، $6/58$ و $28/27$ اعمال شده است. در سناریوی دوم برای اینکه در زمان های 2 ، $2/2$ ، $2/4$ و $2/6$ خروجی در همان مقادیر سناریوی اول قرار گیرد بهره های $0/77$ ، $4/43$ ، $8/3$ و $28/23$ اعمال شده است. توجه دارید که تلاش کنترلی در سناریوی دوم بیشتر است، چرا که در بازه ی زمانی فشرده تری به همان مقادیر خروجی دست پیدا کرده است. این طراح است که همواره باید با توجه به اهداف مدنظرش تصمیم بگیرد که کدام سناریو مناسب تر است. شاید محدودیت تلاش کنترلی او را مجاب به استفاده از سناریوی اول کند و یا سرعت بیشتر او را به استفاده از سناریوی دوم سوق دهد.

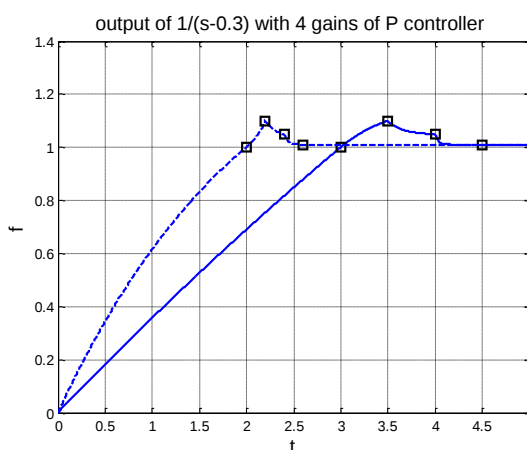
همچنین اگر پارامتر a منفی باشد و مقدار لحظه ی صفر خروجی کمتر از واحد باشد، براساس شکل ۳ و شکل ۱۱ می توان در اولین گام یا گام های ابتدایی بالازدگی ای برای سناریوی خروجی متصور شد، اما همین که سناریو به مقدار بیشتر از یک رود، براساس شکل ۱۴ نهایتاً در گام های بعد خروجی می تواند به مقدار یک برسد. لذا نمی توان هم بالازدگی و هم پایین زدگی (نسبت به مقدار یک) در روند خروجی مشاهده کرد که با توجه به نوع سیستم و کنترل کننده کاملاً درست و منطقی است. نمونه ای از این کار در شکل ۱۶ انجام شده است. در شکل ۱۶ که مربوط به سیستمی با a مثبت است برای اینکه خروجی سیستم حلقه بسته در زمان های دو، سه، چهار، پنج و هفت ثانیه به ترتیب در $0/7$ ، $0/3$ ، $0/5$ ، $0/263$ و $0/72$ قرار گیرد بهره های $0/5$ ، $0/134$ ، $1/255$ ، $0/263$ و $2/72$ اعمال شده است. همچنین توجه دارید که برای پایدار بودن سیستم حلقه بسته، آخرین بهره ای اعمالی باید سیستم حلقه بسته ی پایداری بدست دهد. به همین جهت قضیه زیر مطرح می شود:

قضیه پایداری: شرط لازم و کافی برای پایداری این روش، پایداری کنترل کننده پایانی است.

اثبات: می دانیم سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان بدون شرایط اولیه در صورتی پایدار BIBO است که به ازای هر ورودی کراندار، خروجی آن نیز کراندار و محدود باشد. با توجه به اینکه در تنظیم سناریو مقادیر خروجی در لحظات میانی توسط طراح تحمیل می شود، محدود است و می ماند سرنوشت خروجی پس از پایانی ترین تحمیل که برای آن هم کافی است کنترل کننده پایانی پایدار باشد تا خروجی کراندار و محدود بماند که یعنی شرط داده شده کافی است. از طرفی روشن است که اگر کنترل کننده پایانی ناپایدار باشد، حتماً ورودی ای از آن پس می توان داشت که خروجی را بی کران کند و از همین رو شرط داده شده لازم نیز هست.



شکل ۱۸- سیگنال کنترلی سیستم $\frac{1}{s-0.3}$ با چهار بهره‌ی متغیر با زمان کنترل کننده‌ی تناسبی



شکل ۱۹- نمودار خروجی سیستم $\frac{1}{s-0.3}$ با چهار بهره‌ی متغیر با زمان کنترل کننده‌ی تناسبی

۵- گام‌های تعیین بهره کنترل کننده تناسبی

به روش ارائه شده در مقاله

جهت بکارگیری راحت روش ارائه شده در این مقاله، در این بخش مراحل طراحی به صورت یک الگوریتم ارائه می‌شود. ابتدا باید تابع تبدیل حلقه باز سیستم (پارامترهای a و b) به همراه مقدار اولیه خروجی ($y(0)$) مشخص باشند. آن گاه مراحل زیر طی می‌شود.

گام ۱- تعیین بازه‌ی زمانی سویچ $(T - T_p)$ و مقدار خروجی در انتهای بازه ($y(T)$) توسط طراح مطابق با جدول ۱

گام ۲- انتخاب حدس اولیه مناسب برای بهره تناسبی (k_1) با استفاده از نمودارهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۱۱، ۱۲ و ۱۴

گام ۳- استفاده از تابع f_{solve} نرم افزار $MATLAB$ جهت تعیین بهره تناسبی k_1

گام ۴- اگر آخرین سویچ است به پایداری حلقه بسته توجه شود و در غیر این صورت به گام ۱ بروید.

توجه کنید که T_p زمان سویچ قبلی است که در اولین سویچ صفر است و در سویچ‌های بعدی زمان سویچ قبلی است تا همواره بازه‌ی زمانی که باید خروجی در طی آن به مقدار مطلوب برسد بدست آید. همچنین توجه داشته باشید که در صورتی که از جدول پیروی کرده و از نمودارهای مربوطه استفاده کنید حتماً بهره متناظر وجود دارد.

