

# ارائه روش جدید درونیابی پایدار در طراحی خودخلبان مقاوم زمانبندی بهره

سید محمد جواد معافی مدنی<sup>۱</sup>، ایمان محمد زمان<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، javadmadany@yahoo.com

<sup>۲</sup> استادیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، mohammadzaman@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۹/۱/۱۳۹۱، تاریخ پذیرش مقاله ۲۴/۳/۱۳۹۱)

**چکیده:** در این مقاله یک روش جدید درونیابی پایدار برای طراحی خودخلبان مقاوم یک رهگیر ارائه شده بر مبنای درونیابی بین نواحی مشترک پایدار کنترل کننده‌های محلی بوده و تضمین پایداری سیستم حلقه بسته را در کل فضای ممکن می‌نماید. برای پیدا کردن نواحی پایدار هر کنترل کننده محلی از ابزار v-gap metric استفاده شده و از روش کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه  $H_{\infty}$  برای طراحی کنترل کننده‌های محلی استفاده شده است. همچنین پیچیدگی روش ارائه شده نسبت به سایر روش‌های درونیابی حفظ کننده پایداری کمتر می‌باشد. نتایج شیوه‌سازی سه درجه آزادی نشان‌دهنده تضمین کارآیی و پایداری سیستم حلقه بسته در طول مسیر پرواز می‌باشد.

**کلمات کلیدی:** خودخلبان مقاوم، درونیابی حفظ کننده پایداری، کنترل کننده زمانبندی بهره، v-gap metric.

## A New Stability Preserving Interpolation Method in Robust Gain Scheduling Autopilot Design

Mohammad Javad Moafi Madani, Iman Mohammadzaman

**Abstract:** This paper presents a new stability preserving interpolation technique for robust gain scheduling autopilot design. The interpolation method is based on interpolation in the common stability region of local controllers and generates a gain-scheduled controller that is stabilizing at every operating point of a closed loop system. For selection of stability region of local controllers, the notion of the v-gap metric and its connection to robust loop-shaping theory is used. The proposed method facilitates the design of gain-scheduled controllers that preserves stability of the closed loop system. The simulation results given show the generality and effectiveness of the proposed control strategy in terms of the stability, performance and robustness, of the system.

**Keywords:** Robust autopilot, stable interpolation, gain scheduling controller, v-gap metric.

## فهرست علایم

Q: فشار دینامیکی

S: سطح مرجع

D: قدرت

$V_M$ : سرعت رهگیر

X: نیروی وارد بر رهگیر در راستای X بدنه

Y: نیروی وارد بر رهگیر در راستای Y بدنه

Z: نیروی وارد بر رهگیر در راستای Z بدنه

L: گشتاور حول محور رول

$RH_{\infty}$ : فضای توابع کسری حقیقی محدود و آنالیتیک در نیمه

راست صفحه مختلط

$\bar{\sigma}$ : بزرگترین مقدار تکین ماتریس

$\underline{\sigma}$ : کوچکترین مقدار تکین ماتریس

$\| \cdot \|$ : نرم بی نهایت ماتریس

$[G_s, k_{\infty}]$ : حاشیه پایداری مقاوم سیستم

$\gamma$ : معکوس حاشیه پایداری مقاوم

کنترل کننده زمان بندی بهره نهایی بین این کنترل کننده‌ها، درونیابی انجام می‌شود [۷-۸]. روش‌های مبتنی بر مدل خطی تغییر ناپذیر با زمان، روش‌های بدون محافظه کاری بوده و وجود کنترل کننده زمان بندی بهره همواره در این روش‌ها تضمین شده است ولی تحلیل پایداری در این روش‌ها با پیچیدگی همراه است. در سال‌های گذشته از سوئیچینگ سخت، درونیابی بین صفر و قطب و بهره تابع تبدیل، درونیابی بین ضرایب تابع تبدیل کنترل کننده‌های محلی در هنگام انتقال از یک ناحیه به ناحیه دیگر و ترکیب خروجی کنترل کننده‌های محلی استفاده شده است [۹-۱۰]. تمام این روش‌ها جزء روش‌های قدیمی مبتنی بر مدل خطی بوده و به طور خلاصه می‌توان گفت مزیت این روش‌ها در سادگی طراحی و پیاده‌سازی کنترل کننده زمان بندی بهره نهایی می‌باشد و مهمترین عیب آن‌ها نیز عدم تضمین پایداری کنترل کننده فراگیر است. اما از میان روش‌های مبتنی بر مدل خطی تغییر ناپذیر با زمان، می‌توان به روش‌هایی اشاره کرد که در آن‌ها در مورد پایداری سیستم زمان بندی بهره نهایی نیز تضمین‌هایی داده شده است. یکی از روش‌های درونیابی که در آن در مورد پایداری سیستم زمان بندی بهره نهایی بحث شده است روش درونیابی فیدبک حالت و مشاهده گر می‌باشد. این روش به علت درونیابی بین چندین ماتریس فضای حالت دارای پیچیدگی فراوانی است ولی در مقالاتی برای اثبات پایداری این روش ایده‌هایی مطرح شده است [۱۰]. یکی دیگر از روش‌هایی که توانایی تضمین پایداری سیستم زمان بندی بهره نهایی را دارد روش‌های درونیابی بین ماتریس‌های نمایش پارامتر یولا است و در نتیجه ساختار کنترل کننده زمان بندی بهره نهایی به صورت ترکیب کسری خطی از سیستم وابسته به پارامتر با کنترل کننده‌های محلی می‌باشد [۱۱-۱۳]. در [۱۲] و [۱۳] یک روش درونیابی حفظ کننده پایداری برمبنای درونیابی روی پارامترهای یولا ارائه شده و از آن برای طراحی خودخلبان رهگیر استفاده شده است. مهمترین شرط درونیابی در این روش شرط پوشش پایداری است. این شرط بیان می‌کند که هر کنترل کننده محلی باید توانایی تضمین پایداری برای یک همسایگی باز حول نقطه نامی را به ازای پارامترهای فریز شده سیستم داشته باشد و درونیابی نیز درون نواحی مشترک پایداری امکان‌پذیر است. اما در این روش درجه کنترل کننده فراگیر بسیار بالاتر از درجه کنترل کننده‌های محلی بوده و پیاده‌سازی آن دارای پیچیدگی فراوانی می‌باشد. همچنین پایداری سیستم وابسته به پارامتر در مرحله طراحی مدنظر قرار نگرفته و تنها پایداری سیستم به ازای پارامترهای فریز شده مورد بررسی قرار می‌گیرد و بعد از مرحله طراحی با بررسی یک قید روی بیشینه نرخ تغییرات متغیر زمان بندی بهره، پایداری سیستم وابسته به پارامتر نهایی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

به منظور بهبود مشکلات و پیچیدگی‌های بیان شده در بالا، در این مقاله یک روش جدید برای درونیابی پایدار بین کنترل کننده‌های محلی ارائه شده است. مهمترین شرط درونیابی در این روش، شرط پوشش

