

# یک راه کار ابتکاری برای حل مسأله کوتاه ترین زمان به عنوان کلاسی از مسائل حساب تغییرات

بهزاد کفاش

استادیار، گروه علوم مهندسی، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اردکان، یزد، ایران [bkafash@ardakan.ac.ir](mailto:bkafash@ardakan.ac.ir)

پذیرش: ۱۴۰۳/۰۸/۱۷

ویرایش: ۱۴۰۳/۰۶/۰۲

دریافت: ۱۴۰۳/۰۴/۱۲

**چکیده:** مسأله کوتاه ترین زمان یک مسأله قدیمی است که از آن به عنوان منشاء ظهور حساب تغییرات یاد می شود. از طرفی کاربردهای مختلف حساب تغییرات در علوم مختلف از جمله ریاضیات، فیزیک، مهندسی برق، مکانیک و رباتیک این حوزه را به یک زمینه فعال تحقیقاتی برای محققان در حوزه ریاضیات و مهندسی تبدیل نموده است. در این مقاله، یک روش ابتکاری برای حل مسأله کوتاه ترین زمان ارائه شده است. این روش بر پایه تبدیل معادله دیفرانسیل مسأله کوتاه ترین زمان، به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل استوار است. در استفاده از روش پیشنهادی دو انتخاب غیر بدیهی برای تشکیل دستگاه معادلات ارائه گردیده و شکل کلی جواب عمومی در هر حالت به دست آمده است. در نهایت در بخش مقایسه مسیرهای مختلف حل مسأله کوتاه ترین زمان، مشخص گردید که تنها یکی از دو جواب به دست آمده حائز شرایط مسأله کوتاه ترین زمان است. لازم به ذکر است، جواب بهینه به دست آمده در امتداد مسیر پیشنهادی دقیقاً با مقدار به دست آمده در امتداد مسیر بهینه یعنی منحنی چرخ زاد برابری می کند. همچنین برای فهم بهتر موضوع دو رویه در نرم افزار میپل ارائه و خروجی های حاصل از آن به نمایش در آمده است.

**کلمات کلیدی:** مسأله کوتاه ترین زمان، حساب تغییرات، منحنی چرخ زاد، معادله دیفرانسیل اولیه-لاگرانژ.

## An Innovative Solution for the Brachistochrone Problem as a Class of the Calculus of Variations

Behzad Kafash

**Abstract:** The problem of the shortest time is an old problem that is referred to as the origin of the calculus of variation. The various applications of calculus of variations in different fields, including mathematics, physics, electrical engineering, mechanics, and robotics, have transformed this area into an active research field for mathematicians and engineers. In this article, an innovative method for solving the Brachistochrone Problem is proposed. This method is based on transforming the differential equation of the Brachistochrone Problem into a system of differential equations. In the proposed approach, two non-trivial choices for forming the system of equations are presented, and the general form of the solution is obtained in each case. Finally, it is determined that only one of the two obtained solutions satisfies the proposed final condition of the problem. Additionally, the optimal solution obtained from the proposed path exactly matches the value obtained along the optimal path, namely the cycloid. Furthermore, two Maple procedures are presented, and the resulting outputs are displayed.

**Keywords:** The Brachistochrone Problem, Calculus of variations, cycloid curve, Euler-Lagrange differential equation

## ۱- مقدمه

بعد از معرفی حساب دیفرانسیل در قرن هفدهم، حساب تغییرات و به تبع آن مسائل کنترل بهینه متولد و توسعه یافتند. در حساب دیفرانسیل با مسائلی سروکار داریم که موضوع آن‌ها دستیابی به مقادیری از متغیرهای مستقل است که مقدار بیشینه یا کمینه توابع وابسته به آن‌ها را نتیجه دهد. اما در حساب تغییرات شناسایی روش‌ها و راه کارهایی برای حل مسائلی مطرح می‌شود که مجهول نه یک یا چند مقدار بلکه یک یا چند تابع است. مسأله‌ی بنیادی در حساب تغییرات یافتن تابع یا توابعی مجهولی است که انتگرال معین دربرگیرنده‌ی آن‌ها، بیشینه یا کمینه شود. به عبارتی در این حوزه، معمولاً مسائل به صورت یک تابع هدف تعریف می‌شوند که باید مقدار بهینه‌ی آن‌ها محاسبه شود. این تابع هدف عمدتاً به صورت یک انتگرال از یک یا چند تابع مجهول، تعریف می‌شود. در واقع حساب تغییرات با بهینه‌سازی تابع‌ها سروکار دارد و گستره‌ی آن بسیاری از شاخه‌های علوم طبیعی و ریاضیات را فراگرفته است. ناگفته نماند که حساب تغییرات در ابتدا برای بررسی مسائل فیزیکی معرفی و به مرور گسترش پیدا کرد و از آن به عنوان عامل اصلی نگرش مدرن به مسائل فیزیکی یاد می‌شود. از طرفی پیشرفت حساب تغییرات خود عاملی جهت پیشرفت شاخه‌های دیگر علم ریاضی نظیر آنالیز و توپولوژی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و کنترل بهینه شده است. این حوزه به صورت گسترده‌ای در علوم طبیعی، مهندسی، اقتصاد، برنامه‌ریزی و سایر حوزه‌های دیگر کاربرد دارد. همچنین حساب تغییرات نقش مهمی در توسعه مسائل کنترل بهینه داشته است. در این نوع مسائل، هدف کنترل کردن سیستم به نحوی است که یک تابع هدف خاص را بیشینه یا کمینه کند. از جمله کاربردهای معروف این حوزه می‌توان به کنترل پرواز هواپیما، کنترل تولید برق و کنترل ربات‌ها اشاره کرد. اگر چه حساب تغییرات به عنوان یک شاخه پر کاربرد و مهم از علم، سرشار از یادداشت‌های تاریخی جالبی است ولی فرایند توسعه آن همچنان ادامه داشته و ظهور شگفتی‌های جدید در آن دور از انتظار نیست.

ریاضی دانان در طول تاریخ با مسائل بهینه‌سازی سروکار داشته و برای حل بسیاری از این دست مسائل راه کارهای هوشمندانه‌ای ارائه نموده‌اند. به عنوان نمونه یونان باستان دریافته بودند که از بین منحنی‌های بسته با محیط معین، دایره بیشترین مساحت را دارد. به عبارتی تاریخچه حساب تغییرات مربوط به یونان باستان است ولی پیشرفت زیاد اروپای غربی در این رشته تا قرن هفدهم میلادی به طول انجامید. می‌توان گفت شعله‌های پیشرفت حساب تغییرات از آن زمان مشتعل شد که یوهان برنولی<sup>۱</sup> (ژان اول) در سال ۱۶۹۶ به بررسی و حل مسأله کوتاه‌ترین<sup>۲</sup> زمان روی آورد [۱]. البته شواهد تاریخی نشان می‌دهد که گالیله<sup>۳</sup> پیش از یوهان برنولی در کتاب «گفتگوهای مربوط به دو علم جدید»، روی این مسأله کار کرده

