مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۳، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۸، صفحه ۵۰-۴۱

تحلیل پایداری سیستم های غیرخطی هایبرید تاخیری توصیف شده با معادلات دیفرانسیل فازی ضربه ای

داود ناصح[۱]، ناصر پریز [۲]، علی وحیدیان کامیاد [۳]

[۱] فارغ‌التحصیل دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه فردوسی مشهد، naseh@mail.um.ac.ir

[۲] استاد، دانشکدهٔ مهندسی، گروه برق-کنترل، دانشگاه فردوسی مشهد، n-pariz@um.ac.ir

[۳] استاد، دانشکدهٔ ریاضی، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه فردوسی مشهد، vahidian@um.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۶/۰۵/۳۱ ویرایش: ۱۳۹۶/۱۲/۲۲ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۳/۹

چکیده: در این مقاله معیارهایی برای بررسی پایداری سیستم های غیرخطی هایبرید دارای تاخیر زمانی توصیف شده با معادلات دیفرانسیل فازی ضربه ای ارائه می گردد. ابتدا قضیه مقایسه سیستم دیفرانسیل فازی با سیستم دیفرانسیل معمولی در N بعد بر اساس مفهوم غیرنزولی شبه یکنوای فوقانی بیان می گردد. در اینجا برای تحلیل پایداری سیستم های دینامیکی فازی، توابع شبه لیاپانوف برداری تعریف می گردند. سپس با استفاده از این توابع به همراه قضیه مقایسه جدید برخی قضایا برای بررسی انواع مفاهیم پایداری (پایداری نهایی، پایداری مجانبی، پایداری قوی و پایداری یکنواخت) برای سیستم دیفرانسیل فازی هایبرید ضربه ای دارای تاخیر مطرح می شوند. علاوه بر آن، قضایای پایداری کاربردی بر حسب دو معیار ارائه شده و به اثبات می رسند. در انتها مثالی دوبعدی برای نحوه بکارگیری قضایای پایداری مطرح و پایداری یک سیستم دیفرانسیل فازی دارای تاخیر بررسی می گردد. در نهایت با مثالی عملی در حوزه پزشکی، پلی بین مبانی ریاضی تحقیق و کاربرد عملی پژوهش تبیین می کنیم.

کلمات کلیدی: سیستم دیفرانسیل فازی، سیستم غیرخطی هایبرید، توابع شبه لیاپانوف برداری، تاخیر زمانی.

Stability analysis of nonlinear hybrid delayed systems described by impulsive fuzzy differential equations

David Naseh, Naser Pariz, Ali Vahidian Kamya

Abstract: In this paper we introduce some stability criteria of nonlinear hybrid systems with time delay described by impulsive hybrid fuzzy system of differential equations. Firstly, a comparison principle for fuzzy differential system based on a notion of upper quasi-monotone nondecreasing is presented. Here, for stability analysis of fuzzy dynamical systems, vector Lyapunov-like functions are defined. Then, by using these functions together with the new comparison theorem, we will get results for some concepts of stability (eventual stability, asymptotic stability, strong stability and uniform stability) for impulsive hybrid fuzzy delay differential systems. Furthermore, theorems for practical stability in terms of two measures are introduced and are proved. Finally, an illustrating example for stability checking of a differential system with fuzziness and time delay is given. Then, by introducing an applied example in Pharmacokinetics, we bridge theoretical concepts to the application of research in real world.

Keywords: fuzzy differential system, nonlinear hybrid system, vector Lyapunov-like function, time delay.

نویسنده عهده دار مکاتبات: ناصر پریز

۱- مقدمه

امروزه نظریه پایداری لیاپانوف کاملا شناخته شده است و قضایا و کاربردهای آن در [۱, ۲] ارائه شده اند. از آن جایی که یافتن تابع لیاپانوف امری مشکل است، در عمل مفهوم پایداری بر حسب دو معیار مطرح شده که روشی بسیار قدرتمند است [۳-۶]. در برخی موارد، از جمله نگه داشتن دمای یک پروسه شیمیایی بین کران هایی خاص، نوسان فضاپیما حول یک مسیر و غیره، حالت سیستم شاید ناپایدار باشد، ولی سیستم می تواند به اندازه کافی نزدیک به حالت مطلوب نوسان داشته باشد به گونه ای که عملکرد سیستم عملا مناسب باشد. در این موارد مفهوم پایداری کاربردی معرفی شده است [۷-۹]. در مراجع فوق، نویسندگان پایداری سیستم های بدون ضربه (جهش در حالت) را بررسی کرده اند. این در حالی است که در مدلسازی بسیاری از مسائل دنیای واقعی، از جمله سیستم های سوئیچ شونده ، باید اثرات ضربه ای را نیز در نظر بگیریم چرا که افزودن ضربه علاوه بر ایجاد تطابق بیشتر بین مساله اصلی و مدل سازی شده، در پایداری سیستم نیز تاثیر خواهد داشت. در مراجع [۵, ۱۰-۲۰] پایداری معادلات دیفرانسیل ضربه ای بررسی شده است. همانطور که مشاهده می شود، در کارهای قبلی نویسندگان فوق فرض کرده اند که حالت ها فقط به حالت کنونی بستگی دارد؛ این در حالی است که در بسیاری از موارد که تاخیر زمانی داریم، دینامیک های سیستم به حالت گذشته هم وابستگی دارند [۲۱-۲۳]. از سوی دیگر، اخیرا بدلایل زیادی از جمله کاربرد فراوان کنترلگرهای گسسته برای سیستم های پیوسته، برخی نویسندگان بر روی پایداری سیستم های هایبرید و سوئیچ شونده اهتمام ورزیده اند؛ مثلا در [۳۰] سیستم دینامیکی هایبرید، در [۳۱] سیستم دیفرانسیل هایبرید، در [۳۲] سیستم تفاضلی ضربه ای، در [۳۳] سیستم های تفاضلی هایبرید و در [۳۸] سیستم های هایبرید تاخیری مورد بررسی قرار گرفته اند.

چنانچه مشاهده می گردد، در کارهای پیشین، فازی بودن پدیده ها نیز لحاظ نشده است؛ در حالی که این مساله در دنیای واقعی غیرقابل اجتناب است؛ چرا که فازی، راهی برای مدلسازی سیستم های دارای عدم قطعیت و بطور یقینی مشخص نشده است [۲۴-۲۹,۳۶,۳۷,۳۹,۴۰]. بنابراین، ما در این مقاله به بررسی پایداری یک سیستم کلی فازی که می تواند هایبرید و دارای اثرات ضربه ای، همچنین تاخیر در حالت ها باشد (یا هر کدام از این شرایط را نداشته باشد) می پردازیم و قضایایی برای بررسی انواع پایداری (پایداری نهایی ، پایداری مجانبی ، پایداری قوی و پایداری یکنواخت) این سیستم های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل فازی ارائه خواهیم کرد. البته توجه داریم که این قضایا کلی بوده و برای سیستمی که دارای قیود ذکر شده نیز نباشد قابل استفاده است.

به عنوان مساله ای کاربردی و رایج در حوزه مکانیک که دارای ویژگی های فازی هایبرید ضربه ای دارای تاخیر است می توان به سیستم جعبه دنده خودرو اشاره کرد که یک سیستم سوئیچینگ هایبرید است و به هنگام تعویض دنده با ضربه همراه است، همچنین همواره دارای تاخیرهایی به هنگام تغییر و درگیری دنده می باشد. به عنوان نمونه ای دیگر در حوزه پزشکی می توان مساله اثر دارو بر بدن را نام برد که در آن ضربه به هنگام تزریق یا خوردن دارو وارد می شود، همچنین تاخیر در جذب دارو بوسیله بدن وجود دارد. که این مورد را به عنوان مثالی در انتهای مقاله مورد بررسی قرار می دهیم.

بخش های این مقاله بدین شرح است: در بخش ۲، برخی مفاهیم و تعاریف پایه که در ادامه مقاله از آن ها استفاده می کنیم را معرفی می کنیم. در بخش ۳، ابتدا قضیه مقایسه سیستم دیفرانسیل فازی با سیستم دیفرانسیلی معمولی در N بعد بر اساس مفهوم غیرنزولی شبه یکنوای فوقانی بیان می گردد. سپس با تعریف توابع شبه لیاپانوف برداری و استفاده آن ها به همراه قضیه مقایسه جدید، قضایایی برای بررسی انواع مفاهیم پایداری برای سیستم دیفرانسیل فازی هایبرید ضربه ای دارای تاخیر مطرح می شوند. علاوه بر آن، قضایای پایداری کاربردی بر حسب دو معیار ارائه شده و به اثبات می رسند. پس از آن مثالی روشنگر برای نحوه بکارگیری قضایای پایداری مطرح و پایداری یک سیستم دیفرانسیل فازی دارای تاخیر بررسی می گردد. همچنین به منظور برقراری پلی بین مبانی ریاضی تحقیق و کاربرد عملی آن در دنیای واقعی، به بررسی مثالی از پزشکی می پردازیم. در نهایت، نتیجه گیری در بخش ۴ آورده شده است.

