

# کنترل آرایش‌بندی سطح دینامیکی زمان‌محدود فازی تطبیقی مبتنی بر رؤیتگر اغتشاش غیرخطی ربات‌های متحرک چرخ‌دار تراکتور-تریلر

ملیحه کاظمی پور<sup>۱</sup>، خوشنام شجاعی<sup>۲،۳</sup>

<sup>۱</sup> کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی برق، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران، mah.kazemi98@gmail.com

<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی برق، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران، shojaei@pel.iaun.ac.ir

<sup>۳</sup> مرکز تحقیقات پردازش دیجیتال و بینایی ماشین، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران

پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۰۷

ویرایش: ۱۳۹۹/۰۸/۲۰

دریافت: ۱۳۹۹/۰۳/۱۳

**چکیده:** در این مقاله، مسأله کنترل ردیابی مسیرهای زمانی مرجع برای گروهی از ربات‌های متحرک چرخ‌دار غیرهولونومیک تراکتور-تریلر بر مبنای روش پیشرو-پیرو، در حضور اغتشاشات خارجی و نامعینی‌های پارامتری مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور، ابتدا معادلات سینماتیک و دینامیک صف‌آرایی ربات تراکتور-تریلر ارائه و با تعریف بردار خطای حالات، مدل آرایش پیشرو-پیرو تولید شده است. سپس، با استفاده از مدل دینامیک آرایش‌بندی، یک رؤیتگر اغتشاش غیرخطی جهت تخمین و جبران اغتشاشات خارجی طراحی شده و مدلی جدید از سیستم به دست آمده است. در ادامه، با در نظر گرفتن مدل مبتنی بر رؤیتگر، یک کنترل‌کننده سطح دینامیکی زمان‌محدود طراحی و پیشنهاد شده است. طرح پیشنهادی کران‌داری سیگنال‌های حلقه بسته و همگرایی سریع خطای ردیابی در زمان محدود را تضمین می‌کند. به علاوه، با بهره‌گیری از یک تخمین‌زن فازی تطبیقی، نامعینی‌های پارامتری با دقت بسیار خوبی تخمین زده می‌شود. در پایان، پایداری زمان‌محدود سیستم کنترل حلقه بسته از طریق تئوری لیاپانوف تعمیم‌یافته اثبات شده و میزان اثربخشی الگوریتم پیشنهادی از طریق شبیه‌سازی‌ها نشان داده می‌شود.

**کلمات کلیدی:** ربات تراکتور-تریلر، رؤیتگر اغتشاش، فازی تطبیقی، قیدهای غیرهولونومیک، کنترل سطح دینامیکی زمان‌محدود.

## Nonlinear Disturbance Observer-Based Fuzzy Adaptive Finite-Time Dynamic Surface Formation Control of Tractor-Trailer Wheeled Mobile Robots

Malihe Kazempour, Khoshnam Shojaei

**Abstract:** In this paper, the trajectory tracking control problem for a team of nonholonomic tractor-trailer wheeled mobile robots has been investigated based on the leader-follower strategy in the presence of structural uncertainties and external disturbances. For this purpose, the kinematic and dynamic equations of the formation of tractor-trailer robots are presented and leader-follower's model is produced by defining the state error vector at first. Then, a nonlinear disturbance observer is designed by using the formation dynamic model to estimate and compensate the external disturbance and a new model of the system is obtained. In the following, a finite-time dynamic surface controller has been designed and presented by considering an observer-based model. The proposed scheme ensures closed-loop signals boundedness and fast convergence of tracking errors in a limited time. Furthermore, the parametric uncertainties are estimated by using a fuzzy adaptive estimator with a great accuracy. Finally, the finite time stability of the closed-loop control system is proved by Lyapunov theory and the effectiveness of proposed algorithm is shown by simulations.

**Keywords:** Adaptive fuzzy, disturbance observer, finite-time dynamic surface control, nonholonomic constraints, tractor-trailer robot.

## ۱- مقدمه

ربات‌های متحرک چرخ‌دار یک نمونه از رایج‌ترین ربات‌های متحرک هستند که بسته به نوع کاربرد در ساختارهای مختلف به صورت-های تک بدنه و یا چند بدنه متصل به هم یافت می‌شوند. ربات‌های چرخ-دار عمدتاً سیستم‌های تحریک ناقص، مقید به قیود غیرهولونومیک و دارای ذات غیرخطی هستند که سینماتیک حرکت آن‌ها مستقیماً با نوع، تعداد و نحوه قرارگیری چرخ‌های آن‌ها مرتبط است [۱].

واضح است که راه اندازی چندین بستر چرخ‌دار متصل به هم که تنها یکی از آن‌ها مجهز به عملگر است، علاوه بر افزایش بازده و ظرفیت حمل و نقل، از نظر اقتصادی نیز مقرون به صرفه است. بنابراین، در دهه-های اخیر فعالیت‌های پژوهشی در حوزه عملی و نظری، پیرامون ربات-های چرخ‌دار چند بدنه به طور فزاینده‌ای ادامه یافته است [۲]، [۳]. در این سیستم‌ها، علاوه بر خصوصیات مربوط به چرخ‌ها، نحوه اتصال بسترها به یکدیگر نیز یک عامل تأثیرگذار در سینماتیک حرکت آن‌ها محسوب می‌شود [۴]. ربات چرخ‌دار تراکتور متصل به یک دنبالرو (تریلر)، یک سیستم تحریک ناقص با رفتار دینامیکی غیرخطی است که مدل‌سازی و کنترل آن با وجود محدودیت‌های حرکتی، نامعینی‌های ساختاری و اغتشاشات خارجی وارد بر آن، امری چالش‌برانگیز و در عین حال جذاب است [۵]. در [۶]، یک الگوریتم کنترلی جهت هدایت تراکتور متصل به چندین دنباله رو با ترکیب اتصال روی محور<sup>۱</sup> و خارج محور<sup>۲</sup> در حرکت رو به عقب پیشنهاد شده است که در آن، جهت دفع اثر جک‌نایف<sup>۳</sup> و برخورد متقابل بسترها با یکدیگر محدودیت خاصی بر روی زاویه‌ی انحنا قرار شده است. در [۷]، مسأله هدایت دوبل<sup>۴</sup> تراکتور و تریلر مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور، پس از تبدیل مسیر هندسی طراحی شده در فضای دکارتی به مسیر زمانی مرجع در فضای پیکربندی<sup>۵</sup>، با اعمال یک کنترل‌کننده پسگام<sup>۶</sup> هر دو قسمت تراکتور و تریلر به طور هماهنگ در راستای ردیابی مسیر مرجع هدایت شده‌اند. همچنین، در [۸]، ضمن تعمیم الگوریتم سلسله مراتبی مذکور به مسأله هدایت چندگانه<sup>۷</sup> تراکتور-تریلر، جهت حل مسأله اجتناب از برخورد با موانع و ارضای قیود حاکم بر ورودی‌های کنترلی تراکتور، پارامترهای مسیر هندسی از طریق الگوریتم ازدحام ذرات با رفتار کوانتومی بهینه-سازی شده‌اند. در [۹]، یک مدل غیرخطی کنترل‌کننده پیش‌بین متمرکز و در [۱۰]، یک کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی غیرمتمرکز مقاوم جهت حل مسأله ردیابی در خودرو بدون سرنشین متصل به دنبالرو ارائه شده است. کارآیی طرح‌های پیشنهادی از طریق پیاده‌سازی و اعمال روش کنترلی به

