مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد۱۴، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۹، صفحه ۴۱-۲۵

مقایسه عملکرد تخمین‌گرهای تصادفی با رؤیت‌گر حفظ تقارن برای تعیین وضعیت نانوماهواره با تک حسگر مغناطیس‌سنج

ساناز سبزواری[۱]، احمدرضا ولی [۲]، محمدرضا عاروان[۳]، سیدمحمدمهدی دهقان[۴]، محمدحسین فردوسی [۵]

[۱] فارغ‌التحصیل دکتری مهندسی برق، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر تهران، s_sabzevari@mut.ac.ir

[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر تهران، vali@mut.ac.ir

[۳] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر تهران، arvan@mut.ac.ir

[۴] استادیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر تهران، smmd@mut.ac.ir

[۵] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر تهران، ferdowsi@mut.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۸/۰۱/۲۹ ویرایش : ۱۳۹۸/۰۹/۰۵ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۰/۲۲

چکیده: طراحی تخمین‌گر وضعیت نانوماهواره‌ها با تک حسگر مغناطیس‌سنج، به دلیل محدودیت در وزن و حجم، محدود بودن طول عمر ژیروسکوپ‌های مکانیکی در بلند مدت و پدیده کسوف، امری ضروری است. رویکرد این مقاله برای جبران این کمبود داده، فیلتر دو مرحله‌ای است. بدین صورت که وضعیت در فیلتر مرحله‌ی دوم با استفاده از داده‌ی حسگر و مشتق میدان مغناطیسی ناشی از تخمین فیلتر مرحله‌ی اول با فیلتر کالمن توسعه‌یافته، تعیین می‌گردد. به منظور دسترسی به دقت مناسب برای تعیین وضعیت نانوماهواره با تک حسگر سه محوره، دو الگوریتم تصادفی فیلتر کالمن توسعه‌یافته ضربی و تخمین‌گر جذر مربعی چهارگان بی‌رد با رؤیت‌گر غیرخطی حفظ تقارن پیشنهادی مقایسه شده است. رؤیت‌گر ارائه شده، بر مبنای رؤیت‌گرهای غیرمتغیر تحت عملکرد گروه لی است. برای این منظور، در روند طراحی از رویکرد چارچوب متحرک استفاده شده است تا با استفاده از معادلات دینامیک خطای غیرمتغیر بتوان پارامترهای رؤیت‌گر را تنظیم کرد. نتایج شبیه‌سازی در هر دو حوزه زمان و پاسخ فرکانسی، دقت قابل قبول را در هرسه الگوریتم تأیید می‌کند. اما درصورتی که خطای تخمین اولیه‌ی وضعیت بزرگتر شود، خطای میانگین جذر مربعی رؤیت‌گر غیرخطی، بسیار کمتر از دو الگوریتم تصادفی است. همچنین در این روش به دلیل تنظیم پارامترها با معادلات ریکاتی دیفرانسیلی متناوب، از طریق پایداری لیاپانوف همگرائی را نیز تضمین می‌کند.

کلمات کلیدی: تعیین وضعیت نانوماهواره، تک حسگر مغناطیس‌سنج، تخمین‌گرهای چهارگان تصادفی، رؤیت‌گر غیرخطی حفظ تقارن.

Comparison Performance of Stochastic Estimators and Symmetry-Preserving Observer to Determine Nanosatellite Attitude with a Single-Sensor Magnetometer

Sanaz Sabzevari, Ahmad Reza Vali, Mohammad Reza Arvan, Seyyed Mohammad Mehdi Dehghan, Mohammad Hossein Ferdowsi

Abstract: Designing the estimator that can determine the attitude with a single sensor is vital due to the limited weight and volume in the nano-satellite, the problems caused by the limited lifetime of

نویسنده عهده دار مکاتبات: احمدرضا ولی

the mechanical gyroscope in the long term and the eclipse phenomenon. To compensate for data deficiency, a two-nested filter has been utilized in this paper. To this end, the attitude in the second filter is estimated using the sensor data and the magnetic field derivative estimation from the first filter by the extended Kalman filter. Two stochastic algorithms named as multiplicative extended Kalman filter and square-root unscented quaternion estimator are compared with the proposed symmetry-preserving nonlinear observer in order to obtain an appropriate accuracy for determining the attitude of the nano-satellite, which has only a three-axis magnetometer. The proposed method is based on invariant observers under the action of the Lie group. The moving frame approach has been used so that the observer's parameters can be adjusted through the invariant error dynamic equations. Simulation results confirm an acceptable accuracy in all three algorithms for both time and frequency response analyses. However, the root mean square error of the attitude error with a nonlinear observer is much less than the stochastic algorithm in case of a larger initial estimation error. Furthermore, this approach guarantees convergence by the Lyapunov stability proof owing to setting the parameters with periodic differential Riccati equations.

Keywords: Nano-satellite attitude determination, only magnetometer data, stochastic quaternion estimators, symmetry preserving nonlinear observe

[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.9.3]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.25]

۱- مقدمه

مسئله‌ی تعیین وضعیت ماهواره در مدار نزدیک به زمین برای کاربردهای مختلفی نظیر آنتن‌های مخابراتی، برای ارسال و دریافت داده از دیرباز مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته و روش‌های گوناگون نیز برای این منظور ابداع شده است. روش تخمین وضعیت نانوماهواره‌های کم هزینه به طور عمده بر مبنای وجود دو حسگر خورشیدی و مغناطیس‌سنج است که در مقالاتی مانند [۱] بررسی شده است. در زمان این ارسال و دریافت داده، ممکن است بعضی از حسگرها در شرایط خاصی قادر به اندازه‌گیری نباشند. برای نمونه اگر در شرایط کسوف باشیم، در چنین حالتی داده‌ی حسگر خورشیدی موجود نیست. همچنین از حسگرهای متداول دیگری که در تعیین وضعیت استفاده می‌شود ژیروسکوپ است. ژیروسکوپ‌های مرسوم به دلایل صرفه‌ی اقتصادی، اندازه و وزن بیشتر از نوع میکرو الکترو مکانیکی هستند. اما این نوع از ژیروسکوپ‌ها دقت پایینی دارند که به‌طورمعمول بایاس آن را در مقالات تخمین می‌زنند. به‌علاوه، ژیروسکوپ‌هایی با دقت بالاتر نیز گران هستند [۲-۳]. حسگر ستاره‌یاب نیز یکی از حسگرهای تعیین وضعیت است. این حسگر، در واقع یک دوربین با قدرت تفکیک بسیار زیاد است که از آسمان تصویربرداری می‌کند و با پردازش این تصاویر، ستاره‌های خاصی (مانند ستاره‌ی قطبی) را آشکارسازی کرده و وضعیت ماهواره را نسبت به این ستاره‌ها اندازه‌گیری می‌کند. حسگر ستاره‌یاب محدوده قیمتی و توان مصرفی بالایی دارد که در کاربردهای عملی، بخصوص در نانوماهواره، مقرون به‌صرفه نخواهد بود. به لحاظ وزن و ابعاد حسگر ستاره، استفاده از آن برای نانوماهواره‌ای که بیشینه کل وزن آن در حدود ۱۵ کیلو است و حسگرهای دیگری هم وجود دارد، منطقی نیست [۴]. در [۴] به طور مختصر، مروری بر روش‌های بدون ژیروسکوپ در تعیین وضعیت نانوماهواره پرداخته است که با تفکیک کلی میان روش‌های استفاده و عدم استفاده از معادلات دینامیکی و سینماتیکی ماهواره بیان شده‌اند. در روشی که از معادلات دینامیکی استفاده می‌کند، شامل روش‌های تخمین خطی و غیرخطی فیلترهای کالمن است. درصورت عدم استفاده از معادلات ماهواره، نیازمند حداقل دو بردار مشاهده و یا حسگرهای قوی تعیین وضعیت همچون حسگر ستاره‌یاب و یا سامانه موقعیت‌یاب جهانی (GPS[1]) است. در این مقاله بدنبال آن هستیم که در شرایط کسوف و عدم دسترسی به داده‌ی حسگر خورشیدی و سایر حسگرهای وضعیت، با تک داده‌ی حسگر سه محوره‌ی مغناطیس‌سنج که حسگر متداول در نانوماهواره بوده و با دقتی مطلوب است، بتوان وضعیت ماهواره را تخمین زد.

در مقالاتی که تنها از داده‌ی حسگر مغناطیس‌سنج به‌تنهایی برای تعیین وضعیت استفاده کرده‌اند، ذکر شده است که این داده‌ها به‌تنهایی برای تعیین وضعیت در سه محور کافی نیستند و احتیاج به یک پیش فیلتر برای تخمین یک سری اطلاعات از روی اندازه‌گیری‌های مغناطیس‌سنج وجود دارد. از این اطلاعات به‌عنوان اندازه‌گیری دوم، علاوه بر اندازه‌گیری‌های مغناطیس‌سنج در فیلتر اصلی برای تخمین وضعیت و سرعت زاویه‌ای می‌توان استفاده کرد. یکی از اولین راهکارها در این حوزه برای تعیین وضعیت با تنها داده‌ی مغناطیس‌سنج به‌وسیله‌ی سیاکی[2] ارائه شده است [۵]. اندازه‌ی خطا به‌وسیله‌ی روش فیلتر کالمن سیاکی بدست آمده است. این روش نشان داده است که خطاهایی در حدود دو تا سه درجه بعد از حدود ۲۰۰۰ ثانیه با خطای اولیه پایین فیلتر دارد. البته شرایط رؤیت‌پذیری در این سامانه بررسی نشده و نتایج نیز زمان همگرایی به نسبت بالایی دارد. همچنین یکی از اولین مطالعات کاربردی تعیین وضعیت که تنها از حسگر مغناطیس‌سنج استفاده کرده است، با مأموریت فضایی آزمایش اعتبار ارتعاش زمین راستی آزمایی شد که قربانی عدم تعیین وضعیت به‌طور

[1] Global Positioning System

[2] Psiaki

صحیح شد و ناپدید گردید. همچنین با بکارگیری حسگر مغناطیس‌سنج، روشی به‌نام DADMOD[1] (تعیین وضعیت قطعی با استفاده از تنها داده‌ی مغناطیس‌سنج) توسعه داده شده است [۶]. این روش، وضعیت و سرعت زاویه‌ای را از روی داده‌ی مغناطیس‌سنج با به‌کارگیری تفاضل محدود از اندازه‌گیری، و با دانستن شتاب زاویه‌ای فضاپیما برای یافتن مشتق میدان مغناطیسی تخمین زده است. معادلات از درجه دوم هستند، به‌طوری‌که چندین راه‌حل وجود دارد، ولی DADMOD یکی از دو راه‌حلی که به احتمال قوی وضعیت صحیح را ارائه می‌دهند، انتخاب کرد. این روش برای پیاده‌سازی زمان حقیقی، که اندازه‌گیری‌ها نویزی هستند، باعث جلوگیری حل صحیح می‌شود. در [۷]، فیلتر کالمن دوگانه را با سناریوی مشترکی که فضاپیما در دستگاه لخت ثابت بوده و دوران نمی‌کند، توسعه داده است. مفهوم این سناریو بدین صورت است که جسمی که حول محور کوچک یا بزرگش می‌چرخد، جهت محور چرخشش را نسبت به فضای لخت ثابت نگه می‌دارد. در این مقاله به محدودیت چهارگان در تخمین فیلتر مرحله‌ی دوم توجه نشده است و لذا نتوانسته تخمین وضعیت را به درستی انجام دهد. همچنین نتایج را بر روی زوایای اولر نمایش نداده است. روشی که در [۶] مطرح شده است، استفاده از تفاضل محدود برای یافتن مشتق بردار میدان مغناطیسی است تا بتوان بردار دوم اندازه‌گیری را فراهم آورد. در زمان حقیقی به دلیل غیرخطی بودن میدان مغناطیسی، این ایده عملی نیست. نوسانات کوچکی بازمان نمونه‌برداری یک ثانیه باعث ایجاد خطاهایی شدید در محاسبات مشتق خواهد شد. زمانی که بردار نویزی میدان مغناطیسی و بردار مشتق آن در الگوریتم DADMOD استفاده می‌شوند، تخمین‌های وضعیت در حدود ۶۰ تا ۷۰ درجه خطا دارند. اما زمانی که از مدل بدون نویز استفاده شده، وضعیت با موفقیت تعیین شده است. لذا این الگوریتم به نویز حساس بوده و در پیاده‌سازی زمان حقیقی غیردقیق است. در طراحی فیلتر کالمن توسعه‌یافته‌ی مرحله دوم، روش رساله‌ی [۸] با بهره‌گیری از داده‌های مشتق میدان مغناطیسی در فیلتر مرحله‌ی اول، از فیلتر کالمن توسعه‌یافته اصلی استفاده کرده است. اما محدودیت قید نرم واحد بودن چهارگان (با توجه به رساله‌های [۹] و [۱۰] در بروزرسانی چهارگان) در نظر گرفته نشده است که خود موجب واگرائی فیلتر و خطای برداری می‌شود. لذا فیلتر یا رؤیت‌گر می‌بایست نرم واحد بودن را در چهارگان برای خاصیت متعامد بودن دوران حفظ کند. راهکار دیگری نیز در زمان عدم دسترسی به داده‌ی حسگر خورشیدی و با وجود تنها حسگر مغناطیس‌سنج در [۱۱] مطرح شده است. با توجه به مقاله‌ی [۱۱]، در زمان دسترسی به داده‌ی حسگر خورشیدی، از ترکیب روش تجزیه مقادیر منفرد با فیلتر کالمن توسعه‌یافته برای تخمین زوایای اولر استفاده کرده است. اما در زمانی‌که کسوف رخ می‌دهد تنها از فیلتر کالمن توسعه‌یافته با داده‌ی حسگر مغناطیس‌سنج بهره گرفته است. این روش مشکلاتی نظیر واگرائی، عدم مقاومت در برابر خطای تخمین اولیه، تکینگی و برهم زدن خاصیت یکا متعامد ماتریس دوران ناشی از تخمین مستقیم زوایای اولر را به‌همراه دارد. به دلیل مقاوم بودن رؤیت‌گرهای غیرخطی در برابر خطای تخمین اولیه، می‌تواند به عنوان روشی در برابر روش‌های تصادفی ارائه شوند [۱۲]. یکی از کاندید رؤیت‌گرها، رؤیت‌گرهای حفظ تقارن هستند که به دلیل خاصیت غیر متغیر بودن و دینامیک خطای غیر متغیر مورد توجه قرار می‌گیرند [۱۳].

هدف این مقاله، تحلیل فیلتر طراحی شده جامع و تا حدکافی مقاوم است تا وضعیت دقیقی را در سناریوی مدار نزدیک زمین با تنها داده‌ی سه محوره‌ی مغناطیس‌سنج در شرایط کسوف و عدم دسترسی به داده‌ی حسگر خورشیدی تعیین نماید. برای این منظور لازم است تا مقایسه‌ای میان روش‌های تخمین مطرح شده، با در نظر گرفتن معیارهای خطای میانگین، زمان همگرایی و پاسخ فرکانسی انجام گردد. همچنین، یکی از شرایط لازم برای همگرائی تخمین، شرط رؤیت‌پذیری است. در سناریویی که فضاپیما نسبت به بردار میدان مغناطیسی ثابت است (اندازه‌گیری بردار میدان مغناطیسی تغییر نمی‌کند)، مسئله به‌طور کامل رؤیت‌ناپذیر است. لذا، به لحاظ شرایط فیزیکی در مدار استوایی نیز سامانه رؤیت‌ناپذیر است. بنابراین، در زمان کسوف که حدود یک سوم دوره‌ی مداری است، مسئله حائز ارزیابی است. همچنین، محورهای حسگر مغناطیس‌سنج در راستای محورهای دستگاه بدنه ماهواره بوده و خطای نصب آن روی ماهواره قابل صرفنظر کردن است.