۲- مفاهیم و تعاریف اولیه

در این بخش برخی نمادها، تعاریف و نتایج که در ادامه مقاله استفاده می شوند از مراجع [7, 9, 10, 17, 28, 30] ذکر می شوند.

فرض کنید فضای توابع فازی را بصورت $\boldsymbol{E^n}$ نمایش و طبق خواص مرجع [28] تعریف می کنیم. آنگاه برای تعمیم آن به فضای فازی N- بعدی می توانیم از حاصلضرب دکارتی زیر

$$(\boldsymbol{E^n})^N \equiv \boldsymbol{E^n} \times \boldsymbol{E^n} \times \dots \times \boldsymbol{E^n}$$

به همراه متر فازی برداری[1]

$$\widetilde{\boldsymbol{D_0}}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \big(\boldsymbol{D_0}(\boldsymbol{X_1},\boldsymbol{Y_1}), \boldsymbol{D_0}(\boldsymbol{X_2},\boldsymbol{Y_2}), \dots, \boldsymbol{D_0}(\boldsymbol{X_N},\boldsymbol{Y_N})\big)$$

استفاده کنیم که در آن $\boldsymbol{D_0}(\boldsymbol{X_i},\boldsymbol{Y_i}) \equiv \sup_{0\le\alpha\le1} \boldsymbol{D}([\boldsymbol{X_i}]^\alpha,[\boldsymbol{Y_i}]^\alpha)$ متر فازی بر روی $\boldsymbol{E^n}$ است و $\boldsymbol{D}(\cdot,\cdot)$ فاصله هاسدورف[2] است.

همچنین، مشتق هاکوهارا[3] برای توابع فازی بصورت زیر تعریف می گردد

$$\boldsymbol{D_H F(t)} \triangleq \lim_{h\to0^+} \frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \lim_{h\to0^+} \frac{F(t)-F(t-h)}{h}$$

کره فازی بصورت زیر قابل تعریف است

$$\boldsymbol{S(\rho)} \triangleq \{\boldsymbol{X} \in (\boldsymbol{E^n})^N : \|\widetilde{\boldsymbol{D_0}}(\boldsymbol{X},\widehat{\boldsymbol{0}})\| < \boldsymbol{\rho}\}$$

[1] vector fuzzy metric
[2] Hausdorf distance
[3] Hukuhara derivative

[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.2.7]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.41]

که در آن منظور از $\|\cdot\|$ نرم ماکزیمم است.

تعریف ۲-۱: فرض کنید $\mathcal{T}$ یک مقیاس زمانی[1] با کوچکترین عضو[2] $t_0 \geq 0$ و بدون بزرگترین عضو[3] باشد. نگاشت های (عملگرهای پرش[4]) $\sigma, \rho: \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ بر روی آن در مرجع [9] تعریف شده اند.

تعریف ۲-۲: تابع $G: \mathcal{T} \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}^N$ که $\mathcal{G}$ ناحیه ای در فضای $\mathbb{R}^N$ است، را غیرنزولی شبه یکنوا در $\mathcal{T} \times \mathcal{G}$ گوییم اگر برای هر $t \in \mathcal{T}$ و $j = 1, 2, \dots, N$ ، توابع $G_j(t, \alpha)$ بر حسب $(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_N)$ صعودی باشند [10].

تعریف ۲-۳: تابع $(N \geq 1) G: \mathcal{T} \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}^N$ را غیرنزولی شبه یکنوا از بالا بر حسب U گویند، اگر برای $U, W \in \mathbb{R}_+^N$، نامساوی $\|U\| \leq \|W\|$ نتیجه دهد $\|G(t, U)\| \leq \|G(t, W)\|$. [9].

تعریف ۲-٤: کلاس هایی از توابع بصورت زیر تعریف می شوند

$$\mathcal{K} \triangleq \left\{\alpha : C[R^+, R^+], \text{ است صعودی اکیدا } \alpha(t) \text{ و } \alpha(0) = 0\right\}$$

،

$$\Gamma \triangleq \left\{h \in C[\mathcal{T} \times (E^n)^N, R^+]: \forall t \in \mathcal{T}, \inf_{X \epsilon (E^n)^N} h(t, X) = 0\right\}$$

و

$$\Gamma_d \triangleq \left\{h \in C[R_d \times (E^n)^N, R^+]: \forall t \in R_d = [-d, \infty), \inf_{X \epsilon (E^n)^N} h(t, X) = 0\right\}$$

تعریف ۲-۵: با فرض $h_0 \in \Gamma_d$، $\psi \in PC([-d, 0], (E^n)^N)$ و بازای هر $t \in \mathcal{T}$ تعریف می کنیم [7]

$$\widetilde{h_0}(t, \psi) \triangleq \sup_{-d \leq \zeta \leq 0} h_0\big(t + \zeta, \psi(\zeta)\big)$$

تعریف ۲-٦: تابع $V: \mathcal{T} \times S(\rho) \to \mathbb{R}^N$ متعلق به کلاس $\mathbb{v}_0$ است اگر [17]

(الف) تابع V در تمام بازه های $[t_{k-1}, t_k) \times S(\rho)$ پیوسته باشد و برای تمام $t \in \mathcal{T}$، داشته باشیم $V(t, \widehat{0}) \equiv 0$؛

(ب) تابع $V(t, X)$ لیپ شیتز محلی[5] برحسب X باشد؛ یعنی برای

$$|V(t, X) - V(t, Y)| \leq L(t) \widetilde{D_0}(X, Y),$$

که در آن $L(t)$ یک ماتریس $N \times N$ با عناصر غیرمنفی پیوسته بر $\mathbb{R}_+$ است و

$$|V(t, X) - V(t, Y)| \equiv (|V_1(t, X) - V_1(t, Y)|, |V_2(t, X) - V_2(t, Y)|, \dots, |V_N(t, X) - V_N(t, Y)|).$$

در اینجا منظور از $|V(t, X)|$، بردار $(|V_1(t, X)|, |V_2(t, X)|, \dots, |V_N(t, X)|)$ است که V_iها ($i = 1, 2, \dots, N$) عناصر V هستند.

[1] time scale
[2] minimal element
[3] maximal element
[4] jump operators
[5] locally Lipschitzian

(ج) برای هر $k \in \mathbb{N}$ حدود کراندار زیر وجود داشته باشند

$$\lim_{(t,Y) \to (t_k, X)} V(t, Y) = V(t_k^-, X)$$

تعریف ۲-۷: فرض کنید $V \in \mathbb{v}_0$ است؛ مشتق چپ دینی (تعمیم یافته به حالت هایبرید دارای تاخیر) برای این تابع را بر اساس مرجع [10] بصورت زیر تعریف می کنیم

$$D^- V(t, X) \equiv \lim_{h(t) \to 0^-} \inf \frac{V\Big(t + h(t), X\big(t + h(t)\big) + h(t) F\big(t, X(t), X(t-d), \lambda_k(X_k)\big)\Big) - V\big(t, X(t)\big)}{h(t)} = \frac{V\Big(\sigma(t), X\big(\sigma(t)\big) + (\sigma(t) - t) F\big(t, X(t), X(t-d), \lambda_k(X_k)\big)\Big) - V\big(t, X(t)\big)}{\sigma(t) - t}$$

۳- نتایج اصلی

سیستم معادلات دیفرانسیل فازی هایبرید ضربه ای دارای تاخیر زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} D_H X(t) = F(t, X(t), X(t-d), \lambda_k(X_k)), \quad t \in (t_k, t_{k+1}] \\ X(t_0{}^+) = X_0, \;\; I_0(X_0) = X_0, X(t_0 + t) = \psi(t), t \in [-d, 0] \\ X(t_k) = X_k, X(t_k{}^+) = X_k{}^+, X_k{}^+ = X_k + I_k(X_k), k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.1}$$

که در آن $d = const > 0$ تاخیر محدود، $F \in C_{rd}[\mathcal{T} \times \Omega \times (E^m)^N, (E^n)^N]$ که منظور از C_{rd} نگاشت پیوسته متراکم از راست[6] [9] و Ω حوزه ای شامل مبدا در فضای فازی $(E^n)^N$، $\lambda_k \in [\Omega, (E^m)^N]$، $\psi \in C[[-d, 0], \Omega]$، $F(t, \widehat{0}, \widehat{0}, \widehat{0}) \equiv 0$، $I_k(\widehat{0}) = 0$، $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$، $t_k \to \infty$ بازای $k \to \infty$ ، $X(t^+) = \lim_{r \to t^+} X(r)$ و $X(t^-) = \lim_{s \to t^-} X(s)$ هستند. توابع $I_k: (E^n)^N \to (E^n)^N$ بازای $k = 1, 2, \dots$ به گونه ای هستند که اگر $\|\widetilde{D_0}(X, \widehat{0})\| < L$ و $I_k(X) \neq \widehat{0}$ باشد، آنگاه $\|\widetilde{D_0}(X + I_k(X), \widehat{0})\| < L$ است که در آن L ثابتی مثبت و $\widehat{0}$ مبدا فازی است.