یک تراکتور-تریلر در ردیابی مسیر مستقیم و دارای انحنا اثبات شده است. در [۱۱]، با ارائه یک الگوریتم کنترل پیش‌بین خطی و غیرخطی، ضمن حل مسأله ردیابی مسیر مرجع بدون برخورد با موانع با در نظر گرفتن حد اشباع عملگرها، مسأله برخورد با خود<sup>۸</sup> نیز برای ربات تراکتور-تریلر حل شده است. در [۱۲]، یک کنترل‌کننده سینماتیکی پایدارساز متغیر با زمان دو وضعیتی<sup>۹</sup> جهت پایدارسازی ربات تراکتور-تریلر حول موقعیت نهایی مطلوب با شروع از هر پیکربندی اولیه دلخواه، طراحی و ارائه شده است و در ادامه آن، با افزودن یک کنترل‌کننده دینامیکی غیرمبتنی بر مدل، گشتاور مطلوب عملگرها تولید و اعتبار طرح پیشنهادی از طریق پیاده‌سازی به اثبات رسیده است [۱۳]. در [۱۴]، جهت پایدارسازی مجانبی ربات تراکتور-تریلر حول مسیرهای حرکت زمانی مرجع، یک کنترل غیرمبتنی بر مدل بر اساس روش ترانهاده ژاکوبی بهبود یافته پیشنهاد شده است. پیچیدگی مدل‌سازی دینامیکی ربات‌های چرخ‌دار چند بدنه از یک سو و تأثیر حضور نامعینی‌های پارامتری و اغتشاشات خارجی در روش‌های کنترلی مبتنی بر مدل دینامیکی از سوی دیگر، باعث شده است که طرح‌های ارائه شده عموماً بر مبنای مدل سینماتیکی بوده و تنها در شمار محدودی از آنها مدل دینامیکی مستقیماً مبنای طراحی قرار گرفته است. با این وجود، زمانی که پارامترهای اینرسی ربات به لحاظ اندازه قابل ملاحظه باشند و سرعت و مانوردهی ربات افزایش یابد، دینامیک ربات اهمیت پیدا می‌کند و دیگر معادله سینماتیکی به تنهایی برای توصیف حرکت ربات کفایت نمی‌کند. بنابراین، در برخی از پژوهش‌ها علاوه بر طراحی کنترل‌کننده بر مبنای مدل سینماتیک جهت کنترل پارامترهای مربوط به موقعیت، سرعت‌های خطی و زاویه‌ای ربات تراکتور-تریلر توسط اعمال روش‌های غیرخطی مانند مدل‌غزشی [۱۵]، مدل‌غزشی تطبیقی [۱۶]، مدل‌غزشی فازی [۱۷]، پسگام تطبیقی [۱۸] و مقاوم تطبیقی [۱۹] در حضور نامعینی‌های ساختاری و اغتشاشات خارجی کنترل شده است. در [۲۰]، ضمن کنترل متغیرهای موقعیت ربات تراکتور-تریلر با طراحی یک کنترل‌کننده سینماتیکی بر مبنای روش رگرسیون مرتبه دوم خطی (LQR<sup>۱۰</sup>)، متغیرهای سرعت ربات با الگوریتم کنترلی زمان محدود مبتنی بر روش مدل‌غزشی ترمینال کنترل شده‌اند. کنترل زمان محدود یکی از روش‌های قابل توجه در زمینه کنترل ردیابی ربات‌های چرخ‌دار محسوب می‌شود [۲۱]. این الگوریتم کنترلی علی‌رغم افزایش قابل توجه سرعت و دقت ردیابی و در نتیجه افزایش نرخ همگرایی خطای ردیابی و محدود نمودن حالت گذرا از معایب همچون ایجاد نوسانات فرکانس بالا در سیگنال کنترلی و پیچیدگی پیاده‌سازی عملی نیز برخوردار است.

یکی از سایر مسائلی که در سال‌های اخیر در زمینه ربات‌های چرخ-دار مورد توجه قرار گرفته است، آرایش بندی و کنترل گروهی آنها است [۲۲]. این ربات‌ها را به دلیل مکانیزم حرکتی ساده، امکان حمل تجهیزات

<sup>1</sup> On-axel hitching

<sup>2</sup> Off-axel hitching

<sup>3</sup> Jackknife

<sup>4</sup> Double-steering

<sup>5</sup> Configuration space

<sup>6</sup> Backstepping

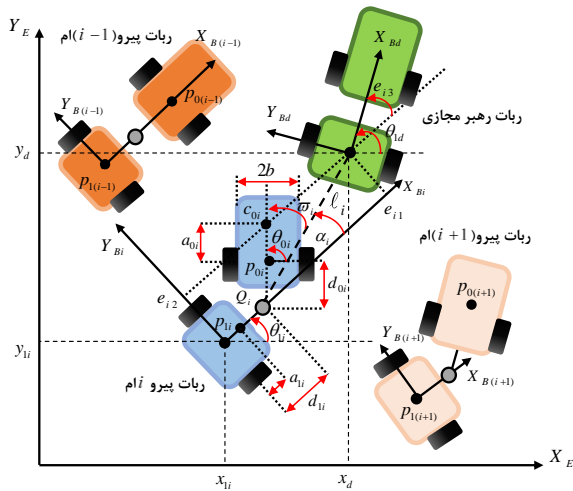
<sup>7</sup> Multi-steering

<sup>8</sup> Self-collision

<sup>9</sup> Switching

<sup>10</sup> Linear quadratic regulator

استاندارد مجهز به عملگر است که بستر دوم به عنوان دنبالرو با دو چرخ بدون عملگر، با اتصال از نوع روی محور به آن متصل شده است. چرخ‌های ربات در فاصله  $2b$  از یکدیگر قرار گرفته‌اند. به‌علاوه، یک چرخ هرزگرد از نوع کاستور نیز در قسمت میانی تراکتور جهت حفظ تعادل قرار داده شده است.