در ادامه، به تبیین سامانه‌ی مورد نظر در بخش دوم پرداخته و رؤیت‌پذیری آن به طور مختصر مورد ارزیابی قرار داده می‌شود. سپس در بخش سوم به معرفی روش‌های مقایسه‌ای که دو نوع آن تصادفی و یک نوع آن قطعی است پرداخته می‌شود. به منزله‌ی حفظ نرم واحد چهارگان، الگوریتم‌های تصادفی نظیر فیلترکالمن توسعه‌یافته ضربی و جذر مربعی چهارگان بی‌رد در نظر گرفته شده‌اند. در سامانه‌ی تک حسگره‌ی مغناطیس‌سنج، به دلیل بارز بودن تفاوت روش جذر مربعی چهارگان بی‌رد با مرجع اصلی، این روش به همراه رؤیت‌گر غیرخطی حفظ تقارن توضیح داده شده است. در بخش چهارم نیز نتایج شبیه‌سازی که درآن فیلتر مرحله‌ی اول با فیلتر کالمن توسعه‌یافته انجام شده و فیلتر مرحله‌ی دوم از الگوریتم‌های فوق استفاده شده‌است، نیز مورد ارزیابی و مقایسه قرار می‌گیرد.

۲- مدل‌سازی و بیان مسئله

تعیین وضعیت، فرایند تعیین جهت فضاپیما در دستگاه بدنه $\{B\}$ نسبت به چارچوب مرجع $\{R\}$ است. عمده‌ترین بردارهای مرجع مورد استفاده بردارهای یکه در جهت خورشید، مرکز زمین، یک ستاره شناخته شده و یا میدان مغناطیسی زمین است. وضعیت فضاپیما نسبت به بردارهای مرجع، پس از این‌که این بردارها نسبت به چارچوب فضاپیما تعیین شدند، قابل محاسبه است [۱۴]. در فرایند تعیین وضعیت فضاپیما به کمک

[1] Deterministic Attitude Determination using Magnetometer Only Data

حسگرهای مرجع، از بردارهای یکه نظیر خروجی‌های اندازه‌گیری‌شده استفاده می‌شود، چرا که وضعیت زاویه‌ای نسبت به مراجع مشاهده‌شده در این حوزه حائز اهمیت بوده و طول بردارها نقشی در این فرایند ندارند. تعیین وضعیت به لحاظ ریاضی بسیار پیچیده بوده، زیرا یک مسئله‌ی نامعین و یا بیش معین است. تعیین وضعیت نیازمند سه پارامتر مستقل از هم است، در حالی‌که یک بردار یکه تنها دو پارامتر مستقل دارد. لذا تعیین وضعیت نیازمند بیش از یک بردار یکه و کمتر از دو بردار یکه اندازه‌گیری است [۱۵]. با توجه به این‌که در این مقاله تنها یک حسگر مغناطیس‌سنج وجود دارد (برای مدت زمان محدودی که ژیروسکوپ کار نمی‌کند و حسگر خورشیدی نیز به دلیل قرار گرفتن در کسوف قطع است)، لذا نیاز به جبران داده‌ی حسگر دوم وجود دارد. برای جبران حسگر دوم، مشتق میدان مغناطیسی در فیلتر مرحله‌ی اول تخمین زده می‌شود. در این‌صورت بررسی رؤیت‌پذیری، بایستی انجام پذیرد. لذا تعیین رؤیت‌پذیری فیلتر مرحله‌ی اول با در نظر گرفتن تنها اندازه‌گیری مغناطیس‌سنج برای تخمین پارامترهای چهارگان ضروری می‌باشد. بنابراین، به نحوه مدل‌سازی مسئله در قسمت اول پرداخته می‌شود. در قسمت دوم نیز، معادلات حاکم در هر مرحله تبیین و شرط رتبه برای رؤیت‌پذیری طبق مرجع [۱۶] ارزیابی می‌گردد.

۲-۱ مدل‌سازی سامانه تعیین وضعیت

با توجه به مسئله‌ی تک حسگر بودن این مقاله، مدل ریاضی مرحله‌ی اول برای تخمین داده‌ی مشتق میدان مغناطیسی تبیین شده است. مدل بعدی نیز با در نظر گرفتن داده‌ی حسگر میدان مغناطیسی در کنار داده‌ی تخمین زده شده برای تخمین وضعیت می‌باشد.

۲-۱-۱ مدل ریاضی مرحله‌ی اول

درصورتی‌که بردار واحد مرجع ${}^{I}\vec{\mathbf{B}}$ بیان شده در چارچوب لخت بوده و حسگر مغناطیس‌سنج که اندازه‌گیری را در چارچوب بدنه در اختیار می‌گذارد با ${}^{B}\vec{\mathbf{B}}$ نمایش دهیم آنگاه:

$$ {}^{B}\vec{\mathbf{B}}(t) \triangleq \left({}_{B}^{I}C\right)^{T}\, {}^{I}\vec{\mathbf{B}} \tag{۱}$$

لذا مشتق زمانی اندازه‌گیری با توجه به (۱)، طبق رابطه‌ی (۲) است (${}_{B}^{I}C$ ماتریس دوران از دستگاه بدنه $\{B\}$ به دستگاه لخت (اینرسی) $\{I\}$ و ${}_{B}^{I}\dot{C}$ مشتق زمانی ماتریس دوران از دید چارچوب بدنه است) [۱۷]:

$$ {}_{B}^{I}\dot{C} = {}_{B}^{I}C\left[\, {}^{B}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\times \right] \tag{۲}$$

به‌علاوه، سرعت زاویه‌ای ماهواره نسبت به دستگاه لخت و بیان شده در چارچوب بدنه ${}^{B}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I} := \left(\omega_x, \omega_y, \omega_z\right)^{T}$ است. همچنین $\left[\, {}^{B}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\times \right]$، همان $S\left[\, {}^{B}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I} \right]$ است که به صورت رابطه (۴) تعریف می‌شود:

$$ \begin{aligned} {}^{B}\dot{\vec{\mathbf{B}}}\Big|_{B} &= {}^{B}\left(D_B\vec{\mathbf{B}}\right) \triangleq \left({}_{B}^{I}\dot{C}\right)^{T}\, {}^{I}\vec{\mathbf{B}} = -\left[\, {}^{B}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\times\right]\left({}_{B}^{I}C\right)^{T}\, {}^{I}\vec{\mathbf{B}} = \\ &{}^{B}\vec{\mathbf{B}}\times {}^{B}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I} = -\left[\, {}^{B}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\times\right] {}^{B}\vec{\mathbf{B}} \end{aligned} \tag{۳}$$

$$ S({}^{B}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{۴}$$

با توجه به روابط بالا، برای معادلات دینامیکی سامانه‌ی نانوماهواره با اندازه‌گیری تنها مغناطیس‌سنج در فیلتر مرحله‌ی اول، رابطه‌ی (۵) برقرار است:

$$ \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} {}^{B}\vec{\mathbf{B}} \\ {}^{B}\left(D_B\vec{\mathbf{B}}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{B}\left(D_B\vec{\mathbf{B}}\right) \\ -\left[\, {}^{B}\dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I}\times\right]^{B}\vec{\mathbf{B}} + \left[\, {}^{B}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\times\right]\left(\left[\, {}^{B}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\times\right]^{B}\vec{\mathbf{B}}\right) \end{bmatrix} = \\ &{}^{B}\vec{F}\left({}^{B}\vec{\mathbf{B}}, {}^{B}\left(D_B\vec{\mathbf{B}}\right), {}^{B}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\right) \\ &{}^{B}\vec{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۵}$$

در رابطه‌ی مذکور، ${}^{B}\left(D_B\vec{\mathbf{B}}\right)$ متغیر حالت مشتق میدان مغناطیسی از دید چارچوب بدنه بیان شده در دستگاه بدنه که برابر ${}^{B}\dot{\vec{\mathbf{B}}}\Big|_{B} = \frac{d}{dt}({}^{B}\vec{\mathbf{B}})$ است و ${}^{B}\vec{\boldsymbol{y}}$ بردار اندازه‌گیری حسگر مغناطیس‌سنج بیان شده در دستگاه بدنه جسم صلب است. همچنین مشتق بردار سرعت زاویه‌ای در دستگاه بدنه و معادلات دینامیکی آن طبق (۶) بدست می‌آید:

$$ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\, {}^{M}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I} &= \left({}^{M}\boldsymbol{J}^{-1}\right)\left({}^{M}\boldsymbol{J}\left({}^{M}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\right)\times {}^{M}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I} + {}^{M}\vec{\boldsymbol{\tau}}\right) \\ &\equiv H\left({}^{M}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\right) + {}^{M}\boldsymbol{J}^{-1}\left({}^{M}\vec{\boldsymbol{\tau}}\right) \end{aligned} \tag{۶}$$

در رابطه‌ی بالا، ${}^{M}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}$ و ${}^{M}\vec{\boldsymbol{\tau}}$ به ترتیب، بردارهای سرعت زاویه‌ای دستگاه بدنه نسبت به لخت و گشتاور اغتشاشی بیان شده در چارچوب اصلی $\{M\}$ هستند. همچنین، ${}^{M}\boldsymbol{J}$ ماتریس ممان اینرسی قطری در چارچوب اصلی است [۱۸]. در واقع این چارچوب طبق رابطه‌ی (۷)، ماتریس ممان اینرسی غیر قطری (${}^{B}\boldsymbol{J}$) را تحت ماتریس دوران ${}_{B}^{M}C$، به ماتریس قطری در چارچوب اصلی تبدیل می‌کند. ($eig(.)$ تابعی است که مقادیر ویژه ماتریس را محاسبه می‌کند.)

$$ \begin{aligned} &{}^{B}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I} = {}_{M}^{B}C\left({}^{M}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\right), {}^{B}\dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I} = {}_{M}^{B}C\left({}^{M}\dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I}\right) \\ &\left[{}_{M}^{B}C, {}^{M}\boldsymbol{J}\right] = eig\left({}^{B}\boldsymbol{J}\right) \end{aligned} \tag{۷}$$

۲-۱-۲ مدل ریاضی مرحله‌ی دوم

چنانچه سینماتیک وضعی ماهواره به صورت رابطه‌ی (۸) در نظر گرفته شد، به طوری که؛

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{2}\bar{q}_{B/I} \otimes \left[{}^{B}\vec{\omega}_{B/I};0\right]\right] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} q_4\omega_x + q_2\omega_z - q_3\omega_y \\ q_4\omega_y + q_3\omega_x - q_1\omega_z \\ q_4\omega_z + q_1\omega_y - q_2\omega_x \\ -q_1\omega_x - q_2\omega_y - q_3\omega_z \end{bmatrix} = {}^{B}\vec{H}(\bar{q}_{B/I}, {}^{B}\vec{\omega}_{B/I}) \tag{۸}$$

$$\{\bar{q}_{B/I}\} = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4\}^T = \{\sin(\rho/2)\hat{\boldsymbol{e}} \quad \cos(\rho/2)\}^T \tag{۹}$$

در روابط فوق، $\bar{q}_{B/I}$ آرایه چهارگان بدنه نسبت به لخت، $\hat{\boldsymbol{e}}$ بردار یکه دوران و ρ زاویه دوران می‌باشد.

در رابطه‌ی (۸)، علامت $\otimes$ نماد ضرب چهارگانی بین دو بردار $\bar{Q}_x = (\bar{q}_x; q_{4x})$ و $\bar{Q}_y = (\bar{q}_y; q_{4y})$ بوده که به صورت زیر تعریف می‌شود (این نوع ضرب چهارگانی تعویض‌پذیر نبوده، یعنی $\bar{Q}_1 \otimes \bar{Q}_2 \neq \bar{Q}_2 \otimes \bar{Q}_1$):

$$\bar{Q}_z = \bar{Q}_x \otimes \bar{Q}_y = \begin{pmatrix} q_{4x}\bar{q}_y + q_{4y}\bar{q}_x + \bar{q}_x \times \bar{q}_y \\ q_{4x}q_{4y} - \bar{q}_x^T\bar{q}_y \end{pmatrix} \tag{۱۰}$$

در معادله‌ی (۱۰)، $\times$ علامت ضرب خارجی است. معکوس چهارگان نیز که با علامت $\bar{Q}^{-1}$ نشان داده می‌شود، در صورتی که $\bar{Q} = (\bar{q}; q_4)$ باشد، $\bar{Q}^{-1} = (-\bar{q}; q_4)$ خواهد شد ($q_4 \in \mathbb{R}$ قسمت حقیقی و $\bar{q} = (q_1, q_2, q_3)^T \in \mathbb{R}^3$ قسمت برداری $\bar{Q}$ می‌باشد).

۲-۲ بررسی رؤیت‌پذیری سامانه تعیین وضعیت

با استفاده از روش هندسی یا جبری در مرجع [۱۵] که برای سامانه‌های گویا معادلند، با بهره‌گیری از مشتقات لی، می‌توان رؤیت‌پذیری محلی را بررسی کرد. برای این منظور برای تشکیل ماتریس ζ، ابتدا مشتقات لی برای سامانه (۵) که ماتریس اندازه‌گیری آن به صورت (۱۱) است، بدست آورده می‌شود:

$$\begin{aligned} {}^{B}g &= \begin{bmatrix} b_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ L_F^0(g_1) &= g_1 = \begin{bmatrix} b_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ L_F^0(g_2) &= g_2 = \begin{bmatrix} 0 & b_y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ L_F^0(g_3) &= g_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{۱۱}$$

که مشتقات لی طبق رابطه (۱۲) بدست آورده می‌شود:

$$L_f^i(h) = \begin{cases} h & ; \; for \; i = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left[L_f^{i-1}(h)\right] f & ; \; for \; i = 1,2,3,\ldots,n \end{cases} \tag{۱۲}$$

و در این سامانه در ادامه؛

$$\begin{aligned} L_F^1({}^{B}g) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}L_F^0({}^{B}g)\right).{}^{B}\vec{F} \\ &\vdots \\ L_F^5({}^{B}g) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}L_F^4({}^{B}g)\right).{}^{B}\vec{F} \end{aligned} \tag{۱۳}$$

$$\begin{aligned} L_F^1(g_1) &= \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{b}_x \\ \dot{b}_y \\ \dot{b}_z \\ \dot{\omega}_z b_y - \dot{\omega}_y b_z - \left(\omega_z^2 + \omega_y^2\right)b_x + \omega_x\omega_y b_y + \omega_x\omega_z b_z \\ -\dot{\omega}_z b_x - \dot{\omega}_x b_z - \left(\omega_z^2 + \omega_x^2\right)b_y + \omega_x\omega_y b_x + \omega_y\omega_z b_z \\ \dot{\omega}_y b_x - \dot{\omega}_x b_y - \left(\omega_x^2 + \omega_y^2\right)b_z + \omega_x\omega_y b_y + \omega_x\omega_z b_x \end{bmatrix}; \\ L_F^1(g_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.{}^{B}\vec{F}; \\ L_F^1(g_3) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.{}^{B}\vec{F}. \end{aligned} \tag{۱۴}$$

در رابطه (۱۴)، $\dot{\omega}_x$، $\dot{\omega}_y$ و $\dot{\omega}_z$ مؤلفه‌های بردار ${}^{B}\dot{\vec{\omega}}_{B/I}$ می‌باشد. همچنین در ادامه؛

$$\zeta = \begin{bmatrix} L_F^0(\mathrm{g}_1) & \cdots & L_F^0(\mathrm{g}_n) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ L_F^{m-1}(\mathrm{g}_1) & \cdots & L_F^{m-1}(\mathrm{g}_n) \end{bmatrix} \tag{۱۵}$$

گام نهایی محاسبه گرادیان ζ برای ماتریس رؤیت‌پذیری است:

$$d\zeta = \begin{bmatrix} dL_F^0(g_1) & \cdots & dL_F^0(g_n) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ dL_F^{m-1}(g_1) & \cdots & dL_F^{m-1}(g_n) \end{bmatrix} \tag{۱۶}$$

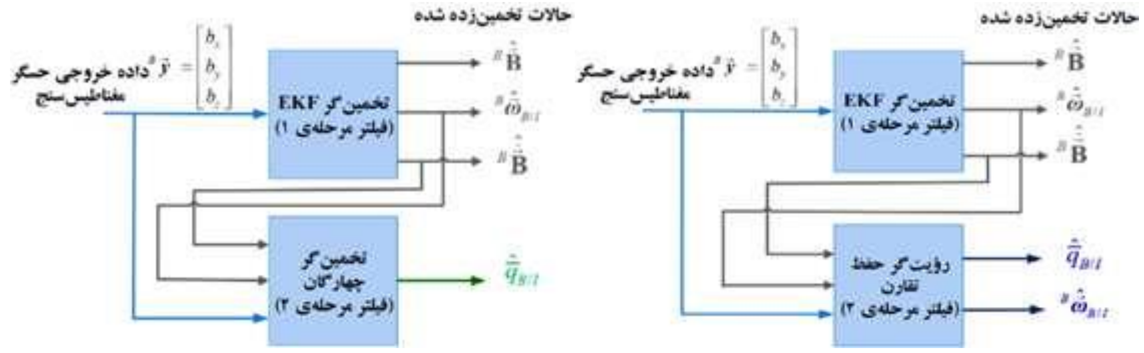
با جایگذاری مقادیر حالت در ماتریس فوق برای $n = 3$ و $m = 6$، با محاسبه رتبه ماتریس $d\zeta$ در نقاط مختلف می‌توان رؤیت‌پذیری محلی را بحث نمود. با اعمال شرایط اولیه به همراه پارامترهای سامانه‌ی بکاربرده شده، رتبه ماتریس برابر شش یعنی تعداد متغیر حالت شد. همچنین در چند نقطه محلی دیگر نیز رتبه ماتریس شش شد. این مسئله

نشان می‌دهد که رؤیت‌پذیری ضعیف محلی فیلتر مرحله‌ی اول طبق قضیه رؤیت‌پذیری جبری در [۱۵] اثبات شده است.