منظور از $PC([-d, 0], \mathbb{R}^N)$ مجموعه توابع تکه ای پیوسته از چپ $f: [-d, 0] \to \mathbb{R}^N$ با نرم سوپریمم $|f| = \sup_{-d \leq r \leq 0} \|f(r)\|$ است، که در آن $\|\cdot\|$ نرمی در فضای $\mathbb{R}^N$ است.

فرض می کنیم شرایط زیر برقرار باشد:

(الف) برای هر تابع $X(s): [t_0 - d, \infty) \to (E^n)^N$ که همه جا پیوسته است به جز در t_k که در آن $X(t_k{}^+)$ و $X(t_k{}^-)$ موجود و $X(t_k{}^+) = X(t_k)$ است، تابع $F(t, X(t), X(t-d), \lambda_k(X_k))$ بازای تقریبا هر $t \in \mathcal{T}$ پیوسته است و در نقاط ناپیوستگی اش، از چپ پیوسته است.

(ب) تابع $F(t, \varphi)$ بر حسب φ در هر مجموعه فشرده از $PC([-d, 0], \mathbb{R}^N)$ لیپ شیتز است.

با شرایط فوق، جواب یکتایی برای سیستم (3.1) موجود است [23].

[6] right-dense (rd) continuous

به همراه سیستم (3.1)، سیستم مقایسه ای زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} U'(t)=G(t,U), \quad t>t_0, t\in(t_k,t_{k+1}] \\ U(t_0)=U_0, \\ U(t_k)=U_k, U(t_k^+)=U_k^+, U_k^+=U_k+J_k(U_k), k\in\mathbb{N}\end{cases} \quad (3.2)$$

که در آن $G:\mathcal{T}\times\mathcal{G}\to\mathbb{R}^N$، $J_k:\mathcal{G}\to\mathbb{R}^N, k\in\mathbb{N}$ که $\mathcal{G}$ حوزه ای از $\mathbb{R}^N$ شامل مبدا و $U_0\in\mathcal{G}$ است. اگر ماکزیمم بازه به فرم $[t_0,w)$ که جواب سیستم (3.2) تعریف شده است را با $J^+(t_0,U_0)$ نمایش دهیم، با فرض برقراری شرایط (الف) و (ب) فوق، $J^+(t_0,U_0)=\mathcal{T}=[t_0,\infty)$ است [10].

حال به تعریف برخی از مفاهیم پایداری می پردازیم که با توجه به مراجع [9, 23] استخراج شده اند.

تعریف ۳-۱: اگر $U(t)=U(t,t_0,U_0)$ پاسخی از سیستم (3.2) باشد، آنگاه این سیستم را

(الف) پایدار کاربردی نهایی[1] (EPS) نامیم، اگر برای $0<\alpha<\beta$ و برخی $t_0\in\mathcal{T}$،

$$\exists\,\tau(\alpha,\beta)>0;\quad \|U_0\|<\alpha \Rightarrow \|U(t)\|<\beta,\quad t\ge t_0\ge\tau(\alpha,\beta), t\in\mathcal{T};$$

(ب) پایدار کاربردی نهایی یکنواخت[2] (UEPS) گوییم، اگر (الف) بازای هر $t_0\in\mathcal{T}$ برقرار باشد؛

(ج) شبه پایدار کاربردی نهایی[3] (EPQ) نامیم، اگر برای $\alpha,\beta,T>0$ و برخی $t_0\in\mathcal{T}$ با $t_0+T\in\mathcal{T}$،

$$\exists\,\tau(\alpha,\beta)>0;\quad \|U_0\|<\alpha\Rightarrow\|U(t)\|<\beta,\ t\ge t_0+T,\ t_0\ge\tau(\alpha,\beta), t\in\mathcal{T};$$

(د) شبه پایدار کاربردی نهایی یکنواخت[4] (UEPQ) گوییم، اگر (ج) بازای هر $t_0\in\mathcal{T}$ برقرار باشد؛

(ه) پایدار کاربردی نهایی قوی[5] (SEPS) نامیم، اگر (الف) و (ج) همزمان برقرار باشند؛

(و) پایدار کاربردی نهایی یکنواخت قوی[6] (SUEPS) گوییم، اگر (ب) و (د) بطور توام برقرار باشند.

تعریف ۳-۲: فرض کنید $h_0\in\Gamma_d$، $h\in\Gamma$ ، و $X(t)=X(t,t_0,\psi)$ پاسخی از سیستم (3.1) باشد، آنگاه این سیستم را

(الف) $(\widetilde{h_0},h)$-پایدار کاربردی نهایی ($(\widetilde{h_0},h)$-EPS) نامیم، اگر برای $0<\alpha<\beta$ و برخی $t_0\in\mathcal{T}$،

$$\exists\,\tau(\alpha,\beta)>0;\quad \widetilde{h_0}(t_0,\psi)<\alpha \Rightarrow h(t,X(t))<\beta,\ t\ge t_0\ge\tau(\alpha,\beta), t\in\mathcal{T};$$

(ب) $(\widetilde{h_0},h)$-پایدار کاربردی نهایی یکنواخت ($(\widetilde{h_0},h)$-UEPS) گوییم، اگر (الف) بازای هر $t_0\in\mathcal{T}$ برقرار باشد؛

(ج) $(\widetilde{h_0},h)$-شبه پایدار کاربردی نهایی ($(\widetilde{h_0},h)$-EPQ) نامیم، اگر برای $\alpha,\beta,T>0$ و برخی $t_0\in\mathcal{T}$ با $t_0+T\in\mathcal{T}$،

$$\exists\,\tau(\alpha,\beta)>0;\quad \widetilde{h_0}(t_0,\psi)<\alpha \Rightarrow h(t,X(t))<\beta,\ t\ge t_0+T,\ t_0\ge\tau(\alpha,\beta), t\in\mathcal{T};$$

(د) $(\widetilde{h_0},h)$-شبه پایدار کاربردی نهایی یکنواخت ($(\widetilde{h_0},h)$-UEPQ) گوییم، اگر (ج) بازای هر $t_0\in\mathcal{T}$ برقرار باشد؛

(ه) $(\widetilde{h_0},h)$-پایدار کاربردی نهایی قوی ($(\widetilde{h_0},h)$-SEPS) نامیم، اگر (الف) و (ج) همزمان برقرار باشند؛

(و) $(\widetilde{h_0},h)$-پایدار کاربردی نهایی یکنواخت قوی ($(\widetilde{h_0},h)$-SUEPS) گوییم، اگر (ب) و (د) بطور توام برقرار باشند.

(ز) $(\widetilde{h_0},h)$-پایدار مجانبی کاربردی[7] ($(\widetilde{h_0},h)$-PAS) نامیم، اگر (الف) برقرار باشد و

$$\forall t_0\in\mathcal{T}\ \exists\, T=T(t_0,\varepsilon)>0;\quad \widetilde{h_0}(t_0,\psi)<\alpha\Rightarrow h(t,X(t))<\varepsilon,\ t\ge t_0+T;$$

(ح) $(\widetilde{h_0},h)$-پایدار مجانبی کاربردی یکنواخت[8] ($(\widetilde{h_0},h)$-UPAS) گوییم، اگر (ب) برقرار باشد و T در (ز) مستقل از t_0 باشد.

حال اصول مقایسه و قضایای پایداری جدید را برای سیستم معادلات دیفرانسیل فازی دارای تاخیر، در فضای فازی N-بعدی را ارائه می کنیم.

