

طراحی یک روینگر تطبیقی مقاوم و غیر شکننده با خطای فیلتر شده PI برای دسته‌ای از سامانه‌های غیرخطی تاخیردار

مهدی پورقلی^۱، وحید جوهری مجد^۲

^۱ دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، pourgholi@modares.ac.ir

^۲ دانشیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، majd@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۸/۱۲/۲۵، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۹/۳/۱)

چکیده: در این مقاله مساله تخمین همزمان پارامتر و حالت در سامانه‌های دارای عدم قطعیت تاخیردار با حضور اغتشاش در بهره‌ی روینگر مورد بررسی قرار گرفته است. فرض بر آن است که سامانه نسبت به پارامترهای نامعلوم خطی و نسبت به متغیرهای حالت غیر خطی باشد. یک روینگر غیرخطی تطبیقی مقاوم و غیر شکننده با خطای فیلتر شده‌ی تناسبی-انتگرالی (PI) برای تخمین همزمان بردارهای پارامتر و حالات سامانه‌ی طراحی شده و پایداری آن بر پایه روش لیاپانوف استخراج گردیده است. بهره‌ی بهینه این روینگر به‌طوری‌که بتواند اثر اغتشاش را در تخمین کمینه نماید، از میان مجموعه جوابهایی که می‌تواند شرایط پایداری روینگر را فراهم کند به‌روش نابرابری‌های ماتریسی خطی بدست آورده می‌شود. یک مثال عددی به‌منظور نشان دادن تأثیر روش پیشنهادی ارائه و نتایج شبیه‌سازی آن گزارش گردیده است.

کلمات کلیدی: روینگر غیرخطی، سامانه‌های تاخیردار، روینگر تطبیقی، تخمین مقاوم، طراحی مقاوم، نابرابری‌های ماتریسی خطی.

A New Non-fragile H-infinity PI-Filtered-Error Adaptive Observer for a Class of Nonlinear Time-Delay Systems

Mahdi Pourgholi, Vahid Johari Majd

Abstract: In this paper, parameter and state estimation problem in time delay uncertain systems in the presence of observer gain perturbations is discussed which are linear in unknown parameters and nonlinear in states. A nonlinear non-fragile proportional-integral filtered-error adaptive observer is designed, and its stability conditions based on Lyapunov technique are derived. The optimal gain with maximum disturbance attenuation level among a solution set that satisfies the observer stability conditions is derived using linear matrix inequality approach. A numerical example is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed method and the simulation results are provided.

Keywords: Nonlinear observer; time delay system; adaptive observer; robust estimation; H-infinity design; linear matrix inequality.

۱- مقدمه

رویتگرهای تطبیقی^۱ برای غلبه بر نبود اطلاعات کافی در مورد پارامترهای سامانه در مساله تخمین حالت بکارگرفته می‌شوند. برای سامانه‌های غیرخطی با پارامترهای نامعلوم روینگرهای تطبیقی مختلفی توسط پژوهشگران معرفی گردیده‌اند [۲-۴-۵-۶]. در مرجع [۲] نویسندگان اولین تجربیات را در مورد روینگرهای غیرخطی گزارش نمودند که در آن تخمین بردار حالت سامانه با استفاده از یک قانون

از مهمترین مشکلات طراحی روینگرهای کاربردی در اغلب سامانه‌های فیزیکی، دینامیک غیرخطی و عدم قطعیت مدل سامانه‌ها است که این عدم قطعیت می‌تواند ناشی از وجود برخی پارامترهای فیزیکی با مقادیر نامعلوم یا تغییر در پارامترهای سامانه بدلیل مسائلی مانند پیری، تعمیرات اساسی یا تغییر در شرایط بهره برداری و یا ناشی از کمیتهایی با تغییرات سریع مانند اغتشاشات خارجی یا عناصر غیرخطی مدل نشده باشد [۱].

^۱ Adaptive Observers

مقاوم برای یک سامانه‌ی غیرخطی که تابع غیرخطی آن دارای شرایط بسیار محدود کننده‌ای است ارائه گردیده‌است.

بحث شکنندگی^۳ در طراحی روینگرها به آشنفنگی‌های کوچک در بهره‌ی روینگر اطلاق می‌گردد که منجر به واگرایی تخمین می‌گردند [۱۳]. از آنجایی که بهره‌ی روینگر عموماً از محاسبات برون خط^۴ تعیین می‌گردد، در بسیاری از کاربردهای عملی امکان وجود تغییرات اندکی در بهره به هنگام پیاده‌سازی وجود دارد و بنابراین لازم است تا روینگر نسبت به این تغییرات مقاومت داشته باشد. در مرجع [۱۴] نشان داده شده که حتی با اعمال آشنفنگی کوچک در ضرایب بهره کنترلگر، سامانه‌ی حلقه بسته می‌تواند ناپایدار گردد. پس از آن بسیاری از محققین توجه خود را به این موضوع معطوف داشتند [۱۵-۱۶-۱۷]. در مرجع [۱۵] مروری بر روشهای طراحی غیر شکننده ارائه گردیده است. در [۱۶] یک راه حل مبتنی بر نابرابری‌های خطی ماتریسی برای طراحی روینگر غیرشکننده و غیرخطی ارائه گردیده و در [۱۷] یک روش مبتنی بر نابرابری‌های ماتریسی خطی برای بدست آوردن بهره‌ی روینگر که به اغتشاش تصادفی آلوده است ارائه شده است.