$M$ : گشتاور حول محور پیچ

$N$ : گشتاور حول محور یاو

$P$ : سرعت زاویه‌ای حول محور X بدنی

$Q$ : سرعت زاویه‌ای حول محور Z بدنی

$R$ : سرعت زاویه‌ای حول محور Z بدنی

$m$ : جرم رهگیر

$I_y$ : ممان اینرسی طولی

$I_z$ : ممان اینرسی عرضی

$\delta$ : زاویه بالک عملگر

$C_{z\alpha}$ : تغییرات Z ناشی از تغییرات زاویه بالک

$C_{\alpha z}$ : تغییرات Z ناشی از تغییرات زاویه حمله

$C_{m\alpha}$ : تغییرات M ناشی از تغییرات زاویه بالک

$C_{\alpha m}$ : تغییرات M ناشی از تغییرات زاویه حمله

## ۱- مقدمه

طراحی خودخلبان برای رهگیرها و تحلیل پایداری و کارآیی آن در طول مسیر پروازی یکی از مسائل مورد توجه مهندسین کنترل بوده و تلاش‌های تحقیقاتی زیادی را به خود جلب نموده است [۱-۳]. پیچیدگی‌های حاکم بر دینامیک رهگیر مثل رفتار غیرخطی، وجود نامعینی و دینامیک وابسته به پارامتر منجرب به گسترش تحقیقات پرآمون طراحی کنترل کننده برای این سیستم و تحلیل پایداری و کارآیی آن شده است. از این میان، روش زمان بندی بهره یکی از رایج‌ترین روش‌ها در تحلیل پایداری و طراحی کنترل کننده برای سیستم‌های غیرخطی وابسته به پارامتر و همچنین طراحی خودخلبان رهگیرها می‌باشد [۴]. در حال کلی می‌توان روش‌های زمان بندی بهره را با توجه به نحوه خطی متغیر با پارامتر و غیرخطی به دو دسته زمان بندی بهره بر مبنای مدل خطی متغیر با پارامتر و زمان بندی بهره بر مبنای مدل خطی غیرمتغیر با زمان تقسیم کرد [۵]. در روش‌های مبتنی بر مدل خطی متغیر با پارامتر، دینامیک سیستم غیرخطی به صورت یک سیستم خطی با ماتریس‌های فضای حالت تغییر پذیر با زمان مدل می‌شود و تحلیل پایداری و طراحی کنترل کننده در این روش‌ها با استفاده از تحلیل تابع لیاپانوف و یا قضیه بهره کوچک انجام می‌شود [۶]. تحلیل پایداری با استفاده از تابع لیاپانوف یا قضیه بهره کوچک محافظه کارانه بوده و در نهایت ساختار کنترل کننده از نظر شبیه‌سازی و پیاده‌سازی پیچیده خواهد بود. علاوه بر آن ممکن است شرایط امکان‌پذیری توابع لیاپانوف برقرار نباشد و وجود کنترل کننده فراگیر تضمین شده نیست (منظور از کنترل کننده فراگیر کنترل کننده زمان بندی بهره است که از ترکیب کنترل کننده‌های محلی و احتمالاً دینامیک سیستم وابسته به پارامتر به دست آمده است).

در روش‌های مبتنی بر مدل خطی تغییر ناپذیر با زمان عموماً چند سیستم خطی از روی سیستم غیرخطی اولیه در نقاط کار مختلف به دست آمده و برای هر کدام از آن‌ها کنترل کننده فراگیر کنترل کننده زمان بندی بهره است. این روش‌ها معمولاً دارای ساختار مشابه نیستند و در نهایت به منظور دست یافتن به

<sup>۱</sup> Youla parameter

بيان کننده مقدار مقاومت سیستم در برابر نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول سیستم نامی می باشد، در این مقاله از روش شکل دهی حلقه  $H_{\infty}$  برای طراحی کنترل کننده محلی استفاده می شود. زیرا در این روش نیز کنترل کننده مقاوم به گونه ای طراحی می شود که حاشیه پایداری مقاوم سیستم در برابر نامعینی های روی ضرایب نسبت به هم اول سیستم نامی بیشینه گردد. البته به منظور رفع مشکل درجه بالای کنترل کننده روش شکل دهی حلقه  $H_{\infty}$  از یک نوع روش طراحی استفاده شده است تا کنترل کننده مقاوم طراحی شده دارای درجه پایینی باشد. این روش به نام روش کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه  $H_{\infty}$  شناخته می شود. تحقق فضای حالت  $G_s$  را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$G_s = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (1)$$

که در آن  $A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times n_u}, C \in R^{n_y \times n}, D \in R^{n_y \times n_u}$  و سیستم شکل دهی شده در روش شکل دهی حلقه  $H_{\infty}$  می باشد [۱۶]. تحقق مینیمال فضای حالت ضرایب نسبت هم اول  $G_s$  به صورت زیر می باشد [۱۶]:

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= \begin{bmatrix} A + LC & L \\ E^{-1/2}C & E^{-1/2} \end{bmatrix} \\ \tilde{M} &= \begin{bmatrix} B + LD & L \\ E^{-1/2}D & E^{-1/2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن  $E = I + DD^T$  و  $L = -(BD^T + ZC^T)$  بوده و ماتریس  $Z$  جواب معادله جبری ریکاتی زیر است:

$$\begin{aligned} (A - BF^{-1}D^TC)Z + Z(A - BF^{-1}D^TC)^T \\ - ZC^TE^{-1}CZ + BF^{-1}B^T = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

که در رابطه فوق  $F = I + D^TD$  می باشد. علاوه بر آن تحقق فضای حالت سیستم کلی شده<sup>۱</sup> متناظر با روش شکل دهی حلقه به صورت زیر به دست می آید [۱۶]:

$$P = \begin{bmatrix} A_s & -LE^{1/2} & B \\ \begin{bmatrix} 0 \\ C \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ E^{1/2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I_{n_u} \\ D \end{bmatrix} \\ C & E^{1/2} & D \end{bmatrix} \quad (4)$$

لم زیر شرایط وجود کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه  $H_{\infty}$  که با  $K_{\infty}$  نمایش داده می شود را بیان می نماید:

لم ۱: تحقق فضای حالت سیستم شکل دهی شده  $G_s$  مطابق رابطه (۱) و نرم بی نهایت تابع تبدیل حلقه بسته از اغتشاش به خروجی مطابق رابطه زیر می باشد:

$$\left\| \begin{bmatrix} K_{\infty} \\ I \end{bmatrix} (I - G_s K_{\infty})^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\| \leq \gamma = \varepsilon^{-1} \quad (5)$$

پایداری وابسته به پارامتر است بطوریکه با برقراری شرط مذکور، پایداری کلی سیستم تصمین شده و ساختار ساده ای برای کنترل کننده فراگیر بدست می آید. تفاوت بین این شرط با شرط پوشش پایداری بیان شده در مراجع [۱۲] و [۱۳] این است که در مراجع مذکور تنها به بررسی پایداری سیستم برای مقادیر فریز شده می پردازد. این پایداری بدین معنی است که سیستم وابسته به پارامتر  $\gamma$  ثابت مقادیر متغیر زمان بندی بهره به صورت یک سیستم LTI تبدیل شده و سپس پایداری آن مورد بررسی قرار می گیرد. ولیکن در شرط پایداری وابسته به پارامتر ارائه شده در این مقاله، یک همسایگی باز حول نقطه نامی مشخص می شود که سیستم وابسته به پارامتر  $\gamma$  تغییرات پارامترها یا شرط موردنظر به صورت کلی پایدار باشد. پایداری کلی در اینجا بدین معنی است که سیستم وابسته به پارامتر  $\gamma$  تغییرات متغیر زمان بندی بهره (بدون فریز شدن)، پایدار بماند. در حقیقت در شرط پوشش پایداری وابسته به پارامتر، بررسی مقادیر ویژه سیستم به تهایی کافی نمی باشد و لذا برای پیدا کردن همسایگی باز حول هر نقطه نامی به گونه ای که شرط موردنظر را ارضاء کند، ابزار v-gap metric پیشنهاد شده است. با استفاده از این ایده برای هر کنترل کننده محلی نواحی محلی پایدار مشخص شده و روشی برای درونیابی بین دو کنترل کننده محلی نواحی درون ناحیه اشتراک پایداری دو کنترل کننده ارائه می شود. همچنین کنترل کننده فراگیر ارائه شده در این مقاله تنها با ترکیب کنترل کننده های محلی به دست می آید ولی در سایر روش ها با ترکیب کنترل کننده های محلی و سیستم وابسته به پارامتر به دست می آید. در حقیقت با ورود دینامیک سیستم وابسته به پارامتر به دینامیک کنترل کننده فراگیر، دشواری و پیچیدگی فراوانی در پیاده سازی کنترل کننده فراگیر حاصل می شود که با این ایده این مشکل برطرف می گردد.

از آنجایی که قضاایی پایداری که توسط ابزار v-gap metric معرفی می شود با روش شکل دهی حلقه  $H_{\infty}$  مرتبط است، بنابراین در این مقاله برای طراحی کنترل کننده محلی از روش کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه  $H_{\infty}$  استفاده شده است که در آن درجه کنترل کننده مقاوم صفر بوده و درجه کنترل کننده فراگیر تنها برابر درجه وزن های شکل دهی حلقه می باشد و لذا منجر به یک کنترل کننده با درجه نسبی پایین می گردد که مشکلات پیداه سازی عملی را برخلاف روش کلاسیک شکل دهی حلقه  $H_{\infty}$  نخواهد داشت. این ویژگی باعث سادگی فراوان در پیاده سازی کنترل کننده زمان بندی بهره نهایی خواهد شد [۱۴].

## ۲- کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه $H_{\infty}$

برای طراحی کنترل کننده زمان بندی بهره با استفاده از درونیابی پایدار بین کنترل کننده های محلی، لازم است کنترل کننده های محلی توانایی تصمین پایداری برای یک همسایگی باز حول نقطه نامی را داشته باشند. از آنجایی که در این مقاله از ابزار v-gap metric برای پیدا کردن همسایگی باز حول نقطه نامی استفاده می شود و این ابزار در حقیقت

<sup>۱</sup> Generalized plant

در این قسمت به ارائه برخی تعاریف و فرضیات مورد استفاده در مقاله پرداخته شده است. برای سادگی فرض می‌شود سیستم وابسته به پارامتر تنها به یک پارامتر وابستگی دارد و تعمیم این روش برای حالت بیشتر از یک پارامتر به سادگی قابل انجام است.