شکل ۱: ربات پیشرو مجازی و گروهی از ربات‌های تراکتور-تریلر در پیکربندی‌های اولیه

همان‌گونه که در شکل ۱ نشان داده شده است،  $a_{0i}$  و  $a_{1i}$  به ترتیب، نشان‌دهنده فاصله نقطه میانی چرخ‌های تراکتور و تریلر  $\hat{I}_m$  تا مراکز جرم آن‌ها هستند. بردار مختصات تعمیم‌یافته ربات پیرو  $\hat{I}_m$  به صورت  $q_i = (x_{1i}, y_{1i}, \theta_{1i}, \theta_{0i})^T$  بیان می‌شود که در آن  $\theta_{1i}$  و  $\theta_{0i}$  جهت‌گیری تراکتور و تریلر می‌باشند و  $x_{1i}$  و  $y_{1i}$  مختصات نقطه  $p_{1i}$  در دستگاه متصل به زمین  $(\{X_E, O_E, Y_E\})$  را بیان می‌کنند. پارامترهای  $d_{1i}$  و  $d_{0i}$  به ترتیب، فاصله نقاط  $P_{1i}$  و  $P_{0i}$  تا محل اتصال تراکتور به تریلر را مشخص می‌نمایند و  $C_{1i}$  و  $C_{0i}$  نشان‌دهنده مراکز جرم تراکتور و تریلر  $\hat{I}_m$  هستند. با توجه به این نکته که پارامتر  $d_{0i}$  معیاری جهت تعیین نحوه اتصال دنبال‌رو به تراکتور است، در این مقاله  $d_{0i} = 0$  فرض شده و بر این اساس نحوه اتصال از نوع روی محور می‌باشد.

## ۲-۱- معادلات سینماتیک و دینامیک

معادلات سینماتیک تراکتور-تریلر  $\hat{I}_m$  از سیستم آرایش‌بندی با در نظر گرفتن تأثیر  $m = 2$  قید غیرهولونومیک ناشی از غلتش خالص چرخ‌ها در حرکت رو به جلو و عدم لغزش آن‌ها در جهت جانبی، به صورت زیر قابل بیان است [۱۹]:

و تجهیز به سنسورهای جمع‌آوری اطلاعات و غیره، می‌توان انتخابی مناسب جهت استفاده در اهدافی که تحقق آن‌ها با همکاری ربات‌ها میسر و یا تسهیل می‌شوند، دانست. در [۲۳]، کنترل گروهی ربات‌های تراکتور-تریلر مجهز به چرخ‌های همه‌جهته<sup>۱</sup> مورد بررسی قرار گرفته است و در [۲۴]، جهت دوری از انفجار پیچیدگی ریاضی موجود در روش کنترلی پسگام و برخی از سایر روش‌ها، یک الگوریتم کنترلی سطح دینامیکی عصبی تطبیقی مبتنی بر رؤیتگر سرعت، جهت حل مسأله ردیابی مسیرهای زمانی مرجع برای گروهی از ربات‌های تراکتور-تریلر پیشنهاد شده است. روش‌های آرایش‌بندی ربات‌ها به‌طور کلی به سه دسته ساختار مجازی<sup>۲</sup>، مبتنی بر رفتار<sup>۳</sup> و پیشرو-پیرو<sup>۴</sup> تقسیم نمود. در این میان، روش پیشرو-پیرو، به دلیل سادگی روابط، عدم وابستگی ربات‌های پیرو به مسیر مرجع، قابلیت اطمینان بالا و مقاومت در مقابل بروز خطا در هریک از زیر سیستم‌ها، در مقالات بسیاری مورد توجه قرار گرفته است. در این مقاله، جهت کنترل ردیابی مسیر زمانی مرجع برای گروهی از ربات‌های تراکتور-تریلر مبتنی بر آرایش پیشرو-پیرو، نوآوری‌های زیر دنبال خواهد شد:

۱- طراحی رؤیتگر اغتشاش غیرخطی، متناسب با معادلات دینامیکی آرایش‌بندی ربات تحریک ناقص تراکتور-تریلر، جهت تخمین دقیق و جبران اغتشاشات خارجی که منجر به ایجاد مدل دینامیکی مبتنی بر رؤیتگر می‌گردد؛

۲- ارائه روش ترکیبی سطح دینامیکی زمان‌محدود به‌عنوان روش جدید، جهت همگرایی سریع خطاهای ردیابی دینامیکی و سینماتیکی در کنترل آرایش سیستم‌های غیرخطی به فرم فیدبک اکید و اعمال این روش به آرایش‌بندی گروهی از ربات‌های تحریک ناقص تراکتور-تریلر در حضور قیود غیرهولونومیک؛

۳- تخمین نامعینی‌های پارامتری موجود در دینامیک گروهی از ربات‌های تراکتور-تریلر توسط الگوریتم فازی تطبیقی؛

۴- تضمین پایداری زمان‌محدود سیستم کلی آرایش‌بندی و همگرایی سریع خطاهای ردیابی به ناحیه کوچکی حول مبدأ.

در ادامه، ضمن معرفی سیستم مورد بررسی و معادلات آن، مدل آرایش پیشرو-پیرو ارائه خواهد شد و با در نظر گرفتن آن، نوآوری‌های کنترلی فوق محقق خواهند شد.

