

## آرایش بندی دوبخشی زمان متناهی سیستم های چندعاملی غیر خطی ناهمگن

محمدرضا مهرابی کوشکی<sup>۱</sup>، جواد عسکری<sup>۲</sup>، مرضیه کمالی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران، m\_mehrabi@alumni.iut.ac.ir  
<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، صندوق پستی ۸۴۱۵۶۸۳۱۱۱، ایران، j-askari@iut.ac.ir  
<sup>۳</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، صندوق پستی ۸۴۱۵۶۸۳۱۱۱، ایران، m.kamali@iut.ac.ir

پذیرش: ۱۴۰۳/۰۱/۲۵

ویرایش: ۱۴۰۲/۱۲/۰۵

دریافت: ۱۴۰۲/۰۹/۱۵

**چکیده:** به دلیل کاربرد گسترده سیستم های چندعاملی، در سال های اخیر این سیستم ها مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته اند. از جمله مسائلی که در زمینه سیستم های چندعاملی مطرح شده، آرایش بندی دوبخشی در این سیستم ها است. از این رو در این تحقیق آرایش بندی توزیع شده دوبخشی سیستم های چندعاملی غیر خطی مرتبه دو، با رویکرد رهبر-پیرو، مورد بررسی قرار گرفته است. در رویکرد ارایه شده، عامل ها غیرهمگن در نظر گرفته شده اند و گراف ارتباطی بین عامل ها نیز جهت دار است. با توجه به عدم ارتباط همه ی عامل ها با رهبر گروه، به منظور بازسازی اطلاعات رهبر، در هر عامل از یک مشاهده گر زمان متناهی، جهت تخمین دینامیک رهبر استفاده شده است. همچنین با توجه به اینکه استفاده از رویکرد زمان متناهی در بسیاری از کاربردهای عملی منجر به افزایش عملکرد و کارایی سیستم می شود، از کنترل کننده مود لغزشی ترمینال استفاده شده که منجر به زمان متناهی بودن آرایش بندی می گردد. در انتها، نتایج تئوری با استفاده از شبیه سازی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته تا صحت روابط به دست آمده نیز بررسی شود.

**کلمات کلیدی:** سیستم های چندعاملی، آرایش بندی دوبخشی، پایداری زمان متناهی، کنترل مود لغزشی ترمینال.

## Finite-Time Bipartite Formation of Nonlinear Heterogeneous Multi-Agent Systems

Mohammad Reza Mehrabi Koushki, Javad Askari, Marzieh Kamali

**Abstract:** Due to their extended use, nowadays, Multi-Agent Systems have attracted the attention of many researchers. Bipartite formation is one of the interesting fields of Multi-Agent Systems that has been raised within a decade. In this research, the distributed bipartite formation of Multi-Agent Systems was investigated by a leader-follower approach. Heterogeneous agents in this approach have second-order nonlinear dynamics, and the communication graph between the agents is also a structurally balanced signed directed graph. Because of the distributed approach of the controller and the lack of existing communication between the leader and all of the followers, a finite-time observer is used to estimate the leader's dynamic in finite time. Also, because a finite-time approach increases performance and efficiency in many practical applications, a terminal sliding mode controller provides finite-time formation. Finally, the validity of the theoretical results is illustrated by simulation examples.

**Keywords:** Multi-Agent Systems, Bipartite formation, Finite-time stability, Terminal sliding mode control.

## ۱- مقدمه

سیستم‌های چندعاملی<sup>۱</sup> در محدوده‌ی وسیعی از زمینه‌های مهندسی همچون شبکه‌های هوشمند الکتریکی، شبکه‌های کامپیوتری، محیط شهری، سیستم‌های بیولوژیکی و هواپیماهای بدون سرنشین، مورد توجه محققین قرار گرفته‌اند [۱-۳]. یک سیستم چندعاملی متشکل از چندین عامل هوشمند است و قادر به انجام اهدافی که برای یک عامل و یا حتی یک سیستم یکپارچه امری دشوار و یا غیرممکن است، می‌باشد.

در بین اهداف مرتبط با سیستم‌های چندعاملی، آرایش‌بندی، که در آن گروهی از عامل‌ها برای دستیابی به شکل هندسی مورد نظر اقدام و با یکدیگر همکاری می‌کنند، به دلیل کاربرد گسترده در مواردی کاربردی همچون رباتیک، هوافضا، شبکه‌های سنسوری و حمل و نقل هوشمند، از اهمیت خاصی برخوردار است [۳-۵]. به رغم تلاش‌های فراوان محققین در زمینه‌ی سیستم‌های چند عاملی، چالش‌های فراوانی در کنترل آرایش‌بندی این سیستم‌ها وجود دارد. از جمله‌ی این چالش‌ها می‌توان به زمان لازم برای رسیدن به هدف کنترلی، که در برخی از سیستم‌های کاربردی بایستی در زمان متناهی<sup>۲</sup> انجام شود، اشاره نمود. همچنین همگرایی عامل‌ها به خروجی مطلوب در زمان متناهی، منجر به افزایش هماهنگی در بین عامل‌ها شده و حساسیت سیستم را نیز در برابر اغتشاش کاهش می‌دهد [۶، ۷].

آرایش‌بندی دوبخشی، نوع خاصی از آرایش‌بندی است که در آن عامل‌ها با حفظ ارتباط و پیوستگی، به دو دسته تقسیم شده و هر دسته در نقاطی قرینه نسبت به مرکز مختصات، آرایش از پیش تعیین شده را به خود می‌گیرند. این نوع آرایش‌بندی در مواردی همچون سیستم رای‌گیری دو حزبی، سیستم‌های بیولوژیکی، گشت‌زنی و تقسیم پهبادا در دو گروه و همچنین عدم برخورد با مانع در حرکت عامل‌ها مطرح می‌شود [۸-۱۱].

در بیشتر مراجع جهت تحلیل آرایش‌بندی دوبخشی از نمایش گراف علامت‌دار برای بیان گراف ارتباطی بین عامل‌ها استفاده می‌شود که شرط لازم برای حصول آرایش‌بندی دوبخشی، متعادل بودن ساختار گراف علامت‌دار است [۱۲، ۱۳]. با این شرط آرایش‌بندی دوبخشی زمان‌متناهی برای عامل‌های خطی در [۹] بیان شده است. آرایش‌بندی دوبخشی برای دسته‌ای از عامل‌های چند ورودی چند خروجی غیرخطی و با دینامیک نامعین نیز بررسی شده است [۱۲]. همچنین در [۱۳]، آرایش‌بندی متغیر با زمان دوبخشی برای عامل‌های ناهمگن با دینامیک نامعین غیرخطی بررسی شده است. در [۱۳] از یک کنترل‌کننده تطبیقی تناسبی انترگرال‌گیر استفاده شده تا مقاوم بودن سیستم نسبت به اغتشاش خارجی افزایش یابد. [۱۴] با تخمین دینامیک عامل‌ها، آرایش‌بندی دوبخشی سیستم‌های خطی را برای شرایط در دسترس نبودن حالت‌های سیستم توسعه داده است. در کنترل‌کننده معرفی شده [۱۴]، به علت شیوه تخمین زدن دینامیک رهبر،

از حالت توزیع‌شده خارج می‌شود. در [۱۵] نیز همگرایی مجانبی آرایش‌بندی دوبخشی برای عامل‌های غیرخطی توأم با اغتشاش انجام شده است.

در روش پیشنهاد شده این مطالعه، برخلاف [۸، ۹، ۱۴] که آرایش‌بندی دوبخشی برای سیستم‌های خطی انجام شده است، عامل‌های ناهمگن با دینامیک غیرخطی دارای نامعینی پارامتری در نظر گرفته شده است. همچنین در [۱۲، ۱۳، ۱۵] همگرایی آرایش‌بندی در زمان نامتناهی صورت می‌گیرد که ممکن است در برخی از سیستم‌های عملی کاربردی نباشد. بنابراین، از دستاوردها و یا نوآوری این پژوهش می‌توان به در نظر گرفتن همزمان عامل‌های ناهمگن با دینامیک غیرخطی، آرایش‌بندی دوبخشی، همگرایی زمان‌متناهی سیستم چندعاملی و در نتیجه افزایش هماهنگی در بین عامل‌ها و همچنین جبران اثر اغتشاش در ورودی و نامعینی پارامترهای مدل سیستم اشاره کرد.

تقسیم‌بندی محتوی مابقی مقاله به این صورت است: در بخش دوم مقدمه‌ای از نظریه‌ی گراف، لم‌های مورد استفاده، فرضیات و صورت مسئله‌ی آرایش‌بندی دوبخشی گفته شده است. نتایج اصلی در بخش سوم بیان شده‌اند که شامل معرفی کنترل‌کننده، مشاهده‌گر و اثبات زمان‌متناهی بودن آرایش دوبخشی می‌شود. در بخش چهارم با استفاده از شبیه‌سازی، صحت نتایج تئوری بررسی شده و در انتها هم به جمع‌بندی و ارائه پیشنهادات برای ادامه کار پرداخته شده است.

