مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
مقاله کاربردی
جلد ۱۵، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۰، صفحه ۱۲-۱

طراحی روش LQIG برای کنترل دریچه هدر یک موتور دیزل توربوشارژ برای افزایش توان خروجی موتور با استفاده از نتایج تجربی آزمایشگاه اتاق تست موتور

نعمت الله قهرمانی[۱]، رضا مرتضوی[۲]، علی احمد براتی[۳]

[۱] دانشیار،مجتمع برق و کامپیوتر،گروه علمی کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر،تهران،ایران Ghahremani@mut.ac.ir

[۲] کارشناس ارشد، مجتمع برق و کامپیوتر،گروه علمی کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر،تهران،ایران rezamortezavi71@gmail.com

[۳] کارشناس ارشد، مجتمع مکانیک،گروه علمی قوای محرکه، دانشگاه صنعتی مالک اشتر،تهران،ایران a.barati65@gmail.com

دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۰۵ ویرایش : ۱۳۹۹/۰۴/۲۷ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۷/۰۵

چکیده : در این مقاله ابتدا با استفاده از مجموعه تست‌های صورت گرفته روی یک موتور دیزل توربوشارژ در اتاق تست موتور، یک مدل دقیق غیرخطی برای آن بدست آمده و حول چند نقطه‌ی کار خطی شده است. سپس، برای مدل خطی شده در تمام نقاط کار یک کنترل‌کننده‌ی گوسی انتگرالی مرتبه دوم خطی (LQIG) که پارامترهای آن تابعی از سرعت موتور می باشد، طراحی و شبیه سازی شده است. در روش ارائه شده، می‌توان با کنترل دریچه هدر، میزان بوست تولیدی توسط توربوشارژر را در تمام دورهای موتور (بخصوص دورهای پایین و میانی) با دقت و سرعت بالایی کنترل نموده و در نتیجه توان و گشتاور تولیدی موتور را در این دورها بهبود بخشید. سیستم حلقه بسته در برابر نویز و عدم قطعیت مدل، شبیه سازی و ارزیابی گردید. نتایج ارزیابی نشان داد که این کنترل‌کننده در مقایسه با کنترل‌کننده‌های PID و LQR عملکرد بهتری داشته و در برابر عدم قطعیت در مدلسازی و نویز مقاومت بالاتری دارد.

کلمات کلیدی: موتور دیزل، دریچه هدر، کنترل‌کننده LQIG ، مدل غیرخطی.

Designing of LQIG method for controlling the wastegate of a turbocharged diesel engine to increase engine output power using experimental results of engine test chamber laboratory

Nematollah Ghahremani, Reza Mortazavi, Ali Ahmad barati

Abstract: In this paper, first, using a test set on a turbocharged diesel engine in the engine test room, a nonlinear model is obtained and it is linearized around several operation points. Then, for the linear models, a linear quadratic integral Gaussian controller (LQIG) with variable parameters as function of engine speed is designed and simulated. In the proposed method, by controlling the wastegate, the boost produced by the turbocharger can be controlled at all engine speeds (especially the lower and middle speeds) with high performance response, thereby improving the output power and engine torque in all speeds. The closed loop control system is simulated and evaluated in the presence of noise and model uncertainty. The simulation results show the better performance and higher robustness in comparison with PID and LQR controllers.

Keywords: Diesel engine, wastegate, LQIG controller, nonlinear model.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.4.1.2]
[DOI: 10.52547/joc.15.4.1]

۱- مقدمه

وظیفه اصلی دریچه هدر[1] در موتورهای دیزل توربوشارژ کنترل فشار بوست (فشار هوای منیفولد ورودی) موتور می‌باشد. دریچه هدر یک دریچه کنترلی می‌باشد که دود اگزوز را قبل از رسیدن به توربین توربوشارژر به بعد از توربین انتقال می‌دهد. دریچه هدرهایی که امروزه بر روی موتورهای دیزل و بنزینی استفاده می‌شود بیشتر برای کاهش فشار بوست در دورهای بالا می‌باشد که یک کار معمول می‌باشد و کنترل آن به دو صورت مکانیکی و الکتریکی انجام می‌شود [۱و۲]. برای حالت دریچه هدر الکتریکی، موتورسازهایی که معمولا از این تکنولوژی بر روی موتورهای خود استفاده می‌کنند سازنده‌های ECU[2] مانند شرکت Bosch آلمان، Delco آمریکا و Sagem فرانسه هستند که قسمت کنترل‌کننده آن را در ECU موتور در نظر می‌گیرند [۳] و ECU در زمان مناسب دستور لازم را برای کنترل دریچه هدر به شیر الکتریکی برای باز و بسته شدن آن صادر می‌کند. از آنجایی که موتورهای دیزل در دورهای پایین و میانی از توان و گشتاور مناسبی برخوردار نمی‌باشد و همچنین دسترسی به ساختار ECU و برنامه‌های کنترل آن در کشور وجود ندارد، لذا در این مقاله، هدف طراحی کنترل‌کننده مناسب و مجزا از ECU موتور، برای کنترل باز و بسته شدن دریچه هدر می‌باشد تا بوسیله آن بتوان در دورهای مختلف (بخصوص در دورهای پایین) بوست بیشتری را از کمپرسور توربوشارژر دریافت نموده و توان و گشتاور موتور را در این دورها ارتقاء داد. بعبارتی دیگر اگر قرار است روی موتور، ECU قرار گیرد خود ECU می‌تواند دریچه هدر را کنترل کند اما مشکل این‌جاست که دانش فنی ساخت ECU هنوز برای این موتورها بومی‌سازی نشده و از طرفی دغدغه جنگ الکترونیک برای از کار انداختن این ECU های وارداتی بخصوص در مصارف نظامی کماکان پابرجاست. از این رو در این مقاله سعی بر آن شده است که کنترل‌کننده‌ای مجزا از ECU به منظور افزایش توان و گشتاور برای موتورهای دیزل توربوشارژ شده طراحی و شبیه‌سازی گردد. شکل (۱) و شکل (۲) یک نمونه موتور احتراق داخلی به همراه دریچه هدری که روی توربوشارژر قرار می‌گیرد را نشان می‌دهد.

بررسی مقالات نشان داده است که در برخی موارد، کنترل‌کننده‌هایی برای کنترل دریچه هدر بطور مجزا طراحی شده است تا تنها فشار ورودی منیفولد را جهت حفاظت از سیستم توربوشارژر و موتور کنترل کند. در [۲] طراحی کنترل کننده به روش LQI[3] برای کنترل فشار بوست برای یک موتور بنزینی در دورهای بالا (۳۰۰۰ تا ۴۰۰۰ دور بر دقیقه) انجام شده است. در [۴و۵] طراحی کنترل‌کننده به روش IMC[4] برای کنترل فشار بوست برای یک موتور بنزینی صورت پذیرفته است. این روش بر اساس مدل داخلی موتور و بصورت بازگشتی می‌باشد. در [۶] که نزدیک‌ترین مقاله از نظر مدلسازی با این پژوهش می باشد برای کنترل دریچه هدر موتور دیزل توربوشارژ، دو نوع کنترل تطبیقی غیرمستقیم وکنترل مقاوم چندمتغیره H_∞ طراحی شده و با کنترل‌کننده PID5 مقایسه شده است. نتایج این پژوهش حاکی از عملکرد بهتر هر دوی آن، از نوع PID می‌باشد وکنترل‌کننده مقاوم، بهترین عملکرد را دارد ولی مشکل آن دامنه ورودی بزرگتر آن نسبت به روش تطبیقی است که امری نامطلوب است. در [۷] برای دریچه هدر موتور دیزل توربورژشده یک کنترل‌کننده خطی مرتبه دوم زمان گسسته تطبیقی طراحی شده است و برای کنترل دور موتور هم یک کنترل‌کننده PI در نظر گرفته شده است که حاصل این دو کنترل‌کننده منجر به ردیابی فشار ورودی منیفولد به مقدار مطلوب شده است. در [۸] با توجه به اینکه توربوشارژر آن مجهز به پره‌هایی با گام متغیر (VGT[6]) و شیر گردش گاز خروجی (EGR[7]) می‌باشد با طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین مدل غیرخطی برای VGTو EGR ، فشار بوست برای موتور دیزل با این نوع توربوشارژ کنترل شده است.