## ۲-۲- مقدمات ریاضی و تشریح مدل

شکل ۱ گروهی از ربات‌های تراکتور-تریلر شامل  $1 \leq i \leq N$  ربات پیرو در پیکربندی‌های اولیه و ربات پیشرو مجازی نمایش می‌دهد. ربات تراکتور-تریلر، همان‌طور که شکل ۱ نشان داده شده، سیستمی متشکل از دو بستر چرخ‌دار است. بستر اول یک ربات دیفرانسیلی با دو چرخ

<sup>1</sup> Omni-directional  
<sup>2</sup> Virtual structure  
<sup>3</sup> Behavior-based approach  
<sup>4</sup> Leader-follower approach

$$\bar{M}_{2i}(q_i) = \begin{bmatrix} \frac{I_{\theta_i}}{d_{li}^2}(\dot{\theta}_{0i} - \dot{\theta}_i) \tan(\theta_i) (1 + \tan^2(\theta_i)) + \frac{A_i \dot{\theta}_{li}}{d_{li}} \tan(\theta_i) & 0 \\ (-\dot{\theta}_{li} \cos(\theta_i) \tan^2(\theta_i) + \dot{\theta}_{0i} \cos^{-1}(\theta_i)) a_{0i} m_{0i} & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad (6)$$

$$\bar{C}_i(q_i, \dot{q}_i) = \begin{bmatrix} \frac{-A_i \dot{\theta}_{li}}{d_{li}} \tan(\theta_i) & -a_{0i} m_{0i} \cos^{-1}(\theta_i) \dot{\theta}_{0i} \\ a_{0i} m_{0i} \dot{\theta}_{li} \sin(\theta_i) \tan(\theta_i) & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad (7)$$

$$\begin{cases} I_{\theta_{0i}} = m_{0i} a_{0i}^2 + I_{0i}, & I_{\theta_i} = m_{li} a_i^2 + m_{0i} d_{li}^2 + I_{li} \\ M_i = m_{0i} + m_{li}, & A_i = a_{li} m_{li} + d_{li} m_{0i} \end{cases} \quad (8)$$

$$\bar{\tau}_{di} = [\bar{\tau}_{d_{1i}}, \bar{\tau}_{d_{2i}}]^T = \tau_{di} + F_i(q_i) \quad (9)$$

$$F_i(q_i) = [F_{1i}(q_i), F_{2i}(q_i)]^T = F_{vi} v_i(t) + F_{ci} \text{sign}(v_i(t)) \quad (10)$$

که در این روابط،  $\theta_i = (\theta_{0i} - \theta_{li})$  می باشد. همچنین،  $m_{0i}$  و  $m_{li}$  به ترتیب بیانگر جرم تراکتور و تریلر،  $I_{0i}$  و  $I_{li}$  ممان های اینرسی آنها و  $F_{ci}$  و  $F_{vi}$  ضرایب ثابت کراندار نامعلوم هستند.

**خاصیت ۱:** برای ماتریس  $\bar{M}_{2i}(q_i) + \bar{C}_i(q_i, \dot{q}_i)$  به  $\bar{C}_{1i}(q_i, x_1)$  ازای هر  $x_1, x_2, x_3 \in R^2$  خواص زیر برقرار است:

$$\bar{C}_{1i}(q_i, x_1) x_2 = \bar{C}_{1i}(q_i, x_2) x_1, \quad (11)$$

$$\bar{C}_{1i}(q_i, x_1 + x_2) x_3 = \bar{C}_{1i}(q_i, x_1) x_3 + \bar{C}_{1i}(q_i, x_2) x_3 \quad (12)$$

$$\bar{C}_{1i}(q_i, x_1) x_2 \leq \lambda \|x_1\| \|x_2\|, \quad \lambda \geq 0 \quad (13)$$

**خاصیت ۲:** ماتریس  $\bar{M}_{1i}(q_i) - 2\bar{C}_{1i}(q_i, \dot{q}_i)$  پادمقارن است. بر این اساس، به ازای هر بردار  $x \in R^4$  می توان اثبات نمود که تساوی

$$x^T (\bar{M}_{1i}(q_i) - 2\bar{C}_{1i}(q_i, \dot{q}_i)) x = 0$$

### ۳- تشریح اهداف کنترلی

با در نظر گرفتن سیستم چندرباته با پارامترهای مشخص شده در شکل (۱)، هدف کلی کنترلی در ادامه به این صورت دنبال می گردد که در حضور نامعینی های پارامتری، اغتشاشات خارجی و قیود غیرهولونومیک ربات پیرو  $\dot{q}_i$  ربات پیشروی مجازی را به نحوی دنبال نماید که  $\lim_{t \rightarrow 0} \|\varpi_i(t) - \varpi_i^d(t)\| < \sigma_{\varpi_i}$  و  $\lim_{t \rightarrow 0} \|\ell_i(t) - \ell_i^d(t)\| < \sigma_{\ell_i}$  باشند. در این روابط همان گونه که در شکل (۱) نشان داده شده است،  $\ell_i(t)$  و  $\varpi_i(t)$  به ترتیب فاصله و زاویه ربات پیرو  $\dot{q}_i$  نسبت به ربات پیشروی مجازی است و  $\ell_i^d(t)$  و  $\varpi_i^d(t)$  بیانگر مقادیر این

$$\dot{q}_i = S_i(q_i) u_i = \begin{bmatrix} \dot{x}_{li} \\ \dot{y}_{li} \\ \dot{\theta}_{li} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{li} & 0 \\ \sin \theta_{li} & 0 \\ \frac{1}{d_{li}} \tan(\theta_{0i} - \theta_{li}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \nu_i \end{bmatrix} \quad (1)$$

که در این رابطه،  $S_i(q_i) \in R^{4 \times 2}$  ماتریس سینماتیک سیستم در حضور قیدهای غیرهولونومیک است که فضای پوچی ماتریس قیدی را افزای می نماید. همچنین،  $v_i$  و  $\nu_i$  به ترتیب بیانگر سرعت خطی نقطه  $P_{li}$  و سرعت زاویه ای تراکتور ربات  $\dot{q}_i$  می باشند.