## ۲- مفاهیم اولیه و مسئله تحت بررسی

### ۲-۱- نظریه گراف

گراف جهت‌دار و علامت‌دار  $G = (\mathcal{V}, \xi, A)$ ، از سه‌تایی مجموعه رئوس  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_N\}$ ، مجموعه یال‌های  $\xi$  و ماتریس وزن‌های گراف  $A$  تشکیل شده است. در گراف  $G$ ،  $\xi$  یعنی  $v_i v_j \in \xi$ ، یالی از راس  $j$  خارج و به راس  $i$  وارد شده است و بیانگر ارسال اطلاعات از راس  $j$  به راس  $i$  می‌باشد. در گراف مذکور، هر یک از یال‌ها دارای وزن  $a_{ij}$  می‌باشند که برای بیان ارتباط همکاری بین رئوس گراف، یال با وزن مثبت و برای بیان ارتباط رقابتی بین آن‌ها، یال با وزن منفی بین عامل‌ها متصل است. همچنین  $a_{ii} = 0$  می‌باشد. ماتریس لاپلاسیان گراف علامت‌دار  $G$ ، با  $L = [l_{ij}]$  نمایش داده می‌شود که در آن

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_{ij}| & \forall i = j \\ -a_{ij} & \forall i \neq j \end{cases} \quad (1)$$

و  $N$  تعداد رئوس گراف می‌باشد.

<sup>۲</sup> Finite time

<sup>۱</sup> Multi-Agent Systems

$$T(x_0) \leq \frac{\ln \left( 1 + \frac{k}{c} V(x_0)^{1-\alpha} \right)}{k(1-\alpha)}, x_0 \in Y, k \neq 0 \quad (8)$$

پیروی می‌کند. به علاوه اگر  $D = \mathbb{R}^n$  و  $V$  بیکران شعاعی باشد آنگاه مبدأ پایدار زمان‌متاهی سراسری خواهد بود [۱۸، ۶].

### ۳-۲- مسئله تحت بررسی

سیستم چندعاملی با  $N+1$  عامل، شامل یک رهبر و  $N$  پیرو را در نظر بگیرید. رهبر گروه را عامل صفر در نظر می‌گیریم که دینامیک آن به صورت

$$\dot{x}_0 = \begin{bmatrix} \dot{p}_0 \\ \dot{v}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0(t) + g_0(x_0)u_0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

و دینامیک بقیه عامل‌ها به صورت

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} \dot{p}_i \\ \dot{v}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i(x_i) + f_{d,i}(x_i, t) + g_i(x_i)u_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N \quad (10)$$

است.  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  بردار حالت رهبر گروه که مشکل از موقعیت  $p_0$  و سرعت  $v_0$ ،  $u_0$  سیگنال ورودی دینامیک رهبر،  $x_i \in \mathbb{R}^2$  نیز بردار حالت عامل‌های پیرو مشکل از موقعیت  $p_i$  و سرعت  $v_i$  و  $u_i$  سیگنال ورودی عامل‌های پیرو می‌باشد. در (۹)،  $f_0(t)$  نامعلوم برای عامل‌ها و مشتق آن در رابطه  $|f_0(t)| \leq f_{max}$  با فرض معلوم بودن  $f_{max}$  صدق می‌کند. همچنین  $g_0(x_0)u_0$  نیز کران‌دار به صورت  $|g_0(x_0)u_0| \leq g_{max}u_{0,max}$  و کران آن معلوم می‌باشد. در (۱۰)،  $f_i(x_i)$  و  $g_i(x_i)$  توابع پیوسته و غیرخطی معلوم در حالت نامی و  $f_{d,i}(x_i, t)$  سیگنال اغتشاش (و یا نامعینی دینامیک) عامل‌ها می‌باشد که کران‌دار به صورت

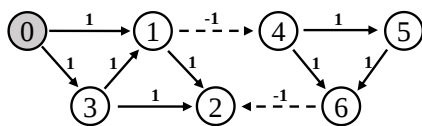
$$|f_{d,i}(x_i, t)| \leq f_{d,max} \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (11)$$

با کران مشخص  $f_{d,max}$  می‌باشد.

**تعریف ۲-** برای سیستم چند عاملی با معادلات (۹) و (۱۰)، گوئیم آرایش‌بندی دویخشی به دست آمده است اگر

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i - h_i - d_i x_0 = 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (12)$$

که در آن  $h_i = \begin{bmatrix} h_i \\ 0 \end{bmatrix}$  فاصله و سرعت از پیش تعیین شده‌ی آرایش‌بندی و  $d_i$  عناصر قطری ماتریس  $D$  در (۳) است [۸].



شکل ۱- گراف جهت‌دار و علامت‌دار با ساختار متعادل

**تعریف ۱-** گراف  $\mathcal{G}$  دارای ساختاری متعادل است هرگاه بتوان رئوس گراف را به دو دسته‌ی  $\mathcal{V}_1$  و  $\mathcal{V}_2$  تقسیم کرد که  $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$  و  $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$  به نحوی که

$$\begin{cases} a_{ij} \geq 0 & \forall v_i, v_j \in \mathcal{V}_q (q \in \{1, 2\}) \\ a_{ij} \leq 0 & \forall v_i \in \mathcal{V}_q, v_j \in \mathcal{V}_r, q \neq r (q, r \in \{1, 2\}) \end{cases} \quad (2)$$

باشد [۱۶].

با تعریف ماتریس قطری  $D$  به صورت

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_N) \quad (3)$$

که در آن  $d_i = 1$  اگر  $v_i \in \mathcal{V}_1$  و  $d_i = -1$  اگر  $v_i \in \mathcal{V}_2$  می‌توان نشان داد که اگر گراف  $\mathcal{G}$  دارای ساختاری متعادل باشد، آنگاه در ماتریس  $DAD$  تمامی عناصر نامنفی و در ماتریس  $DLD$  عناصر قطری نامنفی و عناصر غیرقطری نامثبت هستند [۱۶].

**تذکره ۱:** در این پژوهش، برای اثبات همگرایی زمان‌متاهی آرایش‌بندی، عامل‌های پیرو را با توجه به فاصله‌ی گرافی آن‌ها از رهبر گروه در گراف ارتباطی، به سطوح ۱ تا  $m$  تقسیم می‌کنیم. برای مثال در شکل ۱ رهبر گروه راس شماره صفر، عامل‌های ۱ و ۳ سطح ۱، عامل‌های ۲ و ۴ سطح ۲ و عامل‌های ۵ و ۶ سطح ۳ هستند.

### ۲-۲- پایداری زمان‌متاهی

سیستم دینامیکی

$$\dot{x} = f(x(t)) \quad (4)$$

را در نظر بگیرید که در آن  $f(0) = 0$ . در پایداری زمان‌متاهی، زمان‌نشست  $T(x_0)$  برای سیستم تعریف می‌شود که به شرایط اولیه سیستم وابسته است. پایداری زمان‌متاهی یعنی حالت‌های سیستم در بازه‌ی زمانی  $[t_0, T(x_0))$  پایدار باشند و در زمان متاهی  $T(x_0)$  به نقطه تعادل سیستم میل کنند [۱۷]. به عبارت دیگر؛

$$\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t) = 0 \quad (5)$$

**لم ۱-** گیریم تابع پیوسته و مثبت معین  $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  وجود داشته باشد که در شرط

$$\dot{V}(x) + c(V(x))^\alpha + kV(x) \leq 0, x \in Y \setminus \{0\} \quad (6)$$

به ازای اعداد  $c > 0$  و  $k \geq 0$  و  $\alpha \in (0, 1)$  و همچنین یک همسایگی باز  $Y \in \mathcal{D}$  حول مبدأ، صدق کند. در این صورت نقطه تعادل سیستم پایدار زمان‌متاهی است و زمان نشست سیستم از روابط

$$T(x_0) \leq \frac{1}{c(1-\alpha)} V(x_0)^{1-\alpha}, x_0 \in Y, k = 0 \quad (7)$$

**فرض ۲-** رهبر با عامل‌ها فقط به صورت همکاری ارتباط دارد و نه رقابتی. به بیان دیگر  $a_{i0} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$

**فرض ۳-** فواصل از پیش تعیین شده برای آرایش‌بندی، فواصل ثابتی هستند و با زمان تغییر نمی‌کنند. به عبارت دیگر  $\dot{h}_i = 0$

### ۳- طراحی کنترل‌کننده و مشاهده‌گر

با توجه به تعریف ۲، خطای آرایش‌بندی دوبخشی عامل‌ها را به صورت

$$r_i = x_i - h_i - d_i x_0 \quad (۱۷)$$

تعریف می‌کنیم. به دلیل اینکه همه‌ی عامل‌ها با رهبر گروه در ارتباط نیستند، مسئله نیازمند رابطه‌ای می‌باشد که هم بیانگر خطای آرایش‌بندی باشد و هم رویکرد توزیع‌شده در مسئله حفظ شود. بنابراین با استفاده از (۱۷) خطای توزیع‌شده‌ی آرایش‌بندی دوبخشی را می‌توان به صورت

$$\varepsilon_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,i} \\ \varepsilon_{2,i} \end{bmatrix} = d_i \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \left( (r_i) - \text{sgn}(a_{ij})(r_j) \right) + d_i a_{i0}(r_i) \quad (۱۸)$$

تعریف نمود [۸]. با توجه به متعادل بودن ساختار گراف و در صورت غیر صفر بودن  $a_{ij}$

$$d_j = \text{sgn}(a_{ij})d_i. \quad (۱۹)$$

پس شکل برداری (۱۸) برای تمام عامل‌ها را می‌توان به صورت

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix} = (D\mathcal{L}_{22} \otimes I_2)r \quad (۲۰)$$

نوشت که در آن  $r = [r_1 \quad \dots \quad r_N]^T$  است. به دلیل وجود درخت فراگیر در گراف ارتباطی،  $\mathcal{L}_{22}$  غیرتکین بوده [۸] و در صورت میل  $\varepsilon$  به صفر،  $r$  نیز به صفر میل کرده و خطای آرایش‌بندی دوبخشی صفر می‌شود.