بود [۲]. برنولی با طرح مسأله کوتاه‌ترین زمان ریاضی دانان اروپایی را برای زور آزمایی فکری به مبارزه طلبید. در واقع او این مسأله را به عنوان چالشی برای تیزترین ریاضی دانان جهان مطرح تا برتری ریاضی دانان آلمانی-سوئسی را به رخ جهانیان بکشد. هدف این مسأله پیدا کردن یک منحنی است که دو نقطه  $A$  و  $B$  را در صفحه‌ای قائم متصل نماید به طوری که مهره‌ای لغزان در طول منحنی واصل بین این نقاط، در کوتاه‌ترین زمان تحت تاثیر گرانش حرکت کند. پس از طرح این مسأله راه حل‌های متنوعی برای آن ارایه گردید و به مرور ریاضی دانان سعی در طرح مسائل مشابه داشتند. به مرور با طرح مسائل مختلف از این دست، حساب تغییرات و مسائل کنترل بهینه گسترش یافت. شواهد تاریخی نشان می‌دهد که در آن زمان مسأله کوتاه‌ترین زمان توسط لایبنز<sup>۴</sup>، نیوتن، هوییتال<sup>۵</sup>، یوهان و ژاکوب برنولی حل شد [۳]. لازم به ذکر است، اگر چه نیوتن مسأله را با تاخیر دریافت نمود ولی سریعاً نسبت به حل آن اقدام نمود که نشان از توانائی بالای فکری این ریاضی دان دارد، حال آن که یوهان برای حل این مسأله دو هفته وقت گذاشته بود. البته راه حل یوهان برنولی ظریف‌تر از راه حل دشوار و کلی ژاکوب بود. هرچند نیوتن راه حل خود را بدون نام منتشر کرده بود ولی یوهان هنگامی که راه حل مسأله را دید تشخیص داد که مربوط به نیوتن است. او در این باره چنین اظهار داشت: "اگر چه مؤلف با فروتنی نامش را آشکار نکرده، می‌توان بی هیچ شکمی مطمئن بود که راه حل آقای نیوتن است؛ چون حتی اگر هیچ اطلاع دیگری جز این نمونه هم نداشتم، او را از سبکش می‌شناختم، چنانکه شیر را از رد پنجه‌اش<sup>۶</sup> (منابع [۴] و [۵]).

شاید بتوان به نوعی پایه گذار روش‌های حل مسائل کنترل بهینه را اوایل قلمداد نمود. وی در سال ۱۷۷۴ طی ارایه‌ی مقاله‌ای تحت عنوان "روش‌های یافتن منحنی‌های مسطح که نشان دهنده‌ی خواص بیشینه یا کمینه می‌باشند" روشی اساسی را برای حل مسائل کنترلی ارایه نمود [۶]. این روش دارای یک مبنای تحلیلی می‌باشد که منجر به تبدیل مسأله‌ی حساب تغییرات به معادله‌ی معروف اوایل-لاگرانژ<sup>۷</sup> گردید. برخی محققان به مرور تاریخی مسأله کوتاه‌ترین زمان و بیان توسعه حساب تغییرات پرداخته‌اند، مطالعاتی که منشأ آن‌ها از طریق مشارکت‌های برنولی، اوایلر، لاگرانژ، ژاکوبی، وایرستراس، هیلبرت و دیگران ردیابی شده است (نظیر منابع [۷] و [۸]). با توجه به قدمت دیرینه‌ی مسأله کوتاه‌ترین زمان و موضوع حساب تغییرات و از آنجایی که این موضوعات و تعمیم‌های مختلف آن‌ها کاربردهای بسیار متفاوتی دارد، همواره مورد توجه محققین قرار گرفته و تحقیقات متعددی بر روی آن‌ها انجام شده است [۹] و [۱۰]. کوشنر و همکاران در منبع [۱۱] به استفاده از زنجیره مارکوف برای حل مسائل مختلف و از جمله مسائل حساب تغییرات پرداخته و این روش در مقاله [۱۲] برای حل مسائل کنترل مورد استفاده قرار گرفت. در مرجع [۱۳] نویسندگان جواب مسأله کوتاه‌ترین زمان را به عنوان یک منحنی پارامتری

<sup>۵</sup> Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716)<sup>۶</sup> Guillaume de l'Hôpital(1661-1704)<sup>۷</sup> "Ah! I recognize the lion by his paw."<sup>۸</sup> Euler-Lagrange equation<sup>۱</sup> Johann Bernoulli(1667-1748)<sup>۲</sup> The Brachistochrone Problem<sup>۳</sup> Galileo Galilei (1636-1564)<sup>۴</sup> Dialogues Concerning Two New Sciences

تاریخی نشان می دهد که برای اولین بار نام چرخزاد برای این منحنی در سال ۱۵۰۱ در مقاله ای با موضوع تربیع دایره توسط شارل بوول<sup>۳</sup> مطرح گردیده است [۴]. دلیل این نام گذاری آن است که منحنی چرخزاد از حرکت یک چرخ یا دایره، به دست می آید. باید توجه داشت که نمودار این منحنی را می توان مسیر حرکت سنگ ریزه ای تصور کرد که به شیار لاستیک یک اتومبیل در حال حرکت، چسبیده است. معمولاً چرخزاد با یک سری معادلات پارامتری نمایش داده می شود.

**گزاره ۱:** منحنی چرخزاد به عنوان مکان هندسی نقاطی از صفحه که از حرکت یک چرخ یا دایره به شعاع  $a$ ، به دست می آید، دارای معادله ی پارامتری به شکل زیر است:

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t), \\ y(t) = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi a. \quad (۱)$$

**اثبات:** فرض کنیم دایره ای به شعاع  $a$  مطابق شکل (۱) در امتداد خط مستقیم افقی بدون لغزش می غلتد. منحنی پیموده شده توسط نقطه ای بر روی محیط دایره، نظیر  $P(x, y)$  به عنوان مکان هندسی منحنی چرخزاد به دست آورده می شود. خط مستقیم افقی را محور  $x$  در نظر گرفته و  $t$  را زاویه ی  $\widehat{PA'O'}$  در نظر گرفته که نقطه  $P$  روی دایره انتقال یافته از موضع منطبق بر مبدأ  $O$  به موقعیت جدید نمایش داده شده در شکل (۱)، رسیده است. بدین ترتیب می توان طول نقطه  $P$  را به ترتیب زیر به دست آورد:

$$x = |OQ| = |OO'| - |QO'| = |OO'| - |PP'| \quad (۲)$$

با توجه به شکل (۱) تساوی  $|PP'| = a \sin t$  برقرار و با توجه به اینکه دایره بدون لغزش غلتیده است، اندازه  $|OO'|$  برابر با طول قوس کمان  $O'P$  یعنی  $|O'O| = at$  است. حال با جایگذاری مقدار  $|O'O|$  و  $|PP'|$  در رابطه (۲)، مختصات طول نقطه  $P$  را می توان به ترتیب زیر به دست آورد:

$$x = at - a \sin t = a(t - \sin t), \quad (۳)$$

به طور مشابه مختصات عرض نقطه  $P$  به صورت زیر حاصل می شود:

$$y = |A'O'| - |A'P'| = a - a \cos t = a(1 - \cos t) \quad (۴)$$

که روابط (۳) و (۴) همان معادله پارامتری منحنی چرخزاد (۱) در طول یک دوره تناوب است.

در ادامه با فرض اینکه شعاع دایره غلتان در امتداد خط محور  $x$  در حرکت است به رسم نمودار منحنی چرخزاد با استفاده از قابلیت متحرک سازی نرم افزار میپل پرداخته شده که تحت رویه (۱) صورت گرفته است. با اجرای  $Cycloid(3, 4\pi, 12)$  رویه (۱) با به کارگیری دایره مولدی به شعاع  $a = 3$  در بازه  $t \in [0, 4\pi]$  به ایجاد ۱۲ نقطه از منحنی چرخزاد می پردازد. در واقع در اجرای این رویه دایره ای با یک نقطه انتخاب شده روی محیط خود در امتداد محور  $x$  حرکت و موقعیت آن نقطه ردیابی شده است. در این صورت مکان هندسی شکل حاصل، همانطور که در شکل (۲) قابل مشاهده است، منحنی یک چرخزاد است.