رؤیت‌پذیری فیلتر مرحله‌ی دوم نیز به همین صورت قابل تحلیل است که جزئیات بیشتر آن در مقاله و رساله نویسنده اول در آینده بیان خواهد شد. البته وجود دو بردار مستقل و غیر صفر در این بخش برای تخمین وضعیت کافی است.

۳- طراحی فیلتر دو مرحله‌ای تخمین وضعیت

فیلتر مرحله‌ی اول که با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن توسعه‌یافته (EKF) انجام شده است، طراحی با توجه به مرجع [۱۹] انجام شده است. در این مرحله با استفاده از حسگر مغناطیس‌سنج، طبق رابطه‌ی (۵) مشتق میدان مغناطیسی تخمین زده می‌شود. این در حالی است که تخمین‌گرهای مرحله‌ی دوم که دو نوع آن از دسته‌ی فیلترهای تصادفی و دیگری رؤیت‌گر غیرخطی است، با استفاده از داده‌های فیلتر مرحله‌ی اول وضعیت چهارگان نانوماهواره را طبق معادله‌ی دینامیکی (۸) تخمین می‌زنند. با توجه به این‌که الگوریتم فیلتر کالمن توسعه‌یافته ضربی در مرجع [۹] توضیح داده شده است و تنها تابع اندازه‌گیری آن به دلیل تک حسگر بودن تغییر کرده است، بنابراین از میان این دو، تنها الگوریتم جذر مربعی چهارگان بی‌رد که تغییر در بخش انتخاب نقاط سیگما داشته است معرفی می‌شود. لذا در این بخش با معرفی مختصر این الگوریتم تصادفی و قطعی پیشنهاد شده، به مقایسه نتایج حاصل از این سه نوع تخمین‌گر در بخش بعد پرداخته خواهد شد. نمایش نمودار بلوکی عملکرد سامانه به طور خلاصه در شکل (۱) آورده شده است. لازم به ذکر است که بردار سرعت زاویه‌ای ماهواره نسبت به دستگاه لخت بیان در دستگاه بدنه، براساس مشتق میدان تخمین زده می‌شود و داده‌ی اندازه‌گیری میدان مغناطیسی در فیلتر EKF به طور همزمان، بدست می‌آید.



(الف) (ب)

شکل ۱: نمودار بلوکی خلاصه شده‌ی عملکرد سامانه‌ی تخمین وضعیت چهارگان: (الف) روش مبنا، (ب) روش پیشنهادی

۳-۱ الگوریتم تصادفی جذر مربعی چهارگان بی‌رد

در فرایند تعیین وضعیت با ترکیبی از حسگرها و مدل‌های ریاضی برای جمع‌آوری مؤلفه‌های برداری در دستگاه بدنه و دستگاه مرجع لخت استفاده می‌کند. با توجه به این‌که الگوریتم‌های متداول فیلتر کالمن توسعه‌یافته و ذره‌ای نمی‌توانند برای تخمین چهارگان‌ها به دلیل محدودیت نرم واحد آن، به‌طور مستقیم استفاده شوند؛ لذا الگوریتم‌های فیلتر کالمن توسعه‌یافته ضربی و چهارگان بی‌رد با حضور ژیروسکوپ مورد استفاده قرار می‌گیرند [۹]. اما با استفاده از بردار میدان مغناطیسی و مشتق آن، الگوریتم جذرمربعی چهارگان بی‌رد در این مقاله پیشنهاد شده است تا مشکلات قبلی در الگوریتم چهارگان بی‌رد نظیر نداشتن تضمین مثبت معین ماندن ماتریس کواریانس خطای تخمین را مرتفع سازد. همچنین با حضور تک حسگر مغناطیس‌سنج بتواند به تخمین وضعیت بپردازد. لذا در ادامه به معرفی این نوع الگوریتم خواهیم پرداخت.

این روش برای تخمین وضعیت فضاپیما به ژیروسکوپ سه محوره و حداقل یک حسگر وضعیت نیاز دارد [۹]. در این مقاله، به‌دلیل محدودیت‌های موجود، جایگزین ژیروسکوپ، از مشتق میدان مغناطیسی که در پیش فیلتر تخمین زده شده است، استفاده شده است. در این الگوریتم، فیلتر بردار حالت خطای وضعیت یعنی $\delta\vec{\boldsymbol{p}}_{B/I}$ که 3×1 است، تخمین می‌زند. بردار خطای وضعیت که با بردار خطای چهارگان $\delta\bar{q}_{B/I}=\left[\delta\bar{\mathcal{Q}}\quad\delta q_4\right]$ ارتباط دارد، با چهارگان ترکیب شده و در فیلتر انتشار می‌یابد (مرحله‌ی پیش‌بینی)، تا وضعیت فضاپیما را تخمین بزند. در صورتی که بردار حالت $\vec{\boldsymbol{x}}=\left[\delta\vec{\boldsymbol{p}}_{B/I}\right]$ فرض شود، فرایند مرحله‌ای این الگوریتم در پیوست ۶-۲ برای تخمین وضعیت با الگوریتم پیشنهادی بیان می‌گردد.

۳-۲ رؤیت‌گر غیرخطی حفظ تقارن

در این الگوریتم ابتدا معادله‌ی دینامیکی سرعت زاویه‌ای طبق (۶) و معادلات حرکت تعیین وضعیت (۸)، به صورت رابطه‌ی (۱۷) بیان می‌گردد:(گام اول)

$$d\zeta = \begin{bmatrix} dL_F^0(g_1) & \cdots & dL_F^0(g_n) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ dL_F^{m-1}(g_1) & \cdots & dL_F^{m-1}(g_n) \end{bmatrix} \qquad (۱۷)$$

$P\left({}^B\boldsymbol{\omega}_{B/I}\right) = \begin{pmatrix} {}^B\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I} \\ 0 \end{pmatrix}$، چهارگان خالصی است که آخرین درایه‌ی آن برای بردار $\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}$ بیان شده در چارچوب بدنه (محاسبه طبق رابطه‌ی (۱۷) صفر است. بردار خروجی اندازه‌گیری که شامل حسگر مغناطیس‌سنج ${}^B\vec{\mathbf{B}}$ و تخمین مشتق میدان مغناطیسی است طبق رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} {}^B\vec{\boldsymbol{y}} &= (P^{pn}\left((\bar{q}_{B/I})^{-1} \otimes P\left({}^I\mathbf{B}\right) \otimes \bar{q}_{B/I}\right), -\left[{}^B\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\right] \times {}^B\vec{\mathbf{B}} \\ &+ P^{pn}((\bar{q}_{B/I})^{-1} \otimes P\left({}^I\dot{\mathbf{B}}\right) \otimes \bar{q}_{B/I})) \\ &= \left({}^B\vec{\boldsymbol{y}}_b, {}^B\vec{\boldsymbol{y}}_{\dot{b}}\right) \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

در رابطه‌ی (۱۸)، ${}^I\vec{\mathbf{B}} = \mathrm{B}_1\hat{e}_1 + \mathrm{B}_2\hat{e}_2 + \mathrm{B}_3\hat{e}_3$ بردار میدان مغناطیسی زمین در چارچوب لخت و مشتق میدان مغناطیسی از دید چارچوب لخت بیان شده در دستگاه لخت ${}^I\left(D_I\vec{\mathbf{B}}\right) = {}^I\dot{\vec{\mathbf{B}}}$ می‌باشد. همچنین $P^{pn}(v,s) := \vec{v}$ تصویر چهارگان بر روی قسمت برداری $\vec{v}$ بوده و s نمایش قسمت اسکالر آن می‌باشد.

گام دوم بدست آوردن معادلات دینامیکی غیرمتغیر است. مفهوم غیر متغیر بدین صورت است که دینامیک‌های حالت $(d/dt)x = f(x,u)$ و خروجی $y = h(x,u)$ با تبدیلی تحت عملکرد گروه لی تغییر نکند؛ یا به عبارت دیگر سامانه $f\left(\varphi_g(x), \psi_g(u)\right) = D\varphi_g(x) \cdot f(x,u)$ غیر متغیر G نامیده می‌شود که $(d/dt)X = f(X,U)$ و $(X,U) = (\varphi_g(x), \psi_g(u))$ باشد [۱۱]. در این تعریف، $\varphi_g(x)$ تابع تبدیل از نوع گروه لی با اعمال بر روی متغیرهای حالت و $\psi_g(u)$ با اعمال بر روی ورودی است. همین تبدیل می‌بایست در خروجی‌ها به صورت $Y = h(X,U)$ نیز برقرار باشد. هدف از بیان این تعریف بدست آوردن معادلات دینامیکی خطای غیر متغیر است که باعث می‌گردد دینامیک‌های آن مستقل از حالت‌های ناشناخته شود.

لذا اولین گام برای بدست آوردن این دینامیک‌های غیرمتغیر، یافتن نگاشت‌های $\varphi_{(\bar{q}_g,\vec{\omega}_g)}\left(\bar{q}_{B/I}, \vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\right)$ و $\psi_{(\bar{q}_g,\vec{\omega}_g)}(\vec{\boldsymbol{\tau}})$ طبق [۲۰] می‌باشد.

$$\begin{aligned} \varphi_g\left(\bar{q}_{B/I}, \vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\right) &= \begin{pmatrix} \bar{q}_{B/I} \otimes \bar{q}_g \\ P^{pn}\left((\bar{q}_g)^{-1} \otimes P\left({}^M\boldsymbol{\omega}_{B/I}\right) \otimes \bar{q}_g\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{Q} \\ \vec{\boldsymbol{\Omega}} \end{pmatrix} \\ \psi_g(\vec{\boldsymbol{\tau}}) &= P^{pn}((\bar{q}_g)^{-1} \otimes P\left({}^M\boldsymbol{\tau}\right) \otimes \bar{q}_g) = \vec{\boldsymbol{T}} \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

که طبق تعاریف بیان شده در [۱۹]، اثبات می‌شود که روابط

$$\frac{d}{dt}\bar{Q} = \frac{1}{2}\bar{Q} \otimes P(\boldsymbol{\Omega})$$

و

$$\frac{d}{dt}\,{}^M\vec{\boldsymbol{\Omega}} = ({}^M\boldsymbol{J}^{-1})\left({}^M\boldsymbol{J}({}^M\vec{\boldsymbol{\Omega}}) \times {}^M\vec{\boldsymbol{\Omega}}\right) + {}^M\boldsymbol{J}^{-1}({}^M\vec{\boldsymbol{T}})$$

برقرارند. همچنین گشتاور اغتشاشی خارجی $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ شامل گشتاور مغناطیسی و آیرودینامیکی است.

در مورد اندازه‌گیری خروجی نیز طبق تعریف غیر متغیر G، روابط ذیل را داریم:

$$\begin{aligned} &\left({}^B\vec{\boldsymbol{Y}}_b, {}^B\vec{\boldsymbol{Y}}_{\dot{b}}\right) = \varrho_g\left(\vec{\boldsymbol{y}}_b, \vec{\boldsymbol{y}}_{\dot{b}}\right) = (P^{pn}\left((\bar{q}_g)^{-1} \otimes P\left({}^B\boldsymbol{y}_b\right) \otimes \bar{q}_g\right), \\ &-\left[P^{pn}\left((\bar{q}_g)^{-1} \otimes P\left({}^M\boldsymbol{\omega}_{B/I}\right) \otimes \bar{q}_g\right)\right] \times \left[P^{pn}\left((\bar{q}_g)^{-1} \otimes P\left({}^B\boldsymbol{y}_b\right) \otimes \bar{q}_g\right)\right] \\ &+P^{pn}\left((\bar{q}_g)^{-1} \otimes P\left({}^B\boldsymbol{y}_{\dot{b}}\right) \otimes \bar{q}_g\right)) \\ &=\left(P^{pn}\left((\bar{q}_g)^{-1} \otimes P\left({}^B\boldsymbol{y}_b\right) \otimes \bar{q}_g\right), P^{pn}\left((\bar{q}_g)^{-1} \otimes P\left({}^B\boldsymbol{y}_{\dot{b}}\right) \otimes \bar{q}_g\right)\right). \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

در گام سوم که روش چارچوب متحرک است، در سه دسته زیر توصیف می‌شود:

۱) نرمال‌سازی و خطای خروجی غیر متغیر: به منظور ایجاد خطای غیر متغیر در تبدیل G، ابتدا نرمال‌سازی با استفاده از معادله‌ی (۲۱) انجام می‌گردد:

$$\bar{q}_{B/I} \otimes \bar{q}_\gamma = (1,0,0,0)^T \qquad (۲۱)$$

لذا داریم؛

$$\gamma\left(\bar{q}_{B/I}\right) = \bar{q}_\gamma = (\bar{q}_{B/I})^{-1}. \qquad (۲۲)$$

در صورتی که $\bar{q}_\gamma = \gamma\left(\bar{q}_{B/I}\right)$ فرض شود و $\bar{q}_{B/I}$ تخمین چهارگان باشد، خطای خروجی غیر متغیر به صورت ذیل بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\vec{E} = \varrho_{(\bar{q}_\gamma)}(\hat{\vec{\boldsymbol{y}}}) - \varrho_{(\bar{q}_\gamma)}(\vec{\boldsymbol{y}}) = \\ &\begin{bmatrix} P^{pn}\left(\bar{q}_{B/I} \otimes P\left({}^B\hat{\boldsymbol{y}}_b\right) \otimes (\bar{q}_{B/I})^{-1}\right) - P^{pn}\left(\bar{q}_{B/I} \otimes P\left({}^B\boldsymbol{y}_b\right) \otimes (\bar{q}_{B/I})^{-1}\right) \\ P^{pn}\left(\bar{q}_{B/I} \otimes P\left({}^B\hat{\boldsymbol{y}}_{\dot{b}}\right) \otimes (\bar{q}_{B/I})^{-1}\right) - P^{pn}\left(\bar{q}_{B/I} \otimes P\left({}^B\boldsymbol{y}_{\dot{b}}\right) \otimes (\bar{q}_{B/I})^{-1}\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

با خلاصه‌سازی و در نظر گرفتن

$${}^B\hat{\vec{y}}_{\dot{b}} = -[{}^B\hat{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I}] \times {}^B\vec{\mathbf{B}} + P^{pn}\left(\bar{q}_{B/I}{}^{-1} \otimes P({}^I\dot{\mathbf{B}}) \otimes \bar{q}_{B/I}\right)$$