با توجه به تحلیل انجام شده، در ادامه به معرفی کنترل‌کننده و مشاهده‌گر  $f_0$  می‌پردازیم. با استفاده از سطح لغزش

$$S_i = \varepsilon_{1,i} + \frac{1}{\beta} \varepsilon_{2,i}^{p/q} \quad (۲۱)$$

که در آن  $\beta > 0$  و  $p$  و  $q$  اعداد فرد و مثبتی با شرط  $1 < p/q < 1.5$  هستند؛ نشان خواهیم داد که با فرض صفر بودن  $f_{d,i}(x_i, t)$  کنترل‌کننده مود لغزشی برای حصول آرایش‌بندی دوبخشی به صورت

در این پژوهش می‌خواهیم عامل‌های ۱ تا  $N$  را به نحوی کنترل کنیم که در زمان‌متناهی آرایش‌بندی دوبخشی را به خود بگیرند. در شکل ۲ موقعیت اولیه و پس از آرایش‌بندی دوبخشی دسته‌ای از عامل‌ها نمایش داده شده که در آن سه عامل که رابطه آن‌ها با رهبر به صورت همکاری است، رهبر گروه را و مابقی عامل‌ها قرینه رهبر گروه را نسبت به مبدا مختصات، با آرایشی از پیش تعیین شده دنبال می‌کنند.

**فرض ۱-** گراف مورد استفاده یک گراف جهت‌دار و علامت‌دار با ساختاری متعادل است و همچنین شامل یک درخت فراگیر ریشه‌دار نیز هست که رهبر گروه، ریشه درخت می‌باشد.

به دلیل ساختار گراف ارتباطی، ماتریس لاپلاسن گراف ارتباطی به صورت

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_N^T \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{bmatrix} \quad (۱۳)$$

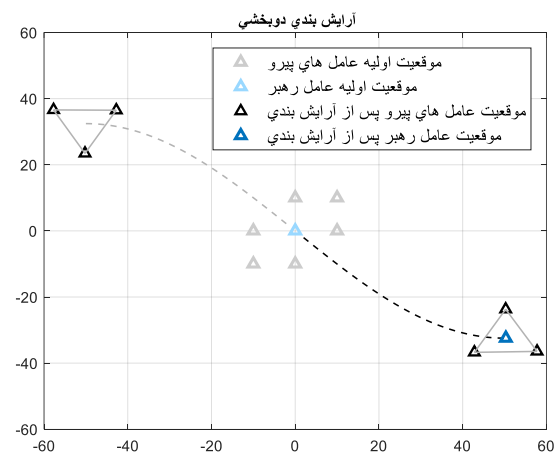
نوشته می‌شود که به دلیل عدم وجود ارتباط از عامل‌های پیرو به رهبر، سطر اول ماتریس لاپلاسن صفر است. همچنین زیر ماتریس  $\mathcal{L}_{22} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  بیانگر ارتباط توام عامل‌های پیرو با یکدیگر و بردار  $\mathcal{L}_{21} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  بیانگر ارتباط رهبر گروه با هر یک از عامل‌های پیرو می‌باشد. با توجه به متعادل بودن ساختار گراف ارتباطی، ماتریس قطری و مثبت معین  $W$  یافت می‌شود آن چنان که [۸]

$$w\hat{\mathcal{L}} + \hat{\mathcal{L}}^T w \geq 0, \hat{\mathcal{L}} = D\mathcal{L}_{22}D. \quad (۱۴)$$

**لم ۲-** بردار  $x \in \mathbb{R}^n$  را در نظر بگیرید. نامساوی‌های نرمی زیر برای آن صادق هستند [۱۹]

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \quad (۱۵)$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty. \quad (۱۶)$$



شکل ۲- آرایش‌بندی دوبخشی سیستم چندعاملی

$$\tilde{f}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{0,1} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{0,N} \end{bmatrix} = \hat{L} \begin{bmatrix} f_0(t) - \hat{f}_{0,1} \\ \vdots \\ f_0(t) - \hat{f}_{0,N} \end{bmatrix} \quad (30)$$

تعریف می‌شود. با مشتق‌گیری از  $V_1$  و جایگذاری (۲۹)، پس از ساده‌سازی خواهیم داشت

$$\dot{V}_1 \leq -a_4 \lambda_1 \|\tilde{f}_0\|^2. \quad (31)$$

بنابر این مطابق با قضیه ۴-۱۰ در [۲۰]،  $\tilde{f}_0$  پایدار نمایی سراسری است. به عبارت دیگر؛ با استفاده از لم ۲

$$\|\tilde{f}_0(t)\|_\infty \leq \|\tilde{f}_0(t_0)\|_\infty e^{-\left(\frac{\lambda_1 a_4}{2 w_{\max}}\right)(t-t_0)} \leq \left(\frac{w_{\max}}{w_{\min}}\right)^{\frac{1}{2}} \|\tilde{f}_0(t_0)\|_\infty e^{-\left(\frac{\lambda_1 a_4}{2 w_{\max}}\right)(t-t_0)}. \quad (32)$$

اکنون با استفاده از تابع لیاپانوف  $\tilde{f}_{0,i} = V_{1,i}$  و با توجه به

$$2a_{i0}\tilde{f}_{0,i}\dot{\tilde{f}}_0(t) - 2\dot{f}_{\max}\tilde{f}_{0,i}\left(a_{i0}\operatorname{sgn}(\tilde{f}_{0,i}) + \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \left(\operatorname{sgn}(\tilde{f}_{0,i}) - \operatorname{sgn}(\tilde{f}_{0,j})\right)\right) \leq 0 \quad (33)$$

خواهیم داشت

$$\dot{V}_{1,i} \leq -2a_{3,2}\tilde{f}_{0,i}\left(a_{i0}\operatorname{sgn}(\tilde{f}_{0,i}) + \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \left(\operatorname{sign}(\tilde{f}_{0,i}) - \operatorname{sign}(\tilde{f}_{0,j})\right)\right) - 2a_4\tilde{f}_{0,i}\left(a_{i0}\tilde{f}_{0,i} + \sum_{j=1}^N |a_{ij}| (\tilde{f}_{0,i} - \tilde{f}_{0,j})\right). \quad (34)$$

برای تکمیل اثبات، ادامه روند اثبات پایداری را به سه مرحله تقسیم می‌کنیم.

مرحله اول: پایداری زمان‌متاهی عامل‌های سطح ۱. به دلیل

$$-2a_{3,2}\tilde{f}_{0,i} \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \left(\operatorname{sgn}(\tilde{f}_{0,i}) - \operatorname{sgn}(\tilde{f}_{0,j})\right) \leq 0 \quad (35)$$

و با توجه به (۳۲)، با ساده‌سازی (۳۴) خواهیم داشت

$$\dot{V}_{1,i} \leq -2a_{3,2}a_{i0}V_{2,i}^{0.5} - 2a_4\left(a_{i0} + \sum_{j=1}^N |a_{ij}|\right)V_{2,i} + \left(2a_4 \sum_{j=1}^N |a_{ij}|\right)\|\tilde{f}_0(t)\|_\infty V_{2,i}^{0.5} \quad (36)$$

لذا به ازای زمان‌های

$$t > \frac{\lambda_1 a_4}{2 w_{\max}} \ln \left( \frac{(2a_4 \sum_{j=1}^N |a_{ij}|) \left(\frac{w_{\max}}{w_{\min}}\right)^{\frac{1}{2}} \|\tilde{f}_0(t_0)\|_\infty}{2a_{3,2}a_{i0}} \right) + t_0 \quad (37)$$

شرایط لم ۱ برآورده شده و در نتیجه برای عامل‌های سطح ۱

$$u_i = \frac{1}{g_i(x_i)} \left( -f_i(x_i) + d_i \left( -a_1 \operatorname{sgn}(S_i) - a_2 \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} S_i + \hat{f}_{0,i} \right) \right), \quad i = 1, \dots, N \quad (22)$$

خواهد بود که در آن

$$a_1 = g_{\max} u_{0,\max} + a_{1,2}, \quad a_2 = \frac{1}{\lambda_1} \frac{p}{q} \frac{1}{\beta} + a_{2,2} \quad (23)$$

و  $\lambda_1$  کوچکترین مقدار ویژه ماتریس  $\hat{L}^T W + W \hat{L}$  می‌باشد.  $a_{1,2}$  و  $a_{2,2}$  نیز مقادیر مثبتی هستند که باید به نحوی انتخاب شوند تا نامساوی‌های

$$a_{1,2} > \max \left( 0.5 \frac{q}{p} \frac{\beta}{a_{i0,\min}} a_6^{2-\frac{p}{q}}, 0.5 \frac{1}{a_{i0,\min}} a_2 a_{ij,\max} \sqrt{N} a_7, \frac{1}{a_{i0,\min}} a_2 a_{ij,\max} \sqrt{N} a_7 \right) \quad (24)$$

$$a_1 > \max \left( \frac{q}{p} \frac{\beta}{a_{ij,\min}} a_6^{2-\frac{p}{q}} + \frac{1}{a_{ij,\min}} a_2 a_{ij,\max}, \frac{1}{a_{ij,\min}} a_2 a_{ij,\max} a_7 \sqrt{N} \right) \quad (25)$$