در فضای سه بعدی در نظر گرفته و به تجزیه و تحلیل مبنای حاصل از به کارگیری روش خود پرداخته اند. نویسندگان مقاله [۱۴] یک روش جدید برای حل مسأله کوتاه ترین زمان ارائه نمودند که از یک فرآیند فیزیک جامدات برای ساخت شبکه ای با یک واحد سلول و عامل تبدیل استفاده شده که خطای کمی نسبت به جواب بهینه دارد. محققان در منبع [۱۵] با گسترش مسأله کوتاه ترین زمان، یک کاربرد عملی در نظر گرفتند تا مسیر بهینه ای برای یک دوچرخه سوار (به عنوان یک ذره متحرک) را در یک پیست دوچرخه سواری پیدا کند. محققان در مقاله [۱۶]، به کاوش در گسترش آتش سوزی در امتداد مسیر کوتاه ترین زمان پرداخته و آن را با سایر مسیرهای محتمل مقایسه نموده اند. ایجاد یک بسته ی آموزشی برای مسأله کوتاه ترین زمان، دستاورد محققان در منبع [۱۷] بود که به بررسی تجربی این مدل پرداخته اند.

در این مقاله پس از معرفی منحنی چرخزاد و رسم آن با یک رویه در نرم افزار میپل، مسأله کوتاه ترین زمان با چاشنی حاشیه تاریخی آن معرفی گردیده است. در بخش چهارم پس از بیان شکل کلی مسأله حساب تغییرات، به معرفی معادله ی معروف اولر-لاگرانژ به عنوان شرط لازم برای حل این دسته مسائل پرداخته شده است. یافتن جواب معادله دیفرانسیل کوتاه ترین زمان در بخش پنجم مورد بررسی قرار گرفت و علاوه بر روش مستقیم یک روش ابتکاری بر پایه تبدیل معادله دیفرانسیل حاصل به یک دستگاه معادلات ارائه و حل آن با دو انتخاب مختلف انجام گردیده است. در بخش ششم این مقاله، به محاسبه مسیر مناسب گذرا از دو نقطه مفروض از صفحه دکارتی پرداخته شد و مقدار شاخص عملکرد مسأله کوتاه ترین زمان در امتداد هر مسیر به طور جداگانه محاسبه شده است. نکته قابل توجه اینکه یکی از دو جواب به دست آمده در قالب روش پیشنهادی، دارای جوابی منطبق بر جواب بهینه ای است که در امتداد مسیر چرخزاد حاصل می شود. این بخش با گزارش مقادیر شاخص عملکرد و خطای نسبی هر مسیر به همراه منحنی حاصل از پیاده سازی فرآیند به پایان رسید. لازم به تاکید است که منطبق بودن جواب به دست آمده در امتداد مسیر پیشنهادی و مسیر بهینه هم با استناد به مقدار شاخص عملکرد و هم مسر پیموده شده بین دو نقطه، مورد تایید قرار گرفت. و در نهایت، نتیجه گیری بخش پایانی مقاله است که به ارائه گزارش مختصری از کل مراحل مقاله پرداخته شده است.

## ۲- منحنی چرخزاد

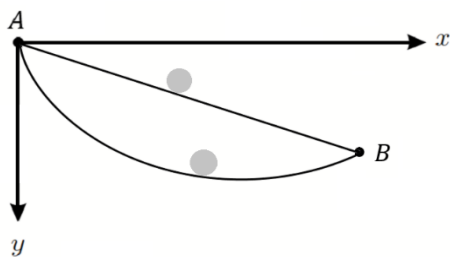
منحنی چرخزاد<sup>۱</sup> یا سیکلوئید را چه از نظر زیبایی شکل ظاهری، چه به واسطه خواص ساده، جذاب و درخور توجه و چه از لحاظ مبارزات خستگی ناپذیری که بین ریاضی دانان بر پا کرد (تا یکدیگر را برای حل ویژگی هایی که کشف می کردند به مبارزه بطلبند)، هنر هنده<sup>۲</sup> نامیده اند [۴] و [۱۸]. وجه تسمیه آن نیز یکی از مشاهیر یونانی به نام هنل است که علاوه بر زیبایی، موجب منازعات و جنگ های فراوانی گردید. شواهد

<sup>3</sup> Carolus Bovillus(1475-1566)

<sup>1</sup> Cycloid

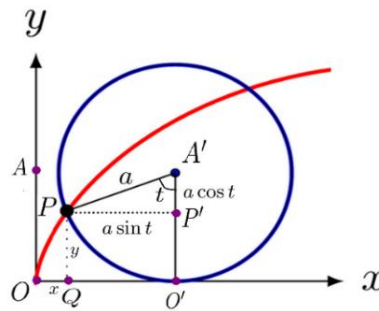
<sup>2</sup> Helen of Geometry

مسأله کوتاه ترین زمان گذشته از این که به خودی خود مسأله جالبی است بیشتر از این نظر اهمیت دارد که منشاء تاریخی حساب تغییرات بوده است. موضوعی که خود شاخه ای از آنالیز ریاضی است و در زمان حاضر عمیقاً به درون سادگی های پنهان در قلب جهان فیزیکی نفوذ کرده است. مطابق شکل (۳) فرض شده است که نقطه  $A$  به وسیله دو مسیر یکی در امتداد خط مستقیم و دیگری روی قوس دایره ای به نقطه پایین تر  $B$  متصل باشد و مهره ای بتواند بدون اصطکاک از  $A$  تا  $B$  روی این دو مسیر بلغزد. همانطور که در شکل (۳) ملاحظه می شود در این نمودار، جهت مثبت محور  $y$  ها در امتداد نیروی جاذبه و به سمت پائین در نظر گرفته شده است. سوالی که مطرح می شود به این صورت است که در امتداد کدامیک از این دو مسیر، مهره کم ترین زمان را برای طی نمودن مسیر بین این دو نقطه لازم دارد؟ در نگاه اول، شاید اینگونه به نظر برسد که خط مستقیم واصل بین این دو نقطه (که فاصله کمتری بین این دو نقطه دارد) مسیر کوتاه ترین زمان طی شدن بین نقاط ابتدایی و انتهایی است. یک رویکرد دیگر این است که شاید بهتر باشد ابتدا مهره به صورت عمودی سقوط کند تا سرعت گرفته و با این سرعت بیشتر مسیر طولانی تری را در زمان کمتری بپیماید و زودتر به نقطه پایانی برسد [۱۹]. شواهد تاریخی نشان می دهد که گالیله به این اعتقاد بود که مهره در امتداد مسیر دایره ای سریع تر پایین خواهد آمد یعنی مسیر بهینه در مسأله کوتاه ترین زمان، در امتداد مسیر دایره گذرا از نقاط مورد نظر است. لازم به ذکر است، با محاسباتی که در این مقاله انجام شده است نشان داده می شود که جواب گالیله اختلاف اندکی نسبت به جواب بهینه دارد [۲۰].