در کلیه این پژوهش‌ها در رابطه با این‌که چگونه با کنترل دریچه هدر می‌توان، توان خروجی موتور دیزل توربوشارژ را افزایش داد بحثی نشده است. همچنین طراحی کنترل‌کننده به روش LQIG[8] نخستین بار است که برای چنین سیستمی استفاده شده است.

در این مقاله، به این سوال پاسخ داده می‌شود که چگونه با افزایش پاشش سوخت به داخل سیلندرهای موتور و با استفاده از دریچه هدر می‌توان توان خروجی موتور را در تمام دورها بخصوص در دورهای پایین به کمک کنترل فشار ورودی به منیفولد افزایش داد. در طراحی کنترل‌کننده برای دریچه هدر، ابتدا مدل غیرخطی موتور دیزل توربوشارژ بدست آورده می‌شود که این مدل نیازمند پارامترهای تجربی است که از نتایج تست واقعی موتور در اتاق تست مجهز دریافت شده است و سپس این مدل حول ۷ نقطه کار خطی می‌گردد. برای کنترل این موتور از روش LQIG استفاده گردیده است. این کنترل کننده طوری طراحی شده است که برای تمامی نقاط کار جوابگو باشد. به همین خاطر پارامترهای آن برحسب سرعت موتور تنظیم گردیده است. این کنترل‌کننده پنج متغیر حالت دارد که یک متغیر در حلقه‌ی خارجی برای ردیابی سیگنال هدف و مابقی در فیلتر کالمن بکار رفته است. در حلقه خارجی یک انتگرال‌گیر وجود دارد که خطای حالت دائمی را به سمت صفر میل می‌دهد. این کنترل‌کننده در مقایسه با کنترل‌کننده‌های PID و LQR[9] عملکرد بهتری داشته و مقاومت بالاتری در برابر عدم قطعیت در مدلسازی و نویز دارد.

[1] Wastegate
[2] Electronic Control Unit
[3] Linear Quadratic integral
[4] Internal Model Controller
[5] Proportional- Integral- Derivative
[6] Variable Geometry Turbine
[7] Exhaust Gas Recirculation*
[8] Linear Quadratic Integral Gaussian
[9] Linear Quadratic Regulator

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.4.1.2]
[DOI: 10.52547/joc.15.4.1]

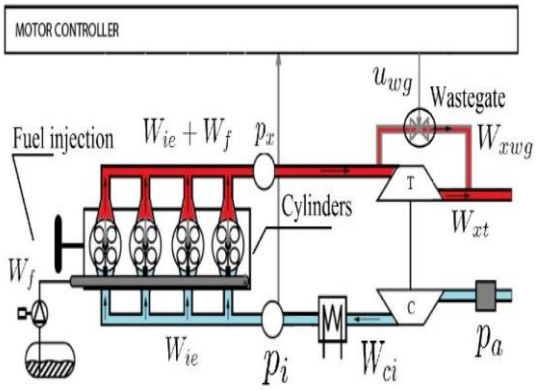
شکل ۱ : یک نمونه موتور احتراق داخل

شکل ۲ : وست گیت در توربوشارژر

۲- عملکرد و مدلسازی موتور

مدلی که در شبیه سازی موتور مورد استفاده قرار می‌گیرد، باید دقت کافی و سادگی مورد نظر را داشته باشد تا بتوان از آن در عین سادگی و عدم پیچیدگی با اطمینان استفاده کرد. برای مدلی که در اینجا مورد استفاده قرار گرفته شده است، دبی جرمی ورودی به سیلندرها [۹و۱۰]، سرعت موتور [۱۱]، فشار ورودی و خروجی منیفولدها [۱۲و۵] و توان کمپرسور [۱۳] مدلسازی شده است. با توجه به موتور مورد مطالعه و حسگرهای نصب شده روی موتور، در ادامه مدلسازی آن آورده شده است که جهت تکمیل روابط ریاضی برای مدلسازی از [۶و۱۴] بهره برده شده است. شایان ذکر است که منابع اشاره شده جهت مدلسازی، تنها روابط ریاضی بین پارامترها را بیان کرده است و شامل روابط تجربی بدون داشتن نگاشت[۱۰] بین پارامترهای تجربی است که این امر مانع از مدلسازی سیستم می‌گردد. در این پژوهش این مقادیر از نتایج تست واقعی موتور در اتاق تست مجهز دریافت گردیده است. نتایج این تست منجر به بدست آوردن نگاشت‌های $\eta_c = f\left(\frac{P_i}{P_{amb}}, n_{tb}\right), \eta_v = f(N_e), \eta_t = f\left(\frac{P_x}{P_{amb}}, n_{tb}\right), \eta_i = f(N_e), M_L = f(Load, M_e)$ (تعریف نمادها در پیوست ب) گردید که اساس اصلی مدل‌سازی همین نگاشت‌ها هستند که در مقالات و پژوهش‌ها هیچ کدام از این موارد تعریف نشده است. در اتاق تست، موتور مورد نظر از طریق حسگرهای منصوب روی موتور و ارتباط ECU موتور با سامانه کنترل و مانیتورینگ بالادست موجود در اتاق تست در دورهای مختلف مورد ارزیابی قرار گرفت و اطلاعات مورد نیاز جهت مدل سازی بدست آمد. گفتنی است که بدون این دیتاها امکان بدست آوردن روابط تجربی که قبلا اشاره شد وجود نداشت. بطور نمونه η_c تابعی از فشار ورودی منیفولد، فشار هوای محیط و دور توربوشارژر می باشد که برای بدست آورن منحنی آن لازم است موتور در دورها و فشارهای مختلف تست شود تا این اطلاعات را بدست آورد.

در شکل (۳) شماتیکی از موتور دیزل توربوشارژ به همراه دریچه هدر آورده شده است:



شکل ۳: ساختمان داخلی موتور دیزل توربو شارژ [۶]

کل فرآیند بدین گونه خواهد بود که هوا از فیلتر هوا به درون موتور مکش می‌گردد. سپس با عبور از کمپرسور فشار آن افزایش یافته و در نتیجه دبی بیشتری به درون سیلندر وارد می‌شود. هوا پس از این مرحله وارد خنک‌کن میانی می‌شود و در فشار ثابت، دمای آن کاهش می‌یابد. هوای فشرده و خنک شده قبل از ورود به سیلندرها وارد منیفولد ورودی می‌شود. مرحله جدید با ورود هوا به داخل سیلندر آغاز می‌شود. در این مرحله تزریق سوخت صورت می‌گیرد و این مقدار سوخت به علاوه هوای ورودی به منیفولد ورودی، تشکیل دبی جدید می‌دهد و این مقدار دبی، همان دبی خروجی از سیلندرها است. این دبی وارد منیفولد خروجی می‌شود. در گام بعد گاز سوخته شده در سیلندر وارد سیستم توربین می‌شود و بخشی از فشار آن برای تامین انرژی مورد نیاز برای بالا بردن فشار هوای ورودی مورد استفاده قرار می‌گیرد و بخشی دیگر توسط دریچه هدر به خارج منتقل می‌شود. در نهایت گاز وارد سیستم خروجی می‌گردد که این قسمت نیز مانند منیفولدها بصورت حجم ثابت در نظر گرفته می‌شود [۱۵].

روابط استفاده شده در شبیه سازی به همراه نمادها و پارامترهای استفاده شده در آن به پیوست آورده شده است. ورودی مدل، میزان باز شدن دریچه هدر u_{wg} است. اما در روابط میزان باز شدن واقعی این دریچه یعنی

[10] Mapping

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.4.1.2]
[DOI: 10.52547/joc.15.4.1]

X_{wg} اعمال شده است از این رو سیگنال ورودی همان میزان باز شدن واقعی دریچه هدر است. متغیرهای حالت آن فشار ورودی منیفولد P_i ، فشار خروجی از سیلندر P_x ، توان کمپرسور P_c ، میزان عملکرد واقعی دریچه هدر با توجه به قدرت عملگرها برای باز کردن دریچه هدر X_{wg} و سرعت زاویه موتور ω_e می‌باشد. تغییر دور موتور تنها به میزان پاشش سوخت به داخل سیلندرهای موتور W_f بستگی دارد و باز و بسته کردن دریچه هدر تاثیری روی آن ندارد؛ اما دیگر متغیرهای حالت با توجه به وضعیت دریچه هدر دستخوش تغییر هستند.