معادلات دینامیکی کاهش یافته هر یک از ربات های نشان داده شده در شکل ۱، با حذف مضارب لاگرانژ به صورت زیر بیان می شود [۲۴]:

$$\bar{B}_i(q_i) \tau_{di} + \bar{\tau}_{di} = \bar{M}_{1i}(q_i) \dot{u}_i + (\bar{M}_{2i}(q_i) + \bar{C}_i(q_i, \dot{q}_i) + \bar{D}_i) u_i \quad (2)$$

که  $u_i = [v_i, \nu_i]^T$  بردار سرعت های خطی و زاویه ای ربات می باشد. همچنین،  $\bar{M}_{2i}(q_i) = S_i^T M_i(q_i) \dot{S}_i$ ،  $\bar{C}_i(q_i, \dot{q}_i) = S_i^T C_i(q_i, \dot{q}_i) S_i$ ، ماتریس های تبدیل شده سیستم می باشند که در آنها ماتریس مثبت معین مقارن  $\bar{B}_i(q_i) = S_i^T B_i(q_i)$  شامل پارامترهای مربوط به اینرسی ربات  $\dot{q}_i$  می باشد.  $C_i(q_i, \dot{q}_i) \in R^{4 \times 4}$  ماتریس نیروهای کوریولیس<sup>۱</sup> و جانب مرکز<sup>۲</sup>،  $D_i \in R^{4 \times 4}$  ماتریس ضرایب میرایی<sup>۳</sup> و اصطکاک ویسکوز و  $\bar{\tau}_{di} \in R^{4 \times 1}$  بردار اغتشاشات نامعلوم کراندار است که تمامی نامعینی های غیرپارامتری از جمله اصطکاک کلومب، دینامیک های مدل نشده چرخ کاستور و عملگرها و... را دربر می گیرد. به علاوه،  $\tau_{di} \in R^{2 \times 1}$  بردار گشتاور ورودی چرخ های دارای عملگر ربات  $\dot{q}_i$  و  $B_i(q_i) \in R^{4 \times 4}$  ماتریس تبدیل ورودی است. با جایگذاری ماتریس های سیستم طبق مرجع [۱۹]، ماتریس های زیر به دست می آیند:

$$\bar{B}_i(q_i) = \frac{1}{r_i} \begin{bmatrix} \cos^{-1}(\theta_i) & \cos^{-1}(\theta_i) \\ b_i & -b_i \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad (3)$$

$$\bar{D}_i = \begin{bmatrix} d_{mi}(1 + 1/d_{li}^2) \tan^2(\theta_i) & 0 \\ 0 & d_{mi} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad (4)$$

$$\bar{M}_{1i}(q_i) = \begin{bmatrix} M_i I_{\theta_i} / d_{li}^2 \tan^2(\theta_i) & 0 \\ 0 & I_{\theta_{0i}} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad (5)$$

<sup>1</sup> Coriolis forces  
<sup>2</sup> Centripetal forces  
<sup>3</sup> Damping

بنابراین، معادله خطای حالات تبدیل یافته به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{cases} e_{i1} = \cos(\theta_{li})(x_d - x_i) + \sin(\theta_{li})(y_d - y_i) \\ e_{i2} = -\sin(\theta_{li})(x_d - x_i) + \cos(\theta_{li})(y_d - y_i) \\ e_{i3} = (\theta_{ld} - \theta_{li}) \\ e_{i4} = (\theta_{0d} - \theta_{0i}) \end{cases} \quad (18)$$

در ادامه، با توجه به شکل ۱، بردار آرایش ربات پیرو  $\dot{\mathbf{I}}^{\text{أم}}$  به صورت توابعی از خطای حالات به شکل زیر در نظر گرفته می شود:

$$p_i(t) = \begin{bmatrix} \ell_i(t) \\ \varpi_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_i(t) \\ \alpha_i(t) - (\theta_{0i} - \theta_{li}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(e_{i1}(t) - d_{li})^2 + e_{i2}^2(t)} \\ a \tan 2(e_{i2}(t), e_{i1}(t) - d_{li}) - (\theta_{0i} - \theta_{li}) \end{bmatrix} \quad (19)$$

که در این رابطه  $\alpha_i(t)$  زاویه هدایت ربات پیرو  $\dot{\mathbf{I}}^{\text{أم}}$  و جمله  $P_1$  به شکل  $P_1 = \arctan(e_{i2}(t)/e_{i1}(t) - d_{li})$  قابل بیان است. از طرفی، با مشتق گرفتن از خطای حالات ارائه شده در روابط (۱۸) و با انجام اندکی ساده سازی، رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\dot{e}_i(t) = j_i(e_i)u_i(t) + S_i(\theta_i, e_{i3})u_d \quad (20)$$

که در این رابطه،  $S_i(\theta_i, e_{i3})$  و  $j_i(e_i)$  به شکل زیر به دست می آیند:

$$j_i(e_i, \theta_i) = \begin{bmatrix} -1 + (e_{i2}/d_{li}) \tan(\theta_{0i} - \theta_{li}) & 0 \\ -(e_{i1}/d_{li}) \tan(\theta_{0i} - \theta_{li}) & 0 \\ -(1/d_{li}) \tan(\theta_{0i} - \theta_{li}) & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$S_i(\theta_i, e_{i3}) = \begin{bmatrix} \cos e_{i3} & 0 \\ \sin e_{i3} & 0 \\ (1/d_{li}) \tan(\theta_{0i} - \theta_{li}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در نهایت، با مشتق گرفتن از رابطه (۱۹) و جایگذاری مشتق خطای حالات طبق روابط (۲۰) و (۲۱)، مشتق بردار آرایش زیر سیستم  $\dot{\mathbf{I}}^{\text{أم}}$  به صورت زیر به دست می آید:

$$\dot{p}_i(t) = E_i(q_i, q_d)u_i + \xi_i \quad (22)$$

که، ماتریس های  $E_i(q_i, q_d)$  و  $\xi_i$  به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$E_i(q_i, q_d) = \partial(\bar{p}_i) / \partial(e_i(t)) j_i(e_i, \theta_i) = \begin{bmatrix} -\cos(\alpha_i) - \sin(\alpha_i) \\ (\sin(\alpha_i) - \cos(\alpha_i)) \\ \times \tan(\theta_{0i} - \theta_{li}) & 0 \\ \times \tan(\theta_{0i} - \theta_{li}) / \rho_i & -1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\xi_i = \partial(\bar{p}_i) / \partial(e_i(t)) S_i(\theta_i, e_{i3}) u_d = \begin{bmatrix} \cos(e_{i3} - \alpha_i) & 0 \\ \sin(e_{i3} - \alpha_i) / \rho_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_d \\ v_d \end{bmatrix} \quad (24)$$

پارامترها در آرایش مطلوب می باشد. به علاوه،  $\sigma_{\ell_i}$  و  $\sigma_{\varpi_i}$  نشان دهنده ثابت های مثبت کوچک می باشند.

**فرض ۱:** با اعمال فرمان حلقه باز  $\tau_{a_d}$ ، مسیر زمانی مرجع در عدم حضور جمله اغتشاش برای کلیه زیرسیستم ها به طور یکسان به نحوی تولید می گردد که  $\dot{q}_d$  و  $\ddot{q}_d$ ، سیگنال های کران دار باشند.