شکل (۳). دو مسیر در امتداد خط مستقیم و روی دایره ای بین نقاط  $A$  و  $B$

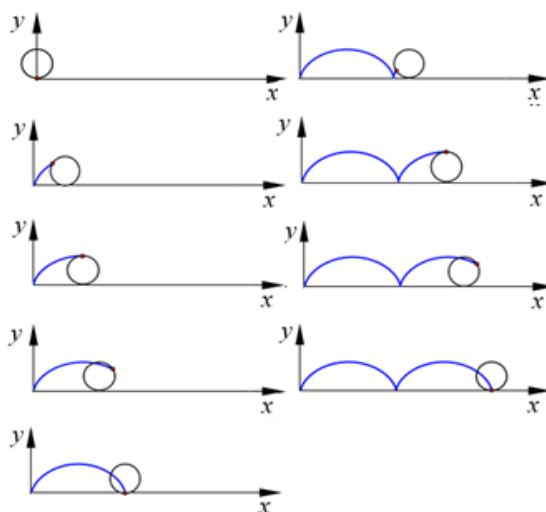
مسأله ای عمومی تری که توسط برنولی مطرح گردید و از آن به عنوان مسأله کوتاه ترین زمان یاد می شود، به شرح زیر است [۳] و [۲۱]:  
**مسأله کوتاه ترین زمان:** فرض کنید یک مهره مطابق شکل (۴)، تحت نیروی جاذبه با شتاب  $g$  در امتداد مسیر یک منحنی دلخواه از نقطه  $A(a, \alpha)$  با سرعت  $v_a$  به نقطه  $B(b, \beta)$  منتقل شود. سوال این است که معادله مسیر چگونه باشد تا انتقال مهره در کوتاه ترین زمان صورت گیرد. با فرض اینکه جهت مثبت محور  $y$  ها در امتداد نیروی جاذبه و به سمت پائین باشد، برای حرکت گلوله از نقطه  $A$  به نقطه  $B$  باید  $a < b$  و  $\alpha < \beta$  باشند. برای مدل سازی مسأله کوتاه ترین زمان، معادله مسیر حرکت مهره به صورت  $y(x)$  در نظر گرفته شده است.



شکل (۱). مکان هندسی نقطه  $P$  برای تشکیل منحنی چرخ زاد

رویه (۱):

```
restart;
with(plots);
with(plottools);
Procedures1:=proc(a, b, N)
local x, y, t, Δt, Point, Cycloid, RollingCircle;
x:= t -> a*(t - sin(t));
y:= t -> a*(1 - cos(t));
Δt:=b/N;
Point:=display(seq(pointplot([x(Δt*i),y(Δt*i)],color=red),i=0..N),insequence= true);
Cycloid:=animatecurve([x(t),y(t),t=0..b],frames=N+1,color=blue);
RollingCircle:=display(seq(circle([r*Δt*i,r],r),i=0..N),insequence= true);
display(Point, Cycloid, RollingCircle);
end proc;
```



شکل (۲). اجرای رویه (۱) برای تشکیل منحنی چرخ زاد

### ۳- مسأله کوتاه ترین زمان

تاریخچه حساب تغییرات با بیان مسأله کوتاه ترین زمان گره خورده است. از این مسأله به عنوان یکی از اولین مسائل حساب تغییرات یاد می شود که شامل کمینه کردن یک انتگرال است و حاشیه ی تاریخی جالبی دارد. در حساب دیفرانسیل به مطالعه ی توابعی پرداخته می شود که متغیر مستقل در آن ها متغیر عددی است در حالی که حساب تغییرات شامل مینیم سازی تابعک ها یا به نوعی توابعی بر حسب تابع یا توابعی به عنوان متغیر مستقل هستند. از عمده ترین انگیزه های ابداع و گسترش حساب تغییرات را می توان نیازهای تدریجی مکانیک کلاسیک به رفع مشکلات محاسباتی از حوزه ی مشتق و حل معادلات دیفرانسیل به حوزه انتگرال و بهینه سازی ذکر نمود. در حالت کلی، یک مسأله حساب تغییرات را می توان به صورت زیر بیان نمود [۲۲]:

مطلوب است محاسبه ی منحنی  $y(x)$  که تحت شرایط خاصی روی  $y(x_0)$  و  $y(x_1)$  به تابعک رابطه (۱۲) کمترین مقدار را نسبت دهد:

$$J[y] = \phi(y(x_1)) + \int_{x_0}^{x_1} L(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (12)$$

فرض کنید  $x_0, x_1$  و  $y \in \mathbb{R}^n$  دارای مقادیر ثابت و  $\mathcal{M}$  یک زیر مجموعه بسته از فضای  $\mathbb{R}^n$  می باشد که  $y(x_0) = y_0$  و  $y(x_1) \in \mathcal{M}$  حال اگر  $\mathcal{M} = \{y_1\}$  نقطه انتهایی نیز به صورت نقطه ی ثابت  $(x_1, y_1)$  ظاهر خواهد شد، که ساده ترین مسأله در حساب تغییرات نامیده می شود. در مقابل اگر  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$  یعنی هیچ شرطی روی  $y(x_1)$  وجود نداشته باشد، با یک مسأله بسیار کلی سروکار داریم [۲۳].

**نتیجه ۱:** مسأله کوتاه ترین زمان (۱۰) و (۱۱)، به شکل یک مسأله حساب تغییرات با نقاط مرزی ثابت هستند و تابع انتگرالده تغییراتی مسأله (۱۱) مستقل از  $x$  و به صورت  $L(y, y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy(x)}}$  است. برای اینکه  $y = y^*(x)$  جوابی از ساده ترین مسأله در حساب تغییرات باشد، لازم است که در هر نقطه از این منحنی شرط زیر برقرار باشد [۳] و [۲۱]:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0,$$

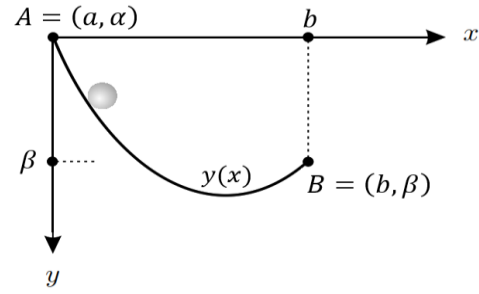
این معادله دیفرانسیل، معادله اوایلر-لاگرانژ<sup>۱</sup> نامیده می شود که شرطی لازم برای اکسترمم نسبی است و جواب های این معادله، اکسترمال<sup>۲</sup> نامیده می شود. این معادله را می توان به صورت های دیگری که با شکل اصلی معادل هستند، بازنویسی نمود. در گزاره ۲ به یکی از این انواع اشاره شده است.