در این مقاله یک سامانه‌ی غیرخطی دارای عدم قطعیت و تاخیردار با بخشهای غیرخطی لپشیتز و دارای پارامتر نامعلوم تک‌ای ثابت^۵ و محدود را در نظر می‌گیریم. هدف ما تعیین یک روینگر تطبیقی مقاوم با خطای فیلتر شده PI مبتنی بر نابرابری‌های ماتریسی خطی است که در مقابل تغییرات محدود بهره مقاوم باشد. روینگر پیشنهادی تخمین را به مقادیر مطلوب همگرا می‌سازد و در صورتیکه شرایط تحریک پایا برقرار باشد تخمین پارامترها نیز به مقادیر واقعی میل خواهد نمود. بر خلاف مقالات [۸] و [۱۰]، فرم کلی تری برای سامانه‌ی غیرخطی در نظر گرفته شده به طوری که، عنصر غیرخطی می‌تواند به ورودی و تمام متغیرهای حالت سامانه وابسته باشد و همچنین قانون تطبیقی در تخمین پارامتر توری اصلاح شده است که هنگامیکه پارامترها از مرز تعیین شده خارج می‌گردند، مشتق تابع لیاپانوف در فضای تخمین پارامتر منفی باقی بماند. در این مقاله، روش انتخاب بهره در مرجع [۱۰] را گسترش داده‌ایم و ورودی اغتشاش و بروز آشنفنگی‌های محدود در هر دو بهره تناسبی و انتگرالی در روینگر را در نظر گرفته‌ایم. علاوه بر آن برخلاف اغلب کارهای انجام شده در زمینه روینگرهای تطبیقی [۱-۱۰] سامانه را تاخیردار فرض کرده و برخلاف مراجع [۱۱-۱۲] دسته‌ی وسیع تری از سامانه‌های غیرخطی با پارامترهای نامعلوم را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. بهره‌ی بهینه روینگر از میان مجموعه جوابهایی که می‌تواند شرایط پایاداری را فراهم آورد با بکارگیری روش H_{∞} توری بدست آورده

تطبیقی برخط^۱ برای پارامترها انجام گردید. نویسندگان در مراجع [۳-۵] تمرکز خود را بر روی سامانه‌ی غیرخطی که با یک نگاشت قابل تبدیل به دینامیکی که نسبت به حالت‌های غیر قابل اندازه‌گیری سامانه، خطی و نسبت به ورودی و خروجی‌های قابل اندازه‌گیری غیرخطی باشد، قرار داده‌اند. روینگر تطبیقی طراحی شده برای این سامانه‌ی جدید، همگرایی بردارهای حالت و پارامتر را در صورتیکه شرایط تحریک پایا برقرار باشد تضمین می‌کند. در مقالات فوق‌الذکر قسمت غیرخطی سامانه فقط وابسته به خروجی‌های قابل اندازه‌گیری و ورودی فرض شده، و از اغتشاشات خارجی نیز صرف‌نظر گردیده است.

این روش طراحی در مراجع [۷] و [۸] اندکی توسعه داده شد، به طوری که بخش‌های غیرخطی نه تنها به حالت‌های قابل اندازه‌گیری بلکه به تمام بردار حالت وابسته باشد و شرایط لپشیتز را ارضاء نمایند. در این مقالات یک الگوریتم قانونمند برای تعیین امکان پایاداری مجانبی روینگر تطبیقی ارائه گردیده است.

همانطور که در مراجع [۸-۹] اشاره شده است بروز یک اغتشاش کوچک می‌تواند منجر به واگرایی پارامترها به سمت بینهایت گردد، بنابراین برای بهبود ساختار روینگرهای تطبیقی به منظور جلوگیری از واگرایی تخمین پارامترها، روشهایی توسط پژوهشگران ارائه گردید. برای مثال در مرجع [۸] و [۹] به منظور رسیدن به این هدف روینگرهای تطبیقی مقاوم ارائه گردیده است که در این مقالات نیز فرض بر آن است که عناصر غیرخطی سامانه فقط به ورودی و خروجی‌های قابل اندازه‌گیری وابسته باشد.

از دیگر مشکلاتی که اصولاً با طراحی روینگرها همراه است، چگونگی انتخاب بهره‌ی بهینه برای روینگر از میان مجموعه جوابهایی است که می‌تواند شرایط پایاداری روینگر را تامین نماید که پژوهشهای اندکی در این زمینه انجام گردیده است [۹-۱۰]. در مرجع [۱۰] یک روینگر تطبیقی تناسبی-انتگرالی (PI) به منظور بهبود کارایی و مقاومت تخمین حالت ماندگار در مقابل اغتشاش ارائه شده که بهره‌ی روینگر را از طریق حل شرایط نابرابری‌های ماتریسی خطی بدست می‌آورد. در این مقاله نیز تابع غیرخطی تابعی از متغیرهای حالت قابل اندازه‌گیری فرض شده است.

از طرفی دیگر در اغلب سامانه‌های فیزیکی با پدیده تاخیر زمانی مواجه هستیم، پژوهشهای زیادی در زمینه طراحی روینگر برای سامانه‌های تاخیردار توسط پژوهشگران صورت پذیرفته است که از آن جمله می‌توان به مراجع [۱۱] و [۱۲] اشاره نمود. نویسندگان در مرجع [۱۱] یک روینگر مقاوم و غیرشکننده^۲ برای سامانه‌ی تاخیردار خطی ارائه نموده‌اند و در مرجع [۱۲] یک کنترلگر مود لغزشی برپایه روینگر