مقادیری که هنگام تست واقعی موتور از آن استنتاج شده است در جدول (۱) و مقادیر فشار ورودی مطلوب به ازای افزایش دبی جرمی سوخت پاشیده شده به داخل سیلندرها درجدول (۲) آمده است. برای خطی‌سازی سیستم با مقادیر جدول (۱) می‌بایست نقاط تعادل سیستم را با مساوی صفر قرار دادن معادلات غیرخطی بدست آورد و با جایگذاری آنها در معادلات حاصل از ژاکوبین به ماتریس‌های فضای حالت رسید. معادلات فضای حالت برای ۷ نمونه به پیوست آورده شده است و برای نمونه اول بصورت زیراست:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -45.1187 & 0 & 50.1254 & 0 & -65767 \\ 62.7370 & -80.4877 & 0 & -1.8151\times 10^{7} & 97117 \\ 0 & 0.6048 & -1.0152 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4251 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بخش حقیقی مقادیر ویژه سیستم خطی سازی شده برای هر۷ نمونه منفی می‌باشد که نشان از پایداری سیستم دارد.مرتبه ماتریس A و ماتریس کنترل پذیری به صورت زیر است:

$$rank(A) = 5; \qquad rank(\ ctrb(A,B)\ ) = 4$$

می بینیم که مرتبه ماتریس کنترل پذیری یکی کمتر از مرتبه ماتریس A است که این به دلیل عدم وابستگی دور موتور به ورودی یعنی باز شدن دریچه هدر است. پس از خطی‌سازی در ۷ نقطه، پایداری سیستم در این نقاط بررسی شده و معلوم گردید سیستم در این نقاط پایدار است و برای بررسی پایداری سیستم غیرخطی از شبیه‌سازی استفاده شده است. این سیستم در دورهای مختلف شبیه‌سازی شده و پایداری آن کاملاً بررسی گردیده است.گفتنی است انتخاب ۷نقطه کاری با توجه به تقسیم بندی روی رک سوخت و میزان تغییرات به ازای هر واحد در نظر گرفته شده است و نقاطی هستند که در آنها موتور تغییرات محسوسی دارد. لذا نقاط میانی هر دو نقطه متوالی شرایط پیش بینی نشده‌ای را به دنبال ندارد لذا در این مقاله با انتخاب این ۷ نقطه بقیه نقاط نیز پوشش داده می شود.

جدول ۱ : نتایج تست موتور در ۷ نمونه

P_i (bar)	P_x (bar)	P_c (kw)	N_e (RPM)	W_f (kg/s)	T_i $(°k)$	T_x $(°k)$
1.65	1.6	22.2	1200	0.0123	401	940
2.026	1.94	45.7	1400	0.0166	431	940
2.41	2.35	78.3	1600	0.02	458	940
2.83	2.85	122	1800	0.026	484	950
3.165	3.29	167	2000	0.03	504	980
3.42	3.76	216	2200	0.035	521	1010
3.61	4.08	253	2400	0.039	533	1030

جدول ۲ : مقدار پاشش سوخت جدید و فشار ورودی مطلوب

Sample	N_e(RPM)	$W_f(kg/s)$	refrence P_i(bar)
1	1200	0.013875	1.85021
2	1400	0.021542	2.27511
3	1600	0.025819	2.82748
4	1800	0.028362	3.42201
5	2000	0.031722	3.65675
6	2200	0.035365	3.88088
7	2400	0.039185	4.05886

۳- شبیه سازی مدل غیرخطی و خطی

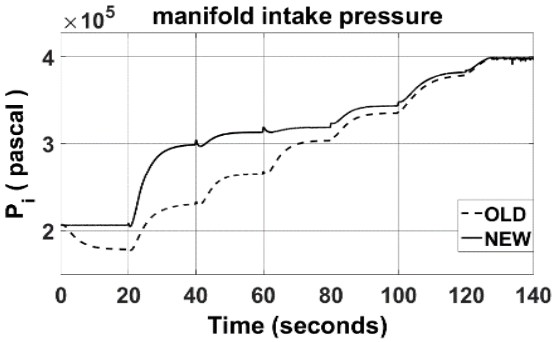
در این بخش مدل غیرخطی و خطی موتور دیزل توربوشارژ در ۷ نمونه شبیه‌سازی خواهد شد و مقادیر با جدول (۱) جهت صحه‌گذاری مقایسه می‌گردد. شبیه‌سازی در دو وضعیت با مقادیر W_f ابتدایی در جدول (۱) و همچنین مقادیر W_f جدید ارائه شده در جدول (۲) بصورتی انجام شده است که کاربر هر ۲۰ ثانیه، ۲۰۰ دور بر دقیقه دور موتور را زیاد می‌کند تا دور موتور از ۱۲۰۰ دور بر دقیقه به ۲۴۰۰ دور بر دقیقه برسد. بسته بودن دریچه هدر معادل صفر و باز بودن کامل آن یک در نظر گرفته شده است. برای دو حالت زیر شبیه سازی انجام شده است:

- حالت اول- زمانی که دریچه هدر کاملا بسته است.
- حالت دوم- زمانی که دریچه هدر مطابق شکل (۶) می باشد.

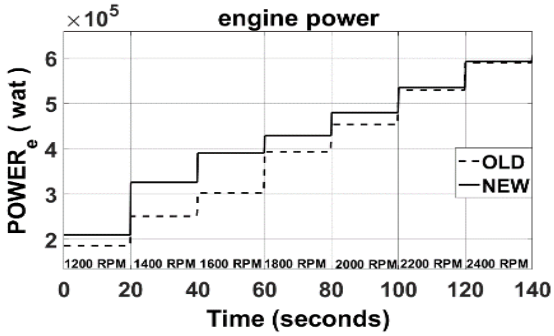
در حالت اول با مقادیر قبلی و جدید W_f که در جداول (۱) و (۲) آورده شده است شبیه سازی صورت گرفته است. با توجه به شکل (۵) مشخص است که w_f جدید توان خروجی موتور را بخصوص در دورهای پایین ارتقاء داده است. اما نکته حائز اهمیت مقدار فشار ورودی منیفولد است که بالاست و می‌تواند طبق شکل (۴) موجب سرج[11] کمپرسور شود.

[11] Surge

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.4.1.2]
[DOI: 10.52547/joc.15.4.1]



شکل ۴: فشار ورودی به منیفولد به ازای w_f قبلی و جدید

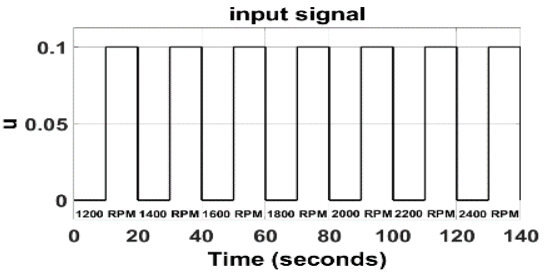


شکل ۵: توان خروجی موتور به ازای w_f قبلی و جدید

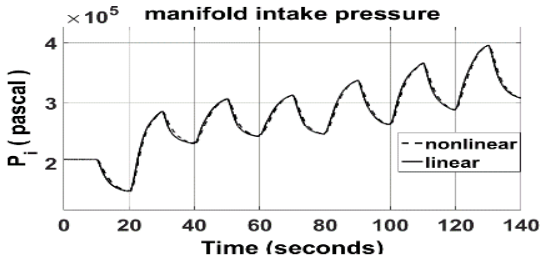
در صورتی که بتوان فشار ورودی به منیفولد را به مقادیر مطمئن جدول (۲) رساند، می‌توان این ادعا را کرد که توان خروجی موتور در یک شرایط ایمن ارتقاء یافته است. ابزار کنترلی برای رسیدن به این مهم وجود دریچه هدر قبل از توربین است که می‌بایست با طراحی کنترل‌کننده مناسب، میزان باز و بسته شدن آن را کنترل کرد و فشار ورودی منیفولد را به مقادیر مطلوب رسانید. شایان ذکر است مقادیر نمودارها به ازای w_f قبلی، کاملا با نتایج تست موتور که در جدول (۱) آورده شده است مطابقت دارد لذا می‌توان گفت مدلسازی سیستم نیز به خوبی صورت پذیرفته است.