**گزاره ۲:** اگر تابع انتگرالده تغییراتی  $L$  در رابطه (۱۲) مستقل از متغیر  $x$  و به شکل  $L(y, y')$  باشد، شرط اکسترمال بودن منحنی زیر است:

$$L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = C \quad \text{مقدار ثابت} \quad (14)$$

**اثبات:** در حالت کلی معادله ی اوایلر-لاگرانژ (۱۳) را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود [۳]:

$$\frac{d}{dx} \left( L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad (15)$$



شکل (۴). مسیری در امتداد منحنی دلخواه  $y(x)$  بین نقاط  $A$  و  $B$  در نقطه ابتدائی، انرژی کل از مجموع انرژی های جنبشی و پتانسیل از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$E_a = \frac{1}{2} m v_a^2 - mgy(a), \quad (5)$$

همچنین انرژی کل در یک نقطه دلخواه به طول  $a < x < b$  از منحنی، به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$E_x = \frac{1}{2} m v^2(x) - mgy(x), \quad (6)$$

از طرفی با توجه به قانون بقای انرژی و ثابت ماندن انرژی کل می توان با برقراری تساوی روابط (۵) و (۶) نتیجه زیر را به دست آورد:

$$\frac{1}{2} m v_a^2 - mgy(a) = \frac{1}{2} m v^2(x) - mgy(x), \quad (7)$$

حال می توان از تساوی (۷) رابطه مربوط به سرعت لحظه ای مهره در نقطه ای به طول  $x$  را به صورت زیر به دست آورد:

$$v(x) = \sqrt{v_a^2 + 2g(y(x) - y(a))}, \quad (8)$$

از طرفی با توجه به این رابطه که سرعت در طول یک منحنی برابر  $v = \frac{ds}{dt}$  است می توان کل زمان طی شده روی این منحنی را با استفاده از رابطه (۸) به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$T[y] = \int_A^B \frac{ds}{v} = \int_a^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{v_a^2 + 2g(y(x) - \alpha)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y(x) - \left(\alpha - \frac{v_a^2}{2g}\right)}} dx, \quad (9)$$

در نهایت، منحنی  $y(x)$  باید به گونه ای انتخاب شود که به غیر از اینکه از نقاط  $A$  و  $B$  می گذرد، تابعک (۹) را نیز کمینه نماید. به عبارتی مسأله کوتاه ترین زمان به شکل زیر بیان می گردد [۲۱]:

$$\min_y T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y(x) - \left(\alpha - \frac{v_a^2}{2g}\right)}} dx, \quad (10)$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

در حالت خاص اگر گلوله از حالت سکون و از مبدأ به مقصد  $(b, \beta)$  رها شود، مدل زیر به دست خواهد آمد:

$$\min_y T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y(x)}} dx, \quad (11)$$

$$y(0) = 0, \quad y(b) = \beta.$$

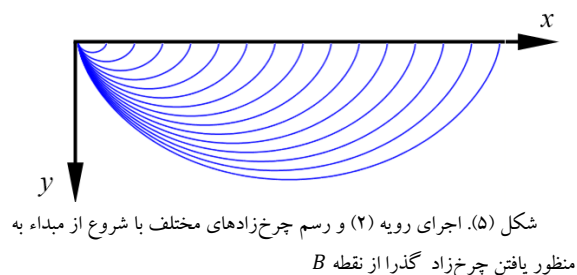
## ۴- حساب تغییرات

<sup>2</sup> External

<sup>1</sup> Euler-Lagrange equation

$$x = \frac{c}{2}(2\theta - \sin 2\theta), \quad (21)$$

در نتیجه با توجه به روابط (۱۹) و (۲۱) با تعویض متغیرهای  $t = 2\theta$  و  $a = \frac{c}{2}$  معادله پارامتری معرفی شده در رابطه (۱) حاصل می شود. در واقع معادله حاصل، نمایش پارامتری منحنی چرخزاد است، به عبارتی بهترین مسیر جهت رسیدن از نقطه  $A$  به نقطه  $B$  در کوتاه ترین زمان ممکن، پیمودن مسیر در امتداد منحنی چرخزاد است. با تبعیت از قسمت های قبل مجدداً جهت مثبت محور  $y$  را امتداد نیروی جاذبه و با استفاده از رویه (۲)، در شکل (۵) چرخزاد های مختلف با شروع از مبدا رسم شده است.



شکل (۵). اجرای رویه (۲) و رسم چرخزاد های مختلف با شروع از مبدا به منظور یافتن چرخزاد گذرا از نقطه  $B$

رویه (۲):

```
restart;
with(plots);
with(plottools);
Procedures2:=proc(N)
local x, y, t, r, P;
x:=t->r*(t-sin(t));
y:=t->r*(1-cos(t));
for r from 1 to N do
P[r]:=plot([r*(t-sin(t)),r*(1-cos(t))],
t=0..2*Pi,scaling=constrained);
od;
display({seq(P[i],i=1..N)});
end proc;
```

لازم به ذکر است که مقدار واحدی از  $a$  وجود دارد که اولین کمان این چرخزاد را وادار به عبور از نقطه انتهایی  $B$  می نماید. باید توجه نمود که اگر مقدار  $a$  بتواند از صفر تا بینهایت تغییر نماید، یک قوس از کمان چرخزاد بزرگ و بزرگ تر شده و سراسر ربع اول را مطابق شکل (۵) می پوشاند. همچنین از این نمودار که با اجرای رویه ۲ و فرض  $N = 15$  رسم شده است، می توان مقدار مناسب برای  $a$  را تعیین نمود که منحنی چرخزاد از نقطه  $B$  بگذرد.

**گزاره ۳:** مدت زمانی که طول می کشد تا مهره ی که از مبدا مختصات رها شده و بدون اصطکاک بر روی مسیری به شکل چرخزاد به طرف پایین می لغزد به نقطه زیرین  $(\pi a, 2a)$  برسد برابر با  $\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$  است.

**اثبات:** حل را با جایگذاری (۱) در رابطه (۱۱) به عنوان تابعی که می بایست تحت شرایط مرزی  $y(0) = 0$  و  $y(\pi a) = 2a$  کمینه شود، آغاز می کنیم. با توجه به اینکه از تقسیم  $\frac{dy}{dt}$  بر  $\frac{dx}{dt}$  حاصل  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$  به دست می آید، داریم:

حال اگر تابع انتگرالده  $L$  مستقل از متغیر  $x$  و به شکل  $L(y, y')$  باشد، رابطه (۱۵) به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\frac{d}{dx}(L - y' \frac{\partial L}{\partial y'}) = 0, \quad (16)$$

که معادل با رابطه (۱۴) به عنوان یک شکل خاص از معادله اوایلر-لاگرانژ است.

## ۵- جواب معادله دیفرانسیل کوتاه ترین زمان

همانطور که پیش از این نیز اشاره گردید، افراد مختلفی برای حل مسأله کوتاه ترین زمان پرداختند و روش های متعددی برای این مسأله وجود دارد. در این بخش ابتدا معادله اوایلر-لاگرانژ برای مسأله کوتاه ترین زمان به دست آمده است. در ادامه علاوه بر حل این معادله به روش های معمول یک روش ابتکاری برای حل این معادله ارائه گردیده است. این روش بر پایه تبدیل معادله دیفرانسیل مسأله کوتاه ترین زمان، به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل استوار است. در استفاده از روش پیشنهادی دو انتخاب غیر بدیهی برای تشکیل دستگاه معادلات ارئه گردیده و شکل کلی جواب عمومی در هر حالت به دست آمده است. در نهایت در بخش مقایسه مسیرهای مختلف حل مسأله کوتاه ترین زمان، مشخص گردید که تنها یکی از دو جواب به دست آمده می تواند حائز شرط پایانی مسأله کوتاه ترین زمان باشد. لازم به ذکر است که در قسمت ۶ نشان داده می شود که جواب بهینه به دست آمده در امتداد مسیر پیشنهادی دقیقاً با مقدار به دست آمده در امتداد مسیر بهینه یعنی منحنی چرخزاد برابری می کند.