قضیه ۳-۳: فرض کنید

(الف) $V\in C[\mathcal{T}\times(E^n)^N, R^N]$ لیپ شیتز محلی باشد.

(ب) G غیرنزولی شبه یکنوای فوقانی بر حسب U بازای هر $t\in\mathcal{T}$ است، و برای $X\in(E^n)^N$ داریم

$$D^-V(t,X)\le G\big(t,V(t,X)\big)$$

(ج) $U\in R^N$، و $M(t)=M(t,t_0,U_0)$ پاسخ ماکزیمال[9] سیستم زیر است

$$U'=G(t,U),\qquad U(t_0)=U_0$$

آنگاه برای هر پاسخ سیستم فازی $D_HX=F(t,X),\quad X(t_0)=X_0$

داریم، $\|V(t,X)\|\le\|U(t)\|,\quad t\in\mathcal{T}$

که نتیجه می دهد $\|V(t_0,X_0)\|\le\|U_0\|$

[1] eventual practical stable (EPS)
[2] uniform eventual practical stable (UEPS)
[3] eventual practical quasistable (EPQ)
[4] uniform eventual practical quasistable (UEPQ)
[5] strong eventual practical stable (SEPS)
[6] strong uniform eventual practical stable (SUEPS)
[7] $(\widetilde{h_0},h)$-practical asymptotic stable ($(\widetilde{h_0},h)$-PAS)
[8] $(\widetilde{h_0},h)$-uniform practical asymptotic stable ($(\widetilde{h_0},h)$-UPAS)
[9] maximal solution

اثبات: تعریف می کنیم $m(t)=V(t,X(t))$. طبق (الف) داریم

$$m(t+h(t))-m(t)=V\left(t+h(t),X(t+h(t))\right)-V(t,X(t))=V\left(t+h(t),X(t+h(t))\right)-V\left(t+h(t),X(t)+h(t)F(t,X(t))\right)+V\left(t+h(t),X(t)+h(t)F(t,X(t))\right)-V(t,X(t))\le L(t+h(t))\widetilde{D_0}\left(X(t+h(t)),X(t)+h(t)F(t,X(t))\right)+V\left(t+h(t),X(t)+h(t)F(t,X(t))\right)-V(t,X(t))$$

با اعمال خواص متر هاسدورف بدست می آوریم

$$m(t+h(t))-m(t)\le L(t+h(t))\widetilde{D_0}\left(X(t+h(t))-X(t),h(t)F(t,X(t))\right)+V\left(t+h(t),X(t)+h(t)F(t,X(t))\right)-V(t,X(t))$$

طبق تعریف مشتق چپ دینی خواهیم داشت

$$D^-m(t)\equiv\lim_{h(t)\to0^-}\inf\frac{m(t+h(t))-m(t)}{h(t)}\le\lim_{h(t)\to0^-}\inf\left[\frac{L(t+h(t))\widetilde{D_0}\left(X(t+h(t))-X(t),h(t)F(t,X(t))\right)}{h(t)}+\frac{V(t+h(t),X+h(t)F(t,X))-V(t,X)}{h(t)}\right]=\lim_{h(t)\to0^-}\inf L(t+h(t))\widetilde{D_0}\left[\frac{X(t+h(t))-X(t)}{h(t)},F(t,X(t))\right]+D^-V(t,X)=L(t)\widetilde{D_0}\left[D_HX,F(t,X(t))\right]+D^-V(t,X)=D^-V(t,X)$$

بنابراین $D^-m(t)\le G(t,m(t))$

که می توان گفت $\|D^-m(t)\|\le\|G(t,m(t))\|$

با استفاده از نظریه نامعادلات دیفرانسیلی به این نتیجه می رسیم که

$$\|V(t,X)\|\le\|M(t)\|$$

قضیه ۳-٤: فرض کنید

(الف) تابع G غیرنزولی شبه یکنوای فوقانی و پیوسته بر روی مجموعه های $(t_k,t_{k+1}]\times\mathcal{G}$ بازای $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ و

$$M(t)=\begin{cases}U_0 & t=t_0\\ M_0(t,t_0,U_0) & t\in(t_0,t_1]\\ M_1(t,t_1,U_1^+) & t\in(t_1,t_2]\\ \quad\dots & \\ M_k(t,t_k,U_k^+) & t\in(t_k,t_{k+1}]\end{cases}$$

جواب ماکزیمال سیستم (3.2) است؛

(ب) توابع $\varphi_k(U)=U+J_k(U)$ ، $\varphi_k:\mathcal{G}\to\mathbb{R}^N$ غیرنزولی یکنوای فوقانی در $\mathcal{G}$ هستند؛

(ج) بازای هر $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ و $\beta\in\mathcal{G}$ حد $\lim_{(t,\alpha)\to(t,\beta)}G(t,\alpha)$ وجود دارد؛

(د) تابع $V\in\mathbb{V}_0$ به گونه ای است که $\|V(t_0,\psi)\|\le\|U_0\|$؛

(ه) معادلات زیر برقرار هستند

$$D^-V(t,X(t))\le G\left(t,V(t,X(t))\right),\quad t\in(t_k,t_{k+1}],\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

$$\left\|V\left(t^+,X(t)+I_k(X(t))\right)\right\|\le\left\|\varphi_k\left(V(t,X(t))\right)\right\|,\ t=t_k \quad (3.3)$$

در اینصورت برای هر تابع $X\in C_{rd}[\mathcal{T},\Omega]$ به قسمی که $\|V(t+r,X(t+r))\|\le\|V(t,X(t))\|,\quad r\in[-d,0]$. خواهیم داشت

$$\|V(t,X(t,t_0,\psi))\|\le\|M(t,t_0,U_0)\|,\quad t\in\mathcal{T} \quad (3.4)$$

که $X(t)=X(t,t_0,\psi)$ بیانگر پاسخ سیستم (3.1) و $M(t)=M(t,t_0,U_0)$ پاسخ ماکزیمال سیستم (3.2) است.

اثبات: از آن جایی که در بازه $(t_{k-1},t_k],k\in\mathbb{N}$ ، تابع $X(t)$ منطبق بر پاسخ سیستم (3.1) است، نتیجه می گیریم که برای $t_{k-1}<t\le t_k$ تابع $X(t)$ در معادله انتگرالی زیر صدق می کند

$$X(t)=X(t_k)+I_k(X(t_k))+\int_{t_k}^{t}F(r,X(r),X(r-d))\,dr$$

فرض می کنیم $t\in(t_0,t_1]$؛ در اینصورت طبق قضیه ۳-۳ داریم

$$\|V(t,X(t,t_0,\psi))\|\le\|M(t,t_0,U_0)\|,\quad t\in\mathcal{T}$$

با فرض اینکه نامعادله (3.4) بازای هر $t\in(t_{k-1},t_k],k\in\mathbb{N}$ برقرار است، با استفاده از (3.3) و توجه به این که توابع φ_k غیرنزولی یکنوا هستند، داریم

$$\left\|V\left(t_k^+,X(t_k^+)+I_k(X(t_k^+))\right)\right\|\le\left\|\varphi_k\left(V(t_k,X(t_k))\right)\right\|\le\|\varphi_k(M(t_k,t_0,U_0))\|=\|\varphi_k(M_{k-1}(t_k,t_{k-1},U_{k-1}))\|=U_k$$

به طریق مشابه با اعمال قضیه ۳-۳ به بازه های بعدی تا $t\in(t_k,t_{k+1}]$ بدست می آوریم $\|V(t,X(t,t_0,\psi))\|\le\|M_k(t,t_k,U_k)\|=\|M(t,t_0,U_0)\|$

بنابراین، نامساوی (3.4) به استقراء برقرار است و اثبات به اتمام می رسد.

قضیه ۳-۵: فرض کنید $\varphi\in\mathcal{K}$ ،$h\in\Gamma$ ،$h_0\in\Gamma_d$ و شرایط قضیه ۳-۴ برقرار است. علاوه بر آن داریم

(الف) $0<\alpha<\beta$؛

(ب) $\widetilde{h_0}(t,X)<\alpha$ نتیجه می دهد $h(t,X)\le\varphi\left(\widetilde{h_0}(t,X)\right)$ و به اصطلاح گوییم $\widetilde{h_0}$ ظریفتر[1] از h است؛

(ج) برای $V\in\mathbb{V}_0$، وجود دارد $a,b\in\mathcal{K}$ به قسمی که؛ $b(h(t,X))\le\|V(t,X)\|\le a\left(\widetilde{h_0}(t,X)\right)$

(د) $a(\alpha)<b(\beta)$ و $\varphi(\alpha)<\beta$.