در حالت دوم به شبیه‌سازی مدل خطی و مقایسه آن با مدل غیرخطی جهت صحه‌گذاری خطی‌سازی پرداخته شده است. برای این که ضمن مقایسه مدل خطی با مدل غیرخطی، تاثیر باز شدن دریچه هدر در هر دو مدل مشخص شود، سیگنال ورودی که همان باز شدن دریچه هدر است بصورت شکل (۶) درنظر گرفته شده و نتایج برای w_f جدید نمایش داده شده است. اشکال (۷) تا (۱۱) نشان می‌دهند که خطی سازی سیستم بخوبی صورت پذیرفته است و می‌توان گفت که مدل حاصل از خطی‌سازی تقریب خوبی از مدل واقعی است و در نهایت با توجه به اینکه نتایج هر دو مدل غیرخطی و خطی‌سازی شده متناسب با اطلاعات دریافت شده از موتور واقعی یعنی جدول (۱) است (در حالت‌هایی که دریچه هدر بسته است) می‌توان گفت مدل‌سازی نسبتا دقیقی نیز صورت گرفته است. باز شدن دریچه هدر منجر به کاهش فشار ورودی و خروجی منیفولد و کاهش توان کمپرسور گردیده است. لذا می‌توان پیش بینی کرد که به کمک دریچه هدر می‌توان به فشار ورودی منیفولد مطلوب رسید.

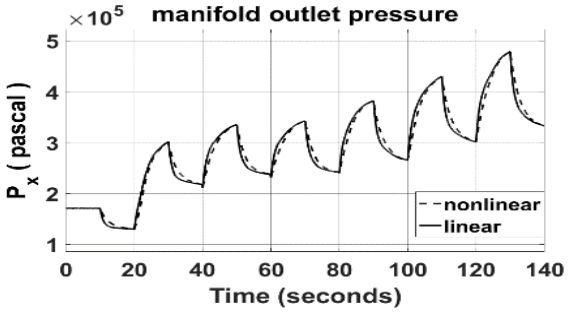
واضح است که با افزایش دور موتور فشار ورودی و خروجی منیفولد و توان کمپرسور افزایش و زمانی که دریچه هدر باز می‌شود همگی کاهش می‌یابند. شایان ذکر است تغییر وضعیت دریچه هدر هیچ تغییری روی دور موتور ایجاد نمی‌کند که علت آن عدم وابستگی دور موتور به میزان باز شدن دریچه هدر است.



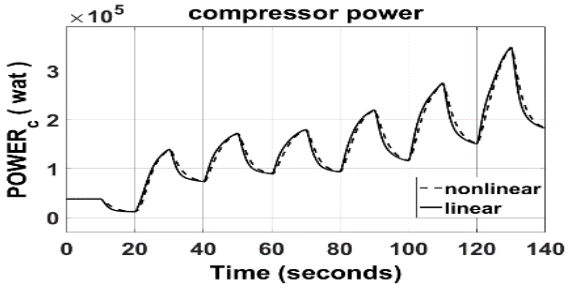
شکل ۶: سیگنال ورودی – میزان باز شدن دریچه هدر



شکل ۷: فشار ورودی به منیفولد برای مدل غیرخطی و خطی

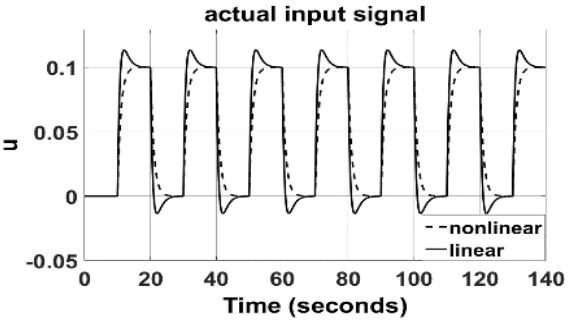


شکل ۸: فشار خروجی از منیفولد برای مدل غیرخطی و خطی

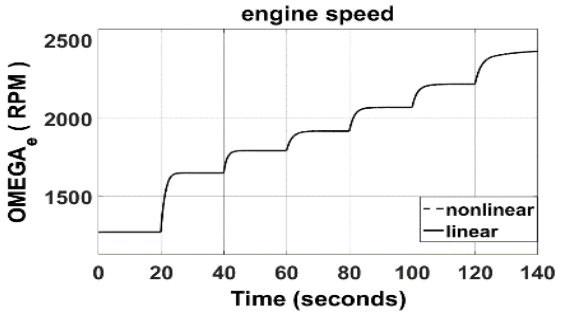


شکل ۹: توان کمپرسور برای مدل غیرخطی و خطی

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.4.1.2]
[DOI: 10.52547/joc.15.4.1]



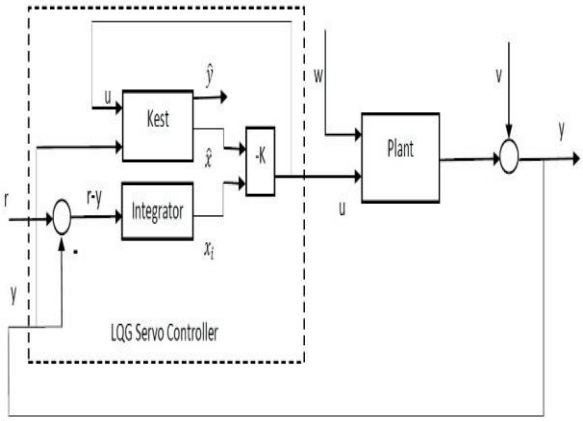
شکل ۱۰ : باز شدن واقعی دریچه هدر برای مدل غیرخطی و خطی



شکل ۱۱ : دور موتور برای مدل غیرخطی و خطی

۴- کنترل‌کننده LQIG

این روش بر اساس روش رگولاتور خطی مرتبه دوم LQR و انتگرال خطی مرتبه دوم LQI پایه ریزی‌شده است. در روش LQR فیدبک از خروجی بعد از مقایسه با مقدار مطلوب مستقیما به سیستم اعمال می‌گردد اما در LQI این مقدار بعد از عبور از یک انتگرال‌گیر به سیستم داده می‌شود. در ادامه الگوریتمی آورده شده است که بتوان کنترل‌کننده‌ای که آغشته به نویز است را طراحی کرد. تفاوتی که این روش با روش‌های LQI و LQR دارد، در این است که بجای این‌که از حالت‌های اصلی سیستم برای طراحی کنترل‌کننده استفاده شود از تخمین آن‌ها توسط فیلتر کالمن استفاده شده است که می‌توان آن را کنترل‌کننده گوسی انتگرالی مرتبه دوم یا به اختصار LQIG نامید. در مراجع مختلف همچون [۱۶] این روش با عنوان LQG[12] و در برخی دیگر مانند [۱۷] این روش طراحی کنترل‌کننده تحت عنوان روش LQI با فیلتر کالمن بیان شده است. روش PID در [۱۹و۲۰] و روش LQR در [۲۱] بطور کامل تشریح شده است. از آنجا که روش LQG فیدبک خروجی را با مقدار مطلوب مقایسه می‌کند و اختلاف حاصل را بدون گذراندن از انتگرال‌گیر مستقیماً به سیستم اعمال می‌کند، نمی‌تواند تداعی کننده عنوان LQIG باشد چرا که در این روش سیگنال خطا بعد از گذراندن از یک انتگرال‌گیر به سیستم اعمال می‌شود. به همین جهت در این پژوهش از عنوان LQIG بهره برده شده است بطوریکه در تعدادی از مراجع هم همچون[۱۸] از همین نام استفاده شده است. در شکل (۱۲) الگوریتم این کنترل‌کننده آمده است.



شکل ۱۲ : الگوریتم کنترل کننده LQIG

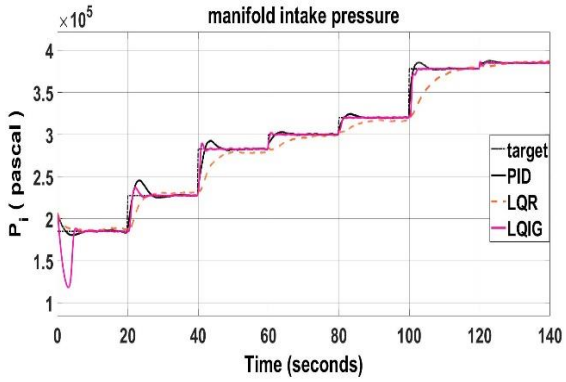
که در آن r خروجی مطلوب، w نویز فرآیند با میانگین صفر و کواریانس $W = E\{w(t)w^T(t)\}$ ، v نویز اندازه‌گیری با میانگین صفر و کواریانس $V = E\{v(t)v^T(t)\}$ و K بهره‌ای است که در این طراحی توسط روش LQI و به منظور حداقل کردن تابع هزینه زیر محاسبه می‌شود.