^۳ Fragility

^۴ Off-line

^۵ Piecewise constant

^۱ Online

^۲ Non-fragile

$$\|w(t)\|_2 \leq \beta \quad (6)$$

هم ۱- [۱۸]: اگر x و y بردارهای حقیقی هم اندازه باشند، آنگاه برای هر اسکالر $\varepsilon > 0$ نابرابری زیر برقرار است:

$$2x^T y \leq \varepsilon x^T x + \varepsilon^{-1} y^T y \quad (7)$$

۳- طراحی روینگر PI تطبیقی مقاوم و غیر شکننده

یک روینگر تطبیقی غیرخطی به فرم زیر را در نظر می‌گیریم [۷]:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + A_1\hat{x}(t-h) + \phi(\hat{x}, \hat{x}(t-h), u) \\ &+ bf(\hat{x}, \hat{x}(t-h), u)\hat{\theta} + [L + \Delta_1(t)](y - C\hat{x}) \\ &+ [K + \Delta_2(t)]z \\ \dot{z} &= -\rho z + H(y - C\hat{x}) \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن \hat{x} و $\hat{\theta}$ به ترتیب تخمین بردار پارامتر و بردار حالت است و L و K به ترتیب بهره‌های روینگر تناسبی و انتگرالی هستند. بردار حالت اضافی $z \in \mathbb{R}^m$ خطای تخمین خروجی فیلتر شده مطابق معادله دوم در (۸) می‌باشد. پارامترهای طراحی شامل ماتریس H و عدد مثبت ρ می‌باشد. $\Delta_1(t)$ و $\Delta_2(t)$ اغتشاشات جمعی روی بهره‌ی خطا با حدود معلوم $\|\Delta_1(t)\| \leq r_1$ و $\|\Delta_2(t)\| \leq r_2$ هستند و اغتشاش خارجی شرط $\|w\|_2 \leq \beta$ را برآورده می‌سازد. معادله دینامیک خطای روینگر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= (A - LC - \Delta_1 C)\tilde{x} + A_1\tilde{x}(t-h) \\ &+ \phi(x, x(t-h), u) - \phi(\hat{x}, \hat{x}(t-h), u) \\ &+ bf(x, x(t-h), u)\theta - bf(\hat{x}, \hat{x}(t-h), u)\hat{\theta} \\ &- (K + \Delta_2)z + w \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن $\tilde{x} = x - \hat{x}$ خطای تخمین حالت است. برای کاهش اثرات اغتشاش بر روی خطای تخمین حالت، نرم H_{∞} را از w به \tilde{x} و z به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\eta = \sup_{\|w\| \neq 0} \frac{\|\tilde{x}\|_2^2 + \|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} \quad (10)$$

قضیه زیر شرایط کافی برای پایداری مقاوم روینگر PI تطبیقی را

بدست می‌دهد:

قضیه ۱: قانون تطبیقی پارامتر به صورت زیر:

شده که اثر اغتشاش در تخمین کمینه گردد و در نهایت نتایج نظری بدست آورده شده را در یک مثال عددی بررسی نموده‌ایم.

ساختار این مقاله به صورت زیر سازماندهی گردیده است: در قسمت دوم به تشریح مساله پرداخته می‌شود. در قسمت سوم طراحی روینگر PI تطبیقی مقاوم و غیر شکننده ارائه شده است. مثال عددی در قسمت چهارم مقاله آورده شده و در نهایت در قسمت پنجم، نتایج حاصل از مقاله بیان گردیده است.

۲- تشریح مساله

سامانه‌ی غیرخطی تاخیر دار را به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + A_1x(t-h) + \phi(x, x(t-h), u) \\ &+ bf(x, x(t-h), u)\theta + w \\ y &= Cx \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-h, 0] \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ ، $u \in \mathbb{R}^q$ ، $y \in \mathbb{R}^m$ و $\theta \in \mathbb{R}^p$ به ترتیب بردار حالات، ورودی، خروجی و بردار پارامترها هستند. h اندازه تاخیر که ثابت اما نامعلوم است و $b \in \mathbb{R}^{m \times m}$ و $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ثوابت ماتریسی و $w \in \mathbb{R}^m$ بردار اغتشاش ورودی و $\varphi(t)$ تابع اولیه برداری پیوسته است و $f: [\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times p}$ و $\phi: [\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q] \rightarrow \mathbb{R}^n$ توابع غیرخطی لپشیتز در x به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} &\|\phi(x_1, x_1(t-h), u) - \phi(x_2, x_2(t-h), u)\| \\ &< \gamma_{11}\|x_1 - x_2\| + \gamma_{12}\|x_1(t-h) - x_2(t-h)\| \end{aligned} \quad (2)$$

و

$$\begin{aligned} &\|f(x_1, x_1(t-h), u) - f(x_2, x_2(t-h), u)\| \\ &< \gamma_{21}\|x_1 - x_2\| + \gamma_{22}\|x_1(t-h) - x_2(t-h)\| \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن γ_{11} و γ_{12} و γ_{21} و γ_{22} ثوابت لپشیتز می‌باشند. بازای تمام $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ سامانه‌ی (۱) نسبت به θ خطی و نسبت به x غیرخطی و لپشیتز است. این دسته از سامانه‌ها دسته‌ی نسبتاً وسیعی از سامانه‌های غیرخطی را پوشش می‌دهد [۷]. فرض کرده‌ایم که بردار پارامتر نامعلوم، تکه‌ای ثابت و محدود و فاصله آن نسبت به مقدار نامی پارامتر (θ_0) نیز محدود باشد:

$$\|\theta\| \leq \gamma_3 \quad (4)$$

$$\|\theta - \theta_0\| \leq \gamma_4 \quad (5)$$

و اغتشاش w به صورت زیر محدود باشد:

$$V = \tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + \int_{t-h}^t \tilde{x}^T(s) P_2 \tilde{x}(s) ds + z^T M z + \tilde{\theta}^T \Gamma \tilde{\theta} \quad (14)$$