**تعريف ۱:** سیستم خطی تغییر پذیر با پارامتر  $G(\rho)$  به همراه مجموعه بسته  $\Gamma \subset R$  که بیان گر محدوده تغییرات متغیرهای زمان بندی بهره است ( $\rho \in \Gamma$ ), داده شده است. همچنین فرض کنید به ازای مقادیر ثابت  $\rho_1, \dots, \rho_q \in \Gamma$  کنترل کننده‌های خطی تغییرناپذیر با زمان  $K_1, \dots, K_\rho$  طراحی شده است به گونه‌ای که هر کنترل کننده قادر به حفظ پایداری سیستم خطی غیرمتغیر با زمان  $(\rho_i) G(\rho_i)$  متناظر با خود باشد. کنترل کننده تغییرناپذیر با پارامتر  $(\rho) K(\rho)$  را که از روی  $K_1, \dots, K_\rho$  ساخته شده است، کنترل کننده حفظ کننده پایداری می‌گویند اگر شرایط زیر برقرار باشد [۱۳]:

۱. ضرایب  $K(\rho)$  به صورت توابع پیوسته‌ای از  $\rho$  باشند.

$$K(\rho_i) = K_i \quad \text{for } i=1, \dots, q \quad .2$$

۳. سیستم  $G(\rho)$  را به ازای تمام  $\rho \in \Gamma$  پایدار کند.

با استفاده از تعريف ۱، در این مقاله یک روش درونیابی حفظ کننده پایداری ارائه شده است که در آن مهمترین شرطی که روی کنترل کننده‌های خطی تغییرناپذیر با زمان که بین آنها درونیابی پایدار صورت می‌گیرد؛ شرط پوشش پایداری سیستم وابسته به پارامتر می‌باشد. این شرط بدین معنی است که هر کنترل کننده محلی در این حالت باستی توانایی تضمین پایداری سیستم حلقه بسته به ازای یک ناحیه در اطراف نقطه نامی به ازای تغییرات پارامترهای سیستم را نیز داشته باشد. ولیکن در روش‌های قبلی درونیابی حفظ کننده پایداری، هر کنترل کننده محلی باستی سیستم را در یک ناحیه در اطراف نقطه نامی به صورت فریز شده پایدار کند.

**تعريف ۲** شرط پوشش پایداری وابسته به پارامتر  $G(\rho)$ : سیستم خطی تغییر پذیر با پارامتر  $G(\rho)$  به همراه مجموعه بسته  $\Gamma \subset R$  که بیان گر محدوده تغییرات متغیرهای زمان بندی بهره است را در نظر بگیرید که کنترل کننده‌های محلی  $K_1, K_2, \dots, K_q$  در نقاط کار  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$  را پایدار کند. به گونه‌ای طراحی شده‌اند که  $K_i$  سیستم نامی ( $\rho_i) G(\rho_i)$  را پایدار کند. حال اگر به ازای هر کنترل کننده محلی  $K_i$  یک همسایگی باز  $U_i$  که شامل  $\rho_i$  است وجود داشته باشد به گونه‌ای که  $K_i$  سیستم  $G(\rho)$  را به ازای محدوده تغییرات  $\rho \in U_i$  پایدار کند و شرط  $\bigcup_{i=1}^q U_i = \Gamma$  برقرار باشد، آن‌گاه گفته می‌شود که شرط پوشش پایداری وابسته به پارامتر ارضاء شده است.

از آن‌جایی که در این مقاله هدف آن است سیستم وابسته به پارامتر به ازای یک محدوده تغییرات پارامتر به صورت کلی پایدار بماند، آزمون موقعیت مقادیر ویژه کافی نمی‌باشد. لذا برای این کار ابزار v-gap

کنترل کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه  $H_\infty$  ( $k_\infty$ ) به گونه‌ای که رابطه (۵) کمینه گردد؛ وجود دارد اگر  $\gamma > 1$  و ماتریس معین مشت  $R$  وجود داشته باشد بطوریکه دو نامساوی زیر را ارضاء نمایند:

$$R(A+LC)^T + (A+LC)R < 0 \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} AR+RA^T - \gamma BB^T & RC^T - \gamma BD^T & -LE^{1/2} \\ CR - \gamma BD^T & -\gamma E & E^{1/2} \\ -E^{1/2}L^T & E^{1/2} & -\gamma I_{n_y} \end{pmatrix} < 0 \quad (7)$$

□

بعد از بررسی شرایط امکان‌پذیری مساله در نامساوی‌های فوق، کنترل کننده  $K_\infty$  با استفاده از لم کران حقیقی به صورت زیر ساخته می‌گردد [۱۴]:

$$K_\infty = \tilde{k}(I + D\tilde{k})^{-1} \quad (8)$$

که در آن  $\tilde{k}$  با حل نامساوی زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{k}\tilde{C} + \tilde{C}^T\tilde{k}^T\tilde{B}^T < 0 \quad (9)$$

که در رابطه فوق ماتریس‌های  $\tilde{C}, \tilde{B}, \tilde{A}$  به صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} AR+RA^T & 0 & RC^T & -LE^{1/2} \\ 0 & -\gamma I_{n_u} & 0 & 0 \\ CR & 0 & -\gamma I_{n_y} & E^{1/2} \\ -E^{1/2}L^T & 0 & E^{1/2} & -\gamma I_{n_y} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B \\ I_{n_u} \\ D \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} CR & 0 & 0 & E^{1/2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

که در آن ماتریس لیپانوف  $R$  با استفاده از لم ۱ بدست می‌آید.

در حالت کلی طراحی وزن‌های شکل‌دهی حلقه به دید مهندسی و تجربه طراح بستگی دارد. این وزن‌ها می‌باشد که بگونه‌ای طراحی شوند که تمامی معیارهای کارآیی در حوزه فرکانس به خوبی ارضاء شوند. یعنی بهره تابع در فرکانس‌های پایین و بالا به ترتیب به اندازه کافی بزرگ و کوچک شود. همچنین در حوالی فرکانس عبور پاسخ فرکانسی دارای شبیه تند نباشد. برای اجتناب از طراحی وزن‌ها به صورت کلاسیک اخیراً روش‌های سیستماتیکی ارائه شده است [۱۷، ۱۸]. در این مقاله از روش سیستماتیک ارائه شده در [۱۸] برای طراحی وزن‌های شکل‌دهی حلقه و کنترل کننده استاتیکی مقاوم استفاده شده است.

### ۳- تعاریف و فرضیات

کنترل کننده محلی استفاده شده است. اساس این ایده تبدیل یک سیستم وابسته به پارامتر به یک سیستم LTI بوده که در آن وابستگی به پارامتر به صورت وجود نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول سیستم LTI مدل می‌گردد و با استفاده از لم ۲ تحلیل پایداری سیستم وابسته به پارامتر انجام می‌گیرد.

سیستم وابسته به پارامتر  $G(\rho)$  را به ازای محدوده تغییرات پارامتر  $\rho \in U_i$  در نظر بگیرید. این سیستم را می‌توان به صورت یک سیستم LTI  $(G(\rho_i))$  در نظر گرفت که در آن تمام وابستگی‌های سیستم به پارامتر  $\rho$  به صورت وجود نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول آن مدل می‌گردد. برای این منظور باید توجه کرد که همواره می‌توان سیستم وابسته به پارامتر  $G(\rho)$  را به ازای تغییرات پارامتر  $\rho \in U_i$  در تمام نقاط فریز کرد و با  $G_\Delta$  نمایش داد که در آن  $G_\Delta$  به صورت زیر می‌باشد:

$$(1) \quad G_\Delta = G(\rho) \Big|_{\rho=\rho_k, \rho_k \in U_i}$$

فرض کنید درون هر ناحیه  $i$  نقطه  $\rho_i$  به عنوان نقطه نامی انتخاب گردد. می‌توان به ازای هر سیستم فریز شده  $G_\Delta$ ، کمترین مقدار نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول سیستم نامی  $(G(\rho_i))$  را مطابق رابطه (۱) به گونه‌ای یافت که سیستم نامی به سیستم  $G_\Delta$  تبدیل شود و آن را با  $\delta_v(G(\rho_i), G_\Delta)$  نمایش داد. علاوه بر آن بیشینه مقدار نرم نامعینی به ازای تمام تغییرات پارامتر  $\rho$  درون ناحیه  $i$ ، برای آن که سیستم نامی به سیستم  $G_\Delta$  تبدیل شود با  $\beta_i$  نمایش داده می‌شود یعنی:

$$(2) \quad \sup_{G_\Delta \subset G(\rho)} \delta_v(G(\rho_i), G_\Delta) = \beta_i$$

آن‌گاه می‌توان سیستم وابسته به پارامتر  $G(\rho)$  به ازای محدوده تغییرات پارامتر  $\rho \in U_i$  را به صورت یک سیستم نامی  $(G(\rho_i))$  در نظر گرفت که دارای بیشینه نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول خود به اندازه  $\beta_i$  می‌باشد. در نتیجه مطابق لم ۲ می‌توان گفت چنان‌چه کنترل کننده‌ای بتواند سیستم نامی  $(G(\rho_i))$  را پایدار کند و پارامتر  $G(\rho)$  را به ازای محدوده تغییرات پارامتر  $\rho \in U_i$  پایدار نماید.