و $\vec{E} = \begin{pmatrix} \vec{E}_b \\ \vec{E}_{\dot{b}} \end{pmatrix}$، رابطه‌ی (۲۴) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}&\vec{E}_b = {}^I\vec{\mathbf{B}} - P^{pn}\left(\bar{q}_{B/I} \otimes P\left({}^B\boldsymbol{y}_b\right)\otimes(\bar{q}_{B/I})^{-1}\right)\\&\vec{E}_{\dot{b}} = {}^I\dot{\vec{\mathbf{B}}}\\&-\left[P^{pn}\left(\bar{q}_{B/I}\otimes P\left({}^B\hat{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\right)\otimes(\bar{q}_{B/I})^{-1}\right)\right]\times\left[P^{pn}\left(\bar{q}_{B/I}\otimes P\left({}^B\mathbf{B}\right)\otimes(\bar{q}_{B/I})^{-1}\right)\right]\\&-P^{pn}\left(\bar{q}_{B/I}\otimes P\left({}^B\boldsymbol{y}_{\dot{b}}\right)\otimes(\bar{q}_{B/I})^{-1}\right).\end{aligned} \quad (۲۴)$$

۲) میدان‌های برداری غیرمتغیر: با توجه به رابطه‌ی (۲۲)، $(D\varphi_{\gamma(\bar{q})}(\bar{q}_{B/I},\vec{\omega}_{B/I})^{-1} = D\varphi_{\gamma^{-1}(\bar{q})}(\bar{q}_{B/I},\vec{\omega}_{B/I}))$ به همراه $\gamma^{-1}(\bar{q}_{B/I}) = \bar{q}_{B/I}$ بدست آورده می‌شوند. بدنبال آن، مجموعه‌ای از میدان‌های برداری به صورت زیر نمایش داده می‌گردند:

$$\begin{aligned}&D\varphi_{(\bar{q})}\left(\bar{q}_{B/I},\vec{\omega}_{B/I}\right)\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{e}}_i\\ \vec{\mathbf{0}}\end{pmatrix}_{1\le i\le 3} = \begin{pmatrix}P\left({}^B\boldsymbol{e}_i\right)\otimes\bar{q}_{B/I}\\ \vec{\mathbf{0}}\end{pmatrix}_{1\le i\le 3},\\&D\varphi_{(\bar{q})}\left(\bar{q}_{B/I},\vec{\omega}_{B/I}\right)\begin{pmatrix}\vec{\mathbf{0}}\\ \hat{\boldsymbol{e}}_i\end{pmatrix}_{1\le i\le 3} = \begin{pmatrix}\vec{\mathbf{0}}\\ P^{pn}\left((\bar{q}_{B/I})^{-1}\otimes P\left({}^M\boldsymbol{e}_i\right)\otimes\bar{q}_{B/I}\right)\end{pmatrix}_{1\le i\le 3}.\end{aligned} \quad (۲۵)$$

۳) محاسبه‌ی غیرمتغیر: بدلیل این‌که بعد G (برابر ۳) کمتر از بعد خمینه (برابر ۶) است، لذا طبق [۱۹]، مجموعه‌ی غیرمتغیرهای ورودی و حالت‌ها طبق زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}&\vec{\boldsymbol{I}}\left(\bar{q}_{B/I},\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I},\vec{\boldsymbol{\tau}}\right) = \left(\varphi^b_{\gamma(\bar{q})}(\bar{q}_{B/I},\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}),\psi_{\gamma(\bar{q})}(\vec{\boldsymbol{\tau}})\right) =\\&\left(P^{pn}\left(\bar{q}_{B/I}\otimes P\left({}^M\hat{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\right)\otimes(\bar{q}_{B/I})^{-1}\right),P^{pn}\left(\bar{q}_{B/I}\otimes P\left({}^M\boldsymbol{\tau}\right)\otimes(\bar{q}_{B/I})^{-1}\right)\right).\end{aligned} \quad (۲۶)$$

در گام چهارم که طراحی پیش رؤیت‌گر غیر متغیر است، بر مبنای [۱۹] طبق ذیل انجام می‌شود:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\bar{q}_{B/I} = \frac{1}{2}\bar{q}_{B/I}\otimes P\left({}^B\hat{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\right) + P\left(\sum_{i=1}^{3}\pounds_i^{\bar{q}}\left(\vec{\boldsymbol{I}},\vec{E}\right){}^B\boldsymbol{e}_i\right)\otimes\bar{q}_{B/I}\\&\frac{d}{dt}{}^M\hat{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I} = ({}^M\boldsymbol{J}^{-1})\left({}^M\boldsymbol{J}({}^M\hat{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I})\times{}^M\hat{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I} + {}^M\vec{\boldsymbol{\tau}}\right)\\&\qquad+\sum_{i=1}^{3}\pounds_i^{\vec{\omega}}\left(\vec{\boldsymbol{I}},\vec{E}\right)P^{pn}\left((\bar{q}_{B/I})^{-1}\otimes P\left({}^M\boldsymbol{e}_i\right)\otimes\bar{q}_{B/I}\right),\end{aligned} \quad (۲۷)$$

که در رابطه بالا، $\pounds_i^{\bar{q}}$ و $\pounds_i^{\vec{\omega}}$ وابسته به $\vec{\boldsymbol{I}}$ و $\vec{E}$ است. به علاوه، روابط $\pounds_i^{\bar{q}}\left(\vec{\boldsymbol{I}},\vec{\mathbf{0}}\right) = \vec{\mathbf{0}}$ و $\pounds_i^{\vec{\omega}}\left(\vec{\boldsymbol{I}},\vec{\mathbf{0}}\right) = \vec{\mathbf{0}}$ نیز برقرارند. با در نظر گرفتن (۲۴)، توابع ذیل بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}&\pounds_i^{\bar{q}}\left(\vec{\boldsymbol{I}},\vec{E}_b,\vec{E}_{\dot{b}}\right) = \overline{\pounds}^{\bar{q}}_{b,i}\left(\vec{\boldsymbol{I}},\vec{E}_b,\vec{E}_{\dot{b}}\right)\vec{E}_b + \overline{\pounds}^{\bar{q}}_{\dot{b},i}\left(\vec{\boldsymbol{I}},\vec{E}_b,\vec{E}_{\dot{b}}\right)\vec{E}_{\dot{b}}\\&\pounds_i^{\vec{\omega}}\left(\vec{\boldsymbol{I}},\vec{E}_b,\vec{E}_{\dot{b}}\right) = \overline{\pounds}^{\vec{\omega}}_{b,i}\left(\vec{\boldsymbol{I}},\vec{E}_b,\vec{E}_{\dot{b}}\right)\vec{E}_b + \overline{\pounds}^{\vec{\omega}}_{\dot{b},i}\left(\vec{\boldsymbol{I}},\vec{E}_b,\vec{E}_{\dot{b}}\right)\vec{E}_{\dot{b}}.\end{aligned} \quad (۲۸)$$

با جایگذاری (۲۸) در قسمت دوم معادله (۲۷)، روابط زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned}&P\left(\sum_{i=1}^{3}\pounds_i^{\bar{q}}\left(\vec{\boldsymbol{I}},\vec{E}\right){}^B\boldsymbol{e}_i\right)\otimes\bar{q}_{B/I} =\\&P\left(\sum_{i=1}^{3}(\overline{\pounds}^{\bar{q}}_{b,i}\vec{E}_b + \overline{\pounds}^{\bar{q}}_{\dot{b},i}\vec{E}_{\dot{b}}){}^B\boldsymbol{e}_i\right)\otimes\bar{q}_{B/I} =\\&P\left(\begin{pmatrix}\overline{\pounds}^{\bar{q}}_{b,1}\\ \overline{\pounds}^{\bar{q}}_{b,2}\\ \overline{\pounds}^{\bar{q}}_{b,3}\end{pmatrix}\vec{E}_b + \begin{pmatrix}\overline{\pounds}^{\bar{q}}_{\dot{b},1}\\ \overline{\pounds}^{\bar{q}}_{\dot{b},2}\\ \overline{\pounds}^{\bar{q}}_{\dot{b},3}\end{pmatrix}\vec{E}_{\dot{b}}\right)\otimes\bar{q}_{B/I}\end{aligned} \quad (۲۹)$$

به‌گونه‌ای که $\overline{\pounds}^{\bar{q}}_{b,i}$، $\overline{\pounds}^{\bar{q}}_{\dot{b},i}$، $\overline{\pounds}^{\vec{\omega}}_{b,i}$ و $\overline{\pounds}^{\vec{\omega}}_{\dot{b},i}$ توابعی از $\left(\vec{\boldsymbol{I}},\vec{E}_b,\vec{E}_{\dot{b}}\right)$ می‌باشند. در نتیجه با فرایندی مشابه برای معادله دوم (۲۷)، می‌توان شکل فشرده پیش‌رؤیت‌گر غیر متغیر را به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\hat{\bar{q}}_{B/I} = \frac{1}{2}\hat{\bar{q}}_{B/I}\otimes P\left({}^B\hat{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\right) + P\left(\overline{\pounds}^{\bar{q}}_b\vec{E}_b + \overline{\pounds}^{\bar{q}}_{\dot{b}}\vec{E}_{\dot{b}}\right)\otimes\hat{\bar{q}}_{B/I}\\&\frac{d}{dt}{}^M\hat{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I} = ({}^M\boldsymbol{J}^{-1})\left({}^M\boldsymbol{J}\left({}^M\hat{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I}\right)\times{}^M\hat{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I} + {}^M\vec{\boldsymbol{\tau}}\right)\\&\qquad+P^{pn}\left(\hat{\bar{q}}_{B/I}{}^{-1}\otimes P\left(\overline{\pounds}^{\vec{\omega}}_b\vec{E}_b + \overline{\pounds}^{\vec{\omega}}_{\dot{b}}\vec{E}_{\dot{b}}\right)\otimes\hat{\bar{q}}_{B/I}\right)\end{aligned} \quad (۳۰)$$

البته هنوز $P\left(\overline{\pounds}^{\vec{\omega}}_b\vec{E}_b + \overline{\pounds}^{\vec{\omega}}_{\dot{b}}\vec{E}_{\dot{b}}\right)$ به چهارگانی وابسته است که المان اول آن صفر است.

گام پنجم که یافتن معادلات دینامیکی خطای حالت است، بر طبق گام چهارم طبق زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{\eta} = \varphi_{\gamma(\bar{q})}\left(\hat{\bar{q}}_{B/I},\hat{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I},\vec{\boldsymbol{\tau}}\right) - \varphi_{\gamma(\bar{q})}\left(\bar{q}_{B/I},\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\right). \quad (۳۱)$$

با این فرض که $\vec{\eta} = \left(\bar{\eta}_{\bar{q}},\bar{\eta}_{\vec{\omega}}\right)$، $\bar{\eta}_{\bar{q}} = \hat{\bar{q}}_{B/I}\otimes(\bar{q}_{B/I})^{-1} - \left(\vec{\mathbf{0}},1\right)$ و $\bar{\eta}_{\vec{\omega}} = \bar{q}_{B/I}\otimes P\left({}^M\hat{\boldsymbol{\omega}}_{B/I} - {}^M\boldsymbol{\omega}_{B/I}\right)\otimes(\bar{q}_{B/I})^{-1}$ برقرارند. همچنین بدلیل این‌که فضای حالت متعلق به $SO(3)$است، لذا $\bar{\eta}_{\bar{q}} = \hat{\bar{q}}_{B/I}\otimes(\bar{q}_{B/I})^{-1}$ به عنوان خطای تخمین وضعیت در نظر گرفته می‌شود. $\vec{\eta}$ مرتبط با خطای چهارگان است که نقطه کاری آن با اعمال اغتشاش کوچک در حدود $\vec{\mathbf{0}}$ بوده و خود $\vec{\eta}$ نیز نزدیک $\left(\vec{\mathbf{0}},1\right) = \bar{1}$ می‌باشد. لذا مشتق زمانی این خطای حالت برابر رابطه زیر است:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\bar{\eta}_{\bar{q}} &= \left(\frac{1}{2}\hat{\bar{q}}_{B/I}\otimes P\left({}^B\hat{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\right) + P\left(\overline{\pounds}^{\bar{q}}_b\vec{E}_b + \overline{\pounds}^{\bar{q}}_{\dot{b}}\vec{E}_{\dot{b}}\right)\otimes\hat{\bar{q}}_{B/I}\right)\otimes(\bar{q}_{B/I})^{-1}\\&\quad-\hat{\bar{q}}_{B/I}\otimes\left(\frac{1}{2}P\left({}^B\boldsymbol{\omega}_{B/I}\right)\otimes(\bar{q}_{B/I})^{-1}\right)\\&=\frac{1}{2}\bar{\eta}_{\bar{q}}\otimes\bar{\eta}_{\vec{\omega}} + P\left(\overline{\pounds}^{\bar{q}}_b\vec{E}_b + \overline{\pounds}^{\bar{q}}_{\dot{b}}\vec{E}_{\dot{b}}\right)\otimes\bar{\eta}_{\bar{q}}\end{aligned} \quad (۳۲)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bar{\eta}_{\bar{\omega}} &= \bar{q}_{B/I}\otimes \\
&\Big(P\Big(({}^{M}\boldsymbol{J}^{-1})(({}^{M}\boldsymbol{J}({}^{M}\hat{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I})\times{}^{M}\hat{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I})-({}^{M}\boldsymbol{J}^{-1}({}^{M}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I})\times{}^{M}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I})))\Big) \\
&+(\hat{\bar{q}}_{B/I})^{-1}\otimes\Big(P\Big(\overline{\pounds}_{b}^{\bar{\omega}}\vec{E}_{b}+\overline{\pounds}_{\dot{b}}^{\bar{\omega}}\vec{E}_{\dot{b}}\Big)\otimes\hat{\bar{q}}_{B/I}\Big))\otimes(\bar{q}_{B/I})^{-1} \\
&+\bar{q}_{B/I}\otimes P({}^{M}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\times({}^{M}\hat{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I}-{}^{M}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}))\otimes(\bar{q}_{B/I})^{-1} \\
&=\bar{q}_{B/I}\otimes \\
&\Big(P\Big(({}^{M}\boldsymbol{J}^{-1})(({}^{M}\boldsymbol{J}({}^{M}\hat{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I})\times{}^{M}\hat{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I})-({}^{M}\boldsymbol{J}({}^{M}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I})\times{}^{M}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}))\Big)\Big) \\
&\otimes(\bar{q}_{B/I})^{-1}+(\bar{\eta}_{\bar{q}})^{-1}\otimes\Big(P\Big(\overline{\pounds}_{b}^{\bar{\omega}}\vec{E}_{b}+\overline{\pounds}_{\dot{b}}^{\bar{\omega}}\vec{E}_{\dot{b}}\Big)\Big)\otimes\bar{\eta}_{\bar{q}} \\
&+\bar{q}_{B/I}\otimes P({}^{M}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\times({}^{M}\hat{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I}-{}^{M}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}))\otimes(\bar{q}_{B/I})^{-1}.
\end{aligned} \qquad (۳۳)
$$

به دلیل کمتر بودن بعد خمینه‌ی X نسبت به G در رابطه‌ی (۳۳)، گزاره‌های متغیر در آن ظاهر شدند. لذا به منظور برطرف کردن این مشکل، تقریبی نزدیک به عمل $H\left({}^{M}\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\right)\simeq\vec{\mathbf{0}}$ در رابطه‌ی (۶) بدلیل مقادیر ماتریس ممان اینرسی بیان شده در چارچوب اصلی، در نظر گرفته می‌شود. این مسئله بدان علت است که در ماهواره‌ی مکعبی با این مقادیر ممان اینرسی حاصلضرب داخلی در رابطه‌ی (۶) یا H تقریباً صفر می‌گردد. همچنین مقدار ماتریس ممان اینرسی بیان شده در چارچوب بدنه در سامانه مفروض به صورت زیر است:

$$
{}^{M}\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}0.3771 & 0 & 0\\ 0 & 0.4252 & 0\\ 0 & 0 & 0.4617\end{bmatrix} \qquad (۳۴)
$$