که در آن $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ خطای تخمین پارامتر است. با مشتق گیری از معادله (۱۴) و استفاده از معادله (۹) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \tilde{x}^T \left[(A-LC)^T P_1 + P_1 (A-LC) \right] \tilde{x} \\ & + 2\tilde{x}^T P_1 A_1 \tilde{x}(t-h) - 2\tilde{x}^T \left[C^T \Delta_1^T P_1 \right] \tilde{x} \\ & - 2z^T \Delta_2^T P_1 \tilde{x} \\ & + 2\tilde{x}^T P_1 \left[\phi(x, x(t-h), u) - \phi(\hat{x}, \hat{x}(t-h), u) \right] \\ & + 2 \left[bf(x, x(t-h), u) \theta - bf(\hat{x}, \hat{x}(t-h), u) \theta \right]^T P_1 \tilde{x} \\ & + \tilde{x}^T (F^T - Q) z + z^T (F - Q^T) \tilde{x} \\ & + \tilde{x}^T P_2 \tilde{x} - \tilde{x}^T (t-h) P_2 \tilde{x}(t-h) \\ & + 2\tilde{\theta}^T \Gamma \dot{\tilde{\theta}} - 2z^T G z + \tilde{x}^T P_1 w + w^T P_1 \tilde{x} \end{aligned} \quad (15)$$

که در آن $G = \rho M$ و $F = MHC$ ، $Q = P_1 K$ است. با بکارگیری لم ۱ بر روی قسمتهای سوم، چهارم و پنجم به ترتیب با ϵ_1 ، ϵ_2 و ϵ_3 در معادله (۱۵) و جایگذاری $\hat{\theta} = \theta - \tilde{\theta}$ در قسمت ششم معادله (۱۵) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \tilde{x}^T \left[(A-LC)^T P_1 + P_1 (A-LC) \right] \tilde{x} \\ & + 2\tilde{x}^T P_1 A_1 \tilde{x}(t-h) \\ & + \tilde{x}^T \left[\epsilon_1 C^T \Delta_1^T \Delta C \tilde{x} + \epsilon_1^{-1} P_1 P_1 \right] \tilde{x} \\ & + \epsilon_2 z^T \Delta_2^T \Delta_2 z + \epsilon_2^{-1} \tilde{x}^T P_1 P_1 \tilde{x} \\ & + \tilde{x}^T (\epsilon_3 \gamma_{11}^2 + \epsilon_3^{-1} P_1 P_1) \tilde{x} \\ & + \tilde{x}^T (t-h) \epsilon_3 \gamma_{12}^2 \tilde{x}(t-h) \\ & + 2 \left[bf(x, x(t-h), u) \theta - bf(\hat{x}, \hat{x}(t-h), u) \theta \right]^T P_1 \tilde{x} \\ & + 2 \left[bf(\hat{x}, \hat{x}(t-h), u) \tilde{\theta} \right]^T P_1 \tilde{x} + \tilde{x}^T (F^T - Q) z \\ & + z^T (F - Q^T) \tilde{x} + 2\tilde{\theta}^T \Gamma \dot{\tilde{\theta}} \\ & - 2z^T G z + \tilde{x}^T P_1 w + w^T P_1 \tilde{x} \\ & + \tilde{x}^T P_2 \tilde{x} - \tilde{x}^T (t-h) P_2 \tilde{x}(t-h) \end{aligned} \quad (16)$$

همچنین با بکارگیری دوباره لم ۱ در قسمت هشتم نابرابری (۱۶) با ϵ_4 و استفاده از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که:

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma^{-1} (f(\hat{x}, \hat{x}(t-h), u)^T C \tilde{x}) - \sigma \Gamma^{-1} (\hat{\theta} - \theta_0) \quad (11)$$

را در نظر بگیریم که در آن $\Gamma = \Gamma^T > 0$ ماتریس ثابت دلخواه و θ_0 مقدار معلوم و تخمین اولیه ما از مقدار پارامتر است و:

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{if } \|\hat{\theta} - \theta_0\| < \gamma_4 \\ \sigma_0 \left(\frac{\|\hat{\theta} - \theta_0\|}{\gamma_4} - 1 \right) & \text{if } \gamma_4 \leq \|\hat{\theta} - \theta_0\| \leq 2\gamma_4 \\ \sigma_0 & \text{if } \|\hat{\theta} - \theta_0\| > 2\gamma_4 \end{cases} \quad (12)$$

که σ_0 اسکالر ثابت و γ_4 در (۵) تعریف شده است. اگر اعداد مثبت حقیقی $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ و ماتریسهای $P_1 = P_1^T > 0$ و $P_2 = P_2^T > 0$ و $G = G^T > 0$ و F و Q وجود داشته باشند به طوری که:

Minimize η
subject to $P_1 b = C^T$ and $\rho > 0$ and

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1 & A_1 P_1 & F^T - Q & P_1 & P_1 & P_1 & P_1 & P_1 \\ P_1 A_1^T & \Lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F - Q^T & 0 & \epsilon_2 r_2^2 I - 2G + I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & -\eta I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 & -\epsilon_1 I & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\epsilon_2 I & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\epsilon_3 I & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\epsilon_4 I \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = & A^T P_1 + P_1 A - C^T S - S^T C + \\ & (\epsilon_3 \gamma_{11}^2 + \epsilon_4 \gamma_{21}^2 \gamma_3^2 \|b\|^2) I + \epsilon_1 C^T r_1^2 C + I + P_2 \\ \Lambda_2 = & \epsilon_3 \gamma_{12}^2 + \epsilon_4 \gamma_{22}^2 \gamma_3^2 \|b\|^2 - P_2 \end{aligned}$$

و $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, \gamma_3$ به ترتیب در (۲)، (۳) و (۴) تعریف شده‌اند، آنگاه با بهره‌های تناسبی و انتگرالی $L = P_1^{-1} S^T$ و با پارامتر $K = P_1^{-1} Q$ که در آن $M = \rho^{-1} G$ و $\text{pinv}(\cdot)$ نشان دهنده شبه معکوس است، دینامیک خطای (۱۱) برای تمام اغتشاشات در بهره که شرایط $\|\Delta_1(t)\| \leq r_1$ و $\|\Delta_2(t)\| \leq r_2$ را داشته باشند، با نرم H_∞ کمینه می‌گردد.