برقرار باشد. در (۲۴) و (۲۵)،  $a_{i0,\min}$ ،  $a_{ij,\max}$ ،  $a_{ij,\min}$  به ترتیب کوچک‌ترین اندازه وزن یال‌های متصل به رهبر گروه، بزرگ‌ترین اندازه و کوچک‌ترین اندازه وزن یال‌ها در گراف ارتباطی هستند. همچنین

$$a_6 = \left( N^{-\frac{4-2p}{p+q} + \frac{4-2p}{4q-2p}} \frac{4w_{\max}^2}{\lambda_1 \frac{p}{q} \frac{1}{\beta} a_{2,2} w_{\min}} \right)^{\frac{q}{3p-3q}} \quad (26)$$

$$a_7 = \frac{2w_{\max} a_6^{2-\frac{p}{q}} \sqrt{N}}{\lambda_1 \frac{p}{q} \frac{1}{\beta} a_{2,2}}. \quad (27)$$

مشاهده‌گر مورد استفاده برای تخمین دینامیک رهبر گروه  $f_0(t)$  توسط عامل  $i$ -ام به صورت

$$\dot{\tilde{f}}_{0,i} = a_3 \operatorname{sgn}(\tilde{f}_{0,i}) + a_4 \tilde{f}_{0,i} \quad (28)$$

$$a_3 = \dot{f}_{\max} + a_{3,2}, \quad a_4 = \frac{1}{\lambda_1} w_{\max}^2 + a_{4,2} \quad (29)$$

می‌باشد که در آن  $a_{3,2}$ ،  $a_{4,2} > 0$ . در ادامه ثابت می‌شود که همگرایی مشاهده‌گر زمان‌متاهی است.

**قضیه ۱-** مشاهده‌گر (۲۸) در زمان‌متاهی به  $f_0(t)$  در (۹) میل می‌کند.

**اثبات-** تابع لیاپانوف  $V_1 = \tilde{f}_0^T W \tilde{f}_0$  را در نظر بگیرید که  $W$  به گونه‌ای انتخاب می‌شود که (۱۴) برقرار باشد و  $\tilde{f}_0$  نیز بردار خطای توزیع‌شده مشاهده‌گر می‌باشد و به صورت

$$\bar{\mathbf{E}}_1 = [\mathbf{E}_{1,1}, \dots, \mathbf{E}_{1,N}]^T, \bar{\mathbf{E}}_2 = [\mathbf{E}_{2,1}, \dots, \mathbf{E}_{2,N}]^T \quad (44)$$

تعریف می‌شود. با مشتق‌گیری از (۴۲) و جایگذاری مقادیر کنترل‌کننده و مشاهده‌گر و همچنین با استفاده از نامساوی یانگ [۲۰] و با توجه به

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_1 &= \mathbf{S} - \frac{1}{\beta} \bar{\mathbf{E}}_2^{\frac{p}{q}} \\ \dot{V}_2 &\leq - \left\| \sqrt{\lambda_1 \frac{p-1}{q\beta}} a_{2,2} \text{diag} \left( \bar{\mathbf{E}}_2^{\frac{p-q}{q}} \right) \mathbf{S} - \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{\sqrt{\lambda_1 \frac{p-1}{q\beta}} a_{2,2}} w \bar{\mathbf{E}}_2^{2-\frac{p}{q}} \right\|^2 + \\ &\quad + \frac{4w_{\max}^2}{\lambda_1 \frac{p-1}{q\beta} a_{2,2}} \|\bar{\mathbf{E}}_2\|_{\frac{4-2p}{q}}^2 - \frac{w_{\min}}{\beta} \|\bar{\mathbf{E}}_2\|_{\frac{p}{q}}^{\frac{p+1}{q}}. \end{aligned} \quad (45)$$

لذا اگر بخواهد

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{E}}_2\|_{\frac{p}{q}} &> a_5^{\frac{q}{3p-3q}}, \\ a_5 &= N^{\frac{4-2p}{p+q} + \frac{4-2p}{4q-2p}} \frac{4w_{\max}^2}{\lambda_1 \frac{p-1}{q\beta} a_{2,2}} \frac{\beta}{w_{\min}} \end{aligned} \quad (46)$$

برقرار باشد، با توجه به نامساوی (۴۵) تابع  $V_2$  کاهش می‌یابد و لذا  $\bar{\mathbf{E}}_2$  کراندار و محدود به کران

$$\|\bar{\mathbf{E}}_2\|_{\infty} = \|\bar{\mathbf{E}}_2\|_{\frac{p}{q}} \leq a_5^{\frac{q}{3p-3q}} \quad (47)$$

می‌باشد. ■

**لم ۴- سیستم چندعاملی (۹) و (۱۰) را با فرض‌های ۱ تا ۳ و فرض صفر بودن  $f_{d,i}(\mathbf{x}_i, t)$  در نظر بگیرید. با اعمال کنترل‌کننده (۲۲) و مشاهده‌گر  $f_0$  (۲۸) به سیستم، سیگنال  $\text{diag} \left( \bar{\mathbf{E}}_2^{\frac{p-1}{q}} \right) \mathbf{S}$  کراندار است.**

**اثبات- با مشتق‌گیری از تابع**

$$V_3(\mathbf{S}, \tilde{\mathbf{f}}_0) = \mathbf{S}^T w \mathbf{S} + \tilde{\mathbf{f}}_0^T w \tilde{\mathbf{f}}_0 \quad (48)$$

و ساده‌سازی خواهیم داشت

$$\dot{V}_3 \leq 2\mathbf{S}^T w \bar{\mathbf{E}}_2 - \lambda_1 \frac{p-1}{q\beta} a_{2,2} \left\| \text{diag} \left( \bar{\mathbf{E}}_2^{\frac{p-q}{q}} \right) \mathbf{S} \right\|^2 \quad (49)$$

پس از ورود  $\bar{\mathbf{E}}_2$  به کران ذکر شده در لم ۳ و استفاده از لم ۲ داریم

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &\leq 2w_{\max} a_6^{2-\frac{p}{q}} \sqrt{N} \left\| \text{diag} \left( \bar{\mathbf{E}}_2^{\frac{p-q}{q}} \right) \mathbf{S} \right\| \\ &\quad - \lambda_1 \frac{p-1}{q\beta} a_{2,2} \left\| \text{diag} \left( \bar{\mathbf{E}}_2^{\frac{p-q}{q}} \right) \mathbf{S} \right\|^2. \end{aligned} \quad (50)$$

که در آن  $a_6 = a_5^{\frac{q}{3p-3q}}$  با توجه به (۵۰)، اگر بخواهد رابطه

$$\exists 0 \leq T_1 < \infty: \lim_{t \rightarrow T_1} \tilde{f}_{0,i} = 0 \quad (38)$$

مرحله‌ی دوم: پایداری زمان‌متناهی عامل‌های سطح ۲. در این حالت (۳۴) برای عامل‌های سطح ۲ و در زمان‌های بزرگتر از  $T_1$  به صورت

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1,i} &\leq -2a_{3,2} \left( \sum_{v_j \in level1} |a_{ij}| \right) V_{2,i}^{0.5} \\ &\quad - 2a_4 \left( \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \right) V_{2,i} \\ &\quad + \left( 2a_4 \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \right) \|\tilde{\mathbf{f}}_0(t)\|_{\infty} V_{2,i}^{0.5} \end{aligned} \quad (39)$$

ساده‌سازی می‌شود که در (۳۹) منظور از  $v_j \in level1$ ، عامل‌های سطح ۱ است. در این مرحله نیز مانند مرحله‌ی قبل، عامل‌های سطح ۲ در شرایط پایداری زمان‌متناهی لم ۱ صدق کرده و لذا

$$\exists 0 \leq T_2 < \infty: \lim_{t \rightarrow T_1+T_2} \tilde{f}_{0,i,level2} = 0 \quad (40)$$

مرحله‌ی سوم: پایداری زمان‌متناهی عامل‌های سطح ۳ و بالاتر. در این مرحله نیز مانند مراحل قبل، پس از پایداری عامل‌های سطح ۲، شرایط برای پایداری زمان‌متناهی عامل‌های سطح  $(1+i)$  فراهم می‌شود. به این ترتیب، برای همه عامل‌های گراف با  $m$  سطح، مشاهده‌گر  $f_0$  پایدار زمان‌متناهی سراسری با زمان‌نشست

$$T_{m0} = T_1 + T_2 + \dots + T_m \quad (41)$$

است. ■

در ادامه کران‌هایی برای حالت‌های سیستم و خطای آرایش‌بندی عامل‌ها به دست می‌آوریم که در اثبات پایداری زمان‌متناهی خطای آرایش‌بندی دوبخشی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

**لم ۳- سیستم چندعاملی (۹) و (۱۰) را با فرض‌های ۱ تا ۳ و فرض صفر بودن  $f_{d,i}(\mathbf{x}_i, t)$  در نظر بگیرید. با اعمال کنترل‌کننده (۲۲) و مشاهده‌گر  $f_0$  (۲۸) به سیستم، سیگنال  $\bar{\mathbf{E}}_2$  کراندار است.**