۵-۱- جواب معادله اوایلر-لاگرانژ مسأله کوتاه ترین زمان

طبق نتیجه (۱) تابع انتگرالده تغییراتی مربوط به مسأله کوتاه ترین زمان به صورت  $L(y, y')$  است و معادله اوایلر-لاگرانژ طبق گزاره ۲ به شکل تساوی زیر قابل بازنویسی است:

$$L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left( \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{y(1 + (y')^2)}} \right) = C \quad (17)$$

مقدار ثابت  $C$

با ساده کردن رابطه فوق، معادله دیفرانسیل زیر به دست می آید:

$$y(1 + (y')^2) = c, \quad (18)$$

که در آن  $c = \frac{1}{2gc^2}$  و به آن معادله دیفرانسیل مسأله کوتاه ترین زمان گفته می شود. در ادامه با حل این معادله، مشخص خواهد شد که منحنی کوتاه ترین زمان دارای چه شکلی است. بدین منظور با استفاده از تعویض متغیر  $y' = \cot \theta$  و جایگذاری در (۱۸) نتیجه زیر حاصل می شود:

$$y = \frac{c}{1 + \cot^2 \theta} = c \sin^2 \theta = \frac{c}{2}(1 - \cos 2\theta), \quad (19)$$

حال با توجه به تساوی  $y' = \frac{dy}{dx} = \cot \theta$  می توان  $dx$  را با استفاده از رابطه (۱۹) به صورت زیر به دست آورد:

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2c \sin \theta \cos \theta d\theta}{\cot \theta} = 2c \sin^2 \theta d\theta = c(1 - \cos 2\theta)d\theta, \quad (20)$$

بنابراین با انتگرال گیری از طرفین رابطه (۲۰) و با توجه به شرط اولیه  $x(0) = 0$  داریم:

(۲۸)

۲-۵-۲-۲ روش دوم: با انتخاب دیگری به شرح زیر می توان دستگاه معادلاتی به شکل زیر نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - y}}, & x(0) = 0, \end{cases} \quad (29\text{-A})$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{y}}, & y(0) = 0, \end{cases} \quad (29\text{-B})$$

از حل مسأله مقدار اولیه (۲۹-ب)، جواب مربوط به منحنی  $y(t)$  به صورت زیر به دست می آید:

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{9t^2}{4}}, \quad (30)$$

در ادامه با جایگذاری (۳۰) در معادله (۲۹-آ) می توان مسأله مقدار اولیه زیر را نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \sqrt[3]{\frac{9t^2}{4}}}}, \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (31)$$

که جواب مربوط به  $x(t)$  را می توان به ترتیب زیر به دست آورد:

$$x(t) = -\frac{\sqrt[3]{12t}}{4} \sqrt{4\alpha^2 - 2\sqrt[3]{18t^2}} + \alpha^2 \arctan\left(\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{2}t}}{2\alpha^2 - \sqrt[3]{18t^2}}\right), \quad (32)$$

روش پیشنهادی با انتخاب به کار رفته در رابطه (۲۹) می توان معادله مسیر مربوط به مسأله کوتاه ترین زمان را در این حالت به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{\sqrt[3]{12t}}{4} \sqrt{4\alpha^2 - 2\sqrt[3]{18t^2}} + \alpha^2 \arctan\left(\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{2}t}}{2\alpha^2 - \sqrt[3]{18t^2}}\right), \\ y(t) = \sqrt[3]{\frac{9t^2}{4}}, \quad 0 < t < t_1. \end{cases} \quad (33)$$

## ۶- بررسی مسأله کوتاه ترین زمان در امتداد

### مسیرهای مختلف

برای پیاده سازی و مقایسه زمان در مسأله کوتاه ترین زمان، شرایطی که در آن نقطه ی ابتدائی، مبداء مختصات یعنی  $O(0,0)$  و مقصد گلوله نقطه  $A(3,1)$  است، در نظر گرفته شده است. بدین منظور مسیرهای مختلف واصل بین این دو نقطه شامل خط مستقیم، مسیر در امتداد کمان دایره و بیضی گذرا از این نقاط، مسیرهای پارامتری پیشنهادی (۲۸) و (۳۳)، همچنین مسیر چرخ زاد مورد مطالعه قرار گرفته است.

۶-۱- حرکت در امتداد مسیر خط گذرا از نقاط  $O$  و  $A$

معادله ی پارامتری خط گذرا از نقاط  $O$  و  $A$  به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$T[\text{چرخ زاد}] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{a\pi} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\frac{2}{1-\cos t}}}{\sqrt{a(1-\cos t)}} a(1-\cos t) dt = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

نتیجه ۲: منحنی چرخ زاد، خم کوتاه ترین زمان بین دو نقطه است و زمان مورد نیاز برای طی نمودن مهره مورد بحث برابر با  $\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$  است.

۵-۲-۵-۲ جواب معادله دیفرانسیل کوتاه ترین زمان با روش پیشنهادی در این روش ابتدا فرمول مشتق  $\frac{dy}{dx}$  بر اساس فرمول مشتق گیری زنجیره ای به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}, \quad (22)$$

پس با جایگذاری (۲۲) در معادله دیفرانسیل مسأله کوتاه ترین زمان (۱۸) رابطه ای به صورت زیر به دست می آید که در آن  $c = \alpha^2$  فرض شده است:

$$\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - y}}{\sqrt{y}}, \quad (23)$$

در ادامه با دو انتخاب دلخواه و محتمل، رابطه ی (۲۳) را به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل تبدیل نموده و به حل آن ها می پردازیم.

۵-۲-۱-۵-۲-۱ روش اول: با انتخاب جملات نظیر در صورت و مخرج طرفین تساوی (۲۳) یک دستگاه معادلات به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sqrt{y}, & x(0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} = \sqrt{\alpha^2 - y}, & y(0) = 0. \end{cases} \quad (24\text{-A})$$

از حل معادله (۲۴-ب) به عنوان یک مسأله مقدار اولیه، جواب مربوط به منحنی  $y(t)$  به صورت زیر به دست می آید:

$$y(t) = -\frac{1}{4}t^2 + \alpha t, \quad (25)$$

در ادامه با جایگذاری (۲۵) در معادله (۲۴-آ) می توان مسأله مقدار اولیه زیر را نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sqrt{-\frac{1}{4}t^2 + \alpha t}, \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (26)$$

که جواب مربوط به  $x(t)$  را می توان به ترتیب زیر به دست آورد:

$$x(t) = -\frac{4\alpha - 2t}{8} \sqrt{4\alpha t - t^2} - \alpha^2 \arcsin\left(1 - \frac{t}{2\alpha}\right) + \frac{\alpha^2 \pi}{2}, \quad (27)$$

با این روش و با انتخاب های به کار رفته در رابطه (۲۴) می توان معادله مسیر مربوط به مسأله کوتاه ترین زمان را به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{4\alpha - 2t}{8} \sqrt{4\alpha t - t^2} - \alpha^2 \arcsin\left(1 - \frac{t}{2\alpha}\right) + \frac{\alpha^2 \pi}{2}, \\ y(t) = -\frac{1}{4}t^2 + \alpha t, \quad 0 < t < t_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{13979}{22978}, \\ t_1 = \frac{138492}{63619}, \end{cases} \quad (۴۲)$$

حال با جایگذاری (۴۲) در (۴۰) مسیری در امتداد بیضی واصل بین نقاط  $O$  و  $A$  به دست می آید که مقدار شاخص عملکرد (۱۱) در امتداد آن به ترتیب زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} T[x(t), y(t)] &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{\sqrt{y(t)}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\frac{138492}{63619}} \frac{\sqrt{\alpha^2(\pi^2 \sin^2(t) + 4 \cos^2(t))}}{\sqrt{2a \sin(t)}} dt \\ &\approx 1.021892992. \end{aligned} \quad (۴۳)$$