در مقام مقایسه با دیگر روش‌ها مثلاً روش‌هایی که تطبیقی هستند و بهره‌های کنترلی متغیر با زمان بدست می‌دهند بر مبنای یک فرض مهم که وجود یک تغییر در سیستم مثلاً تغییر در یک پارامتر خاص سیستم است، استوارند. در این روش‌ها زمانی بهره کنترلی تغییر می‌کند که تغییری رخ دهد. اما در این روش خود طراح سناریوی تغییر را چیده و هیچ تغییر ناخواسته‌ای در سیستم رخ نداده است، لذا آنچه در این نوشته

آمده می‌تواند به چگونگی انتخاب بهره در تطبیق نیز کمک کند ولی نمی‌توان این روش را با روش‌های تطبیقی بطور مستقیم مقایسه نمود چرا که انگیزه تغییر بهره در هر یک متفاوت است. همچنین در روشی همچون زیگلر نیکولز، در نهایت یک بهره به دست می‌دهد اما روش این مقاله، روشی چندبهره‌ای است که مسلماً از روش تک‌بهره‌ای زیگلر نیکولز ظاهری بهتر دارد ولی چون در آنجا هدف دادن یک بهره برای کل مسیر بوده است از این جهت بهتر است. لذا اساساً مقایسه به شکل متداول به نظر مناسب نمی‌رسد بلکه شاید بهتر این باشد که بگوئیم نوع نگاهی که در اینجا ارائه شده است، یک بده بستانی با سایر روش‌ها می‌تواند داشته باشد. همچنین تأکید می‌گردد که هرچند در اینجا روشی برای طراحی ارائه شده ولی بیشتر کوشش، صرف بررسی امکان وجود جواب و محدوده‌های اعمال آن شده است.

۶- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر برای سیستم‌هایی که بتوانند با یک سیستم مرتبه اول تقریب زده شوند با کنترل کننده مناسب، محدوده‌ای که خروجی می‌تواند به ازای یک بهره‌ی خاص در زمانی مشخص در آن قرار داشته باشد بدست آمد. نشان داده شد که در یک سیستم مرتبه اول تنها با کنترل کننده تناسبی می‌توان به همه‌ی اهداف مورد نظر رسید و نیازی به استفاده از کنترل کننده‌های PI، PD یا PID نیست. لذا محاسبه‌ی محدوده‌ی مجاز خروجی برای حالت‌های مختلفی از سیستم انجام شد و با مثال‌هایی صحت آن‌ها نیز تأیید شد. قرار داشتن خروجی در محدوده‌ی مجاز شرط جواب داشتن معادله‌های غیرخطی‌ای است که از آن‌ها، بهره‌ها بدست می‌آید. این معادلات غیرخطی با توابعی در نرم افزار $MATLAB$ حل می‌شوند. حدس اولیه این توابعی می‌تواند به خوبی براساس نمودارهای ارائه شده انتخاب شوند. در برخی نمودارها با اکسترمم زدن خروجی، برای محدوده‌هایی دو مقدار برای بهره می‌توانست بدست آید که با تغییر

با برابر صفر قرار دادن رابطه‌ی (۵) و با فرض $k_1 \neq -a$:

$$k_1^2 + ak_1 - \frac{a}{T} = -\frac{a}{T} e^{(a+k_1)T} \quad (۶)$$

فرض می‌کنیم:

$$\begin{aligned} q_1 &= k_1^2 + ak_1 - \frac{a}{T} \\ q_2 &= -\frac{a}{T} e^{(a+k_1)T} \end{aligned} \quad (۷)$$

آن‌گاه:

$$\frac{df}{dk_1} = \frac{Te^{-(a+k_1)T}}{(a+k_1)^2} (q_1 - q_2) \quad (۸)$$

با توجه به مثبت بودن ضریب رابطه‌ی بالا، عبارت $q_1 - q_2$ علامت مشتق را تعیین می‌کند.

سمت راست تساوی (۶) به فرم نمایی و سمت چپ آن به فرم سهمی است. به دلیل مثبت بودن ضریب k_1^2 تفرع سهمی مثبت است و می‌تواند به این صورت نوشته شود.

$$q_1 = k_1^2 + ak_1 - \frac{a}{T} = \left(k_1 + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a}{T}$$
 به ازای مقادیر مختلف k_1 این سهمی به صورت شکل ۱۹ خواهد بود. عبارت $-\frac{a}{T} e^{(a+k_1)T}$ نیز به دلیل علامت مثبت a حتماً مقداری منفی داشته و به صورت شکل ۲۰ می‌باشد.

از تلاقی این دو شکل مقدار k_1 ای بدست می‌آید که به ازای آن مشتق تابع f برابر صفر است. برای اینکه این دو تابع تلاقی داشته باشند لازم و کافی است که نقطه مینیمم سهمی پایین‌تر از تابع نمایی قرار گیرد. آن‌جایی که مقدار تابع نمایی به ازای k_1 نقطه‌ی مینیمم یعنی $k_1 = -\frac{a}{2}$ برابر $-\frac{a}{T} e^{\frac{aT}{2}}$ است. پس شرط صفر شدن مشتق f به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} -\frac{a^2}{4} - \frac{a}{T} < -\frac{a}{T} e^{\frac{aT}{2}} &\rightarrow -a^2T - 4a < -4ae^{\frac{aT}{2}} \\ &\rightarrow a^2T + 4a > 4ae^{\frac{aT}{2}} \rightarrow aT + 4 > 4e^{\frac{aT}{2}} \end{aligned}$$

با تعریف $x = \frac{aT}{2}$ شرط بالا به صورت زیر درمی‌آید:

$$2x + 4 > 4e^x \rightarrow x + 2 > 2e^x$$

با رسم دو طرف رابطه بالا مطابق شکل ۲۱ مشاهده می‌شود که هیچ‌گاه رابطه‌ی بالا برقرار نمی‌شود و همواره به ازای $a > 0$ رابطه $x + 2 < 2e^x$ برقرار است.

به این ترتیب اثبات شد که به ازای هیچ k_1 ای تساوی (۶) برقرار نشده و مشتق تابع f هیچ‌گاه صفر نمی‌شود و منحنی f هیچ نقطه اکسترممی ندارد.

حدس اولیه هر دوی این بهره‌ها بدست می‌آمدند و هر کدام از دو بهره، سیستم حلقه بسته‌ی خاصی را بدست می‌دادند.

نکته حائز اهمیتی که خروجی اصلی این مقاله است این می‌باشد که چون با شرایط اولیه غیر صفر نیز محدوده‌ی خروجی بدست آمد، می‌توان با چند مرحله سوییچ و تغییر بهره کنترل کننده روند خاصی را به خروجی برحسب زمان تحمیل نمود. به این معنی که اگر سناریویی برای خروجی چیده شود که مشخص کند در چند لحظه‌ی مختلف در چه مقادیری قرار گیرد، این لحظات بازه‌های زمانی‌ای را می‌سازند که با روش ارائه شده در مقاله، بهره‌های متغیر در بازه‌های زمانی منطبق با سناریو، می‌تواند بدست آیند. دو نمونه از انجام این کار در مقاله ارائه شد.