**اثبات- تابع لیاپانوف**

$$V_2(\mathbf{S}, \tilde{\mathbf{f}}_0, \bar{\mathbf{E}}_1) = \mathbf{S}^T w \mathbf{S} + \tilde{\mathbf{f}}_0^T w \tilde{\mathbf{f}}_0 + \bar{\mathbf{E}}_1^T w \bar{\mathbf{E}}_1 \quad (42)$$

را در نظر بگیرید که  $\mathbf{S}$  بردار سطوح لغزش عامل‌ها به صورت

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{E}}_1 + \frac{1}{\beta} \bar{\mathbf{E}}_2^{\frac{p}{q}} \quad (43)$$

و  $\bar{\mathbf{E}}_1$  و  $\bar{\mathbf{E}}_2$  به ترتیب خطای توزیع‌شده‌ی آرایش‌بندی موقعیت و سرعت عامل‌ها است و به صورت

$$\dot{V}_{2,i} \leq \left( 2a_6^{2-\frac{p}{q}} + 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta}a_2 a_{ij,max}\sqrt{N} a_7 - 4\frac{p}{q}\frac{1}{\beta}a_{i0} a_{1,2} \right) \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} |S_i| \quad (55)$$

بازنویسی می‌کنیم. اکنون اگر  $a_{1,2}$  را آنچنان انتخاب کنیم که شرط (۲۴) برقرار شود، خواهیم داشت

$$\dot{V}_{2,i_{level1}} \leq -\rho_1(\varepsilon_{2,i})|S_i| = -\rho_1(\varepsilon_{2,i})V_{2,i}^{0.5} \quad (56)$$

که در (۵۶)

$$\rho_1(\varepsilon_{2,i}) = \left( 2a_6^{2-\frac{p}{q}} + 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta}a_2 a_{ij,max}\sqrt{N} a_7 - 4\frac{p}{q}\frac{1}{\beta}a_{i0} a_{1,2} \right) \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} \geq 0 \quad (57)$$

می‌باشد. با به کارگیری رویه‌ای مانند [۲۱] و با برقراری شرط (۲۴) پایداری زمان‌متناهی در (۵۶) برقرار می‌شود و در نتیجه عامل‌های سطح ۱ در زمان محدود  $0 \leq T_{m_1} < \infty$  به سطح لغزش میل می‌کنند.

مرحله‌ی دوم: پایداری زمان‌متناهی عامل‌های سطح ۲. به دلیل عدم ارتباط عامل‌های سطح ۲ با رهبر گروه، با توجه به اینکه  $a_{i0} = 0$  در نتیجه (۵۴) را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2,i} &\leq 2a_6^{2-\frac{p}{q}} \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} |S_i| \\ &+ 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} S_i \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} \sum_{v_j \in level1} |a_{ij}| (-a_1 \operatorname{sgn}(S_i) + a_1 \operatorname{sgn}(S_j)) \\ &+ 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} S_i \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} \sum_{v_j \notin level1} |a_{ij}| (-a_1 \operatorname{sgn}(S_i) + a_1 \operatorname{sgn}(S_j)) \\ &+ 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} a_2 a_{ij,max} \sqrt{N} a_7 |S_i| \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} \end{aligned} \quad (58)$$

بازنویسی نمود. پس از همگرایی عامل‌های سطح ۱ در زمان متناهی  $T_{m_1}$ ، با برقراری شرط (۲۵)، (۵۸) را می‌توان به صورت

$$\dot{V}_{2,i_{level2}} \leq -\rho_2(\varepsilon_{2,i})|S_i| = -\rho_2(\varepsilon_{2,i})V_{2,i}^{0.5} \quad (59)$$

ساده‌سازی نمود که

$$\rho_2(\varepsilon_{2,i}) = \left( 2a_6^{2-\frac{p}{q}} - 2a_1 \frac{p}{q} \frac{1}{\beta} |a_{ij}|_{\min} + 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} a_2 a_{ij,max} \sqrt{N} a_7 \right) \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} \quad (60)$$

می‌باشد. در این مرحله نیز به کمک روشی که در مرحله‌ی قبل انجام شد، پایداری زمان‌متناهی عامل‌های سطح ۲ نیز برقرار شده و این عامل‌ها در زمان محدود  $0 \leq T_{m_2} < \infty$  به سطح لغزش میل می‌کنند.

مرحله‌ی سوم: پایداری زمان‌متناهی عامل‌های سطح ۳ و بالاتر. بررسی پایداری زمان‌متناهی این عامل‌ها نیز فرایندی مشابه عامل‌های سطح ۲ دارد.

$$\left\| \operatorname{diag} \left( \bar{\varepsilon}_2^{\frac{p-q}{q}} \right) S \right\| > a_7 \quad (51)$$

برقرار باشد که در آن  $a_7 = \frac{2w_{max}a_6^{2-\frac{p}{q}}\sqrt{N}}{\lambda_1 \frac{p}{q} \beta a_{2,2}}$  است، تابع  $V_3$  کاهش می‌یابد لذا  $\operatorname{diag} \left( \bar{\varepsilon}_2^{\frac{p-q}{q}} \right) S$  کران‌دار و محدود به کران  $a_7$  می‌باشد. ■

**قضیه ۲-** سیستم چندعاملی (۹) و (۱۰)، با فرض‌های ۱ تا ۳ و فرض صفر بودن  $f_{d,i}(x_i, t)$ ، با اعمال کنترل‌کننده (۲۲) و مشاهده‌گر  $f_0$  (۲۸)، به طوری که نامساوی‌های (۲۴) و (۲۵) برقرار باشند، تمامی عامل‌ها بعد از ورود به کران به دست آمده در لم‌های ۳ و ۴، در زمان متناهی به سطح لغزش  $S_i$  میل می‌کنند. پس از آن روی سطح لغزیده و در زمان متناهی خطای آرایش‌بندی دویخشی صفر می‌شود.

**اثبات-** با مشتق‌گیری از تابع  $V_{2,i} = S_i^2$  پس از زمان  $T_{m_0}$  (۴۱) و همگرایی مشاهده‌گر  $f_0$ ، با توجه به اینکه

$$\begin{aligned} 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} S_i \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} \sum_{j=1}^N |a_{ij}| a_2 \varepsilon_{2,j}^{\frac{p-q}{q}} S_j \\ \leq 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} a_2 a_{ij,max} |S_i| \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} \left\| \operatorname{diag} \left( \bar{\varepsilon}_2^{\frac{p-q}{q}} \right) S \right\|_1 \end{aligned} \quad (52)$$

و ساده‌سازی خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2,i} &\leq 2S_i \varepsilon_{2,i} + 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} S_i \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} \sum_{j=1}^N |a_{ij}| (-a_1 \operatorname{sgn}(S_i) + a_1 \operatorname{sgn}(S_j)) + \\ &2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} a_2 a_{ij,max} |S_i| \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} \left\| \operatorname{diag} \left( \bar{\varepsilon}_2^{\frac{p-q}{q}} \right) S \right\|_1 + \\ &2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} (-2a_{i0} a_{1,2} S_i \operatorname{sgn}(S_i)). \end{aligned} \quad (53)$$

پس از برقراری  $\|\bar{\varepsilon}_2\|_\infty \leq a_6$  و  $\left\| \operatorname{diag} \left( \bar{\varepsilon}_2^{\frac{p-q}{q}} \right) S \right\| \leq a_7$  و همچنین با استفاده لم ۲، (۵۳) را به صورت

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2,i} &\leq 2a_6^{2-\frac{p}{q}} \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} |S_i| + 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} S_i \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} \sum_{j=1}^N |a_{ij}| (-a_1 \operatorname{sgn}(S_i) + a_1 \operatorname{sgn}(S_j)) + 2\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} a_2 a_{ij,max} \sqrt{N} a_7 \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} |S_i| - \\ &4\frac{p}{q}\frac{1}{\beta} a_{i0} a_{1,2} \varepsilon_{2,i}^{\frac{p-q}{q}} |S_i| \end{aligned} \quad (54)$$

بازنویسی می‌کنیم و برای ادامه، روند اثبات را به سه مرحله تقسیم خواهیم کرد.