۴-۶- حرکت در امتداد مسیرهای پیشنهادی

۱-۴-۶- حالت اول

در این قسمت منحنی پارامتری (۲۸) گذرا از مبداء مختصات که می بایست متناظر با  $t = t_1$  از نقطه  $A(3,1)$  بگذرد را در نظر گرفته که با توجه به  $(x(t_1), y(t_1)) = (3,1)$  دستگاه معادلات زیر را نتیجه می دهد:

$$\begin{cases} -\frac{4\alpha - 2t_1}{8} \sqrt{4\alpha t + 1 - \alpha^2} - \alpha^2 \arcsin(1 - \frac{t_1}{2\alpha}) + \frac{\alpha^2 \pi}{2} = 3, \\ -\frac{1}{4} t_1^2 + \alpha t_1 = 1. \end{cases} \quad (۴۴)$$

جواب دستگاه معادلات (۴۴) به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{cases} c_1 = \frac{23873}{21444}, \\ t_1 = \frac{81822}{25529}, \end{cases} \quad (۴۵)$$

به عبارتی با جایگذاری (۴۵) در (۲۸)، مسیر پیشنهادی واصل بین نقاط  $O$  و  $A$  به دست می آید که مقدار شاخص عملکرد (۱۱) در امتداد این مسیر به ترتیب زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} T[x(t), y(t)] &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\frac{81822}{25529}} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{\sqrt{y(t)}} dt \\ &\approx 1.018832360. \end{aligned} \quad (۴۶)$$

۲-۴-۶- حالت دوم

در این قسمت منحنی پارامتری (۳۳) گذرا از مبداء مختصات که می بایست متناظر با  $t = t_1$  از نقطه  $A$  نیز بگذرد را در نظر گرفته که با توجه به  $(x(t_1), y(t_1)) = (3,1)$  دستگاه معادلات زیر را نتیجه می دهد:

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt[3]{12t_1}}{4} \sqrt{4\alpha^2 - 2\sqrt[3]{18t_1^2}} + \alpha^2 \arctan\left(\frac{\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2t_1}}}{2\alpha^2 - \sqrt[3]{18t_1^2}}\right) = 3, \\ \sqrt[3]{\frac{9t_1^2}{4}} = 1, \end{cases} \quad (۴۷-ا)$$

با حل معادله (۴۷-ب)، جواب  $t_1 = \frac{2}{3}$  به دست می آید که با جایگذاری در معادله (۴۷-ا)، معادله جبری زیر حاصل خواهد شد:

$$\sqrt{\alpha^2 - 1} + \alpha^2 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}\right) = 3, \quad (۴۸)$$

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = \frac{t}{3}, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 3. \quad (۳۴)$$

به عبارتی رابطه (۳۴) خط واصل بین نقاط  $O$  و  $A$  است که مقدار شاخص عملکرد (۱۱) در امتداد این مسیر به ترتیب زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} T[x(t), y(t)] &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{t_1} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{\sqrt{y(t)}} dt \\ &= \sqrt{\frac{5}{3g}} \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{20}{g}} \approx 1.428571428. \end{aligned} \quad (۳۵)$$

۲-۶- حرکت در امتداد مسیر دایره گذرا از نقاط  $A$  و  $O$

در این قسمت منحنی گذرا از مبداء مختصات  $O$  را دایره ای به مرکز  $(\alpha, 0)$  و شعاع  $\alpha$  به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} x(t) = \alpha(1 - \cos(t)), \\ y(t) = \alpha \sin(t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad (۳۶)$$

با توجه به اینکه دایره (۳۶) می بایست متناظر با  $t = t_1$  از نقطه  $A(3,1)$  بگذرد دستگاه معادلاتی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\begin{cases} x(t_1) = \alpha(1 - \cos(t_1)) = 3, \\ y(t_1) = \alpha(\sin(t_1)) = 1, \end{cases} \quad (۳۷)$$

جواب دستگاه معادلات (۳۷) به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{5}{3}, \\ t_1 = \pi - \arccos(\frac{4}{5}), \end{cases} \quad (۳۸)$$

به عبارتی با جایگذاری (۳۸) در (۳۶) مسیر دایره ای واصل بین نقاط  $O$  و  $A$  به دست می آید که مقدار شاخص عملکرد (۱۱) در امتداد این مسیر به ترتیب زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} T[x(t), y(t)] &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{t_1} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{\sqrt{y(t)}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\pi - \arccos(\frac{4}{5})} \frac{\sqrt{2\alpha(1 - \cos(t))}}{\sqrt{\alpha \sin(t)}} dt \\ &\approx 1.058085217. \end{aligned} \quad (۳۹)$$

۳-۶- حرکت در امتداد مسیر بیضی گذرا از نقاط  $A$  و  $O$

معادله بیضی گذرا از مبداء مختصات  $O$  به مرکز  $(\pi\alpha, 0)$  و شعاع های  $\pi\alpha$  و  $2\alpha$  به ترتیب در امتداد محور  $x$  و  $y$  به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\begin{cases} x(t) = \pi\alpha(1 + \cos(t)), \\ y(t) = 2\alpha \sin(t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (۴۰)$$

با توجه به اینکه بیضی (۴۰) می بایست متناظر با  $t = t_1$  از نقطه  $A(3,1)$  بگذرد دستگاه معادلاتی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} x(t_1) = \pi\alpha(1 + \cos(t_1)) = 3, \\ y(t_1) = 2\alpha(\sin(t_1)) = 1, \end{cases} \quad (۴۱)$$

با حل دستگاه معادلات (۴۱) می توان مقادیر مجهول  $\alpha$  و  $t_1$  را به صورت زیر محاسبه نمود:



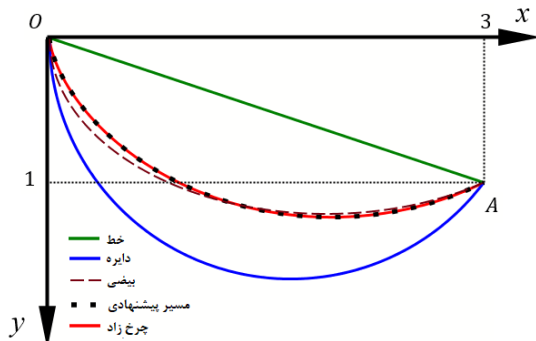
## ۶-۶- مقایسه جواب های به دست آمده در امتداد مسیرهای مختلف برای مسأله کوتاه ترین زمان

مقایسه جواب به دست آمده در امتداد مسیرهای مختلف در جدول (۱) آمده است و در هر مورد خطای نسبی تقریب نیز محاسبه گردیده است.

جدول (۱): شاخص عملکرد مسأله کوتاه ترین زمان امتداد مسیرهای مختلف

| خطای نسبی  | مقدار عملکرد | شاخص | مسیر                 |
|------------|--------------|------|----------------------|
| $4.0E - 1$ | 1.428571428  |      | خط مستقیم            |
| $3.9E - 2$ | 1.058085217  |      | دایره                |
| $3.0E - 3$ | 1.021892992  |      | بیضی                 |
| 0          | 1.018832360  |      | مسیر پیشنهادی        |
| 0          | 1.018832360  |      | مسیر بهینه (چرخ زاد) |

همچنین مسیرهای مختلف پیموده شده بین نقاط ابتدائی و انتهائی در مقایسه با مسیر دقیق چرخ زاد در شکل (۷) رسم شده که نشان از منطبق بودن مسیر پیشنهادی با مسیر بهینه در امتداد منحنی چرخ زاد دارد.