همچنین در این مقاله به ازای علامت‌های مختلف پارامتر a و مقادیر مختلف $y(0)$ برد خروجی با همان محدوده‌های که حتماً بهره‌ی تناسبی متناظری دارند بدست آمد و ملاحظه شد در برخی محدوده‌ها این بهره یکتا نیست. نتایج بدست آمده جهت دسترسی آسان‌تر در جدول زیر ارائه شده است.

جدول ۱- نتایج حاصله در مقاله به ازای حالت‌های مختلف

علامت a	مقدار $y(0)$	برد خروجی تابع α برای هر a و T باید (حساب شود)	محدوده‌ی k_1 برد تابع با غیر یکتا
مثبت	صفر	$(-\infty, 1) - \{-Ta\}$	—
منفی	صفر	$(-\infty, 1) \cup [1, \alpha] - \{-Ta\}$	بزرگتر از یک
مثبت	کوچکتر از یک	$(-\infty, 1) - \{-Ta + y(0)\}$	—
مثبت	بزرگتر از یک	$(\alpha, -Ta + y(0)) \cup (-Ta + y(0), +\infty)$	کوچکتر از یک
منفی	کوچکتر از یک	$(-\infty, 1) \cup [1, \alpha] - \{-Ta + y(0)\}$	بزرگتر از یک
منفی	بزرگتر از یک	$(1, +\infty) - \{-Ta + y(0)\}$	—

۷- پیوست الف

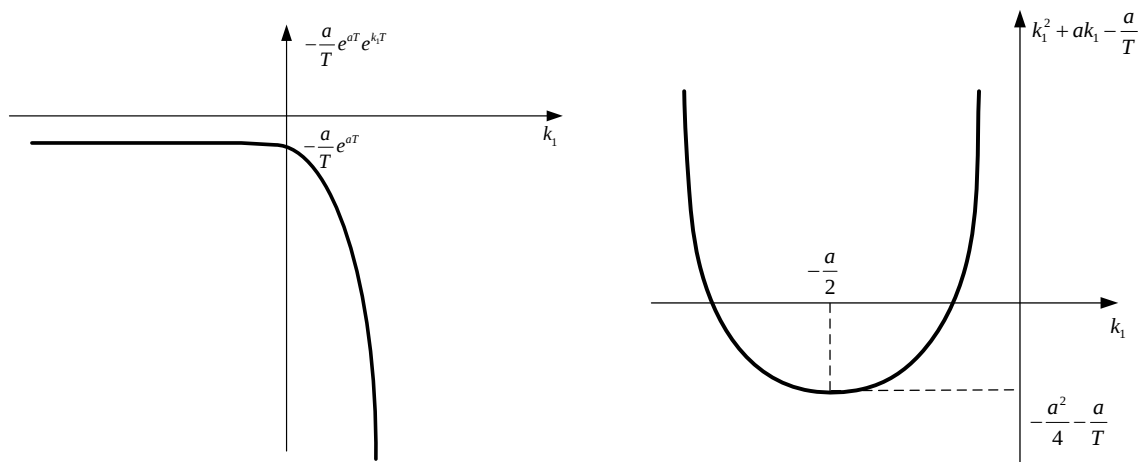
در این قسمت اکسترمم‌های تابع f به ازای $y(0) = 0$ و $a > 0$ بدست می‌آیند.

با توجه به رابطه‌ی (۱):

$$f(k_1) = \frac{k_1}{a + k_1} (1 - e^{-(a+k_1)T})$$

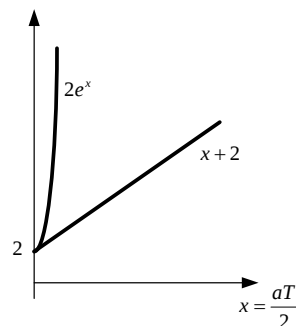
لذا:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dk_1} &= \frac{1}{(a + k_1)^2} (a + e^{-(a+k_1)T} [-a + aTk_1 + Tk_1^2]) \end{aligned} \quad (۵)$$

شکل ۱۹- نمودار $k_1^2 + ak_1 - \frac{a}{T}$ به ازای $a > 0$ شکل ۲۰- نمودار $-\frac{a}{T}e^{(a+k_1)T}$ به ازای $a > 0$

عبارت $-\frac{a}{T}e^{(a+k_1)T}$ نیز حتماً مقداری مثبت دارد و به صورت شکل ۲۳ می باشد.

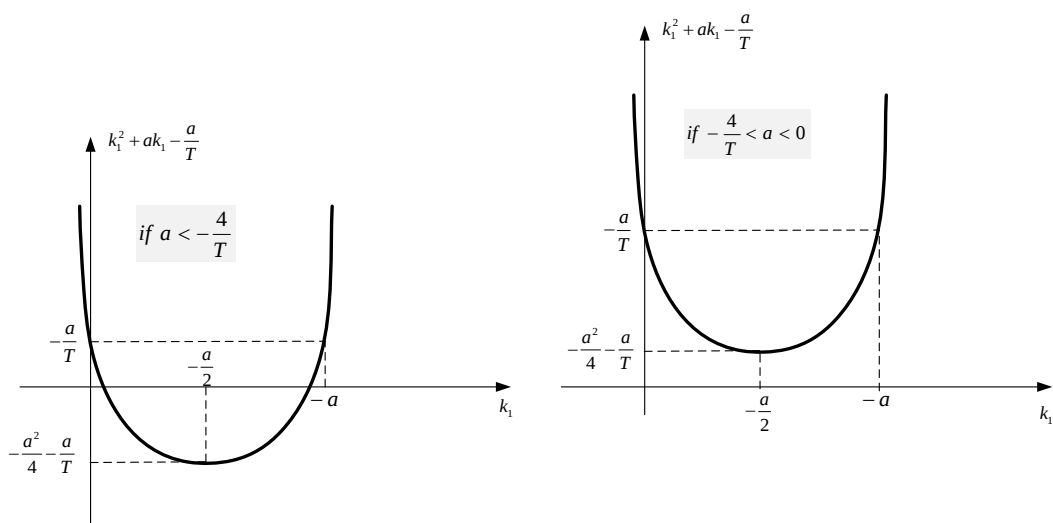
نکته‌ی بسیار مهمی که باید اینجا ذکر شود این است که طبق رابطه‌ی (۸) عبارت $q_1 - q_2$ تعیین کننده علامت مشتق تابع است. با توجه به بزرگ بودن عبارت q_1 و q_2 ساده تر است از مشتق آن‌ها برای تعیین علامت مشتق تابع بهره ببریم. اگر M_{q_1} مشتق q_1 و M_{q_2} مشتق q_2 باشد، در صورتی که هم قبل و هم بعد از نقطه‌ی تلاقی q_1 و q_2 ، شیب یکی از این دو همواره بیشتر باشد، علامت مشتق تابع تغییر می کند؛ یا به عبارت دیگر اگر قبل از نقطه‌ی تلاقی شیب یکی بیشتر باشد و بعد از تلاقی شیب دیگری بیشتر باشد، آن گاه نقطه‌ی تلاقی دیگر نقطه‌ی اکسترم یا نقطه‌ی تغییر علامت مشتق تابع نخواهد بود.