با توجه به روش بیان شده، می‌توان محدوده تغییرات متغیرهای زمان‌بندی بهره ( $\rho \in \Gamma$ ) را به گونه‌ای به چند زیرناحیه  $U_i$ ، ( $i=1, \dots, q$ ) تقسیم کرد که اولاً اجتماع این زیرناحیه‌ها تمام فضای تغییرات متغیرهای زمان‌بندی بهره را پوشش دهد (یعنی  $\bigcup_{i=1}^q U_i \subset \Gamma$ ) و همچنین هر کنترل کننده نامی طراحی شده برای هر زیرناحیه توانایی تضمین پایداری برای سیستم وابسته به پارامتر درون  $(U_i, \rho)$  با توجه به روش بیان شده انتخاب شده‌اند قضیه زیر ایجاد روش درونیابی پایدار بین دو کنترل کننده ارجاعی مجاور هم و درون ناحیه مشترک پایداری این دو کنترل کننده ارائه می‌کند. این ناحیه

metric پیشنهاد شده است. انگیزه گسترش ایده‌های gap یا v-gap در اندازه‌گیری تفاوت رفتار حلقه‌بسته دو سیستم از روی رفتار حلقه‌باز آن‌ها می‌باشد. **Error! Reference source not found.** فرض کنید ضرایب نسبت به هم اول سیستم  $G = NM^{-1}$  به صورت آن‌گاه فاصله v-gap بین سیستم‌های  $(G, G_\Delta)$  را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد [۱۵]:

$$(1) \quad \delta_v(G, G_\Delta) = \inf_{\substack{\left[ \begin{matrix} \Delta_N \\ \Delta_M \end{matrix} \right] \in RL_\infty \\ wnode(M + \Delta_M) = \eta(G)}} \left\{ \left\| \begin{matrix} \Delta_N \\ \Delta_M \end{matrix} \right\|_\infty : G_\Delta = (N + \Delta_N)(M + \Delta_M)^{-1} \right\}$$

که در آن  $g(s)$  برابر تعداد چرخش منحنی نایکوئیست تابع  $g(s)$  حول مبدأ در جهت چرخش عقره‌های ساعت بوده و  $(G)$  برابر تعداد قطب‌های سمت راست سیستم  $G$  می‌باشد. این رابطه بیان گر آن است که می‌توان با پیدا کردن مقدار کمینه نامعینی لازم روی ضرایب نسبت به هم اول سیستم نامی به گونه‌ای که به سیستم اغتشاش‌یافته تبدیل شود، به مقدار مشابه رفتار دینامیکی حلقه‌بسته دو سیستم با یک فیدبک پی برد. لم زیر ارتباط بین مفهوم v-gap و پایداری را به خوبی بیان می‌کند [۱۵]:

لم ۱: سیستم نامی  $G$  که در آن  $\beta \leq \alpha < \varepsilon_{opt}(G)$  است را درنظر بگیرید. برای کنترل کننده داده شده  $K$  و برای تمام سیستم‌های غیر نامی که دارای ویژگی  $\delta_v(G, G_\Delta) \leq \beta$  هستند، رابطه زیر برقرار است:

$$(2) \quad \arcsin[G, K] > \arcsin\alpha - \arcsin\beta$$

اگر و فقط اگر:  $\square . \varepsilon[G, K] > \alpha$

با قرار دادن  $\beta = \alpha$  در لم ۲ می‌توان گفت  $[G_\Delta : K]$  پایدار است اگر و فقط اگر  $\varepsilon[G, K] > \alpha$ .

لم ۳: فرض کنید سیستم فیدبک  $[G : K]$  پایدار باشد. مجموعه‌های  $\pi$  و  $\kappa$  را به صورت زیر در نظر بگیرید **Error! Reference source not found.**

$$(3) \quad \pi := \{G_\Delta : \delta_v(G_\Delta, G) < r_1\}, \quad \kappa := \{K_\Delta : \delta_v(K_\Delta, K) < r_2\},$$

آن‌گاه سیستم فیدبک  $[G_\Delta : K_\Delta]$  برای تمام  $G_\Delta \in \pi$ ,  $K \in \kappa$  پایدار است اگر و فقط اگر:

$$(4) \quad \arcsin[G, K] \geq \arcsin r_1 + \arcsin r_2$$

#### ۴- روش درونیابی پایدار پیشنهادی

در این بخش روش درونیابی حفظ کننده پایداری ارائه می‌شود. ابتدا روشی برای تحلیل پایداری یک سیستم وابسته به پارامتر با ابزار v-gap metric ارائه می‌گردد. همچنین از این روش برای پیدا کردن ناجیه محلی پایدار برای یک سیستم وابسته به پارامتر استفاده خواهد شد. در مرجع [۵] از ایده‌های مشابه این روش برای پیدا کردن نقاط کار بهینه برای طراحی

می توان بهازای هر سیستم فریزشده  $K_{\Delta}$ ، کمترین مقدار نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول کنترل کننده نامی  $K_i$  را مطابق رابطه (۱) به گونه ای یافت که کنترل کننده نامی به کنترل کننده  $K_{\Delta}$  تبدیل شود و آن را با  $\delta_v(K_i, K_{\Delta})$  نمایش داد. علاوه بر آن بیشینه مقدار نرم نامعینی بهازای تمام تغییرات پارامتر  $\rho$  درون ناحیه  $[a_i \ b_i]$ ، برای آن که کنترل کننده نامی به کنترل کننده  $K_{\Delta}$  تبدیل شود مطابق رابطه (۶) با  $r_2$  نمایش داده می شود. آن گاه می توان کنترل کننده زمان بندی بهره  $\hat{K}_i(\rho)$  به ازای محدوده تغییرات پارامتر  $\rho \in [a_i \ b_i]$  را به صورت يك کنترل کننده نامی  $K_i$  در نظر گرفت که دارای بیشینه نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول خود به اندازه  $r_2$  می باشد. همچنین اگر بیشینه مقدار نرم نامعینی بهازای تمام تغییرات پارامتر  $\rho$  درون ناحیه  $[a_i \ b_i]$  شود مطابق رابطه (۵) با  $r_1$  نمایش داده شود، آن گاه مطابق لم ۳ می توان نتیجه گرفت اگر رابطه (۴) برقرار باشد آن گاه کنترل کننده  $\hat{K}_i(\rho)$  سیستم  $G(\rho)$  را درون ناحیه مشترک پایداری  $\rho \in [a_i \ b_i]$  پایدار می کند.

بايد توجه کرد اگر شرط رابطه (۴) برقرار نباشد می بايست ناحیه مشترک پایداری را کوچکتر انتخاب کرد و اين کار می بايست آنقدر ادامه يابد تا شرط مذکور صادق باشد. در نهايىت با استفاده از قضيه ۱، بهمنظور برقراری پایداری سیستم در کل بازه  $\rho \in [\rho_i \ \rho_{i+1}]$  کنترل کننده فراگير بصورت زير تعریف می شود:

$$K_i(\rho) = \begin{cases} K_i & \rho \in [\rho_i \ a_i] \\ \hat{K}_i(\rho) & \rho \in [a_i \ b_i] \\ K_{i+1} & \rho \in (b_i \ \rho_{i+1}] \end{cases} \quad (V)$$

که در آن ضرایب کنترل کننده تابع پیوسته ای از پارامتر  $\rho$  خواهد بود. حال می توان روش ارائه شده برای درونیابی پایدار در محدوده تغییرات  $\rho \in [\rho_i \ \rho_{i+1}]$  را به راحتی تعیین داد به گونه ای که تمام فضای تغییرات پارامتر  $\rho$  را پوشش دهد. برای اين کار فرض کنید بهازای هر ناحیه مشترک پایداری  $[a_i \ b_i]$  کنترل کننده های حفظ کننده پایداری  $K_i(\rho)$  مطابق رابطه (۷) طراحی شده است. کنترل کننده زمان بندی بهره حفظ کننده پایداری نهایی برای تمام ناحیه  $\Gamma$  به صورت زير خواهد بود:

$$K(\rho) = \begin{cases} K_i, & \rho \in U_i, \rho \notin \bigcup_{j=1}^{q-1} [a_j \ b_j], i = 1, \dots, q \\ \hat{K}_j(\rho), & \rho \in [a_j \ b_j], j = 1, \dots, q-1 \end{cases} \quad (V)$$

بهمنظور شفاف تر شدن مراحل طراحی کنترل کننده زمان بندی بهره، تمام مراحل طراحی در قالب نمودار گردشی در شکل ۱ آمده است.