مرحله‌ی اول: پایداری زمان‌متناهی عامل‌های سطح ۱. به دلیل منفی نیمه معین بودن دومین عبارت سمت راست نامساوی (۵۴)، آن را به صورت

**اثبات -** با مشتق‌گیری از تابع

$$V_2(S, \tilde{f}_0, \bar{e}_1) = S^T w S + \tilde{f}_0^T w \tilde{f}_0 + \bar{e}_1^T w \bar{e}_1 \quad (67)$$

و ساده‌سازی، مانند آنچه در لم ۳ صورت گرفت

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq 2S^T w \bar{e}_2 \\ &- \lambda_1 \frac{p}{q} \frac{1}{\bar{a}_{2,2}} S^T \text{diag} \left( \bar{e}_{-2}^{\frac{p-q}{q}} \right) \text{diag} \left( \bar{e}_{-2}^{\frac{p-q}{q}} \right) S \\ &+ 2\bar{e}_1^T w \bar{e}_2 + 2 \frac{p}{q} \frac{1}{\beta} S^T w \text{diag} \left( \bar{e}_{-2}^{\frac{p-q}{q}} \right) D L_{22} f_d \end{aligned} \quad (68)$$

و یا

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -\frac{w_{\min}}{\beta} \|\bar{e}_2\|_{\frac{p}{q+1}}^{\frac{p+1}{q}} + \frac{8w_{\max}^2}{\lambda_1 \frac{p}{q} \bar{a}_{2,2}} \|\bar{e}_2\|_{\frac{4-2p}{4-2q}}^{4-2\frac{p}{q}} \\ &+ 8 \frac{\frac{p}{q} \frac{1}{\beta} (N_{i,\max} f_{d,\max} |a_{ij}|_{\max})^2 w_{\max}^2 N}{\lambda_1 \bar{a}_{2,2}}. \end{aligned} \quad (69)$$

اکنون با استفاده از نامساوی هلدِر [۲۰]، (۶۹) را به صورت

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -\frac{w_{\min}}{\beta} \|\bar{e}_2\|_{\frac{p}{q+1}}^{\frac{p+1}{q}} + \\ &\frac{8w_{\max}^2}{\lambda_1 \frac{p}{q} \bar{a}_{2,2}} N^{-\frac{4q-2p}{p+q} + \frac{4q-2p}{4q-2p}} \|\bar{e}_2\|_{\frac{4-2p}{4-2q}}^{4-2\frac{p}{q}} + \\ &\frac{p}{q} \frac{1}{\beta} (N_{i,\max} f_{d,\max} |a_{ij}|_{\max})^2 w_{\max}^2 N \\ &\lambda_1 \bar{a}_{2,2} \end{aligned} \quad (70)$$

بازنویسی می‌کنیم. برای بررسی منفی شدن سمت راست نامساوی (۷۰)، با

انتخاب  $p/q = 7/5$  و با توجه به

$$\frac{p}{q} + 1 = \frac{12}{5} = 2\frac{6}{5} = 2(4 - 2\frac{p}{q}) \quad (71)$$

ریشه‌های سمت راست (۷۰) را می‌توان با حل یک نامعادله‌ی درجه ۲ به دست آورد. مابقی اثبات همانند لم‌های ۳ و ۴ و قضیه ۲ قابل بررسی است. ■

#### ۴- نتایج شبیه‌سازی

۴-۱- سیستم بدون اغتشاش و عدم قطعیت

سیستم چندعاملی دکوپله با عامل رهبر

$$\dot{x}_0 = \begin{bmatrix} \dot{p}_{0x} \\ \dot{v}_{0x} \\ \dot{p}_{0y} \\ \dot{v}_{0y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{0x} \\ u_{0x} + 0.01 \cos(0.5t) \\ v_{0y} \\ u_{0y} + 0.01 \sin(0.5t) \end{bmatrix} \quad (72)$$

و عامل‌های پیرو غیرهمگن

لذا پایداری زمان‌متناهی عامل‌های سطح ۳ پس از پایداری عامل‌های سطح ۲ و در حالت کلی پایداری عامل‌های سطح  $m$  ( $m > 3$ ) پس از پایداری عامل‌های سطح ( $m - 1$ ) اتفاق می‌افتد.

با همگرایی زمان‌متناهی عامل‌ها بر روی سطح لغزش تساوی

$$-\beta \varepsilon_{1,i}^{q/p} = \varepsilon_{2,i} \quad (61)$$

برقرار شده و با توجه به

$$\dot{\varepsilon}_{1,i} = \varepsilon_{2,i} \quad (62)$$

با مشتق‌گیری از تابع

$$V_{3,i} = \frac{1}{2} \varepsilon_{1,i}^2 \quad (63)$$

و جایگذاری (۶۱) خواهیم داشت

$$\dot{V}_{3,i} = -\beta \varepsilon_{1,i}^{\frac{q+1}{p}} = -\beta V_{3,i}^{\frac{p+q}{2p}} \quad (64)$$

لذا بنا به لم ۱ مبدا برای  $\varepsilon_{1,i}$  پایدار زمان‌متناهی است. همچنین با توجه به (۶۱)، همزمان با همگرایی  $\varepsilon_{1,i}$  به مبدا،  $\varepsilon_{2,i}$  نیز به مبدا همگرا شده و در نتیجه آرایش‌بندی دوبخشی در زمان متناهی حاصل می‌شود. ■

**تذکره ۲-** نتایج به دست آمده به سیستم توام با اغتشاش و یا دارای نامعینی پارامتری در  $f_i(x_i)$  برای حالتی که  $p/q = 7/5$  می‌باشد، نیز قابل تعمیم است. با رویکردی مشابه می‌توان نشان داد که با اعمال کنترل‌کننده (۲۲) و با در نظر گرفتن شرایط

$$\begin{aligned} a_{1,2} &> \max \left( \frac{q}{p} \frac{1}{a_{i0,\min}} \beta a_9 \right. \\ &+ \frac{1}{a_{i0,\min}} a_2 a_{ij,\max} \sqrt{N} a_{11} \\ &+ \frac{3}{a_{i0}} N_{i,\max} f_{d,\max} a_{ij,\max}, \end{aligned} \quad (65)$$

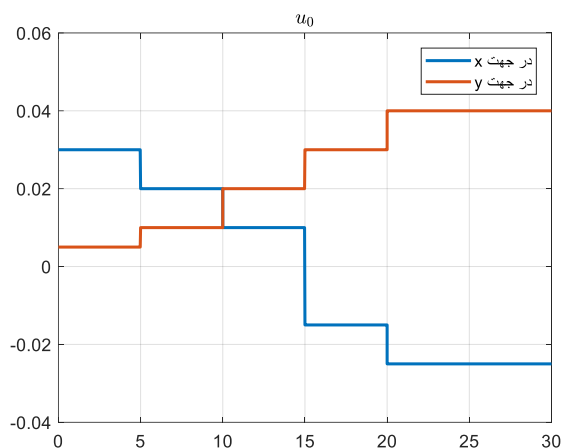
$$\begin{aligned} &\frac{1}{a_{i0,\min}} a_2 a_{ij,\max} \sqrt{N} a_{11} \\ &+ \frac{2}{a_{i0,\min}} a_{ij,\max} f_{d,\max} N_{i,\max} \left. \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &> \max \left( \frac{1}{a_{ij,\min} N_{i,\min}} \left( \frac{q}{p} \beta a_9 \right. \right. \\ &+ a_2 a_{ij,\max} \sqrt{N} a_{11} + 3 N_{i,\max} f_{d,\max} a_{ij,\max} \left. \right), \end{aligned} \quad (66)$$

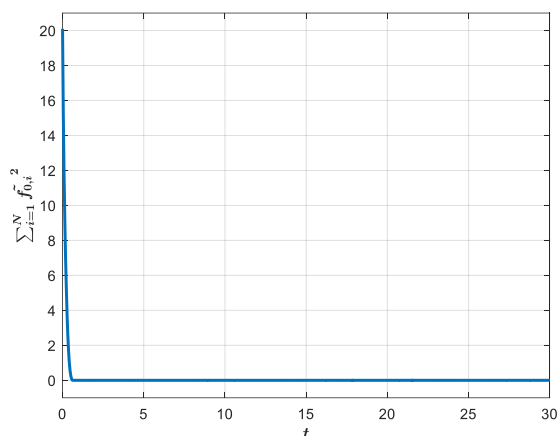
$$\begin{aligned} &\frac{1}{a_{ij,\min} N_{i,\min}} (a_2 a_{ij,\max} \sqrt{N} a_{11} \\ &+ 2 a_{ij,\max} f_{d,\max} N_{i,\max}) \left. \right) \end{aligned}$$

برای مقادیر کنترل‌کننده و مشاهده گر  $f_0(t)$  عامل‌ها در زمان متناهی آرایش دوبخشی به خود گرفته و رهبر گروه را دنبال می‌کنند.

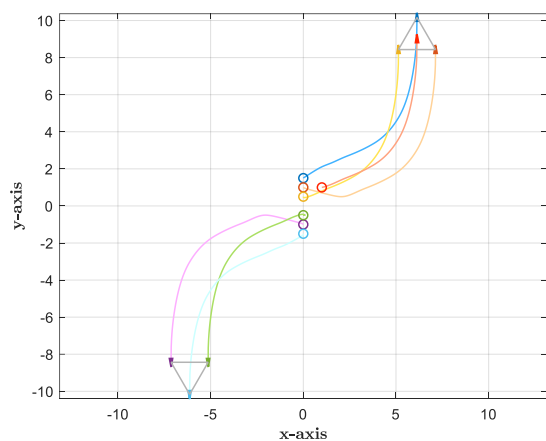
شکل ۷ تا شکل ۱۰ به ترتیب موقعیت عامل‌ها در جهت  $x$ ، موقعیت عامل‌ها در جهت  $y$ ، سرعت عامل‌ها در جهت  $x$  و سرعت عامل‌ها در جهت  $y$  را در بازه شبیه‌سازی نمایش می‌دهد.