شکل ۲۱- نمودار $2e^x$ و $x+2$ به ازای x های مثبت

۸- پیوست ب

در این قسمت اکسترم‌های تابع f به ازای $y(0) = 0$ و $a < 0$ بدست می آیند.

مشابه ضمیمه الف نقاط اکسترم تابع f از تساوی (۶) بدست می آیند. سهموی سمت چپ تساوی به یکی از دو صورت شکل ۲۲ می تواند باشد.

شکل ۲۲- نمودار $k_1^2 + ak_1 - \frac{a}{T}$ به ازای $a < 0$

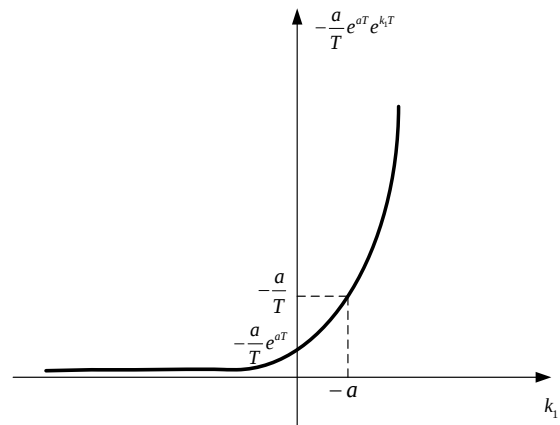
e^x لحاظ کردیم، قبل و بعد از $k_1 = -a$ شیب q_1 و q_2 برابر بوده و نمی توانیم از نکته ی مطرح شده استفاده کنیم. اما اگر تقریب e^x را در این حالت با سه جمله انجام دهیم به نتیجه ی زیر خواهیم رسید.

$$\begin{aligned} k_1 &= -a + \varepsilon \\ \rightarrow \begin{cases} M_{q_1} = 2k_1 + a = -a + 2\varepsilon \\ M_{q_2} = -ae^{aT}e^{k_1T} = -ae^{\varepsilon T} = -a - a\varepsilon T - \frac{a\varepsilon^2 T^2}{2} \end{cases} \\ \rightarrow M_{q_2} &> M_{q_1} \\ k_1 &= -a - \varepsilon \\ \rightarrow \begin{cases} M_{q_1} = 2k_1 + a = -a - 2\varepsilon \\ M_{q_2} = -ae^{aT}e^{k_1T} = -ae^{-\varepsilon T} = -a + a\varepsilon T - \frac{a\varepsilon^2 T^2}{2} \end{cases} \\ \rightarrow M_{q_2} &> M_{q_1} \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به نکته ی مطرح شده نقطه ی $k_1 = -a$ تنها در حالتی که $-aT = 2$ است اکسترمم تابع است چون هم مشتق تابع در آن جا صفر است و هم تغییر علامت می دهد.

پس دو حالت می تواند رخ دهد، یا دو شکل نقطه تقاطع دیگری هم دارند و یا فقط در همین نقطه متقاطع هستند. با توجه به مرتبه اول بودن تابع بر حسب k_1 ، حداکثر یک اکسترمم می تواند وجود داشته باشد.

وقتی $-aT = 2$ است $k_1 = -a$ تنها اکسترمم آن است. اگر $0 < -aT < 2$ باشد اکسترمم در k_1 ای بزرگتر از $-a$ رخ می دهد و با توجه به علامت مشتق این نقطه یک ماکزیمم است. اما اگر $-aT > 2$ باشد اکسترمم در k_1 ای کوچکتر از $-a$ رخ داده و این نقطه نیز ماکزیمم است این سه حالت در شکل ۲۴ نشان داده شده است. این شکل براساس مقایسه ی انجام شده بین شیب دو نمودار قبل و بعد از $-a$ رسم شده است. بنابراین اثبات شد که به ازای $-aT = 2$ نقطه ی ناپیوستگی تابع یعنی $k_1 = -a$ در محل ماکزیمم نمودار قرار می گیرد و در غیر این صورت $k_1 = -a$ نقطه ی ناپیوستگی نمودار بوده و ماکزیمم در نقطه ی دیگری؛ که از حل معادله ی غیرخطی (۶) بدست می آید؛ وجود خواهد داشت که یا قبل از $k_1 = -a$ قرار دارد و یا بعد از آن.



شکل ۲۳- نمودار $-\frac{a}{T}e^{(a+k_1)T}$ به ازای $a < 0$

با توجه به شکل ۲۲ و شکل ۲۳ حتماً دو نمودار در $k_1 = -a$ تلاقی داشته و مقدار آن ها در این نقطه $-\frac{a}{T}$ است. البته باید بررسی شود آیا $k_1 = -a$ نقطه ی اکسترمم هست یا خیر. لذا:

$$\begin{aligned} k_1 &= -a + \varepsilon \\ \rightarrow \begin{cases} M_{q_1} = 2k_1 + a = -a + 2\varepsilon \\ M_{q_2} = -ae^{aT}e^{k_1T} = -ae^{\varepsilon T} = -a - a\varepsilon T \end{cases} \\ k_1 &= -a - \varepsilon \\ \rightarrow \begin{cases} M_{q_1} = 2k_1 + a = -a - 2\varepsilon \\ M_{q_2} = -ae^{aT}e^{k_1T} = -ae^{-\varepsilon T} = -a + a\varepsilon T \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین برای مقایسه ی شیب دو نمودار در دو حالت شکل ۲۲ مقدار $-aT$ با ۲ باید مقایسه شود. لذا:

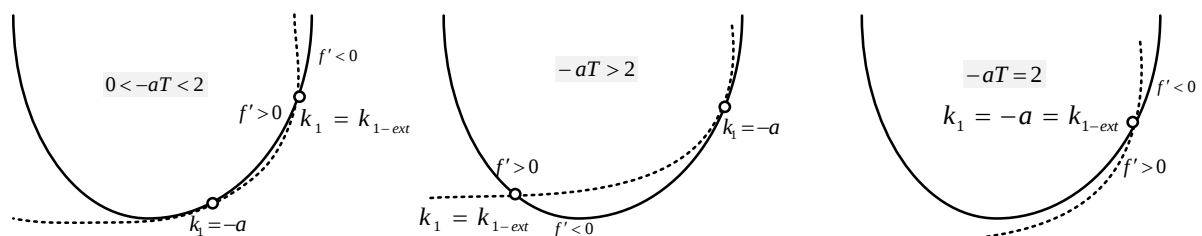
$$\text{if } a < -\frac{4}{T} \rightarrow -aT > 4$$

$$\rightarrow \begin{cases} k_1 = -a + \varepsilon \rightarrow M_{q_2} > M_{q_1} \\ k_1 = -a - \varepsilon \rightarrow M_{q_2} < M_{q_1} \end{cases} \rightarrow -a \text{ is not an extreme}$$

$$\text{if } -\frac{4}{T} < a < 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 0 < -aT < 2 \rightarrow \begin{cases} k_1 = -a + \varepsilon \rightarrow M_{q_2} < M_{q_1} \\ k_1 = -a - \varepsilon \rightarrow M_{q_2} > M_{q_1} \end{cases} \rightarrow -a \text{ is not an extreme} \\ 2 < -aT < 4 \rightarrow \begin{cases} k_1 = -a + \varepsilon \rightarrow M_{q_2} > M_{q_1} \\ k_1 = -a - \varepsilon \rightarrow M_{q_2} < M_{q_1} \end{cases} \rightarrow -a \text{ is not an extreme} \end{cases}$$

بنابراین نقطه ی $k_1 = -a$ نقطه ی اکسترمم نخواهد بود. تنها حالت باقی مانده $-aT = 2$ است که در این صورت با این تقریبی که برای



شکل ۲۴- حالت های مختلف تلاقی دو نمودار $k_1^2 + ak_1 - \frac{a}{T}$ و $-\frac{a}{T}e^{(a+k_1)T}$

در این قسمت اکسترمم های تابع f به ازای $0 < y(0) < 1$ و $a > 0$ بدست می آیند.

۹- پیوست ج

برای تعیین نحوه تلاقی دو نمودار و بررسی اکسترمم بودن یا نبودن نقاط تلاقی، مطابق آن چه در پیوست ب بیان شد، از شیب دو نمودار قبل و بعد از نقطه‌ای $k_1 = -a$ بهره می‌گیریم. شیب نمودار m_1 را با M_{m_1} و شیب نمودار m_2 را با M_{m_2} نشان می‌دهیم.

$$M_{m_1} = 2k_1(T - Ty(0)) + aT - 2aTy(0)$$

$$M_{m_2} = -aTe^{(a+k_1)T}$$

با فرض اینکه ε مقدار کوچک مثبتی باشد، بهره‌ی کوچکتر از $k_1 = -a$ برابر است با $k_1 = -a - \varepsilon$ و بهره‌ی بزرگتر از آن برابر است با $k_1 = -a + \varepsilon$. لذا:

$$k_1 = -a - \varepsilon \quad (13)$$

$$\rightarrow \begin{cases} M_{m_1} = -aT + 2\varepsilon T(y(0) - 1) \\ M_{m_2} = -aT + \varepsilon T(aT) \end{cases}$$

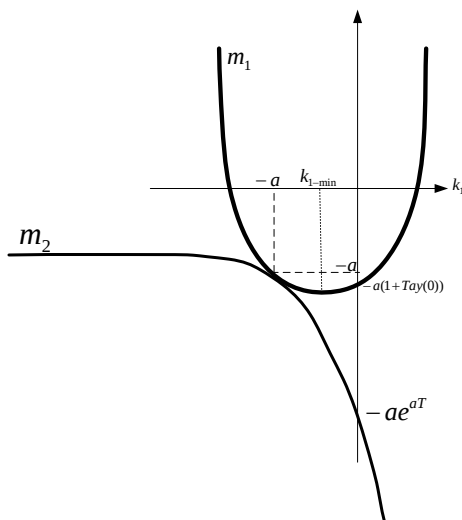
با توجه به اینکه $-aT$ مقداری است منفی و $(y(0) - 1)$ نیز مقداری است منفی، لذا به ازای $k_1 = -a - \varepsilon$ $|M_{m_1}| > |M_{m_2}|$ است.

همچنین:

$$k_1 = -a + \varepsilon \quad (14)$$

$$\rightarrow \begin{cases} M_{m_1} = -aT - 2\varepsilon T(y(0) - 1) \\ M_{m_2} = -aT - \varepsilon T(aT) \end{cases}$$

پس به ازای $k_1 = -a + \varepsilon$ $|M_{m_1}| > |M_{m_2}|$ است. پس دو نمودار حتماً به صورت شکل ۲۵ تلاقی دارند. بنابراین در این حالت تابع f اکسترممی ندارد.



شکل ۲۵- نحوه‌ی تلاقی دو نمودار m_1 و m_2 به ازای $0 < a$ و $y(0) < 1$

۱۰- پیوست د

در این قسمت اکسترمم‌های تابع f به ازای $y(0) > 1$ و $a > 0$ بدست می‌آیند.

$$f = \frac{k_1}{a + k_1} (1 - e^{-(a+k_1)T}) + e^{-(a+k_1)T} y(0)$$

لذا:

$$\frac{df}{dk_1} = \frac{1}{(a + k_1)^2} (a + e^{-(a+k_1)T} [-a + aTk_1 + Tk_1^2] - Te^{-(a+k_1)T} y(0)) \quad (9)$$

با فرض $k_1 \neq -a$ شرط صفر شدن مشتق f به صورت زیر است:

$$k_1^2(T - Ty(0)) + k_1(aT - 2aTy(0)) - a(1 + Tay(0)) = -ae^{(a+k_1)T} \quad (10)$$

با تعریف:

$$\begin{cases} m_1 = k_1^2(T - Ty(0)) + k_1(aT - 2aTy(0)) - a(1 + Tay(0)) \\ m_2 = -ae^{(a+k_1)T} \end{cases} \quad (11)$$

نقاط تلاقی m_1 با m_2 نقاط اکسترمم f هستند. ابتدا علامت ضریب k_1^2 در m_1 را تعیین می‌کنیم.