اقتبات: نامزد تابع لیاپانوف برای دینامیک خطا (۹) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$N = -\frac{\sigma_0}{\gamma_4} \|\hat{\theta} - \theta_0\| \left(\gamma_4 - \|\hat{\theta} - \theta_0\| \right)^2 \leq 0.$$

و برای $\|\hat{\theta} - \theta_0\| > 2\gamma_4$ داریم:

$$N \leq -\sigma_0 \gamma_4 \|\hat{\theta} - \theta_0\| \leq 0.$$

بنابراین نابرابری زیر در حالت کلی برقرار است:

$$2\sigma\tilde{\theta}^T(\hat{\theta} - \theta_0) \leq 0 \quad (۲۱)$$

با جایگذاری نابرابری بالا در (۱۸) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \tilde{x}^T \left[\Omega_1 + (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} + \varepsilon_3^{-1} + \varepsilon_4^{-1}) P_1 P_1 \right] \tilde{x} \\ & + 2\tilde{x}^T P_1 A_1 \tilde{x}(t-h) + \varepsilon_2 z^T r_2^2 z + \\ & + \tilde{x}^T (t-h) \Omega_2 \tilde{x}(t-h) + \tilde{x}^T (F^T - Q) z \\ & + z^T (F - Q^T) \tilde{x} - 2z^T Gz + \tilde{x}^T P_1 w + w^T P_1 \tilde{x} \\ & + \tilde{x}^T P_2 \tilde{x} - \tilde{x}^T (t-h) P_2 \tilde{x}(t-h) \end{aligned} \quad (۲۲)$$

حال J را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$J = \int_0^\infty (\tilde{x}^T \tilde{x} + z^T z - \eta w^T w) dt \quad (۲۳)$$

از معادله (۲۳) می توان (۲۵) را نتیجه گرفت:

$$J < \int_0^\infty (\tilde{x}^T \tilde{x} + z^T z - \eta w^T w + \dot{V}) dt \quad (۲۴)$$

شرط کافی برای تحقق هدف که همانا $J < 0$ می باشد آن است که:

$$\frac{dV}{dt} + \tilde{x}^T \tilde{x} + z^T z - \eta w^T w < 0 \quad (۲۵)$$

با تلفیق شروط (۲۲) و (۲۵) شرط کافی (۲۶) بدست می آید، که خود شرط (۲۷) را ایجاب می نماید. با بکارگیری لم مکمل شور بر روی (۲۷) می توان نامعادله (۲۸) را بدست آورد

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \tilde{x}^T \left[\Omega_1 + (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} + \varepsilon_3^{-1} + \varepsilon_4^{-1}) P_1 P_1 \right] \tilde{x} \\ & + 2\tilde{x}^T P_1 A_1 \tilde{x}(t-h) + \varepsilon_2 z^T r_2^2 z \\ & + \tilde{x}^T (t-h) \Omega_2 \tilde{x}(t-h) \\ & + 2 \left[b^T (\hat{x}, \hat{x}(t-h), u) \tilde{\theta} \right]^T P_1 \tilde{x} + \tilde{x}^T (F^T - Q) z \\ & + z^T (F - Q^T) \tilde{x} + 2\tilde{\theta}^T \Gamma \tilde{\theta} \\ & - 2z^T Gz + \tilde{x}^T P_1 w + w^T P_1 \tilde{x} \\ & + \tilde{x}^T P_2 \tilde{x} - \tilde{x}^T (t-h) P_2 \tilde{x}(t-h) \end{aligned} \quad (۱۷)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \Omega_1 = & (A - LC)^T P_1 + P_1 (A - LC) + \varepsilon_1 C^T r_1^2 C \\ & + \varepsilon_3 \gamma_{11}^2 I + \varepsilon_4 \gamma_{21}^2 \gamma_3^2 \|b\|^2 I \\ \Omega_2 = & \varepsilon_3 \gamma_{12}^2 + \varepsilon_4 \gamma_{22}^2 \gamma_3^2 \|b\|^2 \end{aligned}$$

از آنجا که پارامتر θ بصورت تکه‌ای ثابت است، پس $\dot{\theta} = 0$ بطور تکه‌ای صادق است و بنابراین می توان نتیجه گرفت که $\dot{\hat{\theta}} = -\hat{\theta}$. با بکارگیری این تساوی و جایگذاری (۱۱) در (۱۷) و استفاده از فرض قضیه $b^T P_1 = C$ نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \tilde{x}^T \left[\Omega_1 + (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} + \varepsilon_3^{-1} + \varepsilon_4^{-1}) P_1 P_1 \right] \tilde{x} \\ & + 2\tilde{x}^T P_1 A_1 \tilde{x}(t-h) + \varepsilon_2 z^T r_2^2 z \\ & + \tilde{x}^T (t-h) \Omega_2 \tilde{x}(t-h) + \tilde{x}^T (F^T - Q) z \\ & + z^T (F - Q^T) \tilde{x} - 2z^T Gz + 2\sigma\tilde{\theta}^T (\hat{\theta} - \theta_0) \\ & + \tilde{x}^T P_1 w + w^T P_1 \tilde{x} + \tilde{x}^T P_2 \tilde{x} \\ & - \tilde{x}^T (t-h) P_2 \tilde{x}(t-h) \end{aligned} \quad (۱۸)$$

از طرفی با استفاده از (۵) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \sigma\tilde{\theta}^T (\hat{\theta} - \theta_0) = & \sigma[\theta - \hat{\theta}]^T (\hat{\theta} - \theta_0) = \\ & \sigma(\theta - \theta_0)^T (\hat{\theta} - \theta_0) - \sigma(\hat{\theta} - \theta_0)^T (\hat{\theta} - \theta_0) \\ & \leq \sigma\gamma_4 \|\hat{\theta} - \theta_0\| - \sigma\|\hat{\theta} - \theta_0\|^2 \\ & \leq N \end{aligned} \quad (۱۹)$$