میانگین مقادیر این ماتریس نزدیک به $0.4I$ بوده که I ماتریس یکه می‌باشد. با در نظر گرفتن این مسئله، معادله‌ی خطای دینامیکی برای سرعت زاویه‌ای به صورت ذیل بازنویسی می‌شود:

$$
\frac{d}{dt}\bar{\eta}_{\bar{\omega}}=(\bar{\eta}_{\bar{q}})^{-1}\otimes\left(P\left(\overline{\pounds}_{b}^{\bar{\omega}}\vec{E}_{b}+\overline{\pounds}_{\dot{b}}^{\bar{\omega}}\vec{E}_{\dot{b}}\right)\right)\otimes\bar{\eta}_{\bar{q}} \qquad (۳۵)
$$

به گونه‌ای که خطای خروجی غیرمتغیر بر حسب خطای حالت غیرمتغیر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_{b}&={}^{I}\vec{\mathbf{B}}-P^{pn}\left(\bar{\eta}_{\bar{q}}\otimes P\left({}^{I}\mathbf{B}\right)\otimes(\bar{\eta}_{\bar{q}})^{-1}\right)\\
\vec{E}_{\dot{b}}&={}^{I}\dot{\vec{\mathbf{B}}}-\left[P^{pn}\left(\bar{\eta}_{\bar{q}}\otimes\bar{\eta}_{\bar{\omega}}\otimes(\bar{\eta}_{\bar{q}})^{-1}\right)\right]\times\left[P^{pn}\left(\bar{\eta}_{\bar{q}}\otimes P\left({}^{I}\mathbf{B}\right)\otimes(\bar{\eta}_{\bar{q}})^{-1}\right)\right]\\
&\quad-P^{pn}\left(\bar{\eta}_{\bar{q}}\otimes P\left({}^{I}\dot{\mathbf{B}}\right)\otimes(\bar{\eta}_{\bar{q}})^{-1}\right).
\end{aligned} \qquad (۳۶)
$$

که در رابطه (۳۶)، ${}^{B}\vec{\mathbf{B}}=P^{pn}\left((\bar{q}_{B/I})^{-1}\otimes P\left({}^{I}\mathbf{B}\right)\otimes\bar{q}_{B/I}\right)$ نیز در نظر گرفته شده است.

لذا طبق (۳۲) و (۳۶)، سامانه‌ی خطای غیرمتغیر، خود گردان است که تنها به خطای حالت غیرمتغیر وابسته است. لذا می‌توان به طریق تحلیلی، به تحلیل پایداری پرداخت.

در گام ششم به تحلیل همگرایی دینامیک‌های خطای غیرمتغیر خطی‌سازی‌شده می‌پردازد. به منظور یافتن پارامترهای رؤیت‌گر غیر متغیر، خطای غیر متغیر بوسیله‌ی تقریب مرتبه اول $\bar{\eta}_{\bar{q}}=\mathring{\bar{\eta}}_{\bar{q}}+\delta\bar{\eta}_{\bar{q}}$ و $\bar{\eta}_{\bar{\omega}}=\mathring{\bar{\eta}}_{\bar{\omega}}+\delta\bar{\eta}_{\bar{\omega}}$ تخمین زده می‌شود که $\mathring{\bar{\eta}}_{\bar{q}}$ نزدیک به ۱ می‌باشد و $\mathring{\bar{\eta}}_{\bar{\omega}}$ نزدیک به صفر است. برای یافتن معادله خطای خطی‌سازی شده، این روابط در معادله‌ی بالا جایگذاری می‌شود که نتیجه به صورت ذیل است:

$$
\begin{aligned}
\delta\vec{E}_{b}&=P^{pn}\left(-\delta\bar{\eta}_{\bar{q}}\otimes P({}^{I}\mathbf{B})+P({}^{I}\mathbf{B})\otimes\delta\bar{\eta}_{\bar{q}}\right)=2{}^{I}\vec{\mathbf{B}}\times\delta\vec{\eta}_{\bar{q}}\\
\delta\vec{E}_{\dot{b}}&=2{}^{I}\dot{\vec{\mathbf{B}}}\times\delta\vec{\eta}_{\bar{q}}-\delta\vec{\eta}_{\bar{\omega}}\times{}^{I}\vec{\mathbf{B}},
\end{aligned} \qquad (۳۷)
$$

که $\delta\vec{\eta}_{\bar{q}}$ و $\delta\vec{\eta}_{\bar{\omega}}$ قسمت‌های برداری $\delta\bar{\eta}_{\bar{q}}$ و $\delta\bar{\eta}_{\bar{\omega}}$ به ترتیب، هستند. در ادامه، معادلات خطای ساده‌شده بصورت ذیل داده شده‌اند:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\delta\vec{\eta}_{\bar{q}}&=\frac{1}{2}\delta\vec{\eta}_{\bar{\omega}}+2\overline{\pounds}_{b}^{\bar{q}}\left({}^{I}\vec{\mathbf{B}}\times\delta\vec{\eta}_{\bar{q}}\right)+2\overline{\pounds}_{\dot{b}}^{\bar{q}}\left({}^{I}\dot{\vec{\mathbf{B}}}\times\delta\vec{\eta}_{\bar{q}}\right)\\
&\quad+\overline{\pounds}_{\dot{b}}^{\bar{q}}\left({}^{I}\vec{\mathbf{B}}\times\delta\vec{\eta}_{\bar{\omega}}\right)\\
\frac{d}{dt}\delta\vec{\eta}_{\bar{\omega}}&=2\overline{\pounds}_{b}^{\bar{\omega}}\left({}^{I}\vec{\mathbf{B}}\times\delta\vec{\eta}_{\bar{q}}\right)+2\overline{\pounds}_{\dot{b}}^{\bar{\omega}}\left({}^{I}\dot{\vec{\mathbf{B}}}\times\delta\vec{\eta}_{\bar{q}}\right)\\
&\quad+\overline{\pounds}_{\dot{b}}^{\bar{\omega}}\left({}^{I}\vec{\mathbf{B}}\times\delta\vec{\eta}_{\bar{\omega}}\right).
\end{aligned} \qquad (۳۸)
$$

رابطه‌ی دوسویه‌ی میان تحلیل پایداری سامانه‌های غیرخطی و سامانه خطی‌سازی‌شده حول نقطه تعادل، طبق [۲۱] و [۲۲] وجود دارد. لذا ارجح‌تر است که شرایط پایداری سامانه خطی‌سازی شده مورد بررسی قرار گیرد. به منظور یافتن پارامترهای صحیح تنظیمی برمبنای قضایای پایداری، روش این مقاله استفاده از معادله ریکاتی دیفرانسیلی متناوب است تا بتوان $\overline{\pounds}_{b}^{\bar{q}}$، $\overline{\pounds}_{\dot{b}}^{\bar{q}}$، $\overline{\pounds}_{b}^{\bar{\omega}}$ و $\overline{\pounds}_{\dot{b}}^{\bar{\omega}}$ را پیدا کرد. این معادله به عنوان یک انتخاب برای حل ماتریس بهره می‌باشد. به دلیل این‌که معادله‌ی خطای دینامیکی خطی‌سازی‌شده تقریباً متناوب است، لذا می‌توان معادله‌ی ریکاتی دیفرانسیلی زیر را بیان کرد [۱۸]:

$$
\dot{\mathbf{P}}=\frac{d}{dt}\mathbf{P}=-\mathbf{P}C^{T}\mathbf{R}^{-1}C\mathbf{P}+A\mathbf{P}+\mathbf{P}A^{T}+\mathbf{Q} \qquad (۳۹)
$$

که در رابطه‌ی بالا، $\mathbf{P}$، $\mathbf{R}$ و $\mathbf{Q}$ کواریانس‌های خطای حالت، نویز اندازه‌گیری و فرایند به ترتیب می‌باشند. همچنین A و C (که تقریباً متناوب با دوره‌ی تناوب بردار میدان مغناطیسی) هستند، طبق (۴۰) از روابط (۳۷) و (۳۸) بدست می‌آیند:

$$
\begin{aligned}
A&=\begin{bmatrix} zeros(3) & 0.5eye(3)\\ zeros(3) & zeros(3)\end{bmatrix},\\
C&=\begin{bmatrix} -2[{}^{I}\vec{\mathbf{B}}\times] & zeros(3)\\ -2[{}^{I}\dot{\vec{\mathbf{B}}}\times] & -[{}^{I}\vec{\mathbf{B}}\times]\end{bmatrix}.
\end{aligned} \qquad (۴۰)
$$

بنابراین، بهره‌ی حالت ماندگار $\mathbf{K}$ طبق ذیل بدست می‌آید [۱۸]:

$$
\mathbf{K}=\mathbf{P}C^{T}\mathbf{R}^{-1} \qquad (۴۱)
$$

$$
\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\overline{\pounds}_{b}^{\bar{q}} & \overline{\pounds}_{\dot{b}}^{\bar{q}}\\ \overline{\pounds}_{b}^{\bar{\omega}} & \overline{\pounds}_{\dot{b}}^{\bar{\omega}}\end{bmatrix} \qquad (۴۲)
$$

این ماتریس بهره‌ی رؤیت‌گر $\mathbf{K}$، برای دینامیک‌های خطای رابطه (۴۳) که معادل رابطه‌ی (۳۸) است، بکار می‌رود.

$$\frac{d}{dt}\delta\vec{\eta} = (A - \mathbf{K}C)\delta\vec{\eta} \qquad (۴۳)$$

پایداری نمائی اطراف نقطه تعادل صفر رابطه‌ی (۳۸) با در نظر گرفتن این دو فرض اثبات شده است. فرض (۱): C می‌بایست به صورت کراندار برای مقادیر حقیقی $|C| \leqslant \overline{c}$ و $\overline{c} > 0$ برقرار باشد. فرض (۲): $pI \leqslant \mathbf{P}(t) \leqslant \overline{p}I$ برای مقادیر حقیقی مثبت p و $\overline{p}$ صادق باشد. که این مفروضات در این مقاله برقرار هستند. اثبات این مسئله در بخش ۳-۶ پیوست، آورده شده است.

خلاصه تئوری رؤیت‌گر حفظ تقارن- معادلات دینامیکی و سینماتیکی سامانه تعیین وضعیت روابط (۶) و (۱۷) را در نظر بگیرید. رؤیت‌گر غیرخطی نهایی سامانه بصورت رابطه‌ی (۴۴) است:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\hat{\bar{q}}_{B/I} = \frac{1}{2}\hat{\bar{q}}_{B/I} \otimes P\left({}^{B}\hat{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\right) + P\left(\overline{\pounds}_{b}^{\bar{q}}\vec{E}_{b} + \overline{\pounds}_{\dot{b}}^{\bar{q}}\vec{E}_{\dot{b}}\right) \otimes \hat{\bar{q}}_{B/I} \\
&\frac{d}{dt}{}^{M}\hat{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I} = \left({}^{M}\boldsymbol{J}^{-1}\right)\left({}^{M}\boldsymbol{J}\left({}^{M}\hat{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I}\right) \times {}^{M}\hat{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{B/I} + {}^{M}\vec{\boldsymbol{\tau}}\right) \\
&\qquad + P^{pn}\left(\hat{\bar{q}}_{B/I}{}^{-1} \otimes P\left(\overline{\pounds}_{b}^{\vec{\omega}}\vec{E}_{b} + \overline{\pounds}_{\dot{b}}^{\vec{\omega}}\vec{E}_{\dot{b}}\right) \otimes \hat{\bar{q}}_{B/I}\right)
\end{aligned} \qquad (۴۴)$$

که در رابطه‌ی فوق، $\vec{E}_b$ و $\vec{E}_{\dot{b}}$ طبق رابطه‌ی (۲۴) هستند و ماتریس بهره رؤیت‌گر برای $\overline{\pounds}_{b,i}^{\bar{q}}$، $\overline{\pounds}_{\dot{b},i}^{\bar{q}}$، $\overline{\pounds}_{b,i}^{\vec{\omega}}$ و $\overline{\pounds}_{\dot{b},i}^{\vec{\omega}}$ طبق (۴۲) به‌گونه‌ای طراحی شده‌اند که معادلات دینامیکی غیرمتغیر خطای حالت (۳۲) و (۳۵)، به طور نمائی اطراف نقطه تعادل صفر پایدار باشد (رفتار همگرایی این معادلات غیرمتغیر، به‌طور کامل مستقل از مسیر حالت است). لذا رؤیت‌گر غیرمتقارن حفظ تقارن (۴۴)، پایداری نمائی در خطای $\vec{\eta} = \mathbf{0}$ است.

٤- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، عملکرد میان تخمین‌گرهای تصادفی و قطعی برای تخمین چهارگان با تنها اندازه‌گیر مغناطیس‌سنج مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا پارامترهای مداری که در این سامانه فرض شده است، طبق جدول (۱) بیان می‌شوند:

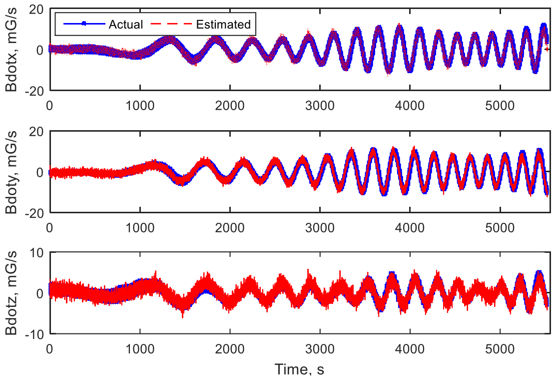
جدول ۱: پارامترهای مداری

ارتفاع اوج	۴۵۰ کیلومتر
ارتفاع حضیض	۳۰۰ کیلومتر
مدت زمان یک دوره‌ی مداری	۵۵۲۲/۹ ثانیه
زاویه‌ی میل	۵۶ درجه
زاویه‌ی بعد	۷/۱۳۴۸ درجه
آرگومان حضیض	۱۸۰ درجه
سرعت مداری	۱۵/۶۴۳۹ دور در روز
خروج از مرکز	۰/۰۱۱۱

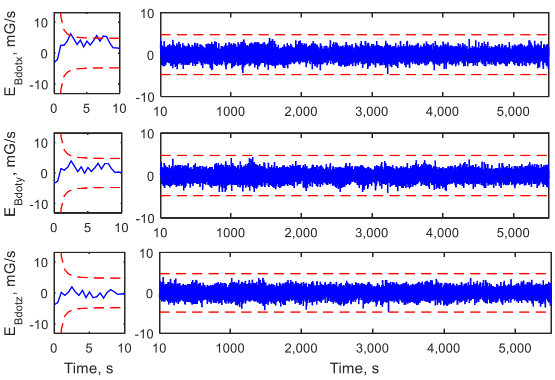
با توجه به جدول فوق، ماهواره یک دوره مداری خود را در مدت حدود ۵۵۲۰ ثانیه سپری می‌کند که تقریباً یک سوم از این مدت را در کسوف طی می‌کند. لذا اهمیت تخمین در این مدت با وجود داشتن گشتاورهای اغتشاشی زمین و فشار خورشیدی باعث نتایج شبیه‌سازی ذیل می‌گردد.