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \qquad (۱)$$

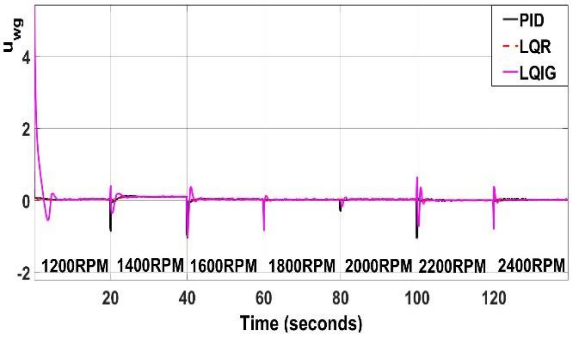
بلوک kest حاوی معادلات فضای حالت فیلتر کالمن می‌باشد. در این روش همانند روش LQR ماتریس‌های Q و R با توجه به تاثیری که روی خروجی از نظر سرعت پاسخ‌دهی، جهش پاسخ، کاهش تاثیر نویز حسگرها و دامنه ورودی لازم برای رسیدن به هدف دارد تعیین می‌شوند. مقادیر Q و R در روش LQR و LQI متفاوت بوده و در هر روش بهترین حالت‌های پاسخگویی با هم مقایسه شده است. واضح است که در این روش از تخمین حالت‌ها فیدبک گرفته شده است که در این مقاله این حالت‌ها یا بطور مستقیم از طریق حسگر اندازه‌گیری می‌گردد مانند دور موتور، میزان باز بودن دریچه هدر، فشار هوای ورودی و خروجی و یا مانند توان کمپرسور از طریق محاسبه بدست می‌آید. خروجی و سیگنال کنترل هر۳ روش PID، LQR و LQIG در زمان نمونه برداری ۲۰۰ میلی‌ثانیه در اشکل (۱۳) و شکل (۱۴) نمایش داده شده است.

[12] Linear Quadratic Gaussian

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.4.1.2]
[DOI: 10.52547/joc.15.4.1]



شکل ۱۳ : مقایسه خروجی کنترل‌کننده‌های PID، LQR و LQIG

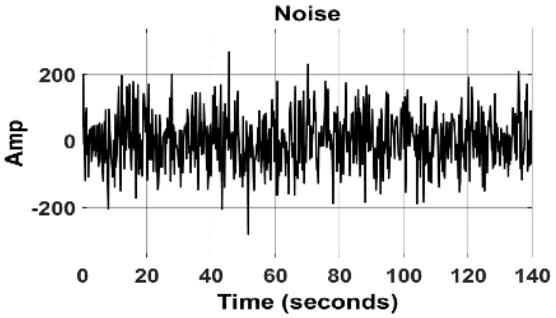


شکل ۱۴ : مقایسه سیگنال کنترل کنترلگرهای PID، LQR و LQIG

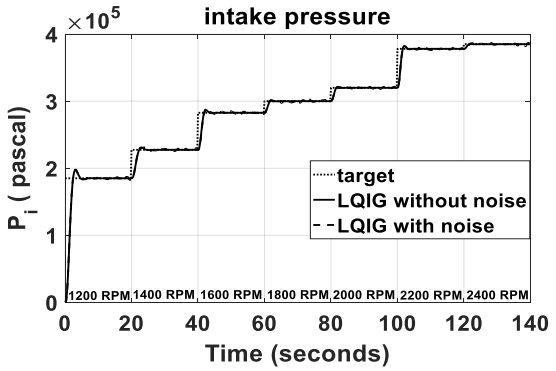
واضح است که دامنه ورودی کنترلی همگی تقریبا مشابه هم هستند، اما آنچه که در خروجی دیده می‌شود متفاوت است. بصورتی که کنترل‌کننده LQIG بهترین عملکرد و کنترل‌کننده LQR عملکرد ضعیفی را از خود نشان داده است که مهمترین علت آن این است که اختلاف خروجی مطلوب و خروجی فیدبک مستقیما به سیستم اعمال می‌شود و این در حالی است که در LQIG این مقدار به یک انتگرال‌گیر اعمال گردیده و سپس به سیستم اصلی اعمال می‌شود. این موضوع بخصوص در حالت نهایی خود را نشان می‌دهد که همانطور که از شکل (۱۳) مشخص است LQR با خطای نسبتا زیادی عمل ردیابی مقدار مطلوب را انجام داده است. گرچه کنترل‌کننده PID عملکرد بهتری از LQR داشته است، ولی در قیاس با LQIG سرعت پاسخگویی ضعیف تر و جهش پاسخ بیشتری دارد. کنترل‌کننده LQIG به خاطر تخمین حالت‌ها توسط فیلتر کالمن و حضور انتگرال‌گیر، خروجی نرم‌تر و مقاومت بیشتری در برابر نویز دارد.

۵- طراحی کنترل‌کننده و شبیه‌سازی

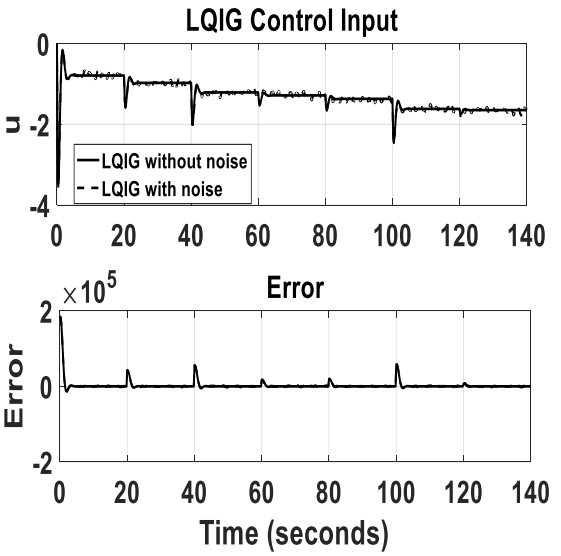
در ادامه سیستم برای حالتی که کاربر هر ۲۰ ثانیه، ۲۰۰ دور بر دقیقه دور موتور را زیاد می‌کند تا دور موتور از ۱۲۰۰ دور بر دقیقه به ۲۴۰۰ دور بر دقیقه برسد، شبیه سازی شده است. گفتنی است افزایش دور موتور هر ۲۰ ثانیه آن هم بصورت یک تابع پله جزو بدترین شرایطی است که در شبیه سازی در نظر گرفته شده است و این درحالیست که افزایش دور موتور بصورت پیوسته افزایش می‌یابد و هیچگاه به یکباره در یک لحظه ۲۰۰ دور بر دقیقه دور موتور افزایش نمی‌یابد و لختی عملگرهای موتور هم برای برآورده کردن این خواسته دلیل دیگری برای عدم افزایش یکباره دور موتور است. لذا برای شبیه سازی در یک شرایط سخت گیرانه از یک تابع پله برای افزایش دور موتور استفاده شده است.



شکل ۱۵ : نویز وارد شده به سیستم

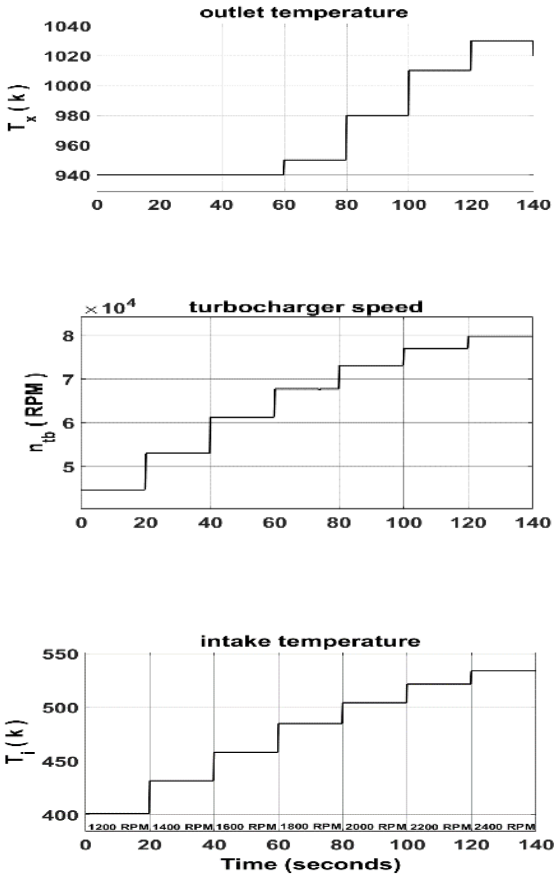


شکل ۱۶ : خروجی کنترلر LQIG برای مدل خطی با و بدون نویز



شکل ۱۷ : ورودی کنترل و خطای خروجی LQIG برای مدل خطی با و بدون نویز

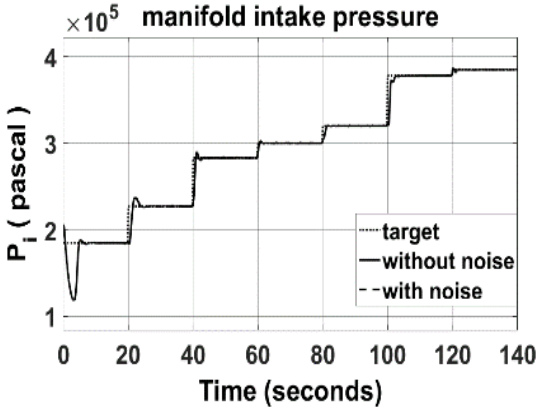
[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.4.1.2]
[DOI: 10.52547/joc.15.4.1]