**فرض ۲:** بردار آرایش بندی مطلوب  $p_{di}(t) = (\ell_i^d(t), \varpi_i^d(t))^T$  به نحوی انتخاب می گردد که  $\dot{p}_{di}(t)$  و  $\ddot{p}_{di}(t)$  سیگنال های کران دار باشند.

**فرض ۳:** کلیه پارامترهای هندسی ربات ها، بردارهای مختصات تعمیم یافته  $q_i = (x_{li}, y_{li}, \theta_{li}, \theta_{0i})^T$  و بردار سرعت های خطی و زاویه ای هر یک از ربات ها، از طریق اندازه گیری در دسترس هستند.

**فرض ۴:** با توجه به اینکه به طور معمول در عمل، میان سیگنال های کنترل و واکنش سیستم تأخیر وجود دارد، در این مقاله، این تأثیر به صورت دینامیک مدل نشده در نظر گرفته می شود.

**لم ۱:** پاسخ های معادله غیرخطی  $\dot{x} = f(x, t)$  با توجه به تعریف لیاپانوف تعمیم یافته، پایدار زمان محدود است اگر تابع لیاپانف مثبت معین  $V(x)$  و ثابت های مثبت  $0 < \gamma < 1$  و  $\beta_1, \beta_2 > 0$  موجود باشد که مشتق تابع لیاپانف به شکل زیر حاصل شود [۲۱]:

$$\dot{V}(t) \leq -\beta_1 V(t) - \beta_2 V^\gamma(t) \quad (14)$$

که در این صورت، زمان نشست به صورت زیر حاصل می شود:

$$T_s \leq \frac{1}{\beta_1(1-\gamma)} \ln \frac{\beta_1 V(x(0))^{1-\gamma} + \beta_2}{\beta_2} \quad (15)$$

### ۴- خطای حالات و مدل پیشرو-پیرو

همان گونه که اشاره شد، هدف کلی در این مقاله، ردیابی مسیرهای زمانی مرجع تولید شده توسط ربات مجازی است. در واقع، این مسأله را می توان به صورت ردیابی حالات مطلوب ربات پیشرو مجازی در هر لحظه تعبیر نمود که در نهایت منجر به ردیابی یک مسیر می شود. علاوه بر این، تعریف بردار آرایش پیشرو-پیرو به صورت توابعی از خطاهای حالات کمک می نماید تا پیکربندی ربات پیشرو با حفظ فاصله و زاویه خاصی دنبال شود. بنابراین، به عنوان اولین گام، خطاهای سمت گیری و موقعیت ربات نسبت به سمت گیری و موقعیت ربات پیشرو مجازی، توسط تبدیل  $T_i(\theta_i)$  از دستگاه مرجع  $\{O_E, X_E, Y_E\}$  به دستگاه متصل به بدنه  $\{O_B, X_B, Y_B\}$  انتقال می یابند:

$$e_i = T_i(\theta_i)(q_d - q_i) \quad (16)$$

$$T_i(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{li}) & \sin(\theta_{li}) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_{li}) & \cos(\theta_{li}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

ادامه خواهد داشت [27]. بنابراین، با در نظر گرفتن معادله (27)، رویکرد اغتشاش غیرخطی با دینامیک (28) برای ربات  $\hat{I}_m$  از صف آرای، پیشنهاد می گردد.

$$\dot{\hat{d}}_{ii} = -L_i g_{2mi}(q_i) \hat{d}_{ii} + L_i (\dot{u}_i - f_{mi}(q_i, \dot{q}_i) - g_{1mi}(q_i) \tau_{ai}(t)) \quad (28)$$

که در این رابطه،  $L_i$  ماتریس بهره رویکرد اغتشاش زیر سیستم  $\hat{I}_m$  است که به صورت  $L_i = \partial h_i(u_i) / \partial u_i$  تعریف می شود. از طرفی، بیانگر تخمین اغتشاشات است که به فرم زیر در نظر گرفته می شود:

$$\hat{d}_{ii} = z_i + h_i(u_i) \quad (29)$$

که در این رابطه،  $z_i = \hat{d}_{ii} - h_i(u_i)$  می باشد و مشتق آن به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \dot{\hat{d}}_{ii} - h_i(\dot{u}_i) = \dot{\hat{d}}_{ii} - L_i \dot{u}_i \\ &= L_i (-f_{mi}(q_i, \dot{q}_i) - g_{1mi}(q_i) \tau_{ai} - g_{2mi}(q_i) \hat{d}_{ii}) \\ &= L_i (-f_{mi}(q_i, \dot{q}_i) - g_{1mi}(q_i) \tau_{ai} - g_{2mi}(q_i) \times (z_i + h_i(u_i))). \end{aligned} \quad (30)$$

خطای تخمین رویکرد ربات  $\hat{I}_m$  به صورت  $\tilde{d}_{ii} = d_{ii} - \hat{d}_{ii}$  تعریف می شود و مشتق آن به صورت  $\dot{\tilde{d}}_{ii} = \dot{d}_{ii} - \dot{\hat{d}}_{ii}$  خواهد بود. از طرفی، به دلیل مشخص نبودن مقدار دقیق اغتشاش نمی توان آن را ثابت فرض نمود و  $\dot{\tilde{d}}_{ii} = 0$  در نظر گرفت. با این وجود، زمانی که اغتشاش وابسته به دینامیک رویکرد دارای آهنگ تغییرات کندی باشد، می توان مشتق آن را برابر با صفر و  $\dot{\tilde{d}}_{ii} = -\dot{\hat{d}}_{ii}$  در نظر گرفت. بنابراین، از ترکیب رابطه (25) و (28) رابطه زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{d}}_{ii} &= -L_i g_{2mi}(q_i) \hat{d}_{ii} + L_i g_{2mi}(q_i) d_{ii} \\ &= L_i g_{2mi}(q_i) \tilde{d}_{ii} \end{aligned} \quad (31)$$

با در نظر گرفتن ماتریس بهره  $L_i = \text{diag}\{c_{0oi}, c_{1oi}\}$ ،  $h_i(u_i)$  به فرم زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} L_i &= \partial h_i(u_i) / \partial u_i \Rightarrow L_i u_i = h_i(u_i) \\ &\Rightarrow h_i(u_i) = [c_{0oi} v_i \quad c_{1oi} u_i]^T \end{aligned} \quad (32)$$

با جایگذاری رابطه (32) در روابط (29) و (30)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \hat{d}_{ii} &= z_i + \begin{bmatrix} c_{0oi} v_i \\ c_{1oi} u_i \end{bmatrix} \\ \dot{z}_i &= \begin{bmatrix} c_{0oi} & 0 \\ 0 & c_{1oi} \end{bmatrix} (-f_{mi}(q_i, \dot{q}_i) - g_{1mi}(q_i) \tau_{ai} - g_{2mi}(q_i) (z_i + \begin{bmatrix} c_{0oi} v_i \\ c_{1oi} u_i \end{bmatrix})). \end{aligned} \quad (33)$$

در ادامه، طراحی کنترل کننده با در نظر گرفتن مدل مبتنی بر رویکرد طراحی شده در این بخش انجام خواهد شد.