۴-۱ نتایج شبیه‌سازی فیلتر مرحله‌ی اول

برای جبران کمبود داده، مشتق میدان مغناطیسی با استفاده از فیلتر کالمن توسعه‌یافته تخمین زده می‌شود که به عنوان داده‌ی اندازه‌گیری دوم در فیلتر مرحله‌ی اول مورد استفاده قرار می‌گیرد. نتیجه‌ی این تخمین و خطای آن در شکل‌های (۲) و (۳) نشان داده شده است:



شکل ۲: تخمین مشتق میدان مغناطیسی بیان شده در چارچوب بدنه با فیلتر کالمن توسعه‌یافته



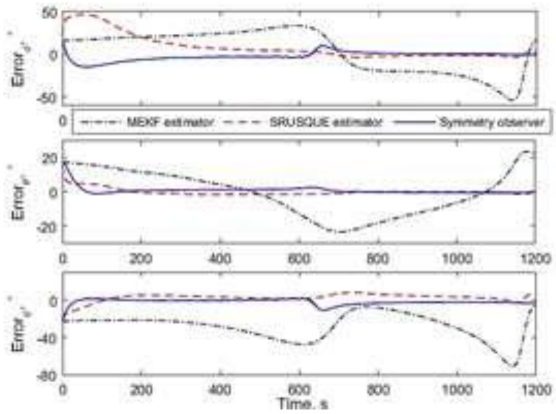
شکل ۳: خطای تخمین فیلتر مرحله‌ی اول برای داده مشتق میدان مغناطیسی

به منظور این‌که نتیجه تخمین اهمیت بالایی دارد، لذا همانطور که در شکل (۳) مشاهده می‌شود با وجود خطای اولیه توانسته است خطایی کمتر از محدوده‌ی سه برابر جذر ماتریس کواریانس خطای حالت داشته باشد.

۴-۲ نتایج شبیه‌سازی فیلتر مرحله‌ی دوم

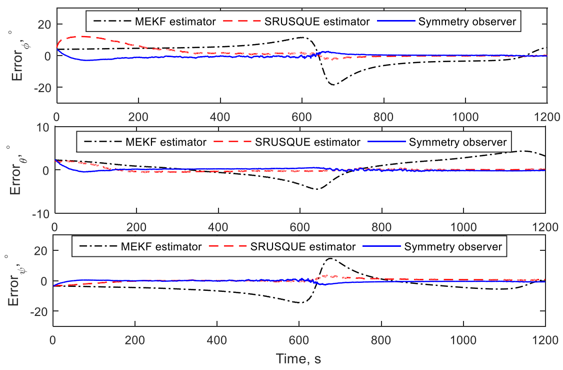
با توجه به این‌که نتایج شبیه‌سازی در مسئله‌ی مورد تعریف، در زمان کسوف برای ما اهمیت دارد، لذا تا ۱۲۰۰ ثانیه اول این نتایج نشان داده

شده‌اند. در شکل (۴)، نتیجه تخمین زوایای اولر با فرض خطای اولیه بالا میان سه نوع تخمین‌گر نشان داده است تا میزان مقاومت نسبت به خطای اولیه تخمین مورد بررسی قرار گیرد. زوایای اولر که شامل غلتش (ϕ)، خمش (θ) و گردش (ψ) بر حسب زاویه هستند، در شکل‌های زیر به نمایش گذاشته شده‌اند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، در خطای تخمین اولیه‌ی حدود ۲۹ درجه، رؤیت‌گر غیرخطی غیرمتغیر حفظ تقارن (Symmetry observer) توانسته است نتایج بهتری را به لحاظ پایداری و همگرایی نسبت به الگوریتم‌های تصادفی که در این مسئله فیلترکالمن توسعه‌یافته ضربی (MEKF) و جذر مربعی چهارگان بی‌رد (SRUSQUE) هستند، داشته باشد. الگوریتم MEKF در مرجع [۹] به تفضیل بیان شده است. لذا در این مقاله، نتایج مقایسه‌ی میان این الگوریتم‌ها در سامانه‌ی تک حسگره‌ی مغناطیس‌سنج، نمایش داده شده است.



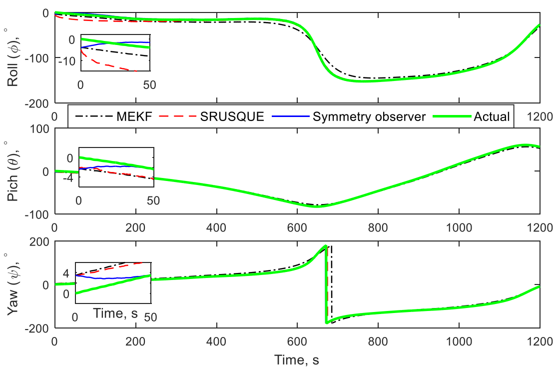
شکل ۴: خطای تخمین زوایای اولر برای خطای تخمین اولیه تقریباً بزرگ میان سه نوع مختلف تخمین‌گر

همچنین در سناریویی که این خطای تخمین کم و مقدار حدود ۶/۵ درجه است، در شکل (۵) نمایش داده شده‌است.



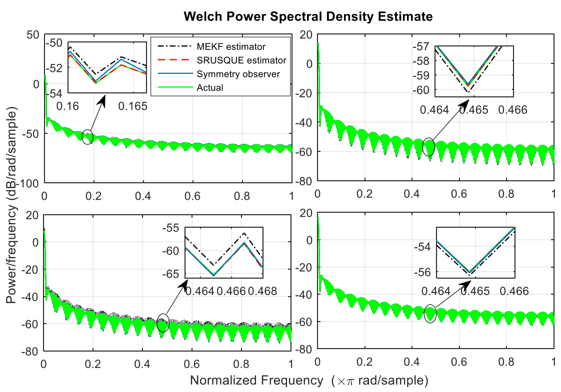
شکل ۵: خطای تخمین زوایای اولر برای خطای تخمین اولیه نسبتا کوچک میان سه نوع مختلف تخمین‌گر

به منظور این‌که تفاوت کم میان این سه نوع تخمین‌گر با اعمال خطای اولیه کوچک در سیگنال اصلی تخمین نیز نشان داده شود، در شکل (۶) زوایای اولر نیز نمایش داده شده‌اند. طبق این شکل رؤیت‌گر پیشنهادی symmetry observer توانسته است نتایج بهتری را نسبت به دو روش دیگر تصادفی از خود نشان دهد و همگرایی بهتری مشاهده می‌شود. گرچه این تفاوت در خطای اولیه‌ی کم قابل اغماض است. از میان دو روش تصادفی نیز به ازای نرم خطای اولیه‌ی ۶/۴۶ درجه، الگوریتم SRUSQUE با خطای میانگین جذر مربعی (RMSE) ۴/۵۶ درجه نسبت به MEKF که RMSE آن ۹/۶۹ درجه است، عملکرد بهتری را ارائه داده است.



شکل ۶: مقایسه تخمین زوایای اولر با روش‌های تصادفی و رؤیت‌گر پیشنهادی با خطای اولیه کوچک

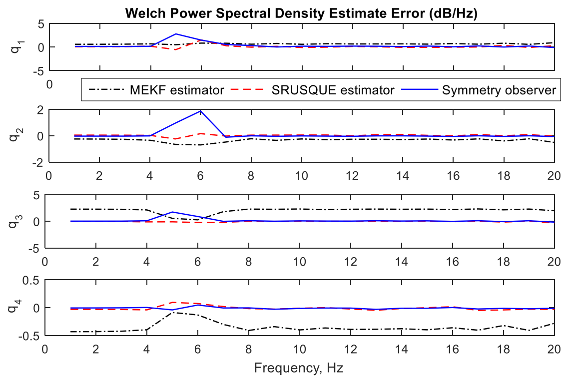
به منظور بررسی عملکرد میان روش‌های تخمین، معیار تحلیل طیفی[۱] فرکانس، میان سیگنال چهارگان تخمینی و واقعی در شکل (۷) صورت گرفته است. در این شکل، نحوه توزیع توان سیگنال در فرکانس‌های سازنده آن بر مبنای چگالی طیفی توان نشان داده شده است. به عبارت دیگر، این شکل مشخص می‌کند که هرمؤلفه‌ی فرکانسی سیگنال دارای چه میزان توانی است. برای بررسی نحوه عملکرد آن، با چگالی طیفی توان سیگنال واقعی مقایسه شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود، مطابق با نتایج RMSE، روش‌های رؤیت‌گر و تخمین‌گر جذر مربعی چهارگان بی‌رد، چگالی طیفی نزدیک به سیگنال واقعی را دارند؛ در صورتی که روش چهارگان ضربی، با مقداری تفاوت نسبت به دو روش مذکور می‌باشد.



شکل ۷: تحلیل طیفی فرکانس میان چهارگان تخمینی و واقعی در روش‌های تخمین

[۱] Spectrum analysis

به منظور تحلیل سیگنال در زمانی که نویز با فرکانس پایین وجود دارد، رفتار پاسخ فرکانسی بررسی شده است. طبق شکل (۸)، نتایج تخمین‌گر جذرمربعی چهارگان بی‌رد نسبت به سایر روش‌ها، خطای چگالی طیفی کمتری بخصوص در فرکانس پایین دارد. البته رؤیت‌گر هم به‌طور کلی، خطای چگالی طیفی توان کمی برای سیگنال چهارگان در فرکانس‌های پایین از خود نشان می‌دهد.



شکل ۸: تحلیل طیفی فرکانس خطای چهارگان در روش‌های تخمین

جدول (۲) به منظور بررسی خطای RMSE با شرایط اولیه‌ی یکسان در هر سه روش، به همراه تغییرات ۰.۱، ۱ و ۱۰ برابر واریانس نویز مغناطیس‌سنج که مقداری برابر $\sigma_B^2 = 7e-14\ Tesla$ دارد، نشان داده شده است. در این جدول، کاهش میزان خطای میانگین جذر مربعی به همراه زمان همگرایی را میان سه روش مطرح شده نشان می‌دهد. با توجه به نتایج این جدول، با نرم خطای اولیه‌ی ۱۳/۷۷۱۶ درجه، روش رؤیت‌گر غیر خطی حفظ تقارن عملکرد بهتری نسبت به دو روش دیگر از خود نشان داده است. با توجه به اینکه در این جدول، خطای اولیه حالت مقدار قابل توجهی دارد، اثر بیشتری بر مقدار RMSE داشته و تغییرات

RMSE اولر(درجه) / نوع تخمین‌گر	$0.1\times\sigma_B^2$	σ_B^2	$10\times\sigma_B^2$	زمان همگرایی (ثانیه)
Observer	۳/۶۹۷۸	۳/۷۳۸۰	۴/۱۲۳۰	۷۰
SRUSQUE	۱۰/۸۳۹۸	۱۰/۸۶۴۱	۱۱/۰۱۴۵	۱۲۰
MEKF	۲۰/۸۹۲۰	۲۰/۸۹۴۲	۲۰/۹۰۱۶	۲۰۰

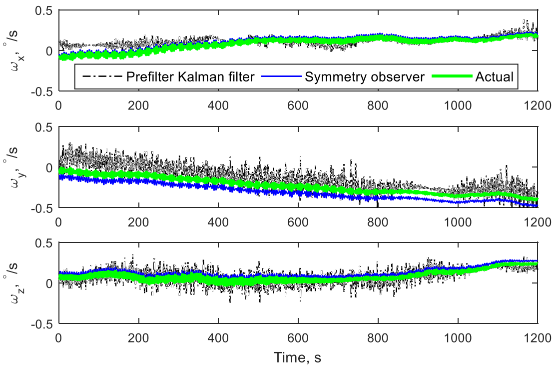
واریانس نویز برای سنسوری که ۰.۱ و ۱۰ برابر دقت داشته است، در هر سه روش کمتر از ۱ درجه است.

جدول ۲: مقایسه عملکرد روش‌های تصادفی و الگوریتم قطعی به همراه تغییرات واریانس نویز حسگر

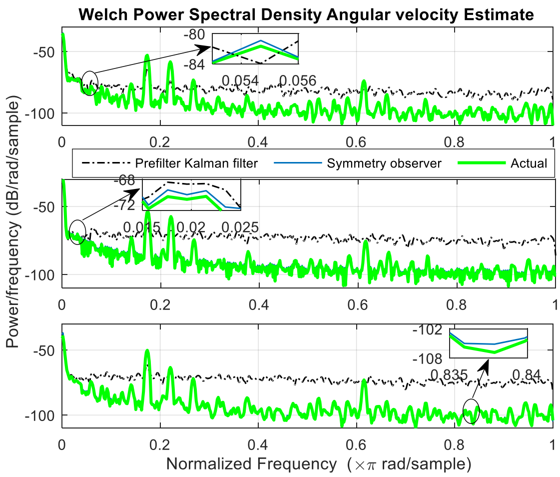
طبق نتایج جدول (۲)، زمانی که خطای اولیه بیشتر می‌شود، الگوریتم قطعی مقاومت بیشتری در برابر افزایش خطای اولیه از خود نشان می‌دهد.

همچنین، الگوریتم قطعی با افزایش نویز حسگر، بازهم برتری خود را نسبت به روش‌های تصادفی حفظ می‌کند.

به علاوه، سرعت زاویه‌ای با دو روش رؤیت‌گر متقارن و فیلتر کالمن توسعه‌یافته تخمین زده شده است. به دلیل این‌که معادلات سرعت زاویه‌ای می‌تواند در پیش فیلتر محاسبه شده و نیازمند الگوریتم‌های تصادفی چهارگان برای تخمین آن نیست، لذا تنها مقایسه میان رؤیت‌گر و فیلتر کالمن توسعه‌یافته انجام شده است. نتایج مربوط به آن نیز در شکل‌های (۹) و (۱۰) نشان داده شده اند.



شکل ۹: مقایسه سرعت زاویه‌ای تخمین زده شده با رؤیت‌گر پیشنهادی و پیش فیلتر کالمن فیلتر توسعه‌یافته



شکل ۱۰: مقایسه چگالی طیفی توان سرعت زاویه‌ای میان رؤیت‌گر پیشنهادی و پیش فیلتر کالمن فیلتر توسعه‌یافته

همانگونه که مشاهده می‌شود، در این قسمت نیز رؤیت‌گر غیرخطی به دلیل داشتن روشی برای تنظیم پارامترهای آن بر اساس قضیه‌ی پایداری لیاپانوف، مقاومت بهتری در برابر خطای تخمین اولیه از خود نشان می‌دهد و نویزهای کمتری در تخمین سرعت زاویه‌ای مشاهده می‌شود. همینطور با توجه به شکل (۱۰)، رفتار پاسخ فرکانسی نیز مؤید نتایج حوزه زمان است و رؤیت‌گر حفظ تقارن؛ خطای چگالی طیفی توان پایین‌تری نسبت به فیلتر کالمن توسعه‌یافته دارد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله به تخمین وضعیت چهارگان با سه روش مختلف، با تنها داده‌ی مغناطیس‌سنج در مدت زمان کسوف پرداخته شد. دو نوع الگوریتم مختلف که یکی از جنس تصادفی و دیگری از نوع رؤیت‌گر غیرخطی است معرفی شده‌اند. از دسته الگوریتم‌های تصادفی، دو فیلتر به نام‌های کالمن توسعه‌یافته ضربی و جذر مربعی چهارگان بی‌رد برای مقایسه با رؤیت‌گر پیشنهادی حفظ تقارن مورد بررسی قرار گرفتند. همچنین پایداری این رؤیت‌گر با تابع لیاپانوف مورد بررسی قرار گرفته است. یکی از مزیت‌های این روش، داشتن ساز و کاری برای تنظیم پارامترهای آن می‌باشد که در مورد فیلترهای کالمن با سعی و خطا انجام شده است تا بهترین تخمین بدست آید. نتایج نهایی در تخمین، نشان از این دارد که برای خطای اولیه‌ی کوچک تقریباً نتایج این سه نوع الگوریتم مشابه هم هستند. در شرایطی که داده‌ی حسگر خورشیدی وجود دارد و به دلیل کسوف از دسترس خارج می‌شود، خطای تخمین اولیه معمولاً خیلی بزرگ نیست. اما در شرایطی که خطای تخمین اولیه بزرگ باشد و مقدار حدودی از آن در دسترس نیست، رؤیت‌گر پیشنهادی نتایج خیلی بهتری را در همگرائی به نمایش می‌گذارد. لذا مقاومت این نوع رؤیت‌گر غیرخطی که از خواص غیرمتغیر بودن دینامیک‌های خطای حالت استفاده می‌کند، نسبت به الگوریتم‌های جذر مربعی چهارگان بی‌رد و چهارگان ضربی عملکرد بهتری دارد. همچنین رفتار پاسخ فرکانسی نیز مورد بررسی قرار گرفت و تخمین‌گرهای غیرخطی، رفتار پاسخ فرکانسی یکسانی داشته و نتایج بهتری را در خروجی چگالی طیفی توان نشان داده‌اند. روش پیشنهادی، هزینه‌ی محاسباتی کمتری به نسبت روش تصادفی چهارگان بی‌رد دارد که برای نانوماهواره مورد نظر به‌صرفه تر نیز خواهد بود. به‌علاوه، سرعت زاویه‌ای نیز در این روش پیشنهادی با خطایی کمتر از پیش فیلتر تصادفی فیلتر کالمن توسعه‌یافته توانسته است تخمین را انجام دهد. میان دو روش تصادفی نیز که در مقایسه با روش پیشنهادی مطرح شدند، الگوریتم جذر مربعی چهارگان بی‌رد که برای سامانه‌ی غیرخطی طراحی شده است نسبت به الگوریتم چهارگان ضربی که نوع تعمیم یافته فیلتر کالمن توسعه‌یافته است عملکرد مطلوب‌تری را در نتایج شبیه‌سازی از خود نشان داده است.