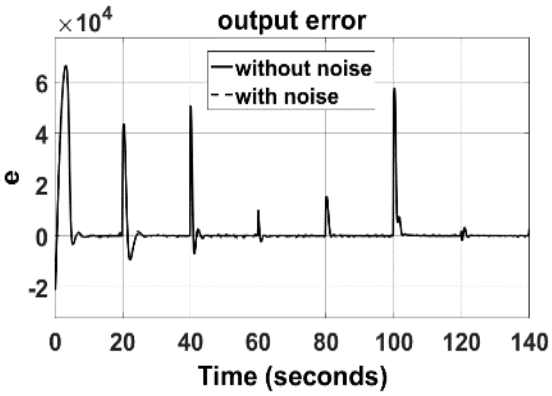
شکل ۱۸ : مقادیرحسگرها برای دور ۱۲۰۰ تا ۲۴۰۰ دور بر دقیقه

افزایش دور با مقادیر W_f جدول (۲) صورت می‌پذیرد. دمای ورودی و خروجی منیفولد و دور توربوشارژر توسط حسگرهای مربوطه بصورت شکل (۱۸) اندازه‌گیری می شود. در شکل (۱۶) و شکل (۱۷) پاسخ سیستم با توجه به طراحی کنترل‌کننده LQIG برای سیستم خطی در حالت با نویز و بدون آن آمده است. هدف از طراحی نگه داشتن فشار ورودی منیفولد بصورت جدول (۲) با وجود نویز شکل (۱۵) می‌باشد.

با توجه به اینکه خطای ردیابی سیستم به صفر میل کرده است ردیابی خروجی به بهترین شکل صورت گرفته است و می‌توان گفت کنترل‌کننده برای سیستم خطی در حالتی که حتی نویز هم به سیستم اعمال شده است عملکرد بسیار خوبی دارد. حال کنترل‌کننده طراحی شده برای مدل خطی، برای مدل غیرخطی موتور بکار گرفته شده و شبیه سازی می‌گردد. نتایج شبیه سازی در اشکال (۱۹) تا (۲۵) آمده است.

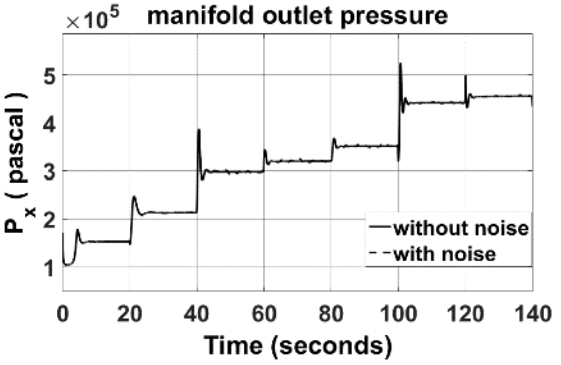


شکل ۱۹ : خروجی LQIG : فشار ورودی به منیفولد برای مدل غیرخطی با و بدون نویز



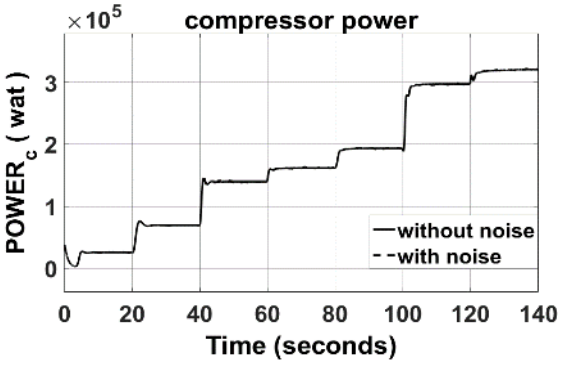
شکل ۲۰ : خطای خروجی LQIG برای مدل غیرخطی با و بدون نویز

در این شبیه‌سازی‌ها بازه‌های زمانی کوچک و حدود ۲۰ ثانیه جهت تغییر دور موتور در نظر گرفته شده و با در نظر گرفتن این نکته که دور موتور قرار نیست به یک باره از مثلا ۱۲۰۰ به ۱۴۰۰ دور بر دقیقه برسد و در این بین، دور موتور مقادیر دیگری نیز به خود می‌گیرد می‌توان این ادعا را کرد که کنترل‌کننده با درصد خطای کمی مقدار مطلوب را ردیابی می‌کند. شکل (۲۰) میزان خطای ردیابی را نشان می‌دهد. در شکل (۲۱) تا (۲۵) حالت‌های سیستم و میزان باز شدن واقعی دریچه هدر به تصویر کشیده شده است.

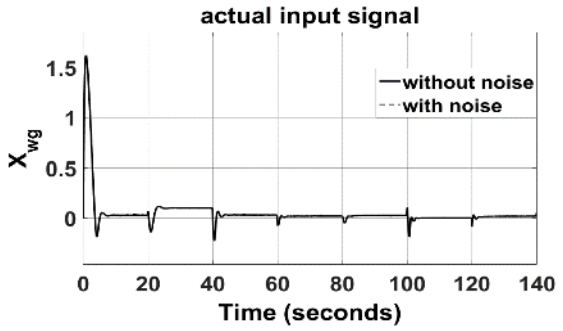


شکل ۲۱ : فشار خروجی از منیفولد برای مدل غیرخطی با و بدون نویز

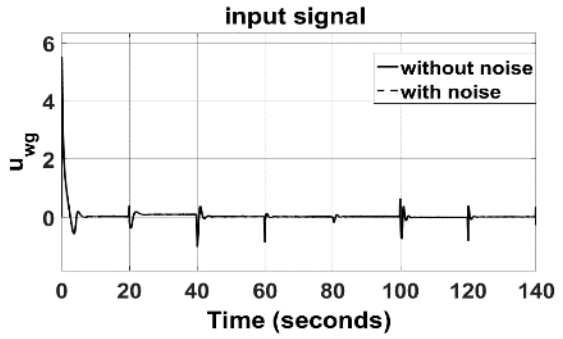
[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.4.1.2]
[DOI: 10.52547/joc.15.4.1]



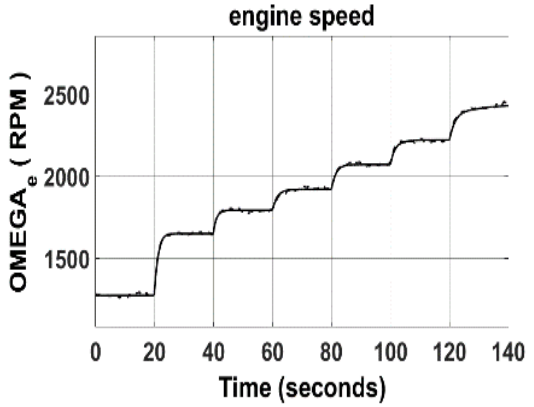
شکل۲۲ : توان کمپرسور برای مدل غیرخطی با و بدون نویز