آنگاه انواع مفاهیم پایداری نهایی سیستم مقایسه ای (3.2)، منجر به انواع خواص مشابه $(\widetilde{h_0},h)$-پایداری نهایی سیستم فازی (3.1) می گردند.

[1] finer

اثبات: ابتدا به بررسی پایداری یکنواخت می پردازیم. فرض کنید سیستم *(3.2)* پایدار به مفهوم *UEPS* باشد. در اینصورت برای $0 < \alpha < \beta$ داده شده با $(a(\alpha), b(\beta))$

$$\exists\, \tau(\alpha,\beta) > 0\ ;\ \|U_0\| < a(\alpha) \Rightarrow \|U(t,t_0,U_0)\| < b(\beta),\ t \ge t_0 \ge \tau(\alpha,\beta),\ t \in \mathcal{T}.\ \forall\, t_0 \in \mathcal{T},$$

بازای هر $(t_0,\psi) \in \mathcal{T} \times PC([-d,0],(E^n)^N)$ به گونه ای که $\widetilde{h_0}(t_0,\psi) < \alpha$ باشد، طبق شرایط (ب) و (د) داریم

$$h(t_0,\psi) \le \varphi\left(\widetilde{h_0}(t_0,\psi)\right) < \varphi(\alpha) < \beta$$

ادعا می کنیم که

$$h(t,X(t)) < \beta \qquad \forall t \ge t_0 \ge \tau(\alpha,\beta) \tag{3.5}$$

به برهان خلف ادعای فوق را ثابت می کنیم. اگر معادله فوق صحیح نباشد، فرض خلف را به این صورت می گیریم که وجود دارد $t^* < t_0$ که $t^* \in (t_k, t_{k+1}]$ برای برخی $k \in \mathbb{N}$، به قسمی که

$$h(t^*,X(t^*)) \ge \beta \quad \text{و} \quad h(t,X(t)) < \beta,\ \ for\ \ t_0 \le t < t^*$$

فرض می کنیم $V(t_0,\psi) = U_0$ باشد، از آن جایی که $\widetilde{h_0}(t_0,\psi) < \alpha$ است طبق شرط (ج)

$$\|V(t_0,\psi)\| = \|U_0\| \le a\left(\widetilde{h_0}(t_0,\psi)\right) < a(\alpha)$$

که منجر می شود به. $\|U(t)\| < b(\beta),\ \ for\ \ t \ge t_0 \ge \tau(\alpha,\beta).$

از آن جایی که شرایط قضیه ۳-۴ برقرار است، داریم

$$\|V(t,X(t))\| \le \|M(t)\|, \qquad t \ge t_0$$

این معادله به همراه (ج) ما را به تناقض زیر می رساند

$$b(\beta) \le b\left(h(t^*,X(t^*))\right) \le \|V(t^*,X(t^*))\| \le \|M(t^*)\| < b(\beta)$$

این تناقض نشانگر باطل بودن فرض خلف و برقراری نامعادله *(3.5)* است، یعنی $\widetilde{h_0}(t_0,\psi) < \alpha$ نتیجه می دهد $h(t,X(t)) < \beta$ بازای هر $t \ge t_0 \ge \tau(\alpha,\beta)$ که به معنای پایداری $(\widetilde{h_0},h)$*-UEPS* برای سیستم فازی *(3.1)* است.

حال به بررسی پایداری قوی می پردازیم. برای ثوابت $0 < T$ و $0 < \alpha < \beta$، طبق آنچه در بخش قبل اثبات کردیم، سیستم فازی *(3.1)* پایدار به مفهوم $(\widetilde{h_0},h)$*-UEPS* است. بنابراین

$$\exists\, \tau_1(\alpha,\beta) > 0;\ \widetilde{h_0}(t_0,\psi) < \alpha \Rightarrow h(t,X(t)) < \beta, \forall\, t_0 \in \mathcal{T},\ t \ge t_0 \ge \tau_1(\alpha,\beta).$$

فرض کنید سیستم مقایسه ای *(3.2)* پایدار به مفهوم *UEPQ* است؛ آنگاه بازای $(a(\alpha), b(\beta))$ داده شده

$$\exists\, \tau_2(\alpha,\beta) > 0\ ;\ \ \|U_0\| < a(\alpha) \Rightarrow \|U(t)\| < b(\beta),\ t \ge t_0 + T, t_0 \ge \tau_2(\alpha,\beta).\ \forall\, t_0 \in \mathcal{T},$$

با تعریف $\tau(\alpha,\beta) \equiv max\,\{\tau_1(\alpha,\beta), \tau_2(\alpha,\beta)\}$، ثابت می کنیم

$$h(t,X(t)) < \beta, \quad t \ge t_0 + T, \quad t_0 \ge \tau(\alpha,\beta), t \in \mathcal{T} \tag{3.6}$$

فرض کنید $V(t_0,\psi) = U_0$ باشد، از آن جایی که $\widetilde{h_0}(t_0,\psi) < \alpha$ است، از (ج) نتیجه می گیریم

$$\|V(t_0,\psi)\| = \|U_0\| \le a(\widetilde{h_0}(t_0,\psi)) < a(\alpha)$$

که بیانگر آن است که

$$\|U(t)\| < b(\beta), \quad t \ge t_0 \ge \tau_2(\alpha,\beta)$$

از آن جایی که شرایط قضیه ۳-۴ برقرار است داریم

$$\|V(t,X(t))\| \le \|M(t)\|, \qquad t \ge t_0$$

این معادله به همراه (ج) منجر به تناقض زیر می شود

$$b\left(h(t,X(t))\right) \le \|V(t,X(t))\| \le \|M(t)\| < b(\beta), \quad t \ge t_0 + T, \quad t_0 \ge \tau(\alpha,\beta)$$

بنابراین *(3.6)* برقرار است، یعنی

$$\Rightarrow h(t,X(t)) < \beta, t \ge t_0 + T, t_0 \ge \tau(\alpha,\beta)\widetilde{h_0}(t_0,\psi) < \alpha$$

و سیستم فازی هایبرید ضربه ای *(3.1)* پایدار $(\widetilde{h_0},h)$*-SUEPS* است.

قضیه ۳-۶: فرض کنید شرایط قضیه ۳-۵ برقرار است به غیر از شرط (د) که با شرط زیر جایگزین شده است

$$\varphi(\alpha) < \beta \quad \text{(ذ)}$$

آنگاه خواص شبه پایداری نهایی سیستم مقایسه ای *(3.2)* بیانگر خواص $(\widetilde{h_0},h)$–شبه پایداری نهایی سیستم فازی متناظر *(3.1)* خواهند بود.

اثبات: فرض کنید سیستم *(3.2)*، *UEPQ* باشد؛ در اینصورت بازای $\alpha,\beta,T > 0$ داده شده با $(a(\alpha), b(\beta))$ داریم

$$\exists\, \tau(\alpha,\beta) > 0\ ;\ \|U_0\| < a(\alpha) \Rightarrow \|U(t)\| < b(\beta), \forall\, t_0 \in \mathcal{T},\ t \ge t_0 + T, t_0 \ge \tau(\alpha,\beta).$$

بازای هر $(t_0,\psi) \in \mathcal{T} \times PC([-d,0],(E^n)^N)$ به گونه ای که $\widetilde{h_0}(t_0,\psi) < \alpha$ ، از (ب) و (ذ) می یابیم

$$h(t_0,\psi) \le \varphi\left(\widetilde{h_0}(t_0,\psi)\right) < \varphi(\alpha) < \beta$$

ادعا می کنیم که

$$h(t,X(t)) < \beta, \quad t \ge t_0 + T, \quad t_0 \ge \tau(\alpha,\beta) \tag{3.7}$$

فرض می گیریم $V(t_0,\psi) = U_0$ باشد، چون $\widetilde{h_0}(t_0,\psi) < \alpha$ است از (ج) داریم $\|V(t_0,\psi)\| = \|U_0\| \le a\left(\widetilde{h_0}(t_0,\psi)\right) < a(\alpha)$

که بیانگر آن است که

$$\|U(t)\| < b(\beta), \quad t \ge t_0 + T, \quad t_0 \ge \tau(\alpha,\beta)$$

پس چون شرایط قضیه ۳-۵ برقرار است

$$\|V(t,X(t))\| \le \|M(t)\|, \qquad t \ge t_0$$

این به همراه (ج) به تناقض زیر می انجامد
$$b\left(h(t,X(t))\right) \le \|V(t,X(t))\| \le \|M(t)\| < b(\beta)$$

بنابراین *(3.7)* برقرار است یعنی

$$\Rightarrow h(t,X(t)) < \beta, t \ge t_0+T, t_0 \ge \tau(\alpha,\beta)\widetilde{h_0}(t_0,\psi) < \alpha$$

پس سیستم فازی هایبرید ضربه ای تاخیری *(3.1)*، $UEPQ(\widetilde{h_0},h)$ - است.