۶- پیوست

۶-۱ مدل میدان مغناطیسی زمین

مدل یک توصیف ریاضی استاندارد از میدان مغناطیسی زمین در این مقاله، بکار گرفته شده است. آخرین نسخه‌ی این مدل، IGRF-11 از مرتبه‌ی ۱۳ با دقت یک دهم نانوتسلا است. IGRF از ضرائب گوسی استفاده می‌کند. این پتانسیل توسط رابطه‌ی زیر توصیف می‌شود:

$$V(\lambda,\phi',r,t)= a\sum_{d=1}^{D}(\frac{a}{r})^{d+1}\sum_{j=1}^{d}(k_j^d(t)cos(j\lambda)+q_j^d(t)sin(j\lambda))L_j^d sin(\phi') \quad \text{(پ-۱)}$$

به‌طوری‌که r فاصله تا مرکز زمین است، ϕ' عرض جغرافیایی و λ طول جغرافیایی نقطه‌ی مورد نظر بروی زمین است. طول و عرض جغرافیایی از روی موقعیت ماهواره در دستگاه ECEF به‌صورت زیر قابل دستیابی است.

$$r^E=\begin{bmatrix} r_x^E \\ r_y^E \\ r_z^E \end{bmatrix},\ r=\sqrt{\left(r_x^E\right)^2+\left(r_y^E\right)^2+\left(r_z^E\right)^2},$$
$$\phi'=sin^{-1}\left(r_z^E/r\right),\quad \lambda=tan^{-1}\left(r_y^E/r_x^E\right) \quad \text{(پ-۲)}$$

همچنین a شعاع استوائی زمین، k_j^d و q_j^d ضرائب گوسی هستند. $L_j^d sin(\phi')$ تابع لژاندر از درجه‌ی j و مرتبه‌ی d است. درجه‌ی توسعه‌ای مدل مغناطیسی زمین (WMM[1]) نیز با D نشان داده شده است که برابر ۱۲ است.

در این مقاله، از مدل IGRF2010 آماده‌ی موجود در نرم‌افزار Matlab برای شبیه‌سازی استفاده شده است. اطلاعات خروجی بدست آمده از این مدل، در دستگاه شمال-شرق-پایین (NED)است. در الگوریتم‌های تعیین وضعیت احتیاج است که میدان مغناطیسی زمین در دستگاه مختصات مرجع (اینرسی) وجود داشته باشد.

با استفاده از ماتریس انتقال (پ-۳) می‌توان از دستگاه مختصات NED به دستگاه مختصات ECEF رسید. در ادامه با استفاده از ماتریس انتقال (پ-۴) می‌توان از دستگاه ECEF به دستگاه ECI رسید.

$${}^{ECEF}_{NED}C= \begin{bmatrix} -\sin(\phi')cos(\lambda) & -sin(\lambda) & -\cos(\phi')cos(\lambda) \\ -\sin(\phi')sin(\lambda) & cos(\lambda) & -cos(\phi')sin(\lambda) \\ cos(\phi') & 0 & -sin(\phi') \end{bmatrix} \quad \text{(پ-۳)}$$

برای انتقال از دستگاه ECEF به‌دستگاه ECI، زاویه‌ی بین خط برج حمل و طول جغرافیایی صفر به دو بخش Θ (زاویه‌ی بین اعتدال بهاری و طول جغرافیایی صفر در نیمه‌شب UT1) و زاویه‌ی حاصل‌ضرب زمان گذشته از نیمه شب و سرعت دوران زاویه‌ای زمین است.

$${}^{ECI}_{ECEF}C= \begin{bmatrix} cos(\Theta+\omega_{\oplus}\Delta t) & sin(\Theta+\omega_{\oplus}\Delta t) & 0 \\ -sin(\Theta+\omega_{\oplus}\Delta t) & cos(\Theta+\omega_{\oplus}\Delta t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(پ-۴)}$$

[1] World Magnetic Model

به‌طوری‌که $\omega_{\oplus}$ سرعت دوران زاویه‌ای زمین برابر با $2\pi/8.6164130e4$ رادیان بر ثانیه است. طول یک روز نجومی برابر $8.6164130e4$ ثانیه است. Θ با استفاده از روابط زیر بدست می‌آید.

$$T_U = \left(JD - 2451545.0\right)/36525 \qquad \text{(پ-۵)}$$

زمان نجومی میانگین گرینویچ[1] نیز از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است:

$$GMST^{\Theta} = 24110.54841 + 8640184.812866T_U + 0.093104T_U^2 - 6.2\times10^{-6}T_U^3 \qquad \text{(پ-۶)}$$

با توجه به این موضوع که در مدت زمان یک روز نجومی، ۳۶۰ درجه طی می‌شود، زاویه‌ای که توسط این کسری (زمان نجومی میانگین گرینویچ) از یک روز نجومی طی می‌شود، همان زاویه‌ی بین اعتدال بهاری و طول جغرافیایی صفر در نیمه شب UT1 است.

$$\Theta = \omega_{\oplus} \times \left(mod\left(GMST, 2\pi/\omega_{\oplus}\right)\right) \qquad \text{(پ-۷)}$$

که در رابطه فوق، mod، تابعی است که باقیمانده میان دو عدد را ارائه می‌دهد.

لذا در نهایت می‌توان مختصات میدان مغناطیسی در دستگاه اینرسی را طبق ذیل بیان کرد [۸]:

$$\begin{aligned} {}^{E}\vec{\mathbf{B}}(\lambda,\phi',r,t) &= -\nabla V(\lambda,\phi',r,t); \\ {}^{I}\vec{\mathbf{B}} &= {}^{ECI}_{ECEF}C({}^{E}\vec{\mathbf{B}}) \end{aligned} \qquad \text{(پ-۸)}$$

۶-۲ الگوریتم چهارگان کالمن بی‌رد

اولین مرحله در این الگوریتم محاسبه‌ی نقاط سیگما طبق رابطه (پ-۹) می‌باشد:

$$\begin{aligned} \vec{\chi}_k^{\delta p}(1) &= \vec{\chi}_k^{\delta p,1} = \hat{\vec{x}}_k^- \\ \vec{\chi}_k^{\delta p,i} &= \hat{\vec{x}}_k^- + \left(\gamma\sqrt{\boldsymbol{P}_k + \boldsymbol{Q}_k}\right) \quad for \quad i = 2,\ldots,m+1 \\ \vec{\chi}_k^{\delta p,i} &= \hat{\vec{x}}_k^- - \left(\gamma\sqrt{\boldsymbol{P}_k + \boldsymbol{Q}_k}\right) \quad for \quad i = m+2,\ldots,2m+1 \end{aligned} \qquad \text{(پ-۹)}$$

که در رابطه فوق $\gamma = \sqrt{m+\lambda}$ ($\lambda = \alpha^2(m+\kappa) - m$ به عنوان پارامتر ترکیبی مقیاس) و $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^{m\times1}$ (متغیر حالت) می‌باشند که این روش به نقاط سیگما معروف است بدین صورت است که به تعداد $M = 2m+1$ نقاط سیگما $\chi_k \in \mathbb{R}^{2m+1}$ به ازاء $k \in \{1,\ldots,\infty\}$ وجود دارد. ثابت α تعیین‌کننده‌ی پراکندگی نقاط سیگما حول $\hat{\vec{x}}_k^-$ است و معمولاً مقدار مثبت اندکی برای آن در نظر گرفته می‌شود ($0 < 0.0001 < \alpha < 1$). ثابت κ پارامتر مقیاس ثانوی است که معمولاً 0 یا $3-m$ تنظیم می‌شود و درجه آزادی برای تنظیم دقیق گشتاورهای مراتب بالاتر در اختیار قرار می‌دهد. برای مقادیر منفی κ این احتمال وجود دارد که کواریانس پیش‌بینی شده مثبت نیمه‌معین نشود. به‌علاوه، ماتریس‌های کواریانس در ارتباط با خطای حالت با $\boldsymbol{P}_k$ و نویز فرایند با $\boldsymbol{Q}_k$ نمایش داده می‌شوند. طبق رابطه‌ی (پ-۹)، اگر مقادیر ماتریس‌های کواریانس در طی بروزرسانی منفی شود، قطعاً در همین مرحله‌ی اولیه الگوریتم متوقف می‌شود. یک راه برای تضمین مثبت‌معین ماندن ماتریس کواریانس خطای تخمین استفاده از نسخه‌ی جذر مربعی الگوریتم فیلتر ذره‌ای است که در آن $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^T$ درنظر گرفته می‌شود [۲۳]. یک روش مؤثر برای محاسبه جذر ماتریس در (پ-۹)، استفاده از تجزیه‌ی چولسکی است. همچنین در رابطه‌ی (پ-۹پ-۹)، منظور از اندیس i آن است که بردار $\hat{\vec{x}}_k^-$ به‌ترتیب با هریک از ستون‌های $\gamma\sqrt{\boldsymbol{P}_k}$ جمع/تفریق شده و حاصل که یک بردار m بعدی است به عنوان یک نقطه سیگما در یکی از ستون‌های ماتریس $\boldsymbol{\chi}_k$ قرار می‌گیرد. اگر ارتباط بین خطای تخمین وضعیت و چهارگان به صورت $\delta\vec{\mathbf{p}}_{B/I} \equiv s\left[\delta\vec{\mathcal{Q}}/(a+\delta q_4)\right]$ نشان داده شود؛ در صورتی که مقادیر a و s به‌ترتیب ۰ و ۱ در نظر گرفته شود، بردار $\delta\vec{\mathbf{p}}_{B/I}$ بردار گیبز خواهد بود.

لذا اولین مرحله در این الگوریتم با مقدار دهی اولیه به صورت ($chol$ نماد تجزیه چولسکی است که یک ماتریس مثبت‌معین هرمیتی یا خودالحاقی را به حاصلضرب یک ماتریس پایین مثلثی و ترانهاده آن تبدیل می‌کند که $\boldsymbol{S}$ همان تجزیه چولسکی است):

$$\begin{aligned} \hat{\vec{x}}_0 &= E\left[\vec{x}_0\right], \\ \boldsymbol{S}_0 &= chol\{E\left[(\vec{x}_0 - \hat{\vec{x}}_0)(\vec{x}_0 - \hat{\vec{x}}_0)^T\right]\} \end{aligned} \qquad \text{(پ-۱۰)}$$

در مرحله‌ی دوم، با اصلاح رابطه‌ی (پ-۹)، تعیین نقاط سیگما طبق رابطه‌ی ذیل انجام می‌شود:

$$\begin{aligned} \vec{\chi}_k^{\delta p}(1) &= \vec{\chi}_k^{\delta p,1} = \hat{\vec{x}}_k^- \\ \vec{\chi}_k^{\delta p,i} &= \hat{\vec{x}}_k^- + \left(\gamma\,\boldsymbol{S}_k\right) \; for \;\; i = 2,\ldots,m+1 \\ \vec{\chi}_k^{\delta p,i} &= \hat{\vec{x}}_k^- - \left(\gamma\,\boldsymbol{S}_k\right) \; for \;\; i = n+2,\ldots,2m+1 \end{aligned} \qquad \text{(پ-۱۱)}$$

مرحله‌ی بعدی، گام تعیین و انتشار نقاط سیگمای چهارگان با استفاده از ارتباط میان خطای (δ) چهارگان و نقاط سیگما است:

[1] Greenwich Mean Sidereal Time

$$\delta\bar{\mathcal{Q}}_k^{+}(i)=s^{-1}[a+\delta q_{4k}^{+}(i)]\vec{\chi}_k^{\delta p,i}\quad ,i=2,\ldots,2m+1$$
$$\delta q_{4k}^{+}(i)=\frac{-a\left\|\vec{\chi}_k^{\delta p,i}\right\|^2+s\sqrt{s^2+(1-a^2)\left\|\vec{\chi}_k^{\delta p,i}\right\|^2}}{s^2+\left\|\vec{\chi}_k^{\delta p,i}\right\|^2} \qquad \text{(پ-۱۲)}$$

$$\hat{\bar{q}}_k^{+}(1)=\hat{\bar{q}}_k^{+};$$
$$\hat{\bar{q}}_k^{+}(i)=\delta\bar{q}_k^{+}(i)\otimes\hat{\bar{q}}_k^{+}\quad ,i=2,\ldots,2m+1 \qquad \text{(پ-۱۳)}$$

$$\hat{\bar{q}}_{k+1}^{+}(i)=\Omega({}^B\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I})\hat{\bar{q}}_k^{+}(i),\quad ,i=1,\ldots,2m+1$$
$$\Omega({}^B\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I})\equiv\begin{bmatrix}\cos(0.5\left\|{}^B\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\right\|\Delta t)I_{3\times3}-\left[{}^B\vec{\psi}_k\times\right] & {}^B\vec{\psi}_k\\ -{}^B\vec{\psi}_k^T & \cos(0.5\left\|{}^B\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\right\|\Delta t)\end{bmatrix}, \qquad \text{(پ-۱۴)}$$
$${}^B\vec{\psi}_k\equiv\sin(0.5\left\|{}^B\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\right\|\Delta t)\,{}^B\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}/\left\|{}^B\vec{\boldsymbol{\omega}}_{B/I}\right\|$$

مرحله‌ی چهارم، انتشار خطای چهارگان است:

$$\delta\hat{\bar{q}}_{k+1}^{-}(i)=\hat{\bar{q}}_{k+1}^{+}(i)\otimes\left[\hat{\bar{q}}_{k+1}^{+}(1)\right]^{-1}\quad ,i=1,\ldots,2m+1 \qquad \text{(پ-۱۵)}$$

پنجمین مرحله، پیش‌بینی نقاط سیگمای مربوط به خطای تخمین وضعیت است؛

$$\vec{\chi}_{k+1}^{\delta p}(1)=\vec{\chi}_{k+1}^{\delta p,1}=0$$
$$\vec{\chi}_{k+1}^{\delta p,i}=s\frac{\delta\bar{\mathcal{Q}}_{k+1}^{-}(i)}{a+\delta q_{4k+1}^{-}(i)}\quad for\quad i=2,\ldots,2m+1 \qquad \text{(پ-۱۶)}$$

در مرحله‌ی ششم، مرحله‌ی پیش‌بینی متغیر حالت و جذر کواریانس خطای حالت می‌باشد.

$$\hat{\vec{x}}_{k+1}^{-}=\frac{1}{m+\lambda}\{\lambda\vec{\chi}_{k+1}^{\delta p,1}+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{2m+1}\vec{\chi}_{k+1}^{\delta p,i}\} \qquad \text{(پ-۱۷)}$$

$$\boldsymbol{S}_{k+1}^{-}=qr\left(\left[\sqrt{\varpi_2^{(c)}}\left(\vec{\chi}_{k+1}^{\delta p,2:2m+1}-\hat{\vec{x}}_{k+1}^{-}\right)\quad\sqrt{\boldsymbol{Q}_{k+1}}\right]\right) \qquad \text{(پ-۱۸)}$$

$$\boldsymbol{S}_{k+1}^{-}=cholupdate\{\boldsymbol{S}_{k+1}^{-},\vec{\chi}_{k+1}^{\delta p,1}-\hat{\vec{x}}_{k+1}^{-},\varpi_1^{(c)}\} \qquad \text{(پ-۱۹)}$$

در رابطه‌ی (**Error! Reference source not found.**)، تجزیه QR (qr) ماتریس A توسط معادله‌ی A^T=QR انجام می‌شود که در آن Q یک ماتریس متعامد و R ماتریسی بالامثلثی است. همچنین *Cholupdate* نیز نشان‌دهنده‌ی فاکتور چولسکی بروزرسانی رتبه یک ماتریس $\boldsymbol{P}_k$ است. به عبارت دیگر، فاکتور چولسکی عبارت $\boldsymbol{P}\pm\sqrt{\nu}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$ با $\boldsymbol{S}=cholupdate\{\boldsymbol{S},\boldsymbol{u},\pm\nu\}$ نشان داده می‌شود. وزن‌های $\varpi_i^{(c)}$ نیز به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\varpi_1^{(c)}=\lambda/(\lambda+m)+(1-\alpha^2+\beta) \qquad \text{(پ-۲۰)}$$

$$\varpi_i^{(c)}=1/\{2(\lambda+m)\}\qquad i=2,\ldots,2m+1 \qquad \text{(پ-۲۱)}$$

ثابت β به‌منظور وارد کردن اطلاعات قبلی توزیع $\vec{\boldsymbol{x}}$ در محاسبه وزن‌های کواریانس $\varpi_1^{(c)}$ مورد استفاده قرار می‌گیرد. مقدار بهینه‌ی β برای توزیع گوسی $\beta=2$ است [۱۳].