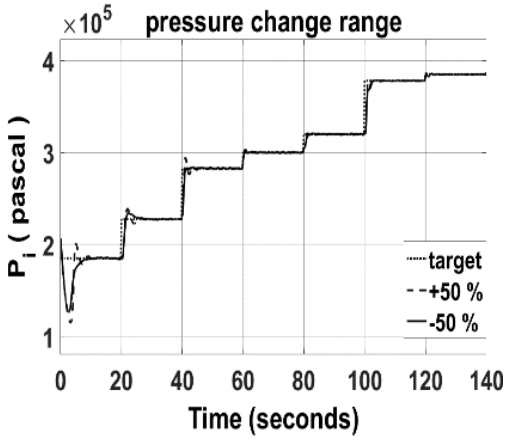
شکل ۲۳ : باز شدن واقعی دریچه برای مدل غیرخطی با و بدون نویز



شکل ۲۴ : سیگنال کنترل ورودی برای مدل غیرخطی با و بدون نویز



شکل ۲۵ : دور موتور برای مدل غیرخطی با و بدون نویز



شکل ۲۶ : محدوده تغییر خروجی (فشار منیفولد ورودی) به ازای تغییر مدل و وجود نویز

شکل (۲۳) میزان باز شدن واقعی دریچه هدر و شکل (۲۴) سیگنال کنترل ورودی می‌باشد که تقریبا برابر با شکل (۲۴) می‌باشد. همان طور که مشخص است دامنه ورودی، مناسب و در بازه تعریف شده برای آن است. با توجه به مقادیر حالت‌ها و ورودی حاصل می‌توان ادعا کرد که کنترل‌کننده LQIG به خوبی عمل کرده است. در شکل (۲۶) به منظور بررسی مقاومت کنترل کننده در برابر نامعینی‌ها، خروجی به ازای تغییر $\pm 50\%$ درصدی مدل و در حضور نویز نمایش داده شده است.

همان طور که از شکل (۲۶) مشخص است این کنترل‌کننده در شرایط سختی که هم نویز وجود دارد و هم مدلسازی دقیقی انجام نشده باشد باز هم بخوبی کار خود را انجام داده و این خبر از قابل اطمینان بودن این کنترل‌کننده دارد.

۶- نتیجه گیری

در این مقاله مدل غیرخطی موتور دیزل توربوشارژ بدست آمد و برای ۷ نقطه کار خطی شد. نتایج شبیه سازی مدل غیرخطی با نتایج حاصل از تست موتور مقایسه شد و صحت مدل سازی را نشان داد. پس از مدل سازی موتور، برای تمام نقاط کار موتور یک کنترل‌کننده‌ی گوسی انتگرالی مرتبه دوم خطی که پارامترهای آن تابعی از سرعت موتور می باشد، طراحی شد. با کنترل دریچه هدر، میزان بوست تولیدی توسط توربوشارژر در تمام دورهای موتور با دقت و سرعت بالایی کنترل و توان و گشتاور تولیدی موتور در این دورها بهبود یافت. نتایج شبیه سازی نشان داد که روش LQIG در قیاس با روش‌های PID و LQR دارای عملکرد بهتری بوده و در برابر نویز و نامعینی مدل مقاومت بیشتری دارد.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.4.1.2]
[DOI: 10.52547/joc.15.4.1]

مراجع

[1] p.Safarian, K.Bilen, M.Ceviz and A.Salimias, "Optimization of waste gate in the diesel engines with turbocharger," International Journal of Automotive Engineering Vol.6, Number 3, Sept 2016

[2] A.Karnik,J.H.Buckland and J.S. Freudenberg, "Electronic Throttle andWastegate Control for Turbocharged Gasoline Engines," American Control Conference June 8-10, 2005. Portland, OR, USA, 2005 .

[3] M.Mansuri, "Automotive World," 30 June 2016.Available: http://memra.blogfa.com/cat-89.aspx.

[4] A.Y.Karnik and M.Jankovik, "IMC based wastegate control using a first order model for turbocharged gasoline engine," American Control Conference Fairmont Queen Elizabeth, Montréal, Canada, 2012 .

[5] Z.Qiu, J.Sun, M.Jankovik, M.Santilo, "Nonlinear internal model controller design for wastegate control of a turbocharged gasolineengine," Control Engineering Practice 46 (2016) 105–114

[6] S.Samokhin, K. Zenger, "Robust and Adaptive Wastegate Control of Turbocharged Internal Combustion Engines," American Control Conference (ACC), 2014 .

[7] N.E. Kahveci, S.T. Impram, A. Umut Genc, "Boost Pressure Control for a Large Diesel Engine with Turbocharger," American Control Conference (ACC),Portland, Oregon, USA, 2014 .

[8] M.Huang, H.Nakada, K.Butts, I.Kolmanovsky, "Nonlinear Model Predictive Control of a Diesel Engine Air Path: A Comparison of Constraint Handling and Computational Strategies,"IFAC-PapersOnLine 48-23 (2015) 372–379 .

[9] L.Eriksson, J.Wahlstr¨om, and .Klein, " Physical Modeling of Turbocharged Engines and Parameter Identification," Automotive Model Predictive Control (2010) , LNCIS 402, pp. 53–71 .

[10] P.Andersson.,"Air Charge Estimation in Turbocharged Spark Ignition Engines," Printed by LiU-Tryck, Link¨oping, Sweden, 2005 .

[11] A.G.Kuznetsov,S.V.Kharitonov,D.S.Vornychev, "A mathematical model of a diesel engine for simulation modelling of the control system," Global Journal of Pure and Applied Mathematics., 2016. Volume 12, Number 1 (2016), pp. 213-228

[12] D.C.Manzie,"Input redundant internal combustion engine with linear quadratic Gaussian control and dynamic control allocation," The University of Melbourne, Melbourne, 2009. DCT doc.no.: 2009.023

[13] H. Jin, S. Choi and S. Kim, "Design of a compressor-power-based exhaust manifold pressure estimator for diesel engine air management," International Journal of Automotive Technology, Vol. 15, No. 2, pp. 191−201 .(۲۰۱۴)

[14] K.Rong,"Modeling of turbocharged spark ignited engine and model predictive control of hybrid turbocharger," A thesis presented to the graduate school of the university of florida in partial fulfillment of the requirements for the degree of master of science, 2014 .

[۱۵] م. بهروزی, ا. شامخی، ع.طوسی، م.پلاور, "مدلسازی مقدار میانگین موتور دیزل به همراه توربو شارژر," در شانزدهمین کنفرانس سالانه(بین المللی) مهندسی مکانیک ISME2008, ایران، کرمان، دانشگاه شهید باهنر, ۱۳۸۷.

[16] A.Kalbat, "Linear Quadratic Gaussian (LQG) control of wind Turbines," 3rd International Conference on Electric Power and Energy Conversion Systems, Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey, October 2-4, 2013

[17] J.Shin,K.Nonami, D.Fujiwara and K.Hazawa, "Model-based optimal attitude and positioning control of small-scale unmanned helicopter," Robotica / Volume 23 / Issue 01 / January 2005, pp 51 - 63

[18] M.S.Mahmoud, A.B.Koesdwiady, "Improved digital tracking controller design for pilot-scale unmanned helicopter," Journal of the Franklin Institute 349 (2012) 42–58 .

[19] T.Hagglund, K.Astrom, PID Controllers: Theory,Design,and Tuning, ISA: The Instrumentation, Systems,and Automation Society, 1995 .

[20] Graf, Jens, PID Control Fundamentals, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2016 .