که در آن

$$N = \sigma \|\hat{\theta} - \theta_0\| \left(\gamma_4 - \|\hat{\theta} - \theta_0\| \right) \quad (۲۰)$$

اگر شرط (۱۲) برقرار باشد، مقدار N غیر مثبت خواهد بود چراکه:

برای $\|\hat{\theta} - \theta_0\| < \gamma_4$ از آنجا که $\sigma = 0$ است، نتیجه می شود:

$$N = 0.$$

برای $\|\hat{\theta} - \theta_0\| \leq 2\gamma_4$ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{x}(t-h) \\ z \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega_1 + (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} + \varepsilon_3^{-1} + \varepsilon_4^{-1})P_1P_1 + I + P_2 & A_1P_1 & F^T - Q & P_1 \\ P_1A_1^T & -P_2 + \Omega_2 & 0 & 0 \\ F - Q^T & 0 & \varepsilon_2r_2^2I - 2G + I & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & -\eta I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{x}(t-h) \\ z \\ w \end{bmatrix} < 0 \quad (۲۶)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 + (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} + \varepsilon_3^{-1} + \varepsilon_4^{-1})P_1P_1 + I + P_2 & A_1P_1 & F^T - Q & P_1 \\ P_1A_1^T & -P_2 + \Omega_2 & 0 & 0 \\ F - Q^T & 0 & \varepsilon_2r_2^2I - 2G + I & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & -\eta I \end{bmatrix} < 0 \quad (۲۷)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 + I + P_2 & A_1P_1 & F^T - Q & P_1 & P_1 & P_1 & P_1 & P_1 & P_1 \\ P_1A_1^T & -P_2 + \Omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F - Q^T & 0 & \varepsilon_2r_2^2I - 2G + I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & -\eta I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2I & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3I & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_4I & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (۲۸)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (bf(x, x(t-h), u)\theta - bf(\hat{x}, \hat{x}(t-h), u)\hat{\theta} + w) = 0 \quad (۳۰)$$

از آنجا که $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x} = x$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (bf(x, x(t-h), u)(\theta - \hat{\theta}) + w) = 0 \quad (۳۱)$$

با استفاده از معادله (۳۱) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t (\theta - \hat{\theta})^T f(x, x(t-h), u)^T b^T b f(x, x(t-h), u)(\theta - \hat{\theta}) d\tau \right) = \int_0^\infty w(\tau)^T w(\tau) d\tau + C_1 \quad (۳۲)$$

که در آن C_1 مقدار ثابتی است. معادله (۳۲) می‌تواند به صورت (۳۳) نوشته شود:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^n \int_{\delta_i}^{\delta_{i+1}} (\theta - \hat{\theta})^T f(x, u)^T b^T bf(x, u)(\theta - \hat{\theta}) \right) = \int_0^\infty w(\tau)^T w(\tau) d\tau + C_1 \quad (۳۳)$$

اگر شرایط تحریک پایای زیر برقرار باشد:

با قرار دادن $\Lambda_1 = \Omega_1 + I + P_2$ و $\Lambda_2 = -P_2 + \Omega_2$ LMI نشان داده شده در (۱۳) حاصل می‌گردد. □

با انتگرال گیری از دو طرف نابرابری (۲۵) از $t=0$ تا $t=t_f$ نتیجه می‌شود:

$$V(t_f) \leq V(0) - \int_0^{t_f} \tilde{x}^T(\tau) \tilde{x}(\tau) d\tau - \int_0^{t_f} z^T(\tau) z(\tau) d\tau + \int_0^{t_f} w^T(\tau) w(\tau) d\tau \quad (۲۹)$$

از آنجا که $V(x, \theta) \geq 0$ و غیر نزولی است، بنابراین می‌توان گفت $V \in L_\infty$. در نتیجه با توجه به تعریف (۱۴) می‌توان نتیجه گرفت $\tilde{\theta} \in L_\infty$ و $z \in L_\infty$ ، $\tilde{x} \in L_\infty$ ، $w \in L_2$ و $\tilde{x} \in L_2$ و $z \in L_2$ ، $w \in L_2$ ، $\tilde{x} \in L_2$ و $z \in L_2$ ، $w \in L_2$ ، $\tilde{x} \in L_\infty$ ، $\tilde{x} \in L_\infty$ ، $\tilde{x} \in L_\infty$ با توجه به $\tilde{x} \in L_\infty$ و $\tilde{x} \in L_2$ و لم باربالت [۱۹] می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$ و همچنین نتیجه می‌شود که $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$ علاوه بر این از آنجا که $z \in L_\infty$ ، $z \in L_2$ و $\dot{z} \in L_\infty$ و دوباره با استفاده از لم باربالت می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{t \rightarrow \infty} z = 0$. در نتیجه با استفاده از معادله (۹) و نتایج فوق الذکر می‌توان گفت:

با بکارگیری $\|\Delta_1(t)\| \leq 2$ و $\|\Delta_1(t)\| \leq 2$ در نظر گرفته شده است. با بکارگیری جعبه ابزار YALMIP بعنوان تجزیه کننده [۲۱] و جعبه ابزار LMI در MATLAB بعنوان حل کننده نامعادلات ماتریسی خطی [۲۲]، جوابها به صورت زیر تعیین می گردند:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 53.89 & 4.97 \\ 4.97 & 15 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 3.33 & 0 \\ 0 & 10.23 \end{bmatrix}$$

$$M = 3.63, \quad \rho = 47.76, \quad S = \begin{bmatrix} 221.13 & -1.91 \end{bmatrix}$$