قضیه ۳-۷: فرض کنید $h_0\in\Gamma_d$ ، $h\in\Gamma$ ، $\varphi\in\mathcal{K}$ و

(الف) $0<\alpha<\beta$؛

(ب) $\widetilde{h_0}(t,X)<\alpha$ نتیجه می دهد $h(t,X)\le\varphi\left(\widetilde{h_0}(t,X)\right)$ و به اصطلاح گوییم $\widetilde{h_0}$ ظریفتر از h است؛

(ج) برای $V\in\mathbb{V}_0$، وجود دارد $a,b\in\mathcal{K}$ به قسمی که؛ $b(h(t,X))\le\|V(t,X)\|\le a\left(\widetilde{h_0}(t,X)\right)$

(د) $D^-V(t,X(t))\le 0,\quad X\in C_{rd}[\mathcal{T},\Omega], t\in(t_k,t_{k+1}), k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

(ه) $\left\|V\left(t^+,X(t)+I_k(X(t))\right)\right\|\le\|V(t,X(t))\|,\quad X\in C_{rd}[\mathcal{T},\Omega],\ t=t_k, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

(و) $a(\alpha)<b(\beta)$ و $\varphi(\alpha)<\beta$.

آنگاه سیستم فازی *(3.1)*، $UEPS(\widetilde{h_0},h)$- است.

اثبات: از (الف) و (ب) نتیجه می شود

$$h(t_0,\psi)\le\varphi\left(\widetilde{h_0}(t_0,\psi)\right)<\varphi(\alpha)<\beta$$

سپس ثابت می کنیم $UEPS(\widetilde{h_0},h)$- است، یعنی

$$h(t,X)<\beta,\quad t\in\mathcal{T}\Rightarrow \widetilde{h_0}(t_0,\psi)<\varphi(\alpha)$$

اگر اینگونه نباشد، وجود دارد جوابی از سیستم *(3.1)* با $\widetilde{h_0}(t_0,\psi)<\varphi(\alpha)$ و $t^*\in(t_k,t_{k+1}), k\in\mathbb{N}$ به گونه ای که

$$h(t^*,X(t^*))=\beta,\quad X\in C_{rd}[\mathcal{T},\Omega], t\in[t_0,t^*) \tag{3.8}$$

حال با تعریف $m(t)=V(t,X(t))$، بازای $t\in[t_0,t^*)$، از (د) و (ه) می یابیم

$$m(t^*)\le m(t_k^+)\le m(t_k)\le\cdots\le m(t_0^+) \tag{3.9}$$

با استفاده از (ج)، (و)، *(3.8)*، و *(3.9)* نتیجه می گیریم

$$b(\beta)\le b\left(h(t^*,X(t^*))\right)\le m(t^*)\le m(t_0^+)\le a\left(\widetilde{h_0}(t_0,\psi)\right)\le a(\alpha)<b(\beta)$$

که تناقض است و اینگونه اثبات به اتمام می رسد.

قضیه ۳-۸: فرض کنید شرایط قضیه ۳-۷ برقرار باشند به جز شرط (د) که با شرط زیر جایگزین گردد

(ذ) $D^-V(t,X(t))\le -c\left(V(t,X(t))\right),\quad X\in C_{rd}[\mathcal{T},\Omega], t\in(t_k,t_{k+1}), k\in\mathbb{N}\cup\{0\}, c\in\mathcal{K}$

آنگاه سیستم فازی *(3.1)*، $UPAS(\widetilde{h_0},h)$ - است.

اثبات: از آن جایی که (ذ) بطور ضمنی (د) را نتیجه می دهد، طبق قضیه ۳-۷ ، سیستم *(3.1)* پایدار $UEPS(\widetilde{h_0},h)$- است، یعنی

$$\Rightarrow h(t,X(t))<\beta, t\ge t_0\ge\tau(\alpha,\beta), t\in\mathcal{T}\widetilde{h_0}(t_0,\psi)<\alpha$$

برای هر $\varepsilon\in(0,\alpha)$ داده شده، فرض می کنیم $T=\frac{a(\alpha)}{c(b(\beta))}>0$.

ثابت می کنیم $t^*\in[t_0,t_0+T]: t_k<t^*\le t_{k+1}, k\in\mathbb{N}$ وجود دارد، به قسمی که

$$m(t^*)<b(\beta) \tag{3.10}$$

اگر چنین نباشد، آنگاه

$$m(t)\ge b(\beta), t\in[t_0,t_0+T]$$

با فرض $t_1,t_2,\dots,t_p\in[t_0,t_0+T]$ ، از (ه) و (ذ) داریم

$$m(t_0+T)-m(t_0^+)=[m(t_0+T)-m(t_p)]+[m(t_p)-m(t_{p-1})]+\cdots+[m(t_2)-m(t_1)]+[m(t_1)-m(t_0^+)]\le[m(t_0+T)-m(t_p^+)]+[m(t_p)-m(t_{p-1}^+)]+\cdots+[m(t_2)-m(t_1^+)]+[m(t_1)-m(t_0^+)]\le\int_{t_p^+}^{t_0+T}D^-V(t,X(t),X_p)dt+\int_{t_{p-1}^+}^{t_p}D^-V(t,X(t),X_{p-1})dt+\cdots+\int_{t_1^+}^{t_2}D^-V(t,X(t),X_1)dt+\int_{t_0^+}^{t_1}D^-V(t,X(t),X_0)dt\le -c(b(\beta))T$$

این نامساوی به همراه (ج) منجر می شود به

$$-a(\alpha)\le -m(t_0^+)\le m(t_0+T)-m(t_0^+)\le -c(b(\beta))T<-a(\alpha)+1$$

که تناقض است. بنابراین نامعادله *(3.10)* برقرار است.

با استفاده از (ج)، (ه)، (ذ) و *(3.10)* بدست می آوریم

$$b(h(t,X))\le m(t)\le m(t^*)<b(\beta),\quad t\ge t^*$$

چون b تابعی از کلاس $\mathcal{K}$ (اکیدا صعودی) است نتیجه می شود

$$h(t,X)<\beta,\quad t\ge t_0+T$$

بنابراین سیستم دیفرانسیل فازی ضربه ای تاخیری *(3.1)*، پایدار به مفهوم $UPAS(\widetilde{h_0},h)$- است.

مثال ۳-۹: سیستم دیفرانسیل فازی تاخیری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}D_Hx_1(t)=-1.5x_1(t)+x_2(d(t))+h_1(t)\\ D_Hx_2(t)=-1.5x_2(t)+x_1(d(t))+h_2(t)\end{cases},\quad t\ge t_0 \tag{3.11}$$

که شرایط اولیه آن به صورت زیر است $\begin{cases}x_1(t+t_0)=\varphi_1(t)\\x_2(t+t_0)=\varphi_2(t)\end{cases},\quad t\in[-1,0]$

که در آن $t-X=(x_1,x_2)\in E^2$; $t_0\ge0, d\in C(\mathbb{R},[-1,0])$, $1\le d(t)\le t$. توجه داریم که $d(t)=t-|\sin t|$ مثالی از تاخیر متغیر با زمان کراندار است.