## ۵- طراحی خودخلبان مقاوم زمان بندی بهره

مشترک از اشتراک دو زیرناحیه پایدار دو کنترل کننده مجاور به دست آمده است. چنان چه اثبات پایداری برای درونیابی بین دو کنترل کننده مجاور  $K_i$  و  $K_{i+1}$  و برای ناحیه مشترک پایداری  $[a_i \ b_i] \subset (U_i \cap U_{i+1})$ ، انجام گیرد، به راحتی می توان همین اثبات را برای نواحی مشترک پایداری بعدی انجام داد و کنترل کننده زمان بندی بهره کلی را یافت.

**قضيه ۱:** کنترل کننده های محلی  $K_i$  و  $K_{i+1}$  در نقاط  $\rho_i$  و  $\rho_{i+1}$  را درنظر بگیرید بطوری که سیستم  $G(\rho)$  را در زیرناحیه  $U_i$  پایدار می کند و ناحیه مشترک پایداری آنها به صورت  $[a_i \ b_i] \subset (U_i \cap U_{i+1})$  می باشد. کنترل کننده درونیابی شده  $\hat{K}_i(\rho)$  بصورت:

$$\hat{K}_i(\rho) = \left( \frac{b_i - \rho}{b_i - a_i} \right) K_i + \left( \frac{\rho - a_i}{b_i - a_i} \right) K_{i+1} \quad (3)$$

سیستم  $G(\rho)$  را بهازای ناحیه  $[a_i \ b_i]$  پایدار می نماید اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\arcsin \varepsilon_{G(d_i), K_i} \geq \arcsin r_1 + \arcsin r_2 \quad (4)$$

که در آن  $r_1$  و  $r_2$  به صورت زير تعریف می شود:

$$\sup_{G_{\Delta} \subset G(\rho) \text{ for } \rho \in [a_i \ b_i]} \delta_v(G(\rho), G_{\Delta}) = r_1 \quad (5)$$

$$\sup_{K_{\Delta} \subset K(\rho) \text{ for } \rho \in [a_i \ b_i]} \delta_v(K_i, K_{\Delta}) = r_2 \quad (6)$$

و  $G_{\Delta}$  و  $K_{\Delta}$  برابر با  $\hat{K}_i(\rho)$  و  $G(\rho)$  به ازاي مقادير فریز شده  $\rho \in [a_i \ b_i]$  می باشنند.

**اثبات:** فرض کنید کنترل کننده محلی  $K_i$  و  $K_{i+1}$  سیستم  $G(\rho)$  را بهازای  $(\rho_i \ b_i)$  و  $(\rho_{i+1} \ a_i)$  (در نتیجه ناحیه مشترک پایداری  $[a_i \ b_i]$  می باشد). با استفاده از لم ۳ می توان نشان داد کنترل کننده زمان بندی بهره  $\hat{K}_i(\rho)$  سیستم  $G(\rho)$  را پایدار می کند. روش کار به صورت زير می باشد:

کنترل کننده زمان بندی بهره  $\hat{K}_i(\rho)$  را به ازاي محدوده تغییرات پارامتر  $\rho \in [a_i \ b_i]$  در نظر بگیرید. فرض کنید سیستم  $G(\rho)$  به ازاي  $\rho = a_i$  به عنوان سیستم نامی و کنترل کننده محلی  $K_i$  مربوط به ناحیه پایداری  $(\rho_i \ b_i)$  نيز به عنوان کنترل کننده نامی در نظر گرفته شود، آن گاه کنترل کننده وابسته به پارامتر  $\rho$   $\hat{K}_i(\rho)$  را می توان به صورت يك کنترل کننده نامی LTI در نظر گرفت که در آن تمام وابستگی های کنترل کننده به پارامتر  $\rho$  به صورت وجود نامعینی روی ضرایب نسبت به هم اول آن مدل می گردد. برای اين منظور باید توجه کرد که همواره می توان کنترل کننده زمان بندی بهره  $\hat{K}_i(\rho)$  را بهازای تغییرات پارامتر  $\rho \in [a_i \ b_i]$  در نقاط مختلف فریز کرد و با  $K_{\Delta}$  نمایش داد. همچنین

$$\begin{aligned} Y &= QS \left( C_{y\beta} \beta + C_{y\delta} \delta_r + C_{y_r} \cdot \frac{D}{2U} R \right) \\ Z &= QS \left( C_{z\alpha} \alpha + C_{z\delta} \delta_e + C_{z_q} \cdot \frac{D}{2U} Q \right) \\ L &= QSD \left( C_{l\alpha} \dot{\alpha} + C_{l_p} \cdot \frac{D}{2V} P \right) \\ M &= QSD \left( C_{m\alpha} \alpha + C_{m\delta} \delta_e + C_{m_q} \cdot \frac{D}{2U} Q \right) \\ N &= QSD \left( C_{n\beta} \beta + C_{n\delta} \delta_e + C_{n_r} \cdot \frac{D}{2U} R \right) \end{aligned} \quad (2)$$

معادلات فوق در کانال پیچش، بعد از خطی‌سازی توسط یک سیستم خطی وابسته به پارامتر  $G(\rho)$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$G(\rho) \equiv \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\alpha & 1 \\ M_\alpha & 0 \\ V_m Z_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_\delta \\ M_\delta \\ V_m Z_\delta \end{bmatrix} \quad (3)$$

که در رابطه فوق ضرایب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} Z_\alpha &= \frac{SQC_{z\alpha}}{m} \quad M_\alpha = \frac{SQDC_{m\alpha}}{I_y} \\ Z_\delta &= \frac{SQC_{z\delta}}{m} \quad M_\delta = \frac{SQDC_{m\delta}}{I_y} \end{aligned} \quad (4)$$

مدل فوق وابسته به پارامترهای فشار دینامیکی ( $Q$ )، عدد ماخ ( $M$ ) می‌باشد. اما به منظور سهولت پیاده‌سازی و طراحی تنها از متغیر فشار دینامیکی ( $Q = \rho$ ) که بیشترین تاثیر را در رفتار دینامیکی سیستم حلقبسته دارد، برای زمان‌بندی بهره استفاده شده و اثر متغیر دیگر روى پایداری با ابزار v-gap تبدیل عملگر بالک نیز با یک تابع تبدیل درجه ۲ پارامتر زمان‌بندی بهره  $\rho$  به صورت زیر می‌باشد که با  $\Gamma$  مشخص شده است:

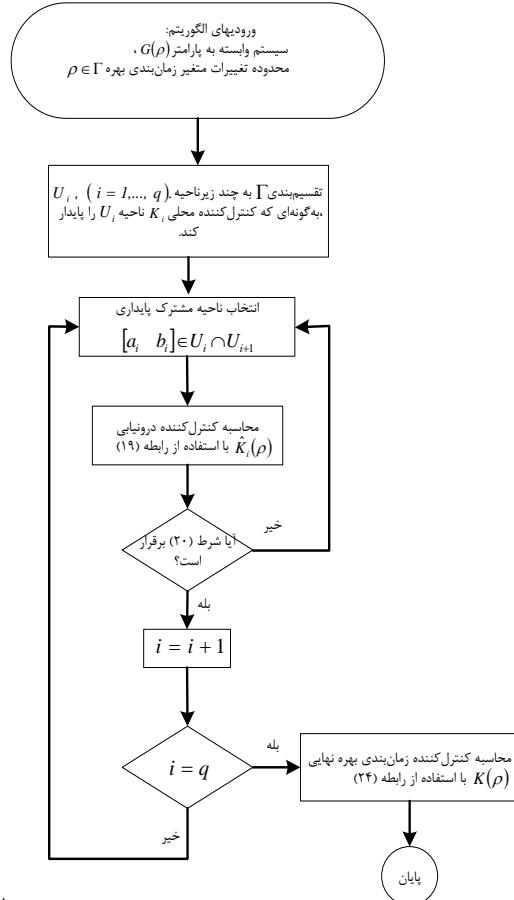
$$\Gamma: 300000 < \rho < 200000 \quad (5)$$