**تذکره 1:** رابطه  $\det(E_i) = -\cos(\alpha_i) - \sin(\alpha_i) \tan(\theta_{oi} - \theta_{ii})$  در صورتی غیر صفر است که  $\tan(\alpha_i) \tan(\theta_{oi} - \theta_{ii}) \neq 1$  برقرار باشد. بنابراین، جهت جلوگیری از ایجاد تکنه گی<sup>1</sup> در ربات لازم است که شرط  $|\alpha_i - \tan(\theta_{oi} - \theta_{ii})| \leq \pi / 2$  برقرار باشد.

### 5- رویکرد اغتشاش غیرخطی

در این بخش، با در نظر گرفتن معادلات دینامیک و سینماتیک زیرسیستم  $\hat{I}_m$ ، رویکرد اغتشاش غیرخطی طراحی شد و مدل جدیدی از سیستم حاصل می شود که مبنای طراحی ورودی های کنترلی در بخش های بعد قرار خواهد گرفت [25]. برای این منظور، ابتدا معادلات دینامیکی (2) به شکل زیر بازنویسی می گردند:

$$\dot{u}_i = f_{mi}(q_i, \dot{q}_i) + g_{1mi}(q_i) \tau_{ai}(t) + g_{2mi}(q_i) d_{ii} \quad (25)$$

که در این رابطه:

$$\begin{aligned} f_{mi} &= \begin{bmatrix} -A_i v_i v_i + \frac{A_i}{d_{li}} \tan(\theta_{oi} - \theta_{ii}) \\ + \frac{p_{gi}}{M_i d_{li}^2 + I_{\theta_{li}} \tan^2(\theta_{oi} - \theta_{ii})} \\ \frac{-a_0 m_{0,i} \cos^{-1}(\theta_{oi} - \theta_{ii}) v_i v_i - \frac{d_{m,i}}{I_{\theta_{0,i}}} v_i}{I_{\theta_{0,i}}} \\ -\bar{M}_{li}^{-1}(q_i) (\bar{M}_{2i}(q_i) + \bar{C}_i(q_i, \dot{q}_i) + \bar{D}_i) u_i \end{bmatrix} \\ g_{1mi} &= \begin{bmatrix} p_{Mi} \cos^{-1}(\theta_{oi} - \theta_{ii}) & p_{Mi} \cos^{-1}(\theta_{oi} - \theta_{ii}) \\ b_i / r I_{\theta_{0,i}} & -b_i / r I_{\theta_{0,i}} \end{bmatrix} \\ &\quad \bar{M}_{li}^{-1}(q_i) \bar{B}_i(q_i) \\ g_{2mi} &= \begin{bmatrix} \frac{d_{li}^2}{M_i d_{li}^2 + I_{\theta_{li}} \tan^2(\theta_{oi} - \theta_{ii})} & 0 \\ 0 & 1 / I_{\theta_{oi}} \end{bmatrix} \\ &\quad \bar{M}_{li}^{-1}(q_i) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} A_i &= I_{\theta_{li}} (\cos^{-2}(\theta_{oi} - \theta_{ii})) \\ &\quad \times \tan(\theta_{oi} - \theta_{ii}) / (M_i d_{li}^2 + I_{\theta_{li}} \tan^2(\theta_{oi} - \theta_{ii})) \\ P_{Mi} &= d_{li}^2 / (M_i d_{li}^2 + I_{\theta_{li}} \tan^2(\theta_{oi} - \theta_{ii})) \end{aligned}$$

می باشد و جمله  $\bar{C}_i \dot{d}_{ii} = \bar{C}_i d_{ii}$  بردار اغتشاشات خارجی است. در ادامه، با در نظر گرفتن رابطه (25)، رابطه زیر قابل دست یابی است:

$$g_{2mi}(q_i) d_{ii} = \dot{u}_i - f_{mi}(q_i, \dot{q}_i) - g_{1mi}(q_i) \tau_{ai}(t) \quad (27)$$

ایده اصلی طراحی رویکرد اغتشاش بر این اساس است که تخمین اغتشاشات با توجه به اختلاف بین خروجی واقعی و خروجی تخمین زده شده صورت می پذیرد و تا زمانی که خطای تخمین رویکرد به صفر برسد

<sup>1</sup> Singularity

### ۶- کنترل سطح دینامیکی زمان محدود

با توجه به اهداف کنترلی تعیین شده در بخش ۳، در این بخش، با در نظر گرفتن خطاهای ردیابی در سطح سینماتیک و دینامیک، به ترتیب قوانین کنترل مجازی و واقعی در دو گام طراحی می شوند. برای این منظور، ابتدا خطای ردیابی موقعیت به صورت  $p_{ei} = p_i - p_{di}$  تعریف می شود که در این رابطه، بردار آرایش مطلوب ربات پیرو  $\dot{p}_{ei}$  می باشد که با مشتق گیری از آن و جایگذاری رابطه (۲۲)، دینامیک خطا در سطح سینماتیک به صورت زیر حاصل می شود:

$$\dot{p}_{ei}(t) = E_i(q_i, q_d)u_i + \xi_i - \dot{p}_{di}(t) \quad (34)$$

با توجه به دینامیک خطای حاصل شده در (۳۴)، قانون کنترل مجازی زمان محدود به صورت زیر پیشنهاد می گردد:

$$u_{di} = E_i^{-1}(q_i, q_d)(-\xi_i + \dot{p}_{di}(t) - k_{0i} p_{ei} - k_{1i} \text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}}) \quad (35)$$