فرض کنید ثوابت $L_1, L_2 > 0$ وجود دارند به قسمی که $D_0(h_i(t_1), h_i(t_2)) \leq L_i|t_1 - t_2|, i = 1,2$. همچنین تابع شبه لیاپانوف را بصورت $V(t, x_1, x_2) = D_0(x_1, x_2)$ در نظر بگیرید. اگر $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in S(\rho), \rho > 0$ ، برای هر $r \in [-1,0]$ نامعادله زیر برقرار است: $D_0(\varphi_1(0), \varphi_2(0)) > D_0(\varphi_1(r), \varphi_2(r))$

تعریف می کنیم

$$\begin{cases} f_1(t,\varphi) = -1.5\varphi_1(t) + \varphi_2(d(t)) + h_1(t) \\ f_2(t,\varphi) = -1.5\varphi_2(t) + \varphi_1(d(t)) + h_2(t) \end{cases}$$

طبق خواص E^2 از مرجع [29] و نیز خواص فاصله $D_0(X,Y)$ از مراجع [23, 28] با محاسبه مشتق دینی تابع لیاپانوف بدست می آوریم

$$D^-V(t,X) = \lim_{h\to 0^-} inf \frac{D_0\big(t+h, X(t+h(t)) + h(t)F(t, X(t), X(t-d))\big) - D_0(t, X(t))}{h} \leq -D_0(\varphi_1, \varphi_2) + L\rho$$

که در آن $L = max\{L_1, L_2\}$ است. بنابراین، معادله سیستم اسکالر مقایسه ای را در این حالت بصورت زیر در نظر می گیریم

$$u'(t) = -u + L\rho$$

که دارای پاسخ $u(t) = (-L\rho + u_0)e^{-(t-t_0)} + L\rho$ است. بنابراین، $|u(t)| \leq |u_0| + 2L\rho$ که نشان می دهد پاسخ سیستم مقایسه ای اسکالر پایدار یکنواخت است، پس طبق قضیه ۳–۷ سیستم فازی (3.11) پایدار کاربردی یکنواخت است.

توجه: ممکن است پاسخ بدیهی[1] سیستم، همان پاسخ صفر[2] سیستم نباشد. در این مواقع از لم زیر استفاده می کنیم.

لم ۳–۱۰: فرض کنید $x^*(t) = x(t, t_0, X_0) \in PC^1(\mathcal{T}, (E^n)^N)$ پاسخ غیرصفر سیستم فازی (3.1) باشد. آنگاه سیستم زیر را در نظر می گیریم

(3.12)

$$\begin{cases} D_H x = f(t,x) & t \in (t_k, t_{k+1}], k = 0,1,2,\ldots \\ x(t) = \phi_i(t, x(t)) & t \in (t_i, s_i], i = 1,2,\ldots \\ x(t_0) = \tilde{x}_0 \end{cases}$$

که در آن $x, \tilde{x}_0 \in (E^n)^N$ ، $f \in PC^1(\mathcal{T} \times (E^n)^N, (E^n)^N)$ ، $\psi_i \in C([t_i, s_i] \times (E^n)^N, (E^n)^N)$ ، $i = 1,2,\ldots$ و

$$f(t,x) = F(t, x + x^*(t)) - F(t, x^*(t)) \qquad (3.13)$$

$$\phi_i(t,x) = \psi_i(t, x + x^*(t)) - \psi_i(t, x^*(t)) \qquad (3.14)$$

سیستم (3.12) دارای پاسخ صفر (با $\tilde{x}_0 = \hat{0}$) است. بنابراین بررسی خواص پایداری پاسخ غیرصفر $x^*(t)$ از سیستم اولیه مطرح شده (3.1)، به بررسی خواص پایداری پاسخ صفر سیستم (3.12) ساده می گردد.

در ادامه برای نشان دادن نحوه استفاده و کاربرد لم و قضایای فوق، مثالی کاربردی از پزشکی (اثر دارو بر ساختمان بدن) را مطرح می کنیم.

مثال ۳–۱۱: هنگامی که به بیمار تجویز دارویی می شود، پس از مصرف دارو، این دارو کم کم وارد جریان خون می شود. از آن جایی که دارو از کبد و کلیه می گذرد، با متابولیزم بدن به مرور زمان کاهش و در نهایت حذف می شود. سرعت این عملیات بستگی به نوع آن داروی خاص دارد [34]. مثلا فرض می کنیم $(1-a)\%$ از دارو در هر بازه زمانی حذف می شود. دوز اولیه را x_0 در نظر می گیریم. علاوه بر آن، فرض می کنیم در زمان های t_k که $k = 0,1,2,\ldots$ و $t_k < t_{k+1}$ دارو بصورت تزریق وریدی با نرخ ثابت b میلی گرم تا لحظه s_k که $k = 1,2,\ldots$ و $t_k < s_k < t_{k+1}$ وارد جریان خون شود و این روند تکرار شود. ساده ترین مدلی که نرخ تغییرات مقدار دارو را در محل جذب توصیف می کند بصورت $D_H x(t) = -ax(t)$ است (مثال 7.2 از مرجع [35] را ببینید) و تغییر درون وریدی با معادله $x(t) = x(t_k - 0) + b(t - s_k)$ مدل می شود. اگر عملیات تزریق وریدی را تکرار کنیم، مدل ریاضی توصیف دینامیک میزان دارو در جریان خون بصورت زیر خواهد بود

(3.15)

$$\begin{cases} D_H x(t) = -ax(t) & t \in (s_k, t_{k+1}], k = 0,1,2,\ldots \\ x(t) = x(t_k - 0) + b(t - s_k) & t \in (t_k, s_k], k = 1,2,\ldots \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

که در آن $x \in E$ است و $a, b > 0$ ثابت هستند. از آن جایی که $b \neq 0$ است، سیستم فوق دارای پاسخ صفر (با فرض $x_0 = \hat{0}$) می باشد. بنابراین، با استفاده از لم فوق، با فرض آن که جواب غیرصفر سیستم (3.15) $x^*(t)$ با شرط اولیه داده شده $x(t_0) = x_0$ باشد، طبق معادلات (3.13) و (3.14) مساله بصورت زیر کاهش می یابد

(3.16)

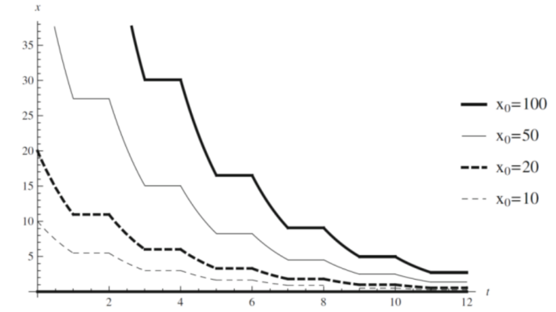
$$\begin{cases} D_H x(t) = -ax(t) & t \in (t_k, t_{k+1}], k = 0,1,2,\ldots \\ x(t) = x(t_i - 0) & t \in (t_i, s_i], i = 1,2,\ldots \\ x(t_0) = \tilde{x}_0 \end{cases}$$

سیستم اسکالر (3.16) بسیار ساده است و پایداری پاسخ صفر آن (با $\tilde{x}_0 = \hat{0}$) واضح است.

برای بررسی پایداری با استفاده از قضایای پایداری کافیست تابع شبه لیاپانوف را بصورت $V(t,x) = x^2$ در نظر بگیریم. در اینصورت بدست می آوریم $D^-V(t,x) = 2xf(t,x) = -2ax^2 \leq \hat{0}$

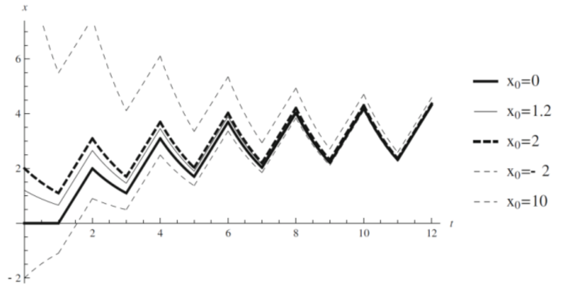
بنابراین تمام شرایط قضیه ۳–۷ برقرار است، پس پاسخ صفر سیستم (3.16) و در نتیجه پاسخ غیرصفر سیستم (3.15) پایدار یکنواخت هستند. پاسخ سیستم (3.16) در حالت خاص $a = 0.6$ یعنی ۴۰٪ حذف دارو در هر بازه زمانی، $b = 2$ ، $t_k = 2k$ ، $s_k = 2k - 1$ ، $k = 1,2,\ldots$ و بازای مقادیر اولیه متفاوت در شکل ۱ رسم شده است.

[1] Trivial solution
[2] Zero solution



شکل ۱: منحنی پاسخ های سیستم تغییر یافته (*3.16*) بازای دوزهای اولیه متفاوت

پاسخ $x^*(t)$ از سیستم (*3.15*) پایدار است؛ یعنی اگر دوز تزریقی اولیه باندازه کافی نزدیک به مقدار دوز اولیه ثابت داده شده x_0 باشد، آن گاه مقدار دارو در جریان خون به اندازه کافی نزدیک به مقدار دوز اولیه تجویزی داده شده x_0 خواهد بود. رفتار پاسخ های $x^*(t)$ از سیستم (*3.15*) در حالت خاص $a = 0.6$، $b = 2$، $t_k = 2k$، $s_k = 2k - 1$، $k = 1, 2, \ldots$ و بازای مقادیر اولیه متفاوت در شکل ۲ رسم شده است.