خروجی سیستم، شتاب رهگیر ( $a_z$ ) بوده و ورودی نیز تغییر زاویه بالک ( $\delta_e$ ) می‌باشد. تابع تبدیل عملگر بالک نیز با یک تابع تبدیل درجه ۲ با فرکانس طبیعی  $200 \text{ rad/sec}$  و ضریب میرایی  $7/0$  به صورت زیر تقریب زده شده است:

$$\frac{\delta(s)}{\delta_c(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6)$$

با استفاده از مدل یافته شده در رابطه (۳) به سادگی می‌توان تابع تبدیل شتاب خروجی ( $a_z$ ) نسبت به تغییر زاویه بالک ( $\delta$ ) و سرعت زاویه‌ای ( $q$ ) نسبت به  $\delta$  را یافت. معمولاً به منظور داشتن پاسخ گذراش مناسب در حلقه خودخلبان، از حلقه داخلی سرعت زاویه‌ای مطابق شکل ۲ استفاده می‌شود. با استفاده از ژیروسکوپ نرخی و با فیدبک گرفتن از

مدل دینامیکی رهگیر یک مدل غیرخطی وابسته به پارامتر می‌باشد. معادلات شش درجه آزادی رهگیر در دستگاه بدنی به صورت زیر می‌باشد [۱۹]:



کل ۱. نمودار گردشی مراحل طراحی کنترل کننده زمان‌بندی بهره.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} (\dot{U} + QW - RV) \\ (\dot{V} + RU) \\ (\dot{W} - QU) \end{bmatrix} \quad (1)$$

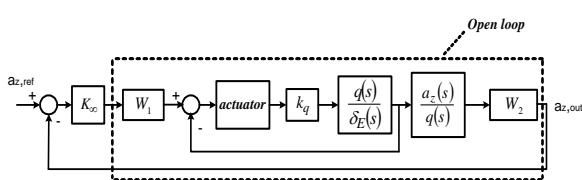
$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = I_x \dot{P} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = I_y \dot{Q} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = I_z \dot{R} \quad (4)$$

که نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی در روابط بالا به صورت زیر تعریف می‌شوند:

در مشخصات هر زیرناحیه  $U_i$  به همراه بیشینه  $v\text{-gap}$  و حاشیه پایداری مقاوم آن آمده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود ملاحظات پایداری بیان شده در رابطه (۴) در هر زیرناحیه رعایت می‌گردد. در جدول ۲ مشخصات سیستم حلقه‌باز نامی به همراه وزن‌های شکل دهنده حلقه و کنترل کننده استاتیکی مقاوم طراحی شده برای مدل رهگیر آمده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌گردد کنترل کننده مقاوم بدون درجه می‌باشد. در جدول ۱ زیرناحیه‌های محلی  $U_i$  به گونه‌ای پیدا شد که اجتماع آن‌ها تمام محدوده تغییرات پارامتر  $\Gamma$  را پوشش دهد. در ادامه می‌بایست نواحی مشترک پایداری  $[a_i \ b_i]$  درون اشتراک دو زیرناحیه محلی مجاور را به گونه‌ای یافت که شرط پایداری بیان شده در رابطه (۴) ارضاء شود. برای این منظور ابتدا نواحی مشترک پایدار به صورت  $(U_i \cap U_{i+1})$  انتخاب می‌شوند. برای این نواحی می‌بایست شرط پایداری (۴) مورد بررسی قرار گیرد. اگر این شرط برقرار نبود بازه‌ی  $[a_i \ b_i]$  باید به صورت محدودتر و به صورت زیرمجموعه ناچیه اشتراک پایداری بصورت  $[a_i \ b_i] \subset (U_i \cap U_{i+1})$ . آنقدر کوچک شود که رابطه (۴) برقرار گردد. در جدول ۳ مشخصات نواحی  $(U_i \cap U_{i+1})$  و بازه‌های  $[a_i \ b_i]$  بیان شده است.



v-gap شکا، ۲. تابع حلقه باز شکا دهی شده برای تحلیل پایداری یا این ار

سرعت زاویه‌ای کاتال پیچ می‌توان به سادگی کنترل کننده تناسبی  $k_q$  را طراحی کرد.

با منظور طراحی خودخلبان مقاوم برای رهگیر ارائه شده، می‌بایست ابتدا زیر نوای پایدار ( $i=1, \dots, q$ )،  $U_i$  درون محدوده تغییرات پارامتر  $\Gamma$  به گونه‌ای یافت شود که در هر زیرناحیه شرط پایداری بیان شده صادق باشد  $\beta_i > G(\rho_i, k_i)$ . برای این منظور نقطه ابتدای محدوده تغییرات پارامتر زمان‌بندی بهره ۳۰۰۰۰  $\rho_1$  به عنوان نقطه نامی اول برای طراحی کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه  $H^\infty$  انتخاب می‌شود. وزن شکل دهی حلقه  $W_1$  برای یک و  $W_2$  نیز با استفاده از مساله بهینه‌سازی (۱۵) و الگوریتم به دست آمده در [۱۸] طراحی می‌شود. حال با توجه به شکل ۲ تابع شکل دهی شده  $G_s(\rho_1) = W_2 G(\rho_1) W_1$  در شکل ۲ درون نقطه‌چین) انتخاب شده و کنترل کننده استاتیکی مقاوم مطابق روابط (۸)–(۱۲) برای آن طراحی می‌گردد. حاشیه‌پایداری مقاوم برای سیستم شکل دهی شده ( $\rho_1$ ) نیز با استفاده از الگوریتم به دست آمده در **Error! Reference source not found.** محاسبه می‌گردد. بعد از به دست آمدن حاشیه پایداری مقاوم برای سیستم شکل دهی شده ( $\rho_1$ )، می‌توان ناحیه  $U_1$  که در آن شرط پوشش پایداری ارضا می‌شود را به دست آورد. برای این منظور پارامتر  $\rho$  آن قدر افزایش می‌باید تا بیشینه  $v\text{-gap}$  ایجاد شده بین سیستم‌های شکل دهی شده و سیستم نامی (مطابق رابطه (۲)) از حاشیه پایداری مقاوم سیستم شکل دهی شده نامی کمتر باشد. به همین ترتیب انتهای بازه  $U_1$  به عنوان نقطه ابتدای بازه  $U_2$  انتخاب شده و تمام مراحل بیان شده در اینجا برای پیدا کردن بازه  $U_1$  دوباره تکرار می‌گردد. این کار آن قدر انجام می‌شود تا اجتماع زیرناحیه‌های محلی  $U_i$  تمام محدوده تغییرات

پارامتر  $\Gamma$  را پوشش دهد (یعنی،  $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^q U_i$ )

جدول ۱. مقایسه حاشیه پایداری مقاوم با پیشنهاد v-gap به دست آمده درون هر زیر ناحیه

زیرناحیه ۴	زیرناحیه ۳	زیرناحیه ۲	زیرناحیه ۱	
۰/۵۵	۰/۵۲	۰/۴۵	۰/۳۱	حاشیه پایداری مقاوم
۰/۴	۰/۴۹	۰/۴۲	۰/۲۷	v-gap بیشترین
100000< $U_1$ <200000	70000< $U_1$ <140000	35000< $U_2$ <90000	30000< $U_1$ <55000	محدوده بازه های $U_i$

جدول ۲. مشخصات نقاط کار نامی به همراه کنترل کننده محلی و وزن‌های شکل‌دهی حلقه در هر نقطه

کنترل کننده استاتیکی مقاوم	وزن شکل دهی حلقه	سیستم نامی	
$K_{\infty,1} = 0.78$ $k_{q,1} = -1.25$	$W_{2,1} = \frac{0.001(s+3)(s^2 + 91s + 20000)}{(s+117)(s+16)(s+0.0001)}$	$P_1 = \frac{44000(s-6.7)(s+6.7)}{(s+3.5)(s+1.1)(s^2 + 116s + 4604)}$ $Q_1 = 30000$	زیرناحیه ۱
$K_{\infty,2} = 0.52$ $k_{q,2} = -0.95$	$W_{2,2} = \frac{0.001(s+60000)(s^2 + 26s + 0.95)}{(s+7420)(s+6.4)(s+0.0001)}$	$P_1 = \frac{163000(s-9.97)(s+9.8)}{(s+21)(s+0.75)(s^2 + 98s + 2939)}$ $Q_2 = 60000$	زیرناحیه ۲