$$0 < y(0) < 1 \rightarrow 0 < Ty(0) < T \rightarrow -T < -Ty(0) < 0 \rightarrow 0 < T - Ty(0) < T$$

بنابراین تفرع سهموی m_1 رو به بالا است. مقدار کمینه‌ی این سهموی به ازای k_1 به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \frac{dm_1}{dk_1} &= 2k_1(T - Ty(0)) + aT \\ &- 2aTy(0) = 0 \\ &\rightarrow k_{1-min} = \frac{-a + 2ay(0)}{2(1 - y(0))} \end{aligned} \quad (12)$$

به دلیل اینکه $k_1 = -a$ نقطه‌ی مهمی است، خوب است ببینیم بدست آمده نسبت به $-a$ چگونه است.

$$\begin{aligned} k_{1-min} &= \frac{-a + 2ay(0)}{2(1 - y(0))} \\ &= -a \frac{1 - 2y(0)}{2 - 2y(0)} \\ &\xrightarrow{|2-2y(0)| > |1-2y(0)|} \frac{1 - 2y(0)}{2 - 2y(0)} < 1 \\ &\rightarrow k_{1-min} > -a \end{aligned}$$

همچنین مقدار m_1 در این بهره برابر است با:

$$\Rightarrow m_{1-min} = -\frac{a^2T}{4(1 - y(0))} - a$$

همچنین با توجه به مثبت بودن علامت عبارت $\frac{a^2T}{4(1-y(0))}$ مقدار $m_{1-min} < -a$ است.

به ازای $k_1 = -a$ هر دو نمودار m_1 و m_2 در مقدار $-a$ قرار دارند. لذا دو نمودار در $k_1 = -a$ با یکدیگر تلاقی دارند و این نقطه نقطه‌ی ناپیوستگی تابع f نیز هست.

بنابراین در دو حالت بالا نقطه‌ای $k_1 = -a$ اکسترم نبوده و باید نقطه‌ای دیگری اکسترم باشد. در حالتی که $2(y(0) - 1) = aT$ تقریب دو جمله‌ای تابع نمایی کارساز نبوده و از تقریب سه جمله‌ای آن استفاده می‌کنیم. به این ترتیب:

$$\begin{aligned} \text{if } 2(y(0) - 1) &= aT \\ \rightarrow \begin{cases} k_1 = -a - \varepsilon \rightarrow |M_{m_1}| < |M_{m_2}| \\ k_1 = -a + \varepsilon \rightarrow |M_{m_1}| < |M_{m_2}| \end{cases} \\ \rightarrow -a \text{ is an extreme} \end{aligned}$$

پس تنها در این حالت نقطه‌ای ناپیوستگی نمودار با نقطه‌ای اکسترم یا مینیم تابع f برابر خواهد بود. با توجه به مقایسه‌ای که در حالت‌های مختلف، بین شیب دو نمودار قبل و بعد از $k_1 = -a$ انجام دادیم دو نمودار m_1 و m_2 مطابق شکل ۲۶ خواهند بود. توجه داریم که در هر سه حالت همانطور که اثبات شد k_1 ای که در آن سهموی به حداکثر مقدار خود می‌رسد همواره از $-a$ کوچکتر است و مکان k_{1-ext} بسته به نوع حالت می‌تواند قبل یا بعد از $k_1 = -a$ قرار گیرد. بنابراین خروجی همواره دارای یک اکسترم و یک نقطه‌ی ناپیوستگی است و تنها در یک حالت این دو نقطه روی هم قرار می‌گیرند.

۱۱- پیوسته

در این قسمت اکسترم‌های تابع f به ازای $0 < y(0) < 1$ و $a < 0$ بدست می‌آیند. مشابه این کار در پیوست ج، البته به ازای $a > 0$ انجام شد.

$$\begin{aligned} f &= \frac{k_1}{a + k_1} (1 - e^{-(a+k_1)T}) + e^{-(a+k_1)T} y(0) \\ \text{مشابه پیوست ج با فرض } k_1 \neq -a \text{ شرط صفر شدن مشتق } f, \text{ تلاقی دو نمودار } m_1 \text{ و } m_2 \text{ موجود در رابطه ی (۱۱) است.} \\ \text{ابتدا علامت ضرب } k_1^2 \text{ در } m_1 \text{ را تعیین می‌کنیم.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \frac{k_1}{a + k_1} (1 - e^{-(a+k_1)T}) + e^{-(a+k_1)T} y(0) \\ \text{با توجه به پیوست قبل با فرض } k_1 \neq -a \text{ شرط صفر شدن مشتق } f \text{ تلاقی دو نمودار } m_1 \text{ و } m_2 \text{ طبق رابطه ی (۱۱) است. در حقیقت نقاط تلاقی } m_1 \text{ با } m_2, \text{ می‌توانند نقاط اکسترم } f \text{ باشند. ابتدا علامت ضرب } k_1^2 \text{ در } m_1 \text{ را تعیین می‌کنیم.} \end{aligned}$$

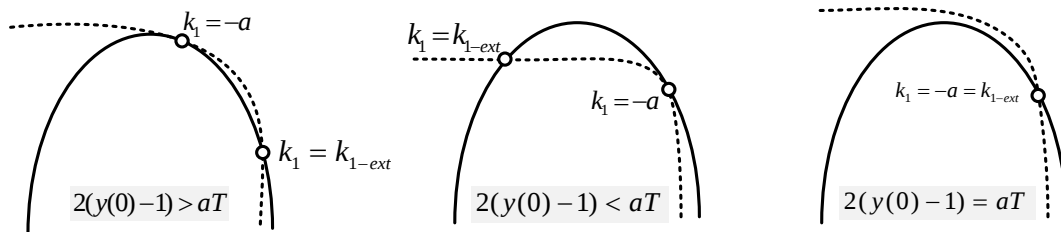
$$\begin{aligned} y(0) > 1 \rightarrow Ty(0) > T \rightarrow -Ty(0) < -T \\ \rightarrow T - Ty(0) < 0 \end{aligned}$$

بنابراین تقعر سهموی m_1 رو به پایین است. مقدار بیشینه این سهموی به ازای k_1 ای به صورت رابطه ی (۱۲) خواهد بود و خوب است ببینیم بدست آمده نسبت به $-a$ چگونه است.

$$\begin{aligned} k_{1-max} &= \frac{-a + 2ay(0)}{2(1 - y(0))} \\ &= -a \frac{1 - 2y(0)}{2 - 2y(0)} \\ \frac{|2 - 2y(0)| < |1 - 2y(0)|}{2 - 2y(0)} \frac{1 - 2y(0)}{2 - 2y(0)} &> 1 \\ \rightarrow k_{1-max} &< -a \end{aligned}$$