شکل ۲: منحنی پاسخ های سیستم (*3.15*) بازای دوزهای اولیه متفاوت

٤- نتیجه گیری

در این مقاله، قضایایی برای تحلیل پایداری سیستم های هایبرید تاخیری توصیف شده با دستگاه معادلات دیفرانسیل فازی ضربه ای ارائه کردیم. برای این منظور از توابع شبه لیاپانوف برداری به همراه قضیه مقایسه سیستم دیفرانسیل فازی با سیستم دیفرانسیلی معمولی استفاده شد. در این راستا، پایداری را از دیدگاه های مختلف یعنی پایداری نهایی، پایداری قوی، پایداری مجانبی و پایداری یکنواخت بررسی کردیم. همچنین قضایایی برای پایداری کاربردی سیستم های دینامیکی فازی به اثبات رساندیم. در انتها با مثالی عددی، کارایی روش را نشان دادیم و در نهایت با مثالی عملی از پزشکی، پلی بین مبانی ریاضی تحقیق و کاربرد عملی پژوهش تبیین کردیم.

مراجع

[1] J.P. Lasalle, S.Lefschetz: Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications, Academic Press, New York, NY, USA, 1961.

[2] N. Rouche, P. Habets, M. Laloy: Stability Theory by Lyapunov's Direct Method, Springer, New York, NY, USA, 1997.

[3] V. Lakshmikantham, X.Z. Liu: Stability Analysis in Terms of Two Measures, World Scientific, Singapore, 1993.

[4] S.M.S. de Godoy, M.A. Bena: Stability criteria in terms of two measures for functional differential equations, Applied Mathematics Letters 18 (6) (2005) 701-706.

[5] P. Wang, H. Lian: On the stability in terms of two measures for perturbed impulsive integro-differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications 313 (2) (2006) 642-653.

[6] P. Wang, Z. Zhan: Stability in terms of two measures of dynamic system on time scales, Computers and Mathematics with Applications 62 (12) (2011) 4717-4725.

[7] C.H. Kou, S.N. Zhang: Practical stability for finite delay differential systems in terms of two measures, Acta Math. Appl. Sinica 25 (3) (2002) 476–483.

[8] V. Lakshmikantham, V.M. Matrosov, S. Sivasundaram: Vector Lyapunov Functions and Stability Analysis of Nonlinear Systems, Kluwer Academic, Dordrecht, 1991.

[9] P. Wang, W. Sun: Practical stability in terms of two measures for set differential equations on time scales, The Scientific World Journal (2014), Article ID 241034, 7 pages.

[10] D.D. Bainov, I.M. Stamova: On the practical stability of the solutions of impulsive systems of differential-difference equations with variable impulsive perturbations, J. Math. Anal. Appl. 200 (1996) 272-288.

[11] Z.G. Luo, J.H. Shen: New Razumikhin type theorems for impulsive functional differential equations, Appl. Math. Comput. 125 (2002) 375-386.

[12] A.A. Soliman: Stability criteria of impulsive differential systems, Appl. Math. Comput. 134 (2003) 445–457.

[13] J.T. Sun: Stability criteria of impulsive differential system, Appl. Math. Comput. 156 (2004) 85–91.

[14] J.T. Sun,Y.P. Zhang: Impulsive control of a nuclear spin generator, J. Comput. Appl. Math. 157 (1) (2003) 235–242.

[15] J.T. Sun, Y.P. Zhang: Stability analysis of impulsive control systems, IEE Proc. Control Theory Appl. 150 (4) (2003) 331–334.

[16] J.T. Sun, Y.P. Zhang, Q.D. Wu: Less conservative conditions for asymptotic stability of impulsive control systems, IEEE Trans. Automat. Control 48 (5) (2003) 829–831.

[DOR: 20.1001.1.20088345.1398.13.3.2.7]
[DOI: 10.29252/joc.13.3.41]

[17] T. Yang: Impulsive Systems and Control: Theory and Applications, Nova Science Publishers, Huntington NY, 2001.

[18] S.G. Hristova, A. Georgieva: Practical stability in terms of two measures for impulsive differential equations with supremum, Int. J. Diff. Eq. 2011 (2011) Article ID 703189, 13 pages.

[19] S. Dilbaj, Srivastava S.K.: Strict stability criteria for impulsive differential systems, Advance in Differential equation and Control Processes 10 (2012) 171-182.

[20] S. Dilbaj, Srivastava S.K.: Strict stability criteria for impulsive functional differential equations, Lecture Notes in Engineering and Computer Science 2197 (2012) 169-171.

[21] J.S. Yu: Stability for nonlinear delay differential equations of unstable type under impulsive perturbations, Applied Mathematics Letters 14 (2001) 849–857.

[22] Y. Zhang, J.T. Sun: Boundedness of the solutions of impulsive differential systems with time-varying delay, Appl. Math. Comput. 154 (1) (2004) 279–288.

[23] Y. Zhang, J. Sun: Eventual practical stability of impulsive differential equations with time delay in terms of two measurements, J. Comput. and Appl. Math. 176 (2005) 223-229.

[24] V. Lakshmikantham, S. Leela: Stability theory of fuzzy differential equations via differential inequalities, Mathematical Inequalities and Applications 2 (1999) 551-559.

[25] V. Lakshmikantham, S. Leela: Fuzzy differential systems and the new concept of stability, Nonlinear Dynamics and Systems Theory 1 (2) (2001) 111-119.

[26] V. Lakshmikantham, R. Mohapatra: Basic properties of solutions of fuzzy differential equations, Nonlinear Studied 8 (2001) 113-124.

[27] C. Yakar, M. Cicek, M.B. Gucen: Practical stability, boundedness criteria and Lagrange stability of fuzzy differential systems, J. Computers and Mathematics with Applications 64 (2012) 2118-2127.

[28] S. Zhang, J. Sun: Stability of fuzzy differential equations with the second type of Hukuhara derivative, IEEE Transaction on Fuzzy Systems (2014).

[29] B. Bede, S. G. Gal: Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations, Fuzzy Sets Sys. 151 (3) (2005) 581-599.

[30] S. Sun, Z. Han, E. Akin-Bohner, P Zhao, Practical stability in terms of two measures for hybrid dynamic systems, Bulletin of the Polish academy of sciences, Mathematics (210) (2010).

[31] P. Wang, X. Liu, Practical stability of impulsive hybrid differential systems in terms of two measures on time scales, Nonlinear Analysis 65 (2006) 2035-2042.

[32] Yu Zhang, Exponential stability of impulsive discrete systems with time delays, Applied Mathematics Letters 25 (2012) 2290–2297.

[33] P. Wang, M. Wu, Y. Wu, Practical stability in terms of two measures for discrete hybrid systems, Nonlinear Analysis: Hybrid systems 2 (2008) 58-64.

[34] A. Routes, "Drug absorption, distribution and elimination. Pharmacokinetics", 2015. [Online]. Available: http://www.columbia.edu/itc/gsas/g9600/2004/GrazianoReadings/Drugabs. [Accessed: 10- Oct-2017].

[35] Phrmacokinetics, [Online]. Available:

http://coewww.rutgers.edu/classes/bme/bme305/Book Chapters/Chap702Sep03.

[Accessed: 10- Oct- 2017].

[36] H. Zarei, A. Kamyad and A. Heydari, "Fuzzy Modeling and Control of HIV Infection", Computational and Mathematical Methods in Medicine, vol. 2012, pp. 1-17, 2012.

[37] M. Mazandarani, N. Pariz and A. Vahidian Kamyad, "Granular Differentiability of Fuzzy-Number-Valued Functions", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, pp. 1-1, 2017.

[38] L. Hu, X. Mao and Y. Shen, "Stability and boundedness of nonlinear hybrid stochastic differential delay equations", Systems & Control Letters, vol. 62, no. 2, pp. 178-187, 2013.

[39] C. Yakar, M. Çiçek and M. Gücen, "Practical stability, boundedness criteria and Lagrange stability of fuzzy differential systems", Computers & Mathematics with Applications, vol. 64, no. 6, pp. 2118-2127, 2012.

[40] S. Zhang and J. Sun, "Stability of Fuzzy Differential Equations With the Second Type of Hukuhara Derivative", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 23, no. 4, pp. 1323-1328, 2015.