مرحله‌ی هفتم، محاسبه‌ی پیش‌بینی خروجی بر حسب میانگین نقاط سیگما است؛

$$\hat{\vec{\boldsymbol{y}}}_{k+1}^{-}=\frac{1}{m+\lambda}\{\lambda\gamma_{k+1}(1)+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{2m}\gamma_{k+1}(i)\} \qquad \text{(پ-۲۲)}$$

$$\gamma_{k+1}(i)=\begin{bmatrix}{}_I^BC[\hat{\bar{q}}^{-}(i)]\ {}^I\vec{\mathbf{B}}\\ {}_I^B\dot{C}(\hat{\bar{q}}^{-}(i))\ {}^I\vec{\mathbf{B}}+{}_I^BC[\hat{\bar{q}}^{-}(i)]\ {}^I\left(D_I\vec{\mathbf{B}}\right)\end{bmatrix}_{k+1} \qquad \text{(پ-۲۳)}$$

در مرحله‌ی هشتم، محاسبه‌ی جذر کواریانس خروجی $\boldsymbol{S}_{\vec{y}k+1}^{+}$ و ماتریس همبستگی متقابل $\boldsymbol{P}_{k+1}^{xy}$ انجام می‌گردد:

$$\boldsymbol{S}_{\vec{y}k+1}^{+}=$$
$$qr\left(\left[\sqrt{\varpi_2^{(c)}}\left(\boldsymbol{h}\left(\vec{\chi}_{k+1}^{\delta p,2:2m+1}\right)-\hat{\vec{\boldsymbol{y}}}_{k+1}^{+}\right)\quad\sqrt{\boldsymbol{R}_{k+1}}\right]\right),$$
$$\boldsymbol{h}(\hat{\vec{\boldsymbol{x}}}_{\boldsymbol{k}}^{-})= \qquad \text{(پ-۲۴)}$$
$$\begin{bmatrix}{}_I^BC(\hat{\bar{q}}_{B/I}^{-})\ {}^I\vec{\mathbf{B}}\\ {}_I^B\dot{C}(\hat{\bar{q}}_{B/I}^{-})\ {}^I\vec{\mathbf{B}}+{}_I^BC(\hat{\bar{q}}_{B/I}^{-})\ {}^I\left(D_I\vec{\mathbf{B}}\right)\end{bmatrix}\Bigg|_{t_k}$$

$$\boldsymbol{S}_{\vec{y}k+1}^{+}=cholupdate\left(\boldsymbol{S}_{\vec{y}k+1}^{+},\boldsymbol{h}\left(\vec{\chi}_{k+1}^{\delta p,1}\right)-\hat{\vec{\boldsymbol{y}}}_{k+1}^{+},\varpi_1^{(c)}\right) \qquad \text{(پ-۲۵)}$$

$$\boldsymbol{P}_{\vec{x}\vec{y}k+1}^{+}=\sum_{i=1}^{2m+1}\varpi_i^{(c)}\left(\vec{\chi}_{k+1}^{\delta p,i}-\hat{\vec{\boldsymbol{x}}}_{k+1}^{-}\right)\left(\boldsymbol{h}\left(\vec{\chi}_{k+1}^{\delta p,i}\right)-\hat{\vec{\boldsymbol{y}}}_{k+1}^{-}\right)^T \qquad \text{(پ-۲۶)}$$

مرحله‌ی بعدی، محاسبه‌ی بهره الگوریتم است:

$$\boldsymbol{K}_{k+1}=\left(\boldsymbol{P}_{\vec{x}\vec{y}k+1}^{+}/\boldsymbol{S}_{\vec{y}k+1}^{+\ T}\right)/\boldsymbol{S}_{\vec{y}k+1}^{+} \qquad \text{(پ-۲۷)}$$

[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.4.9.3]
[DOI: 10.52547/joc.14.4.25]

مرحله‌ی دهم نیز بروزرسانی متغیر حالت و ماتریس کواریانس خطا می‌باشد:

$$\hat{\bar{\boldsymbol{x}}}_{k+1}^{+}=\hat{\bar{\boldsymbol{x}}}_{k+1}^{-}+\boldsymbol{K}_{k+1}\left[\tilde{\bar{\boldsymbol{y}}}-\hat{\bar{\boldsymbol{y}}}_{k+1}^{-}\right], \qquad (\text{پ-۲۸})$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{U}=\boldsymbol{K}_{k+1}\boldsymbol{S}_{\bar{y}k+1}^{+}\\&\boldsymbol{S}_{k+1}^{+}=cholupdate\left(\boldsymbol{S}_{k+1}^{-},\boldsymbol{U},-1\right)\end{aligned} \qquad (\text{پ-۲۹})$$

در مرحله‌ی یازدهم، بروزرسانی خطای چهارگان طبق (پ-۳۰) و وضعیت آن طبق (پ-۳۱) انجام می‌گردد:

$$\begin{aligned}&\delta\bar{\mathcal{Q}}_{k+1}^{+}=\\&s^{-1}[a+\delta q_{4k+1}^{+}]\delta\hat{\bar{\mathbf{p}}}_{k+1}^{+},\\&\delta q_{4k+1}^{+}=\\&\frac{-a\left\|\delta\hat{\bar{\mathbf{p}}}_{k+1}^{+}\right\|^{2}+s\sqrt{s^{2}+(1-a^{2})\left\|\delta\hat{\bar{\mathbf{p}}}_{k+1}^{+}\right\|^{2}}}{s^{2}+\left\|\delta\hat{\bar{\mathbf{p}}}_{k+1}^{+}\right\|^{2}}\end{aligned} \qquad (\text{پ-۳۰})$$

$$\hat{\bar{\boldsymbol{q}}}_{k+1}^{+}=\delta\hat{\bar{\boldsymbol{q}}}_{k+1}^{+}\otimes\left[\hat{\bar{\boldsymbol{q}}}_{k+1}^{-}(1)\right]^{-1} \qquad (\text{پ-۳۱})$$

در مرحله‌ی نهایی این الگوریتم نیز به دلیل این‌که خطای وضعیت به تخمین چهارگان تبدیل می‌شود، تخمین خطای وضعیت طبق (پ-۳۲) صفر می‌شود.

$$\delta\hat{\bar{\mathbf{p}}}_{k+1}^{+}=\mathbf{0}_{3\times1} \qquad (\text{پ-۳۲})$$

در گام بعد از آخرین مرحله‌ی بروزرسانی، فرایند با داده‌ی اندازه‌گیری جدید، با محاسبه‌ی بهره‌ی کالمن طبق (پ-۲۷) تکرار می‌شود.

۶-۳ اثبات پایداری نمائی

اثبات- در ادامه، بررسی پایداری نمائی با تابع لیاپانوف مثبت معین زیر تعیین می‌گردد: ($\|.\|$ نرم اقلیدسی بردار می‌باشد.)

$$\begin{aligned}&V(\delta\vec{\eta},t)=\delta\vec{\eta}^{T}\mathbf{P}^{-1}\delta\vec{\eta}\\&\frac{1}{\bar{p}}\|\delta\vec{\eta}\|^{2}\leqslant V(\delta\vec{\eta},t)\leqslant\frac{1}{p}\|\delta\vec{\eta}\|^{2}\end{aligned} \qquad (\text{پ-۳۳})$$

در مرحله‌ی بعدی، مشتق تابع لیاپانوف بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\delta\vec{\eta},t)&=\delta\dot{\vec{\eta}}^{T}\Pi(t)\delta\vec{\eta}+\delta\vec{\eta}^{T}\dot{\Pi}(t)\delta\vec{\eta}\\&+\delta\vec{\eta}^{T}\Pi(t)\delta\dot{\vec{\eta}}\\&=\delta\vec{\eta}^{T}[\dot{\Pi}(t)+\Pi(t)A\\&+A^{T}\Pi(t)+2C^{T}R^{-1}C]\delta\vec{\eta}\end{aligned} \qquad (\text{پ-۳۴})$$

که در آن $\Pi(t)=\mathbf{P}^{-1}$. با جایگذاری $\dot{\Pi}(t)=-\Pi(t)\dot{\mathbf{P}}\Pi(t)$ و رابطه‌ی (۳۹) در (پ-۳۴)

$$\begin{aligned}&\dot{V}(\delta\vec{\eta},t)=\\&\delta\vec{\eta}^{T}[-C^{T}R^{-1}C+\Pi(t)Q\Pi(t)]\delta\vec{\eta}\end{aligned} \qquad (\text{پ-۳۵})$$

اگر s' کوچکترین مقدار ویژه $\boldsymbol{Q}$ باشد، سپس $s'I<\boldsymbol{Q}$. لذا می‌توان نامساوی زیر را بیان کرد:

$$\dot{V}(\delta\vec{\eta},t)\leqslant\frac{-s'}{\bar{p}^{2}}\|\delta\vec{\eta}\|^{2}\leqslant\frac{-ps'}{\bar{p}^{2}}V(\delta\vec{\eta},t) \qquad (\text{پ-۳۶})$$

بنابراین، $\dot{V}$ منفی معین بوده و رابطه‌ی (پ-۳۷) را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}&V(\delta\vec{\eta},t)\leqslant V(\delta\vec{\eta}(0),0)exp(-\frac{ps'}{\bar{p}^{2}}t)\\&\|\delta\vec{\eta}\|\leqslant\sqrt{\frac{\bar{p}}{p}}\|\delta\vec{\eta}(0)\|exp(-\frac{ps'}{2\bar{p}^{2}}t)\end{aligned} \qquad (\text{پ-۳۷})$$

با درنظر گرفتن قضیه‌ی ۴۵ مرجع [۲۱] و معادلات (پ-۳۳) و (پ-۳۶-۳۷)، معادلات خطای (۳۸) پایدار نمائی در نقطه تعادل صفر هستند. بنابراین، سامانه‌ی خطای غیرمتغیر (۳۶)، پایدار نمائی اطراف نقطه تعادل صفر یا خطای $\vec{\eta}=\vec{\mathbf{0}}$ بر طبق تئوری ۳.۱۱ مرجع [۲۰] می‌باشد.

مراجع

[1] Cilden-Guler, Demet, et al., "Nanosatellite Attitude Estimation using Kalman-Type Filters with Non-Gaussian Noise", Elsevier, Aerospace Science and Technology, Vol. 92, 2019, pp.66-76.

[2] Burton, R., Rock, S., Springmann, J. and Cutler, J., "Online attitude determination of a passively magnetically stabilized spacecraft", Elsevier, Acta Astronautica, Vol. 133, 2017, pp.269-281.

[3] Firoozi, D. and Namvar, M., "Analysis of gyro noise in non-linear attitude estimation using a single vector measurement", IET Control Theory & Applications, Vol. 6, No. 14, 2012, pp.2226-2234.

[4] Hajiyev, C. and Guler, D.C., "Review on gyroless attitude determination methods for small satellites", Progress in Aerospace Sciences, 90, 2017, pp.54-66.

[5] Psiaki, M.L., Martel, F. and Pal, P.K., "Three-axis attitude determination via Kalman filtering of magnetometer data", Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 13, No. 3, 1990, pp.506-514.

[6] Natanson, M., Challa, J., Deutchmann, D. and Baker, F., "Magnetometer–Only Attitude and Rate Estimation for Gyroless Spacecraft", In Proceedings of the Third International Symposium on Space Mission Operations and Ground Data Systems, 1994.

[7] Searcy, J.D. and Pernicka, H.J., "Magnetometer-only attitude determination using novel two-step Kalman filter approach", Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 35, No. 6, 2012, pp.1693-1701.

[8] Searcy, J.D., "Observability-enhanced dual-filter design for attitude estimation with minimum observations", Ph.D. thesis, Missouri University of Science and Technology, 2013.

[9] Springmann, J.C., "Satellite Attitude Determination with Low-Cost Sensors", Ph.D. thesis, University of Michigan, 2013.

[10] Tuthill, J.D., "Design and simulation of a nano-satellite attitude determination system", Doctoral dissertation, Monterey, California. Naval Postgraduate School, 2009.

[11] Chingiz Hajiyev, Demet Cilden-Guler, "Gyroless Nanosatellite Attitude Estimation in Loss of Sun Sensor Measurements", Elsevier, IFAC Papers OnLine, Vol. 51, 2018, pp.89-94.

[۱۲] خسرویان همایی، علیرضا، طراحی رؤیت‌کننده و کنترل‌کننده‌ی غیرخطی برای تخمین و کنترل وضعیت ماهواره، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شریف، ایران، شهریور ۸۹

[13] Bonnabel, S., Martin, P. and Rouchon, P., "Symmetry-preserving observers", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 53, No. 11, 2008, pp.2514-2526.

[14] Sidi, M.J., Spacecraft dynamics and control: a practical engineering approach, Vol. 7, Cambridge university press, 2000.

[۱۵] کیانی، مریم، تخمین تلفیقی پارامترهای مداری و وضعی ماهواره با استفاده از فیلترهای غیرخطی هیبرید، رساله دکتری، دانشگاه صنعتی شریف، ایران، دی ۹۳.

[16] Anguelova, M., Observability and identifiability of nonlinear systems with applications in biology. Gothenburg, Sweden: Chalmers University of Technology, 2007.

[۱۷] ازگلی، سجاد و عاروان، محمدرضا، مدل‌سازی و شبیه‌سازی سامانه‌های متحرک، انتشارات یامهدی، ۱۳۸۹.

[18] Carletta, S. and Teofilatto, P., "Design and Numerical Validation of an Algorithm for the Detumbling and Angular Rate Determination of a CubeSat Using Only Three-Axis Magnetometer Data", International Journal of Aerospace Engineering, 2018.

[19] Simon, D., Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches. John Wiley & Sons, 2006.

[20] Olver, P.J., Equivalence, invariants and symmetry, Cambridge University Press, 1995.

[21] Khalil, H.K. and Grizzle, J.W., Nonlinear systems, Vol. 3. Upper Saddle River, NJ: Prentice hall, 2002.

[22] Vidyasagar M., Nonlinear systems analysis, Vol. 42. Siam, 2002.

[23] Sarkka, S., "On unscented Kalman filtering for state estimation of continuous-time nonlinear systems", IEEE Transactions on automatic control, Vol. 52, No. 9, 2007, pp.1631-1641.