$K_{\infty,3} = 0.63$ $k_{q,3} = -0.75$	$W_{2,3} = \frac{0.005(s+20000)(s^2+4.6s+35)}{(s+3183)(s+8.15)(s+0.0001)}$	$P_1 = \frac{36444(s-13.34)(s+13.21)}{(s^2+5.5s+33)(s^2+116s+4625)}$ $Q_3 = 100000$	زیرناحیه ۳
$K_{\infty,4} = 0.86$ $k_{q,4} = -0.45$	$W_{2,4} = \frac{0.003(s+2600)(s^2+5.5s+29)}{(s+3401)(s+14)(s+0.0001)}$	$P_1 = \frac{55564(s-16.7)(s+16.7)}{(s^2+6.6s+24)(s^2+114s+4504)}$ $Q_4 = 150000$	زیرناحیه ۴

 جدول ۳. مشخصات اشتراک نواحی محلی پایدار به هر آنچه تضمین کننده پایداری  $[a_i \ b_i]$ 

زیرناحیه ۳ و زیرناحیه ۴	زیرناحیه ۲ و زیرناحیه ۳	زیرناحیه ۱ و زیرناحیه ۲	
$U_3 \cap U_4 = [100000 \ 140000]$	$U_2 \cap U_3 = [70000 \ 90000]$	$U_1 \cap U_2 = [35000 \ 55000]$	محدوده اشتراک دو زیرناحیه محلی
$[a_3 \ b_3] = [110000 \ 130000]$	$[a_2 \ b_2] = [75000 \ 85000]$	$[a_1 \ b_1] = [40000 \ 50000]$	محدوده مشترک پایداری $[a_i \ b_i]$

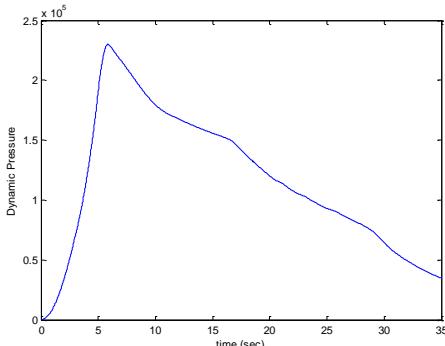
در ادامه برای نشان دادن کارآیی کنترل کننده زمان بندی بهره نهایی در سیستم غیرخطی، شبیه‌سازی سه درجه آزادی انجام می‌گیرد. به منظور مقایسه روش ارائه شده در این مقاله با سایر روش‌های کلاسیک زمان بندی بهره، درونیابی بین صفر-قطب-بهره<sup>۱</sup> (zpk) کنترل کننده‌های محلی که یکی از روش‌های کلاسیک درونیابی است نیز مورد بررسی و شبیه‌سازی قرار می‌گیرد<sup>[۲۰]-[۲۱]</sup>. در روش درونیابی بین صفر-قطب-بهره کنترل کننده‌های محلی، ابتدا در نقاط کار مختلف کنترل کننده‌های محلی طراحی شده و سپس با درونیابی خطی بین این کنترل کننده‌ها، کنترل کننده زمان بندی بهره به دست می‌آید. انتخاب نقاط کار در این روش کلاسیک بستگی به تحریج طراح داشته و فاقد روش سیستماتیک است. همچنین روش مورد نظر دارای اثبات پایداری نمی‌باشد. به منظور مقایسه بین دو روش بیان شده از همان نقاط کار به دست آمده در جدول ۲ برای طراحی کنترل کننده‌های محلی اسقفا شده است. همچنین برای طراحی کنترل کننده‌های محلی از کنترل کننده PID استفاده می‌شود. در جدول ۴ مشخصات کنترل کننده‌های محلی برای نقاط کار مختلف برای روش PID آمده است.

دستور ورودی مطابق شکل ۵ به سیستم غیرخطی اعمال شده و نتایج تعییب دستور ورودی برای هر دو روش نشان داده شده است. مشاهده می‌گردد که روش درونیابی ارائه شده دارای عملکرد بهتری می‌باشد. علاوه بر آن روش درونیابی ارائه شده دارای اثبات پایداری می‌باشد در حالی که در روش کلاسیک درونیابی، تضمینی برای پایداری سیستم وابسته به پارامتر زمان بندی ندارد. در شکل ۶ نشان داده شده است که تمام ناحیه پروازی رهگیر با ساریوی طراحی شده تحریک می‌گردد.

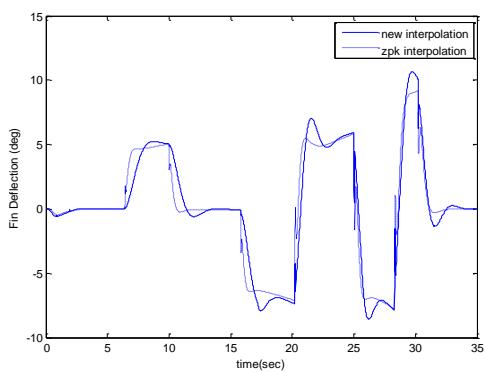
## ۸- نتایج شبیه‌سازی

به منظور بررسی روش مذکور در پایداری و کارآیی کنترل کننده فرآگیر نهایی شبیه‌سازی سه درجه آزادی انجام می‌گردد. شبیه‌سازی سه درجه آزادی بر مبنای معادلات غیرخطی (۱) و (۲) انجام شده است. نتایج ارائه شده در اینجا برای یک رهگیر از نوع کنترل با دم بوده و به منظور سادگی، فرمان شتاب تنها به کanal پیچ اعمال می‌گردد. همان‌گونه که بیان شد برای بهبود عملکرد سیستم در تعییب دستور ورودی، ابتدا می‌بایست حلقه داخلی سرعت زاویه‌ای (حلقه داخلی نشان داده شده در شکل ۲) با ضربی مناسب  $k_q$  بسته شود. در جدول ۲ ضربی  $k_q$  در نقاط کار مختلف آمده است. بعد از طراحی ضربی  $k_q$ ، وزن‌های شکل‌دهی حلقه و کنترل کننده استاتیکی شکل‌دهی حلقه H $\infty$  با استفاده از الگوریتم بیان شده در مرجع [۱۸] در هر نقطه کار طراحی شده که نتایج آن در جدول ۲ آمده است. در نهایت درونیابی بین کنترل کننده‌های محلی با استفاده از روش بیان شده در بخش قبل انجام می‌گیرد. ساریوی پروازی رهگیر به گونه‌ای انتخاب می‌شود که تمام ناحیه تغییرات پارامتر زمان بندی بهره (فشار دینامیکی) را پوشش دهد. بررسی نتایج شبیه‌سازی در دو مرحله صورت می‌گیرد. در مرحله اول پایداری و کارآیی کنترل کننده‌های محلی در نقاط کار نامی مورد بررسی قرار گرفته و در مرحله دوم عملکرد کنترل کننده فرآگیر در سیستم غیرخطی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای مشاهده کارآیی کنترل کننده زمان بندی بهره در سیستم خطی، پاسخ پله سیستم حلقه بسته در حالت نامی و در نقاط کار اول تا چهارم به همراه حد بهره و حدفاز آن‌ها در شکل ۳ و شکل ۴ نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که تمامی معیارهای کارآیی و پایداری در حالت خطی به خوبی ارضاع شده است.

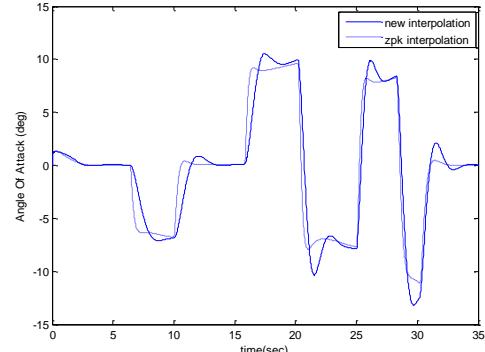
<sup>1</sup> Zero-pole-gain interpolation