شکل ۳- سیگنال ورودی رهبر گروه در بازه شبیه‌سازی



شکل ۴- مجذور نرم خطای مشاهده گر عامل‌های پیرو



شکل ۵- مسیر حرکت عامل‌ها در صفحه

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} \dot{p}_{ix} \\ \dot{v}_{ix} \\ \dot{p}_{iy} \\ \dot{v}_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ u_{ix} + 2\cos(0.1p_{ix}) + v_{ix}^3 \\ v_{iy} \\ u_{iy} + 2\sin(0.1p_{iy}) + v_{iy}^3 \end{bmatrix}, \quad (73)$$

$$\forall i = 1, 2, 3$$

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} \dot{p}_{ix} \\ \dot{v}_{ix} \\ \dot{p}_{iy} \\ \dot{v}_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ u_{ix} + 2\cos(0.1p_{ix}) + \ln(v_{ix}^2 + 1)\operatorname{sgn}(v_{ix}) \\ v_{iy} \\ u_{iy} + 2\sin(0.1p_{iy}) + \ln(v_{iy}^2 + 1)\operatorname{sgn}(v_{iy}) \end{bmatrix}, \quad (74)$$

$$\forall i = 4, 5, 6$$

و گراف ارتباطی شکل ۱ که در آن عامل صفر، رهبر گروه است را در نظر بگیرید.  $x_0 = [u_{0x} \ u_{0y}]^T$  بردار حالت رهبر و  $u_0 = [u_{0x} \ u_{0y}]^T$  بردار ورودی رهبر می‌باشد که در آن موقعیت رهبر در جهت  $x$ ،  $v_{0x}$  سرعت رهبر در جهت  $x$ ،  $p_{0y}$  موقعیت رهبر در جهت  $y$ ،  $v_{0y}$  سرعت رهبر در جهت  $y$ ،  $u_{0x}$  سیگنال ورودی رهبر در جهت  $x$  و  $u_{0y}$  سیگنال ورودی رهبر در جهت  $y$  است. همچنین  $x_i$  بردار حالت و  $u_i = [u_{ix} \ u_{iy}]^T$  بردار ورودی عامل‌های پیرو می‌باشد که در آن موقعیت پیرو در جهت  $x$ ،  $v_{ix}$  سرعت پیرو در جهت  $x$ ،  $p_{iy}$  موقعیت پیرو در جهت  $y$ ،  $v_{iy}$  سرعت پیرو در جهت  $y$ ،  $u_{ix}$  سیگنال ورودی پیرو در جهت  $x$  و  $u_{iy}$  سیگنال ورودی پیرو در جهت  $y$  می‌باشد. همچنین شکل ۳ بیانگر سیگنال ورودی رهبر،  $u_0$ ، در بازه شبیه‌سازی است. در ادامه و با در نظر گرفتن (۲۴) و (۲۵) پارامترهای کنترل‌کننده و مقادیر دلخواه آرایش‌بندی به ترتیب در جدول ۱ و جدول ۲ بیان شده است.

جدول ۱- پارامترهای کنترل‌کننده برای سیستم در حالت بدون اغتشاش

| $p$ | $q$ | $\beta$ | $w$       | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|-----|-----|---------|-----------|-------|-------|-------|-------|
| 101 | 69  | 1       | $7.61I_6$ | 15.7  | 15.4  | 2     | 2     |

جدول ۲- مقادیر آرایش‌بندی عامل‌ها

|          | $i = 1$                                   | $i = 2$                                    | $i = 3$                                    | $i = 4$                                   | $i = 5$                                   | $i = 6$                                    |
|----------|-------------------------------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|--------------------------------------------|
| $h_{ix}$ | $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$    | $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$     | $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$    | $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$   | $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$    | $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$     |
| $h_{iy}$ | $\begin{bmatrix} 1.15 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -0.58 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -0.58 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.58 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0.58 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -1.15 \\ 0 \end{bmatrix}$ |

شکل ۴ مجذور نرم خطای مشاهده گر عامل‌ها را در بازه شبیه‌سازی نمایش می‌دهد. همانطور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، خطای مشاهده گر  $f_0$  در کسری از ثانیه به صفر میل می‌کند. شکل ۵ نیز نمایش مسیر حرکت عامل‌ها در صفحه می‌باشد. همچنین

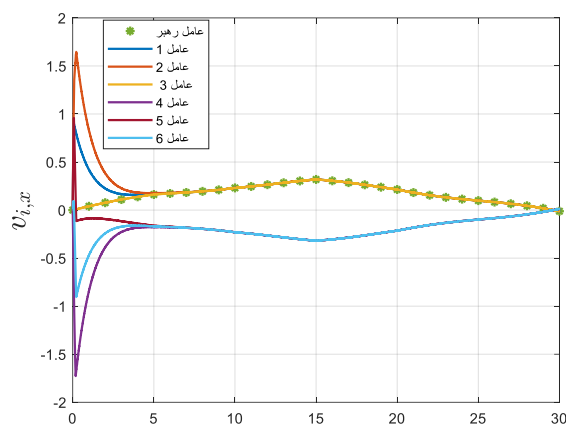
شکل ۶ نمایش مجذور نرم خطای آرایش‌بندی دویخشی سرعت و موقعیت

عامل‌ها هم در جهت  $x$  و هم در جهت  $y$  می‌باشد. همانطور که در

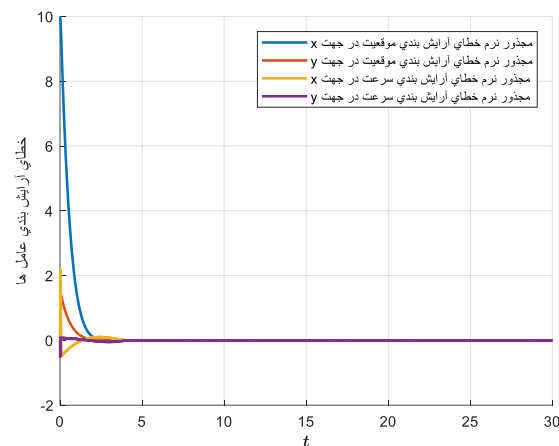
شکل ۶ مشاهده می‌شود خطای آرایش‌بندی عامل‌ها در زمان محدود و متناهی به

مبدأ همگرا می‌شود. به منظور نمایش دقیق رفتار عامل‌ها پس از اعمال

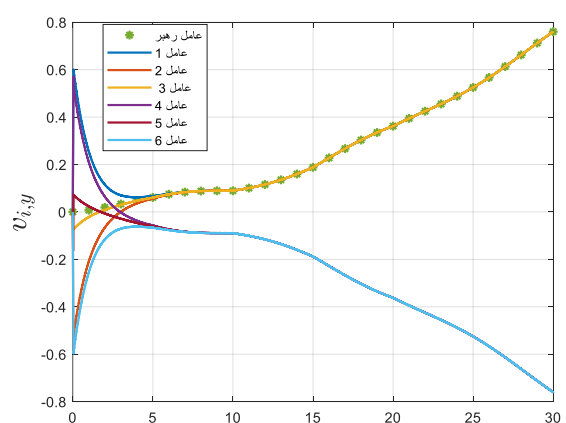
کنترل‌کننده،



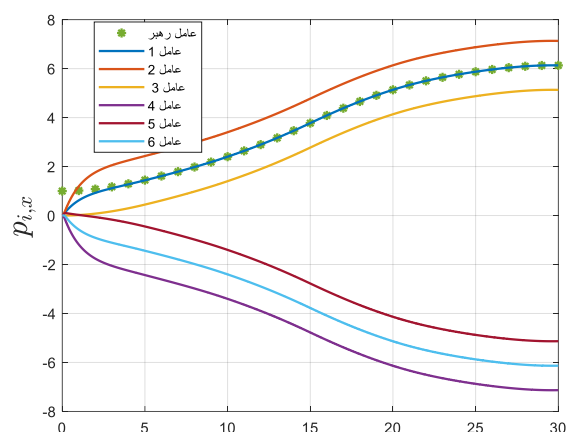
شکل ۹- نمایش سرعت عامل‌ها در جهت  $x$



شکل ۶- نمایش خطای آرایش‌بندی دویختی عامل‌ها



شکل ۱۰- نمایش سرعت عامل‌ها در جهت  $y$



شکل ۷- نمایش موقعیت عامل‌ها در جهت  $x$

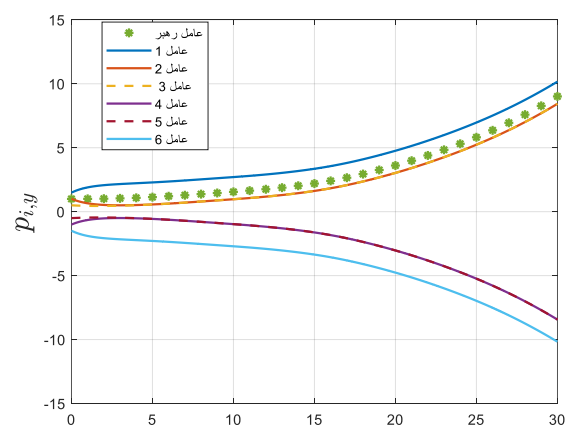
#### ۴-۲- سیستم در معرض اغتشاش و دارای نامعینی

سیستم چندعاملی شبیه‌سازی قبل را در نظر بگیرید که این بار عامل‌های پیرو در معرض اغتشاش سینوسی با دامنه و فرکانس متغیر با زمان به صورت شکل ۱۱ می‌باشند. همچنین در این مثال برای عامل‌های ۱ تا ۳ نامعینی پارامتری متغیر با زمان به صورت

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} v_{i,x} \\ v_{i,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{i,x} + 2\cos(0.1p_{i,x}) + 0.2\cos(t)\cos(0.1p_{i,y}) + v_{i,x}^3 \\ u_{i,y} + 2\sin(0.1p_{i,y}) - 0.2\cos(2t)\sin(0.1p_{i,x}) + v_{i,y}^3 \end{bmatrix} \quad (V5)$$

در نظر می‌گیریم. در ادامه و با استفاده از نامساوی‌های (۶۵) و (۶۶) مقادیر پارامترهای کنترل‌کننده را به صورت جدول ۳ انتخاب می‌کنیم. همچنین سیگنال ورودی رهبر گروه و مقادیر آرایش‌بندی را مثل حالت بدون اغتشاش می‌گیریم. شکل ۱۲ خطای آرایش‌بندی عامل‌ها را در حالت سیستم توأم با اغتشاش نشان می‌دهد.