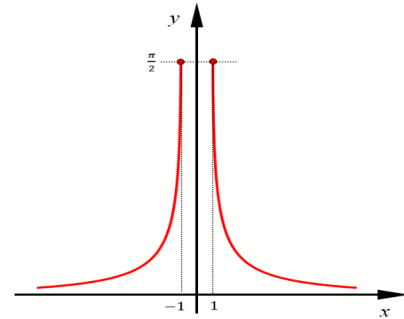
شکل (۷): مسیرهای مختلف در حل مسأله کوتاه ترین زمان در مقایسه با

مسیر بهینه چرخ زاد

## ۷- نتیجه گیری

در این مقاله، بعد از بیان مختصری از تاریخچه مسأله کوتاه ترین زمان به بررسی ویژگی های منحنی چرخ زاد پرداخته شد. در ادامه پس از معرفی مسأله حساب تغییرات به بررسی معادله دیفرانسیل اولر-لاگرانژ به عنوان شرط لازم برای حل مسائل حساب تغییرات پرداخته شد. همچنین معادله دیفرانسیل اولر-لاگرانژ متناظر با مسأله کوتاه ترین زمان تشکیل و جواب آن به دست آمد که حاکی از این است که جواب بهینه این مسأله، منحنی چرخ زاد است. همچنین یک روش ابتکاری برای حل معادله دیفرانسیل اولر-لاگرانژ بر پایه تبدیل آن به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل ارائه گردید. در نهایت در بخش مقایسه مسیرهای مختلف حل مسأله کوتاه ترین زمان، مشخص گردید که جواب به دست آمده در قالب روش پیشنهادی با مقدار به دست آمده در امتداد مسیر بهینه یعنی منحنی چرخ زاد برابری می کند.

با بررسی تابع  $f(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - 1} + \alpha^2 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}\right)$  دامنه این تابع به صورت  $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  و برد آن به صورت  $R_f = (0, \frac{\pi}{2}]$  بوده و همانطور که شکل (۶) مشخص است، معادله (۴۸) فاقد جواب است. بدین ترتیب، این انتخاب برای تشکیل دستگاه معادلات دیفرانسیل، بر خلاف حالت قبل فاقد جواب است. به عبارتی مسیر پارامتری در این حالت، منحنی واصل بین نقاط  $O$  و  $A$  را تشکیل نمی دهد و در نتیجه امکان تخمین مقدار شاخص عملکرد فراهم نیست.



شکل (۶): منحنی  $f(\alpha)$  به منظور نمایش عدم وجود جواب در معادله (۴۸)

به صورت  $f(\alpha) = 0$

## ۵-۶- حرکت در امتداد منحنی چرخ زاد گذرا از نقاط $O$ و $A$

در این قسمت منحنی چرخ زاد گذرا از مبداء مختصات  $O$  با دایره ی مولدی به شعاع  $\alpha$  را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} x(t) = \alpha(t - \sin(t)), \\ y(t) = \alpha(1 - \cos(t)), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (49)$$

در این قسمت منحنی پارامتری (۴۹) گذرا از مبداء مختصات که می بایست متناظر با  $t = t_1$  از نقطه  $A(3,1)$  بگذرد را در نظر گرفته که دستگاه معادلاتی را به صورت زیر نتیجه می دهد:

$$\begin{cases} x(t_1) = \alpha(t_1 - \sin(t_1)) = 3, \\ y(t_1) = \alpha(1 - \cos(t_1)) = 1, \end{cases} \quad (50)$$

با حل دستگاه معادلات (۵۰) می توان مقادیر مجهول  $\alpha$  و  $t_1$  را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{6138}{9905}, \\ t_1 = \frac{63959}{15786}, \end{cases} \quad (51)$$

حال با جایگذاری (۵۱) در (۴۹) مسیری در امتداد چرخ زاد واصل بین نقاط  $O$  و  $A$  به دست می آید که مقدار شاخص عملکرد (۱۱) در امتداد این مسیر به ترتیب زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} T[x(t), y(t)] &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\frac{63959}{15786}} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{\sqrt{y(t)}} dt \\ &\approx 1.018832360. \end{aligned} \quad (52)$$

این مقدار، همان مقدار مورد انتظار به دست آمده در گزاره (۳) و برابر با  $t_1 \sqrt{\frac{a}{g}} \approx 1.018832360$  است.

## مراجع

- [17] De Sousa, L. G. B., & Lima, L. P. F. (2024). An educational product based on the brachistochrone problem. *International Journal of Professional Business Review: Int. J. Prof. Bus. Rev.*, 9(5), 2.
- [18] Martin, J. (2010). The Helen of geometry. *The College Mathematics Journal*, 41(1), 17-28.
- [19] Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., Giordano, F. R., & Korkmaz, R. (2010). *Thomas' calculus* (Vol. 12). Boston: Pearson.
- [20] Mallik, A. K. (2008). Optimization problems in elementary geometry. *Resonance*, 13, 561-582.
- [21] Russak, I. B. (2002). *Calculus of variations MA 4311 lecture notes*.
- [22] Fleming, W. H., & Rishel, R. W. (2012). *Deterministic and stochastic optimal control* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.
- [23] Kafash, B. (2024). Historical Approaches and Modern Methods in Analyzing the Brachistochrone Problem. *Mathematics and Society*, doi: 10.22108/msci.2024.142284.1678 (In Persian).
- [1] Bernoulli, J. (1697). *Jacobi Bernoulli solutio problematum fraternorum. Acta Eruditorum*, Leipzig, 214, 1697.
- [2] Galilei, G. (1914). *Dialogues concerning two new sciences*. Dover.
- [3] Brunt, B. (2004). *The Calculus of Variations*. Springer-Verlag, New York.
- [4] Bell, E. T. (1986). *Men of mathematics*. Simon and Schuster, New York.
- [5] Chandrasekhar, S. (2003). *Newton's Principia for the common reader*. Oxford University Press.
- [6] Euler, L. (1744). *The Method of Finding Plane Curves that Show Some Property of Maximum or Minimum*, Lausanne and Geneva.
- [7] Goldstine, H. H. (2012). *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.
- [8] Nishiyama, Y. (2013). The brachistochrone curve: The problem of quickest descent. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 82(3), 409-419.
- [9] Brookfield, G. (2010). Yet another elementary solution of the brachistochrone problem. *Mathematics Magazine*, 83(1), 59-63.
- [10] Lemak, S. S., & Belousova, M. D. (2021). The brachistochrone problem with constraints on the curvature of the trajectory. *IFAC-PapersOnLine*, 54(13), 437-442.
- [11] Kushner, H. J., Dupuis, P. (1992). *Numerical methods for stochastic control problems in continuous time*, Springer, New York.
- [12] Kafash, B., Nikoeenezhad, Z., & Delavarkhalafi, A. (2016). An iterative algorithm for solving stochastic optimal control via the Markov chain approximation. *Journal of Control*, 10(2), 35-43. (In Persian)
- [13] Ciarlet, P. G., & Mardare, C. (2022). On the Brachistochrone Problem. *Communications in Mathematical Analysis and Applications*, 1(1), 213-240.
- [14] Abdul-Hafidh, E. H. (2022). A new approach to solve the Brachistochrone problem by constructing a lattice unit cell. *Heliyon*, 8(12).
- [15] Benham, G. P., Cohen, C., Brunet, E., & Clanet, C. (2020). Brachistochrone on a velodrome. *Proceedings of the Royal Society A*, 476 (2238), 20200153.
- [16] Sun, P., Liu, Y., & Huang, X. (2022). Exploring the brachistochrone (shortest-time) path in fire spread. *Scientific Reports*, 12(1), 13600.