[21] J.B. Moore, Optimal Control: Linear Quadratic Methods, Dover Publications; 91.12 edition, February 27, 2007.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.4.1.2]
[DOI: 10.52547/joc.15.4.1]

پیوست

الف - معادلات دینامیکی

در این بخش روابط ریاضی، جهت مدلسازی موتور دیزل توربوشارژر به صورت زیر آمده است [۱۴و۶].

$$\dot{P}_i(\mathrm{t}) = \frac{R_i T_i}{V_i}(W_{ci} - W_{ie}) \quad (۱)$$

$$W_{ie} = \frac{V_d \omega_e P_i(t)}{V 2\pi R_i T_i}\eta_v \qquad \eta_v = f(N_e) \quad (۲)$$

$$W_{ci} = \frac{\eta_c P_c(t)}{T_a C_p\left[\left(\frac{P_i(t)}{Pa}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]} \qquad \eta_c = \mathrm{f}\left(\frac{P_i}{P_{amb}}, n_{tb}\right) \quad (۳)$$

$$\dot{P}_x(\mathrm{t}) = \frac{R_x T_x}{V_x}\left(W_{ie} + W_f - W_{xt} - W_{xwg}\right) \quad (۴)$$

$$W_{xt} = A_t \frac{P_x(t)}{\sqrt{R_x T_x}}\psi\left(\frac{P_{amb}}{P_x}\right) \quad (۵)$$

$$W_{xwg} = A_{wg} X_{wg} \frac{P_x(t)}{\sqrt{R_x T_x}}\psi\left(\frac{P_{amb}}{P_x}\right) \quad (۶)$$

$$\psi = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\left(\frac{P_{amb}}{P_x}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{P_{amb}}{P_x}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right)} & , \frac{P_{amb}}{P_x} > r_c \\ \gamma^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}\right] & , \frac{P_{amb}}{P_x} \le r_c \end{cases} \quad (۷)$$

$$r_c = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (۸)$$

$$\dot{P}_c(t) = \frac{1}{\tau}(\eta_t P_t - P_c) \qquad \eta_t = \mathrm{f}\left(\frac{P_x}{P_{amb}}, n_{tb}\right) \quad (۹)$$

$$P_t = W_{xt} C_p T_x\left[1 - \left(\frac{P_x}{P_{amb}}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right] \quad (۱۰)$$

$$\dot{x}_{wg}(\mathrm{t}) = -X_{wg}(t) + u_{wg}(t) \quad (۱۱)$$

$$\dot{\omega}_e = \frac{1}{J}(M_{ind} - M_{fr} - M_l) \quad (۱۲)$$

$$M_{ind} = \frac{\eta_i W_f Q_{hv}}{\omega_e} \qquad \eta_i = f(N_e) \quad (۱۳)$$

$$M_{fr} = \frac{f_{mep} V_d}{2\pi V} \quad (۱۴)$$

$$M_l = \frac{Load . P_{e_{max}}}{\omega_e} f_l(\mathrm{load}, N_e) \quad (۱۵)$$

$$f_{mep} = [C_1 + 48\left(\frac{N_e}{1000}\right) + 0.4 S_p^2] \times 10^3 \quad (۱۶)$$

$$P_e = \eta_f W_{ci} Q_{HV}\left(\frac{F}{A}\right) = \eta_f Q_{HV} W_f \quad (۱۷)$$

$$\mathrm{T}_e = \frac{P_e}{2\pi N_e} \quad (۱۸)$$

ب - جدول پارامترها و مقادیر مدلسازی

در این بخش کلیه پارامترهای مربوط به مدلسازی موتور دیزل توربوشارژ به همراه مقدار و واحد آن آورده شده است.

عنوان	نماد	واحد	مقدار
ثابت ویژه گاز ورودی	R_i	$J/kg°k$	287.327
دمای ورودی منیفولد	T_i	$°k$	[-]
حجم منیفولد ورودی	V_i	m^3	0.005
دبی جرمی خروجی از کمپرسور	W_{ci}	kg/s	[-]
دبی جرمی ورودی به سیلندرها	W_{ie}	kg/s	[-]
حجم جابجایی پیستون	V_d	m^3	0.012
سرعت زاویه ای موتور	ω_e	rad/s	[-]
فشار ورودی منیفولد	P_i	pascal	[-]
بازده حجمی	η_v	[-]	$f(N_e)$
دور موتور	N_e	RPM	[-]
تعداد سیکل انجام شده در هر دور میل لنگ	V	[-]	2
توان کمپرسور	P_c	w	[-]
گرمای ویژه	C_p	$J/kg°k$	1003.5
دمای کمپرسور	T_c	$°k$	[-]
دمای محیط	T_{amb}	$°k$	300
فشار محیط	P_{amb}	pascal	10^5
بازده کمپرسور	η_c	[-]	$f(\frac{P_i}{P_{amb}}, n_{tb})$
نسبت گرمای ویژه ($\frac{C_p}{C_v}$)	γ	[-]	1.4
ثابت ویژه گاز خروجی	R_x	$J/kg°k$	287.327
دمای خروجی منیفولد	T_x	$°k$	[-]
حجم منیفولد خروجی	V_x	m^3	0.008
دبی جرمی پاشش سوخت	W_f	kg/s	[-]
دبی جرمی خروجی توربین	W_{xt}	kg/s	[-]
دبی جرمی خروجی دریچه هدر	W_{xwg}	kg/s	[-]
مساحت توربین	A_t	m^2	$\pi D_t^2/4$
مساحت دریچه هدر	A_{wg}	m^2	$\pi D_{wg}^2/4$
فشار خروجی منیفولد	P_x	pascal	[-]
ثابت زمانی	τ	s	0.985
بازده توربین	η_t	[-]	$f(\frac{P_x}{P_{amb}}, n_{tb})$
توان توربین	P_t	w	[-]

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.4.1.2]
[DOI: 10.52547/joc.15.4.1]

دمای توربین	T_t	$°k$	[-]
سیگنال کنترل واقعی	X_{wg}	[-]	$\in [0,1]$
سیگنال کنترل مطلوب	u_{wg}	[-]	$\in [0,1]$
اینرسی میل لنگ	J	$kg.m^2$	27.5
ارزش حرارتی سوخت	Q_{hv}	J/kg	42×10^6
گشتاور نشان داده شده	M_{ind}	$N.m$	[-]
گشتاور حاصل از اصطکاک	M_{fr}	$N.m$	[-]
گشتاور مورد نیاز برای بار	M_l	$N.m$	[-]
تابع نسبت فشار	$\psi(.)$	[-]	[-]
بار روی شفت	LOAD	%	100
ماکزیمم توان موتور	$P_{e_{max}}$	w	671.13×10^3
بازده حرارتی	η_i	[-]	$f(N_e)$
تابع گشتاور حاصل از بار	$f_l(.)$	[-]	[-]
مقدار تجربی	C_1	$k.pascal$	75
طول ضربه پیستون	S_p	m	0.159
نسبت فشار بحرانی	r_c	[-]	[-]
دور توربوشارژر	n_{tb}	rad/s	[-]
فشار بعد از کمپرسور	p_{cmp}	pascal	[-]
توان خروجی موتور	P_e	wat	[-]
گشتاور موتور	T_e	N.m	[-]
ضریب بازدهی سوخت	η_f	[-]	0.36

ج - ماتریس‌های فضای حالت مدل خطی شده

در این قسمت مدل غیرخطی موتور دیزل توربوشارژ در هفت نقطه کاری خطی شده است که ماترسی‌های فضای حالت آن به صورت زیر می‌باشد. ماتریس‌های B ، C و D برای هر ۷ نمونه مشابه هم هستند و ماتریس A بصورت زیر می باشد.

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = [\mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \qquad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -45.1187 & 0 & 50.1254 & 0 & -65767 \\ 62.7370 & -80.4877 & 0 & -1.8151 \times 10^7 & 97117 \\ 0 & 0.6048 & -1.0152 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4251 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -63.7097 & 0 & 38.5476 & 0 & -1.00320 \times 10^5 \\ 79.5346 & -80.4877 & 0 & -3.349 \times 10^7 & 1.37680 \times 10^5 \\ 0 & 0.8110 & -1.0152 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3758 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -70.5271 & 0 & 33.8364 & 0 & -1.0820 \times 10^5 \\ 83.9606 & -80.4877 & 0 & -3.6292 \times 10^7 & 1.3768 \times 10^5 \\ 0 & 0.8640 & -1.0152 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3269 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -75.9625 & 0 & 33.0903 & 0 & -1.1180 \times 10^5 \\ 86.9057 & -80.9147 & 0 & -3.7167 \times 10^7 & 1.3803 \times 10^5 \\ 0 & 0.8944 & -1.0152 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2590 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} -79.8112 & 0 & 32.2647 & 0 & -1.1688 \times 10^5 \\ 90.2023 & -82.1823 & 0 & -4.2116 \times 10^7 & 1.4313 \times 10^5 \\ 0 & 0.9525 & -1.0152 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2106 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} -84.6967 & 0 & 30.8915 & 0 & -1.2772 \times 10^5 \\ 94.7092 & -83.4307 & 0 & -4.9230 \times 10^7 & 1.5582 \times 10^5 \\ 0 & 1.0098 & -1.0152 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1426 \end{bmatrix}$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} -89.5669 & 0 & 29.5111 & 0 & -1.2802 \times 10^5 \\ 99.5472 & -84.2527 & 0 & -5.4207 \times 10^7 & 1.5564 \times 10^5 \\ 0 & 1.0451 & -1.0152 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0856 \end{bmatrix}$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-01-30]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.4.1.2]
[DOI: 10.52547/joc.15.4.1]