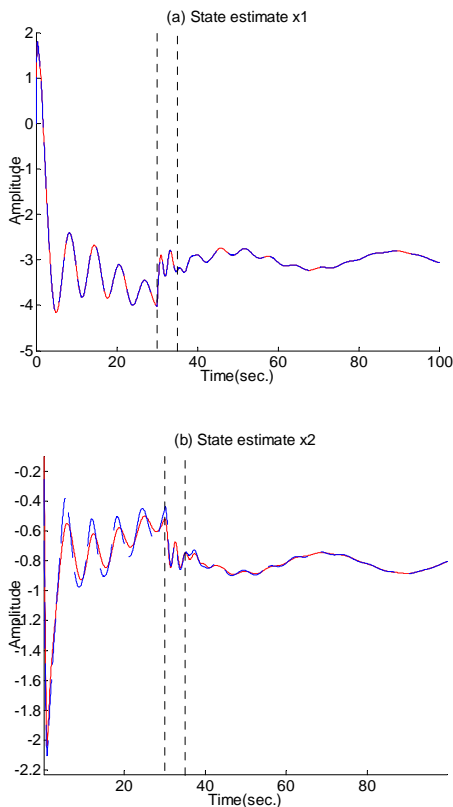
$$G = 178.46, \quad Q = \begin{bmatrix} 49.07 & 49.07 \end{bmatrix}^T, \quad \eta = 7.5$$

$$F = \begin{bmatrix} 49.07 & 49.07 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 49.07 & 49.07 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_4 = 27.93 \quad \text{و} \quad \varepsilon_3 = 40.29, \quad \varepsilon_2 = 75.71, \quad \varepsilon_1 = 75.71$$

بنابراین بهره‌های رویکر به صورت $L = \begin{bmatrix} 66.39 & -0.18 \end{bmatrix}^T$ و $K = \begin{bmatrix} 14.72 & 4.66 \end{bmatrix}^T$ بدست خواهد آمد.

همانطور که در شکل (۱) نشان داده شده است، بهره‌های رویکر تطبیقی مقاوم بدست آمده از روش پیشنهادی سبب شده است که تخمینگر به خوبی بتواند بردار حالات سامانه با حضور اغتشاشات و عدم قطعیت‌ها را تعقیب نماید.



شکل ۱: بردار حالت سامانه‌ی اصلی (خط)، تخمین حالت روش پیشنهادی (خط چین)

$\forall t_0, \exists \xi, \delta > 0$ such that:

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta} f^T(x(\tau), x(\tau-h), u(\tau)) b^T b f(x(\tau), x(\tau-h), u(\tau)) d\tau > \xi I \quad (34)$$

با استفاده از (۶) و (۳۳) نتیجه می گیریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^n (\theta - \hat{\theta})^T \xi_i (\theta - \hat{\theta}) \right) \leq \beta^2 + C_1 \quad (35)$$

که در آن ξ_i حد پایین در تعریف تحریک پایای (۳۴) در بازه $[\delta_i, \delta_{i+1}]$ می باشد، و لذا می توان نوشت:

$$\|\theta - \hat{\theta}\| \leq \frac{\sqrt{\beta^2 + C_1}}{\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^n \lambda_{\min}(\xi_i) \right)}} \quad (36)$$

از آنجا که همواره $\xi_i > 0$ ، برای تمامی آشفنگی‌های بهره با $i=1, \dots, n$

شرایط $\|\Delta_1(t)\| \leq r_1$ و $\|\Delta_2(t)\| \leq r_2$ و اغتشاشات به صورت $\|w\|_2 \leq \beta$ ، و تئیکه $t \rightarrow \infty$ ، تخمین پارامتر به سمت مقادیر واقعی خود همگرا می گردد ($\hat{\theta} \rightarrow \theta$).

تکته ۱: قسمت دوم در (۱۱) به منظور اصلاح قانون تطبیقی اضافه شده است که اگر پارامترها از مرز تعیین شده خارج گردند، مشتق تابع لیاپانوف در فضای تخمین پارامتر منفی باقی بماند [۲۰].

۴- مثال عددی

سامانه‌ی غیر خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.25 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-0.5) \\ x_2(t-0.5) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(x_2) \sin(x_2 - 0.5) + 4u(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \end{bmatrix} \theta [-\cos(x_2) \cos(x_2 - 0.5) + \sin(0.5t)]$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

با یک ورودی تابع ورودی پله واحد به صورت $u(t) = 3$ و برای $0 \leq t < 30$ که به صورت ناگهانی در زمانهای $t \geq 30$ تغییر و برابر $\theta = 7$ می شود. همچنین فرض می شود در زمان $t = 35$ بهره رویکر نیز دچار تغییرات شده و مقدار -2 به صورت اغتشاش جمعی به آن اضافه می گردد. پارامترهای طراحی به صورت زیر انتخاب شده اند: $\sigma_0 = 10$ و $\theta_0 = 2.5$ ، $\gamma_1 = 0.2$ ، $\gamma_2 = 0.2$ ، $\gamma_3 = 7$ ، $\gamma_4 = 5$ ، $\Gamma = 0.0001$ همچنین مرز نایقینی به صورت

تغییر با زمان به صورت تکه‌ای ثابت و اغتشاشات ورودی محدود و اغتشاشات جمعی محدود در بهره رویکر باشد، ارائه گردید. قسمت غیر خطی در سامانه در حالت کلی می‌تواند به بردارهای حالت غیر قابل اندازه‌گیری وابسته باشد. با حل نابرابری‌های ماتریسی خطی به کمک نرم افزارهای عددی موجود، بهره‌های رویکر تطبیقی PI مقاوم که همگرایی تخمین بردار حالات سامانه را تضمین می‌کند بدست می‌آید، هر چند که همگرایی دقیق پارامترها به مقادیر واقعی خودش وابسته به ارضاء شرط تحریک پایا است. با بکارگیری حلقه بازخورد انتگرالی در این طراحی، صحت تخمین حالت ماندگار و مقاومت آن در برابر اغتشاشات، ورودی‌های نامعلوم و خطاهای مدل‌سازی بیشتر می‌گردد.