همانطور که در شکل ۱۲ مشاهده می‌شود با استفاده از کنترل‌کننده‌ی معرفی شده، حتی در حضور اغتشاش نیز اهداف کنترلی برآورده شده و خطای آرایش‌بندی در زمان متناهی به صفر میل کرده است.



شکل ۸- نمایش موقعیت عامل‌ها در جهت  $y$

$$\text{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases} \quad \text{تابع علامت}$$

$$\text{diag}(x_1, \dots, x_N) \quad \text{ماتریس قطری با درایه‌های قطری } x_1 \text{ تا } x_N$$

$$\|x\| \quad \text{نرم (اقلیدسی) بردار } x$$

$$\|x\|_a \quad \text{نرم } a \text{ بردار } x$$

$$x^\alpha = [x_1^\alpha, \dots, x_N^\alpha]^T \quad \text{به توان رسیدن درایه‌های بردار } x \text{ به توان } a$$

$$\otimes \quad \text{ضرب کرونگر}$$

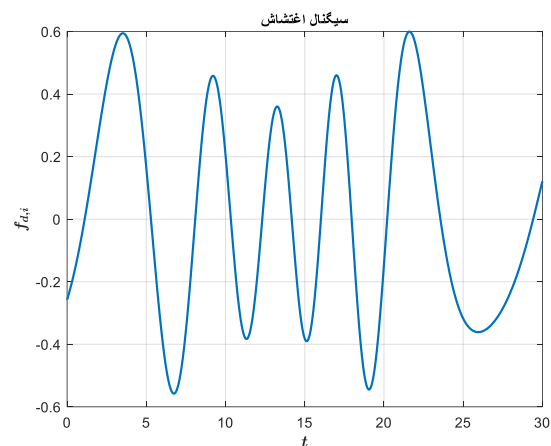
$$X \leq 0 \quad \text{ماتریس منفی نیمه‌معین}$$

## مراجع

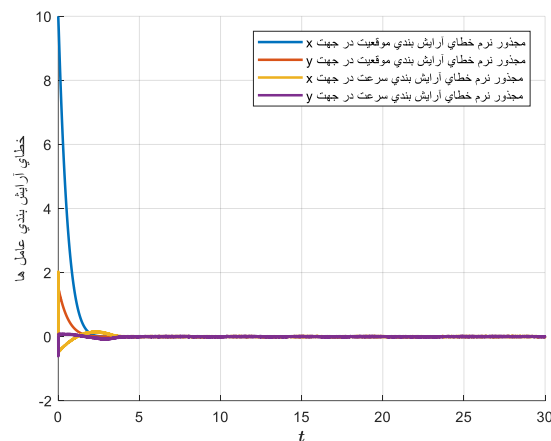
- [1] A. Dorri, S. S. Kanhere, and R. Jurdak, "Multi-agent systems: a survey," IEEE Access, vol. 6, pp. 28573-28593, 2018.
- [2] X. Dong, Y. Zhou, Z. Ren, and Y. Zhong, "Time-varying formation tracking for second-order multi-agent systems subjected to switching topologies with application to quadrotor formation flying," IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 64, no. 6, pp. 5014-5024, 2016.
- [3] M. De Queiroz, X. Cai, and M. Feemster, "Formation control of multi-agent systems: a graph rigidity approach," John Wiley & Sons, 2019.
- [4] H. S. Ahn, Formation Control, Springer, 2020.
- [5] J. Zhang, Y. Yao, J. A. Wang, Z. Li, P. Feng, and W. Bai, "Distributed bipartite output formation control for heterogeneous discrete-time linear multi-agent systems," IEEE Access, Vol. 12, pp. 18901-18912, 2024.
- [6] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, "Finite-time stability of continuous autonomous systems," SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 38, no. 3, pp. 751-766, 2000.
- [7] S. Ding, S. Li, and Q. Li, "Stability analysis for a second-order continuous finite-time control system subject to a disturbance," Journal of Control Theory and Applications, vol. 7, no. 3, pp. 271-276, 2009.
- [8] C. Yan, W. Zhang, H. Su, and X. Li, "Adaptive bipartite time-varying output formation control for multiagent systems on signed directed graphs," IEEE Transactions on Cybernetics, vol. 52, no. 9, pp. 8987-9000, 2021.
- [9] X. Gong, J. J. R. Liu, Y. Wang, and Y. Cui, "Distributed finite-time bipartite consensus of multi-agent systems on directed graphs: Theory and experiment in nanoquadcopters formation,"

جدول ۳- پارامترهای کنترل‌کننده برای سیستم توام با اغتشاش

| $p$ | $q$ | $\beta$ | $w$   | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|-----|-----|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 7   | 5   | 1       | $I_6$ | 110   | 70    | 2     | 2     |



شکل ۱۱- اغتشاش اعمال شده به عامل‌ها در طول شبیه‌سازی



شکل ۱۲- نمایش خطای آرایش‌بندی عامل‌ها در حضور اغتشاش

## ۸- نتیجه‌گیری

در این پژوهش با استفاده از کنترل مود لغزشی ترمینال، روشی نو برای پایداری زمان‌متناهی عامل ناهمگن و غیرخطی، هم برای سیستم در شرایط ایده‌آل و هم برای سیستم توام با اغتشاش برآورده شد. همچنین در صورت وجود نامعینی در متغیر  $f_i(x_i)$ ، می‌توان با آن مانند اغتشاش برخورد کرد و با استفاده از کنترل‌کننده معرفی شده در این پژوهش، آرایش‌بندی دوبخشی را برای سیستم دارای نامعینی نیز برآورده کرد. لاکن بررسی اثر نامعینی در متغیر  $g_i(x_i)$  که در این پژوهش به آن پرداخته نشد برای ادامه کار پیشنهاد می‌شود. همچنین رویکرد زمان‌ثابت<sup>۱</sup> در آرایش‌بندی دوبخشی برای پژوهش‌های آتی پیشنهاد می‌شود.

## نمادها

<sup>۱</sup> Fixed-time

manipulators,” *Automatica*, vol. 38, no. 12, pp. 2159-2167, 2002.

*Journal of the Franklin Institute*, vol. 357, no. 16, pp. 11953- 11973, 2020.

- [10] Y. Cai, H. Zhang, J. Zhang, R. Xi, and Q. He, “Fully distributed bipartite time-varying formation control for uncertain linear multi-agent systems under event-triggered mechanism,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 31, no. 11, pp. 5165-5187, 2021.
- [11] G. A. Pavlopoulos, P. I. Kontou, A. Pavlopoulou, C. Bouyioukos, E. Markou, and P. G. Bagos, “Bipartite graphs in systems biology and medicine: a survey of methods and applications,” *GigaScience*, vol. 7, no. 4, pp. 1-31, 2018.
- [12] J. Liang, X. Bu, L. Cui, and Z. Hou, “Data-driven bipartite formation for a class of nonlinear MIMO multiagent systems,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 34, no. 6, pp. 3161-3173, 2021.
- [13] W. Wang, W. Zhang, C. Yan, and Y. Fang, “Distributed adaptive bipartite time-varying formation control for heterogeneous unknown nonlinear multi-agent systems,” *IEEE Access*, Vol. 9, pp. 52698-52707, 2021.
- [14] X. Zhang, J. Wu, X. Zhan, T. Han, and H. Yan, “Observer-based adaptive bipartite time-varying formation tracking of multi-agent system with bounded unknown input,” *International Journal of Control, Automation and Systems*, Vol. 20, No. 12, pp. 3969-3978, 2022.
- [15] Y. Yang, D. Chen, Q. Liu, S. Gorbachev, and V. Kuzin, “Bipartite time-varying prescribed range formation control for a class of nonlinear multiagent systems with unknown disturbances,” *IEEE Systems Journal*, Vol. 17, No. 2, pp. 1899-1908, 2023.
- [16] C. Altafini, “Consensus problems on networks with antagonistic interactions,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, no. 4, pp. 935-946, 2012.
- [17] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, “Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 5, pp. 678-682, 1998.
- [18] Y. Shen and Y. Huang, “Uniformly observable and globally lipschitzian nonlinear systems admit global finite-time observers,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 11, pp. 2621-2625, 2009.
- [19] W. Ford, *Numerical Linear Algebra With Applications: Using MATLAB*, Academic Press, 2014.
- [20] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd ed., Patience Hall, 2002.
- [21] Y. Feng, X. Yu, and Z. Man, “Non-singular terminal sliding mode control of rigid