مقدار m_1 و m_2 به ازای $k_1 = -a$ برابر $-a$ است، لذا دو نمودار در این نقطه حتماً تلاقی دارند. ولی بررسی می‌کنیم که آیا $k_1 = -a$ نقطه‌ی اکسترم تابع هست یا خیر. به این منظور مشابه پیوست ج از شیب دو نمودار طبق روابط (۱۳) و (۱۴) بهره می‌بریم. همانطور که مشخص است $2(y(0) - 1)$ باید با aT مقایسه شود. لذا:

$$\begin{aligned} \text{if } 2(y(0) - 1) &> aT \\ \rightarrow \begin{cases} k_1 = -a - \varepsilon \rightarrow |M_{m_1}| < |M_{m_2}| \\ k_1 = -a + \varepsilon \rightarrow |M_{m_1}| > |M_{m_2}| \end{cases} \\ \rightarrow -a \text{ is not an extreme} \\ \text{if } 2(y(0) - 1) &< aT \\ \rightarrow \begin{cases} k_1 = -a - \varepsilon \rightarrow |M_{m_1}| > |M_{m_2}| \\ k_1 = -a + \varepsilon \rightarrow |M_{m_1}| < |M_{m_2}| \end{cases} \\ \rightarrow -a \text{ is not an extreme} \end{aligned}$$



شکل ۲۶- نمودارهای m_1 و m_2 برای تعیین اکسترم‌های خروجی در حالت $a > 0$ و $y(0) > 1$

بنابراین تقعر سهموی m_1 رو به بالا است. مقدار کمینه‌ی این سهموی به ازای k_1 ای به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} 0 < y(0) < 1 \rightarrow 0 < Ty(0) < T \rightarrow -T < -Ty(0) \\ < 0 \rightarrow 0 < T - Ty(0) < T \end{aligned}$$

بنابراین در دو حالت بالا نقطه‌ی $k_1 = -a$ اکسترمم نبوده و باید نقطه‌ی دیگری اکسترمم باشد. در حالتی که $2(y(0) - 1) = aT$ است تقریب دو جمله‌ای تابع نمایی کارساز نبوده و از تقریب سه جمله‌ای آن استفاده می‌کنیم.
به این ترتیب:

$$\text{if } 2(y(0) - 1) = aT$$

$$\rightarrow \begin{cases} k_1 = -a - \varepsilon \rightarrow |M_{m_1}| < |M_{m_2}| \\ k_1 = -a + \varepsilon \rightarrow |M_{m_1}| < |M_{m_2}| \end{cases}$$

$$\rightarrow -a \text{ is an extreme}$$

پس تنها در این حالت نقطه‌ی ناپیوستگی نمودار با نقطه‌ی اکسترمم یا ماکزیمم تابع اصلی برابر خواهد بود. به این ترتیب دو نمودار m_2 و m_1 به صورت شکل ۲۷ خواهند بود.

لذا خروجی همواره دارای یک اکسترمم و یک نقطه‌ی ناپیوستگی است و اگر $2(y(0) - 1) = aT$ باشد این دو نقطه یکی خواهند شد.

۱۲- پیوست ی

در این قسمت اکسترمم‌های تابع f به ازای $y(0) > 1$ و $a < 0$ بدست می‌آیند. به این منظور از تلاقی دو تابعی که در رابطه‌ی (۱۱) تحت عنوان m_2 و m_1 معرفی شدند، استفاده می‌شود. با توجه به منفی بودن $T - Ty(0)$ تقریب سهموی m_1 رو به پایین است. البته $k_{1-max} > -a$ است و مقدار m_1 در این بهره حتماً مقدار مثبتی دارد:

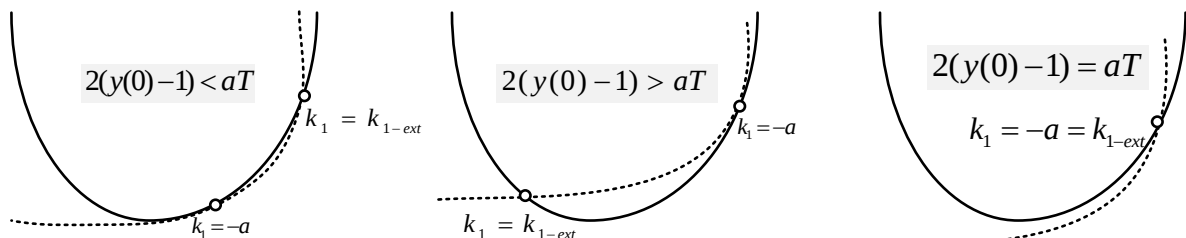
$$\Rightarrow m_{1-max} = -\frac{a^2 T}{4(1-y(0))} - a \rightarrow m_{1-max} > 0$$

همچنین:

$$\text{if } k_1 = -a \rightarrow \begin{cases} m_1 = -a \\ m_2 = -a \end{cases}$$

$$\text{if } k_1 = 0 \rightarrow \begin{cases} m_1 = -a(1 + Tay(0)) \\ m_2 = -ae^{aT} \end{cases}$$

$$\text{if } k_1 \rightarrow -\infty \rightarrow \begin{cases} m_1 \rightarrow -\infty \\ m_2 \rightarrow 0 \end{cases}$$



شکل ۲۷- نحوه‌ی تلاقی دو نمودار m_2 و m_1 به ازای $0 < y(0) < 1$ و $a < 0$

$$\begin{aligned} \frac{dm_1}{dk_1} &= 2k_1(T - Ty(0)) + aT \\ -2aTy(0) &= 0 \\ \rightarrow k_{1-min} &= \frac{-a + 2ay(0)}{2(1-y(0))} \end{aligned} \quad (15)$$

به دلیل اینکه $k_1 = -a$ نقطه‌ی مهمی است، خوب است ببینیم بدست آمده نسبت به $-a$ چگونه است.

$$\begin{aligned} k_{1-min} &= \frac{-a + 2ay(0)}{2(1-y(0))} \\ &= -a \frac{1 - 2y(0)}{2 - 2y(0)} \\ \frac{|2-2y(0)| > |1-2y(0)|}{2 - 2y(0)} &> \frac{1 - 2y(0)}{2 - 2y(0)} < 1 \\ \rightarrow k_{1-min} &< -a \end{aligned}$$

همچنین مقدار m_1 در این بهره برابر است با:

$$\Rightarrow m_{1-min} = -\frac{a^2 T}{4(1-y(0))} - a$$

همچنین با توجه به مثبت بودن علامت عبارت $\frac{a^2 T}{4(1-y(0))}$ مقدار $m_{1-min} < -a$ است.