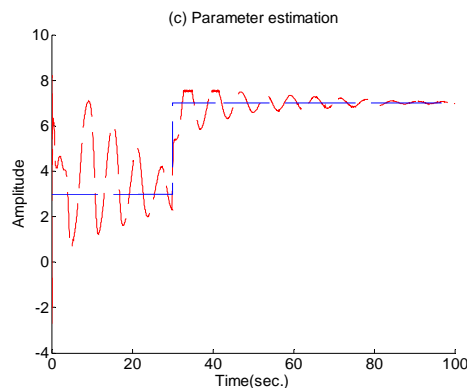
تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله تمایل دارند از جناب آقای مهندس علی اشرف مدرس بعثت پیشنهادات سودمند ایشان سپاسگزاری نمایند. این پژوهش با حمایت مادی و معنوی شرکت مدیریت پروژه‌های نیروگاهی ایران (مینا) بر پایه قرارداد شماره RD-88-09 مورخ ۸۸/۶/۵ انجام گردیده است.

مراجع

- [1] Garimella, P., Yao, B., 2003, "Nonlinear adaptive robust observer design for a class of nonlinear systems", *Proc. American Control Conf.*, 4391-4396.
- [2] Bastin, G., Gevers, M. R., 1988, "Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 33, 650-658.
- [3] Marino, R., 1990, "Adaptive observers for single output nonlinear systems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 35, 1054-1058.
- [4] Marino, R., Tomei, P., 1992, "Global adaptive observers for nonlinear systems via filtered transformations", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 37, 1239-1245.
- [5] Marino, R., Tomei, P., 1995, "Adaptive observers with arbitrary exponential rate of convergence for nonlinear systems", *IEEE Trans. Automatic Control*, 40, 1300-1304.
- [6] Rajamani, R., Hedrick, J. K., 1995, "Adaptive observers for active automotive suspensions: Theory and experiment", *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 3, 86-93.
- [7] Cho, Y. M., Rajamani R., 1997, "A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42, 534-537.
- [8] Marino, R., Santosuosso, G. L., Tomei, P., 2001, "Robust adaptive observers for nonlinear systems

شکل (۲) نشان می‌دهد تخمین پارامتر در روش پیشنهادی به خوبی توانسته پارامتر حقیقی سامانه را دنبال کند. همانطور که انتظار می‌رفت تغییرات بهره در زمان $t=35$ تاثیر زیادی در مساله تخمین در روش پیشنهادی ندارد، چراکه دینامیک رویکر (۹) در خطای خروجی ضرب می‌شود و از آنجایی که این خطا در روش پیشنهادی به سمت صفر می‌رود لذا تاثیر این اغتشاشات نیز صفر می‌گردد.



شکل ۲: تخمین پارامتر با استفاده از روش پیشنهادی

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، یک رویکر PI تطبیقی مقاوم و غیر شکننده برای دسته‌ای از سامانه‌های تاخیردار غیر خطی که می‌تواند دارای پارامتر قابل

with bounded disturbances", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 46, 967-972.

- [9] Jung, J., Hul, K., Fathy, H.K., Srein, J.L., 2006, "Optimal robust adaptive observer design for a class of nonlinear systems via an H-infinity approach", *Proc. American Control Conf.*, 3637-3642.
- [10] Jung, J., Hwang, J., Huh, K., 2007, "Optimal Proportional-Integral Adaptive Observer Design for a Class of Uncertain Nonlinear Systems", *Proc. of American Control Conf.*, 1931-1936.
- [11] Liu, L., Han, Z., Li, W., 2010, "H_∞ non-fragile observer-based sliding mode control for uncertain time-delay systems", *Int. Journal of franklin*, 347, 567-576.
- [12] Chen, J.D., Yang, C.D., Lien, C.H., Horng, J.H., 2008, "New delay-dependent non-fragile H_∞ observer-based control for continuous time-delay systems", *Information Sciences*, 178, 4699-4706.
- [13] Jeong, C. S., Yaz, E. E., Bahakeem, A., Yaz, Y. I., 2006, "Resilient design of observers with general criteria using LMIs", *Proc. of American Control Conf.*, 111-116.
- [14] Keel, L.H., Bhattacharyya, S.P., 1997, "Robust, fragile, or optimal?", *IEEE - Trans. Autom. Control*, 42, 1098-1105.
- [15] Dorato, P., 1998, "non-fragile controller design: an overview", *Proc. of American Control Conf.*, 2829-2831.

- [16] Jeong, C. S., Yaz, E. E., Yaz, Y. I., 2008, "Lyapunov-Based design of resilient observers for a class of nonlinear systems and general performance criteria", *IEEE Multi-conference on Systems and Control*, 942-947.
- [17] Jeong, C. S., Yaz, E. E., Yaz, Y. I., 2007, "Stochastically resilient design of H_∞ observers for discrete-time nonlinear systems", *IEEE Conf. CDC*, 1227- 1232.
- [18] Chen, F., Zhang, W., 2007, "LMI criteria for robust chaos synchronization of a class of chaotic systems", *Nonlinear Analysis*, 67, 3384-3393.
- [19] Krstic, M., Kanellakopoulos, I., P. Kokotovic, "Nonlinear and Adaptive Control Design", *John Wiley and Sons*, 1995.
- [20] Ioannou, P. A., Sun, J., *Robust Adaptive Control*, Prentice Hall, 1996.
- [21] Lofberg, J., 2004, "YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB", *IEEE Int. Symp. Computer Aided Contol Syst. Design Conf.*, 284-289.
- [22] Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A., Chilai, M., *LMI control toolbox user's guide*, Massachusetts: The Mathworks, 1995.