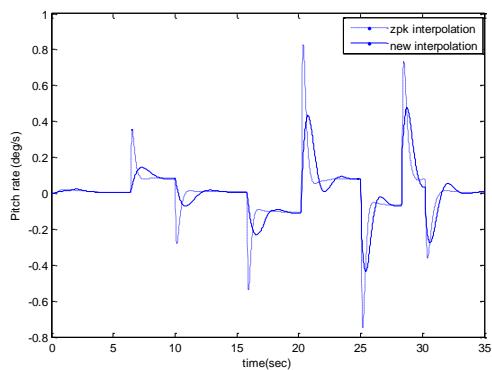
شکل ۶. فشار دینامیکی



شکل ۷. سیگنال کنترلی ورودی به عملگر

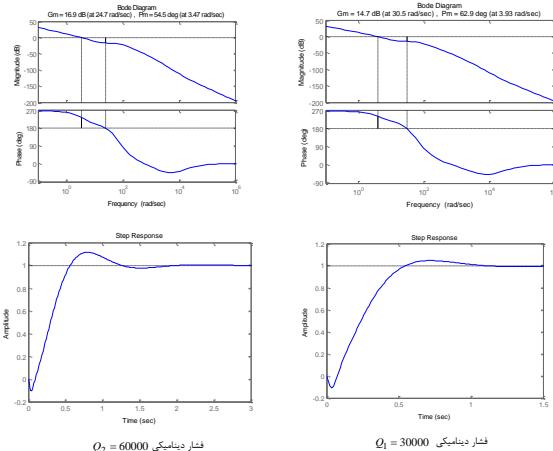


شکل ۸. زاویه حمله

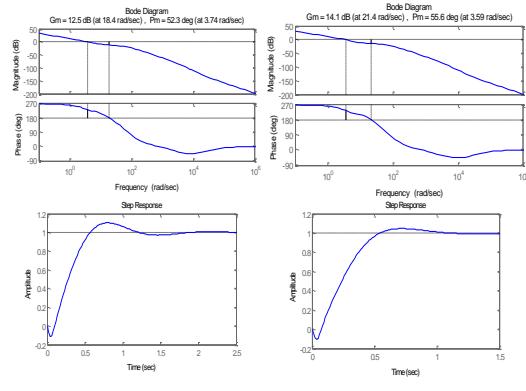


شکل ۹. سرعت زاویه‌ای کاتال پیج

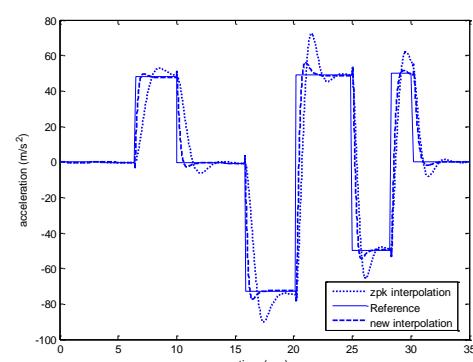
مشاهده می شود که عملکرد کنترل کننده زمان بندی بهره خوب بوده و مطابق شکل ۷ سیگنال های کنترلی تولید شده نیز مناسب می باشد. زاویه حمله رهگیر و سرعت زاویه‌ای کاتال پیج نیز در شکل ۸ و شکل ۹ آمده است که نشان دهنده عملکرد مطلوب سیستم می باشد.



شکل ۳. پاسخ پله و حدبهره و حدفاز برای نقاط کار اول و دوم



شکل ۴. پاسخ پله و حدبهره و حدفاز برای نقاط کار سوم و چهارم



شکل ۵. سیگنال شتاب مرجع و خروجی

## جدول ۴. مشخصات نقاط کار نامی به همراه کنترل کننده محلی PID

کنترل کننده محلی PID	سیستم نامی	نقاط کار
$K_1 = -0.18 \frac{1+0.96s}{s}$	$P_1 = \frac{44000(s-6.7)(s+6.7)}{(s+3.5)(s+1.1)(s^2 + 116s + 4604)}$ $Q_1 = 30000$	۱
$K_2 = -3.69 \frac{1+0.5s}{s}$	$P_1 = \frac{163000(s-9.97)(s+9.8)}{(s+21)(s+0.75)(s^2 + 98s + 2939)}$ $Q_2 = 60000$	۲
$K_1 = -0.047 \frac{1}{s}$	$P_1 = \frac{36441(s-13.34)(s+13.21)}{(s^2 + 5.5s + 33)(s^2 + 116s + 4625)}$ $Q_3 = 100000$	۳
$K_1 = -0.02 \frac{1+0.14s}{s}$	$P_1 = \frac{55564(s-16.7)(s+16.7)}{(s^2 + 6.6s + 24)(s^2 + 114s + 4504)}$ $Q_4 = 150000$	۴

- [5] S. Theodoulis and G. Duc, "Missile autopilot design: gain scheduling and the gap metric", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 32, No.3, pp. 986-996, 2009.
- [6] M. Sato . "Gain Scheduled Output-feedback depending solely on scheduling parameters via parameter-dependent lyapunov functions". *Automatica*, Vol.47, pp.2786 2790, 2011.
- [7] F. Blanchini, S. Miani, F. Mesquine. "A separation principle for linear switching systems and parameterization of all stabilizing controllers". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54, 279–292, 2009.
- [8] F.D. Bianchi, R.S. Sanchez-Pena, M. Guadayol, "Gain scheduled control based on high fidelity local wind turbine models". *Renewable energy*, Vol.37, pp.233-240, 2012.
- [9] B. Hencey, A. Alleyne. "Robust controller interpolation design technique". *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 18, pp. 1–10, 2010.
- [10] F.D. Bianchi., R.S. Sanchez Pena, "Interpolation for gain-scheduled control with guarantees"; *Automatica*, Vol. 47, pp.239 243, 2011.
- [11] B.P. Rasmussen, and A. Alleyne, "Gain scheduled control of an air conditioning system using the youla parameterization", *IEEE Transactions on Control system technology*, Vol.18, No.5, pp.1216 1225, 2010.
- [12] D.J. Stilwell, "state space interpolation for a gain scheduled autopilot", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 24, pp. 460 465, 2001.
- [13] D.J. Stilwell., and W.J. Rugh. "Stability preserving interpolation methods for the synthesis of gain

## - نتیجه گیری

در این مقاله یک روش درونیابی پایدار برای طراحی خودخلبان رهگیر ارائه شده است. روش پیشنهادی دارای پیچیدگی کمتری نسبت به سایر روش‌های درونیابی بوده و علاوه بر آن تضمین کننده پایداری سیستم متغیر با پارامتر نیز می‌باشد. علاوه بر آن نشان داده شد که با استفاده از ابزار v-gap metric می‌توان نقاط کار مناسب برای طراحی کنترل کننده محلی انتخاب کرد. علاوه بر آن با کمک این ابزار می‌توان نواحی محلی پایداری را برای هر کنترل کننده محلی مشخص نمود. نتایج شبیه‌سازی سه درجه آزادی نشان‌دهنده عملکرد مطلوب کنترل کننده زمان‌بندی بهره نهایی می‌باشد.

## مراجع

- [1] H. Buschek, "Full Envelope Missile Autopilot Design Using Gain Scheduled Robust Control", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 22, No. 1, pp.115 122, 1999.
- [2] S. Kang, H.J. Kim, J.I. Lee, B.E. Jun, and M.J. Tahk, "Roll-pitch-yaw integrated robust autopilot design for a high angle-of attack missile", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 32, No. 5, pp. 1622 1628, 2009.
- [3] D. Saussie, L. Saydy, and O. Akhrif, "Gain scheduling control design for a pitch-axis missile autopilot", *AIAA Guidance, Navigation, and Control conference*, Honolulu, Hawaii, 2008.
- [4] D. J. Leith, W. E. Leithead, "Survey of gain scheduling analysis and design", *International journal of control*, Vol. 73, No.11, pp. 1001-1025, 2000.



حلقه  $H_{\infty}$ ، نشریه علمی-پژوهشی مهندسی هوانوردی، سال  
سیزدهم، شماره دوم، صفحه ۹۴-۷۹، پائیز ۱۳۹۰.

- [19] G.M. Siouris, "Missile guidance and control systems", New York, Springer-verlag, Inc., 2004.
- [20] R.A. Nichols, R.A. Reichert, W.J. Rugh, "Gain scheduling for H-infinity controllers: A flight control example", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol(1), N(2), 69-79, 1993.
- [21] B. Paijmans, W. Sysmens, H.V. Brussel, J. Swevers, "A gain scheduling control technique for mechatronic systems with position-dependent dynamics", *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 2933-2938, 2006.

scheduled controllers", *Automatica*, Vol. 36, pp.665 671, 2000.

- [14] E. Prempain, I. Postlethwaite, "Static  $H_{\infty}$  loop shaping control of a fly-by-wire helicopter" *Automatica*, Vol. 41, pp. 1517 1528, sept. 2005.
- [15] G. Vinnicombe . *Uncertainty and feedback: h-infinity loop shaping and the v-gap metric*, Imperial college press, 1999.
- [16] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover, "Essential of robust control", Prentice Hall, 1998.
- [17] A. Lanzon, "Weight optimization in  $H_{\infty}$  loop shaping" *Automatica*, Vol. 41, No. 7, pp. 1201 1208, 2005.
- [18] معافی مدنی، محمدجواد، محمدزمان، ایمان، "طراحی خودخلبان با استفاده از روش کنترل کننده استاتیکی شکل دهنده"