هر دو نمودار m_2 و m_1 به ازای $k_1 = -a$ در مقدار $-a$ قرار دارند. برای رسم این دو نمودار از مقایسه‌ی شیب آن‌ها طبق روابط (۱۳) و (۱۴) قبل و بعد از نقطه‌ی $k_1 = -a$ بهره می‌بریم. همچنین با این مقایسه تعیین می‌شود که آیا $k_1 = -a$ علاوه بر اینکه نقطه‌ی ناپیوستگی تابع است آیا نقطه‌ی اکسترمم آن نیز هست یا خیر.

همانطور که مشخص است $2(y(0) - 1)$ باید با aT مقایسه شود. لذا:

$$\text{if } 2(y(0) - 1) > aT$$

$$\rightarrow \begin{cases} k_1 = -a - \varepsilon \rightarrow |M_{m_1}| > |M_{m_2}| \\ k_1 = -a + \varepsilon \rightarrow |M_{m_1}| < |M_{m_2}| \end{cases}$$

$$\rightarrow -a \text{ is not an extreme}$$

$$\text{if } 2(y(0) - 1) < aT$$

$$\rightarrow \begin{cases} k_1 = -a - \varepsilon \rightarrow |M_{m_1}| < |M_{m_2}| \\ k_1 = -a + \varepsilon \rightarrow |M_{m_1}| > |M_{m_2}| \end{cases}$$

$$\rightarrow -a \text{ is not an extreme}$$

[۵] علی فیاضی، حسین احمدی نوبری، حسن فاتحی مرج. "همزمان سازی سیستم های مرتبه کسری آشوبی جنسیو تسی و کولت با استفاده از کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری". مجله کنترل، جلد ۵، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۰، صفحه ۱-۱۱.

[6] Cominos, P. and Munro, N., "PID controllers: recent tuning methods and design to specification", IEE Proceedings- Control Theory and Applications, Vol. 149, pp. 46-53, 2002.

[7] Åström, K.J. and Hägglund, T., PID Controllers: Theory, Design and Tuning, 2nd edn. Research Instrument Society of America, Triangle Park, North Carolina, USA, 1995.

[8] Shabnam Armaghan, Arefeh Moridi and Ali Khaki Sedigh, "Design of a Switching PID Controller for a Magnetically Actuated Mass Spring Damper". Proceedings of the World Congress on Engineering 2011 Vol III WCE 2011, July 6 - 8, 2011, London, U.K.

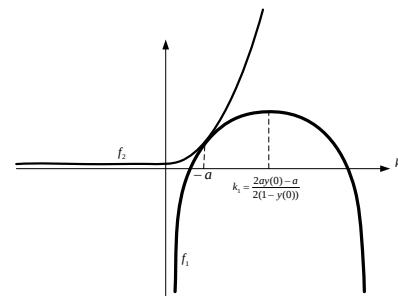
[۹] ایمان غفاری، عبدالمجید خوشنود، جعفر روشنی یان. "کنترل تطبیقی مدل - مرجع یک ماهواره بر انعطاف پذیر با جرم محموله سنگین". مجله کنترل، جلد ۴، شماره ۴، زمستان ۱۳۸۹، صفحه ۳۲-۳۸.

[10] Saranya, M. and Pamela, D., "A real time IMC tuned PID controller for DC motor", International Journal of Recent Technology and Engineering, Vol. 1, pp. 65-70, April 2012.

[11] Isin Erenoglu, Ibrahim Eksin, Engin Yesil, Mujde Guzelkaya, "AN INTELLIGENT HYBRID FUZZY PID CONTROLLER". Proceedings 20th European Conference on Modelling and Simulation Wolfgang Borutzky, Alessandra Orsoni, Richard Zobel © ECMS, 2006. ISBN 0-9553018-0-7 / ISBN 0-9553018-1-5 (CD).

برای رسم نمودار m_1 و m_2 از شیب دو نمودار قبل و بعد از $k_1 = -a$ مطابق روابط (۱۳) و (۱۴) بهره می‌بریم. مشابه قبل $2(y(0) - 1)$ باید با aT مقایسه شود. با توجه به اینکه $2(y(0) - 1)$ مقدار مثبتی است و aT مقداری است منفی، پس همواره $2(y(0) - 1) > aT$ است. به این ترتیب:

$$\begin{aligned} \text{if } 2(y(0) - 1) > aT \\ \rightarrow \begin{cases} k_1 = -a - \varepsilon \rightarrow |M_{m_1}| > |M_{m_2}| \\ k_1 = -a + \varepsilon \rightarrow |M_{m_1}| < |M_{m_2}| \end{cases} \\ \rightarrow -a \text{ is not an extreme} \end{aligned}$$



شکل ۲۸- نمودارهای m_1 و m_2 تنها با یک تلاقی برای حالتی که

$$a < 0 \text{ و } y(0) > 1$$

بنابراین در حالت بالا نقطه‌ی $k_1 = -a$ اکسترم نبوده و باید نقطه‌ی دیگری اکسترم باشد با توجه به شیب نمودارها مطابق شکل ۲۸ امکان ندارد اکسترمی وجود داشته باشد.

۱۳-مراجع

[1] Åström, K.J. and Hägglund, T. "The future of PID control", Control Engineering Practice, Vol. 9, pp. 1163-1175, 2001.

[2] Wenge, Lv., Deyuan, Li., Cheng, Luo, S., Zhang, X. and Zhang, L., "Research on PID control parameters tuning based on election-survey optimization algorithm", in Proceedings International Conference on Computing, Control and Industrial Engineering (CCIE), pp. 323-326, 2010.

[۳] خانم آرمیتا فاطمی مقدم، آرشد شریفی، محمد تشنه لب. "شناسایی و پیش بینی سیستم غیرخطی کوره دوار سیمان با استفاده از شبکه عصبی - فازی و انتخاب ورودی ها به کمک الگوریتم ژنتیک". مجله کنترل، جلد ۵، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۰، صفحه ۲۲-۳۳.

[4] Yolanda Bolea, Vicenç Puig, Joaquim Blesa, "Gain-Scheduled Smith PID Controllers for LPV First Order plus Time Varying Delay Systems". Automatic Control Department, Technical University of Catalonia (UPC), Pau Gargallo 5, 08028 Barcelona, Spain.