که،  $k_{1i} = \text{diag}\{k_{11i}, k_{12i}\} > 0$  و  $k_{0i} = \text{diag}\{k_{01i}, k_{02i}\} > 0$ ، ماتریس های بهره کنترل کننده مجازی هستند. همچنین،  $0 < \gamma_{pi} < 1$  پارامترهای قابل تنظیم کنترل کننده مجازی زمان محدود است. به علاوه، جمله  $\text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}}$  متناسب با درجه آزادی سیستم غیرهولونومیک تراکتور-تریلر ( $n - m = 2$ )، به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}} = [ |p_{e1i}|^{\gamma_{pi}} \text{sign}(p_{e1i}), |p_{e2i}|^{\gamma_{pi}} \text{sign}(p_{e2i}), \dots, |p_{e(n-m)i}|^{\gamma_{pi}} \text{sign}(p_{e(n-m)i}) ] \quad (36)$$

که در این رابطه  $n$  تعداد مختصات تعمیم یافته ربات و  $m$  تعداد قیود غیرهولونومیک حاکم بر آن می باشد. در ادامه، جهت جلوگیری از پیچیدگی های مشتق گیری مرسوم در روش کنترل پسگام، قانون کنترل مجازی (۳۵) از یک فیلتر مرتبه اول به فرم زیر عبور داده می شود:

$$\mathfrak{D}_{dif} \dot{u}_{dif} + u_{dif} = u_{di}, \quad u_{dif}(0) = u_{di}(0) \quad (37)$$

که  $\mathfrak{D}_{dif}$  ثابت مثبت قابل تنظیم و  $u_{dif} = (v_{dif}, v_{dif})^T$  می باشند. بر اساس رابطه (۳۷)، خطای خروجی فیلتر به شکل  $\chi_{fi} = u_{dif} - u_{di}$  در نظر گرفته می شود.

با توجه به نقش رؤیتگر اغتشاش در تخمین نامعینی های غیرپارامتری و حذف آثار آنها، می توان خروجی رؤیتگر را به عنوان یک عامل جبران ساز در قانون کنترل تصور نمود. بنابراین، ورودی کنترلی زیرسیستم  $\dot{p}_{ei}$  را می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\tau_{ai} = \tau_{fdsci} - \tau_{oi} \quad (38)$$

که در آن،  $\tau_{fdsci}$  قانون کنترل سطح دینامیکی زمان محدود و  $\tau_{di}$ ، جمله جبران ساز مربوط به رؤیتگر اغتشاش است. بنابراین، با توجه به رابطه (۳۸) و (۲۵) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= f_{mi}(q_i, \dot{q}_i) + g_{1mi}(q_i)(\tau_{fdsci} - \tau_{di}) \\ &+ g_{2mi}(q_i)\dot{d}_{ti} = f_{mi}(q_i, \dot{q}_i) + g_{1mi}(q_i) \\ &\times \tau_{fdsci} - g_{1mi}(q_i)\tau_{oi} + M_i^{-1}\dot{d}_{ti}. \end{aligned} \quad (39)$$

که با انتخاب  $\tau_{oi} = g_{1mi}^{-1}(q_i)M_i^{-1}\dot{d}_{ti}$ ، در نهایت رابطه فوق به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$\dot{u}_i = f_{mi}(q_i, \dot{q}_i) + g_{1mi}(q_i)\tau_{fdsci} + M_i^{-1}\dot{d}_{ti} \quad (40)$$

بنابراین، با توجه به رابطه (۲۶) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= -\bar{M}_{1i}^{-1}(\bar{C}_i(u_i)u_i + \bar{D}_i u_i + \bar{M}_{2i} u_i) \\ &+ \bar{M}_{1i}^{-1}\bar{B}_i \tau_{fdsci} + \bar{M}_{1i}^{-1}\dot{d}_{ti} \\ \Rightarrow \bar{M}_{1i} \dot{u}_i &= -(\bar{C}_i(u_i)u_i + \bar{D}_i u_i + \bar{M}_{2i} u_i) \\ &+ \bar{B}_i \tau_{fdsci} + \dot{d}_{ti} \end{aligned} \quad (41)$$

در ادامه، جهت طراحی قانون کنترل واقعی، خطای ردیابی در سطح دینامیک به صورت در نظر گرفته می شود.

$$u_{ei} = u_i - u_{dif} + \beta_{1i} \text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}} \quad (42)$$

که در این رابطه،  $\beta_{1i} > 0$  و  $0 < \gamma_{qi} < 1$  ثابت های مثبت هستند. با مشتق گیری از رابطه (۴۲)، عبارت زیر به دست می آید:

$$\dot{u}_{ei} = \dot{u}_i - \dot{u}_{dif} + \beta_{1i} \gamma_{pi} \|p_{ei}\|^{\gamma_{pi}-1} \dot{p}_{ei} \quad (43)$$

از جایگذاری رابطه (۴۳) در (۴۱)، عبارت زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} &-(\bar{C}_i(u_i) + \bar{D}_i + \bar{M}_{2i})(u_{ei} + u_{dif} \\ &- \beta_{1i} \text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}}) + \bar{B}_i \tau_{fdsci} + \dot{d}_{ti} \\ &= \bar{M}_{1i}(\dot{u}_i + \dot{u}_{dif} - \beta_{1i} \gamma_{qi} \|p_{ei}\|^{\gamma_{qi}-1} \dot{p}_{ei}) \end{aligned} \quad (44)$$

که به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{1i} \dot{u}_{ei} &= -\bar{C}_i(u_i)u_{ei} - \bar{D}_i u_{ei} + \bar{B}_i \tau_{fdsci} \\ &+ M_{1i} \beta_{1i} \gamma_{pi} \|p_{ei}\|^{\gamma_{pi}-1} \dot{p}_{ei} + \dot{d}_{ti} + \mathfrak{R}_i(\bar{x}_i) \end{aligned} \quad (45)$$

که در این رابطه،  $\bar{x}_i = (u_i, u_{dif}, \dot{u}_{dif}, u_{ei}, p_{ei})^T$  می باشد و جمله  $\mathfrak{R}_i(\bar{x}_i)$  شامل جملات دارای نامعینی پارامتری است که به صورت زیر بیان می شوند:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_i &= -\bar{C}_i(u_i)u_{dif} - \bar{D}_i u_{dif} - \bar{M}_{1i} \dot{u}_{dif} - \bar{M}_{2i} u_{ei} \\ &- \bar{M}_{2i} u_{dif} + \bar{C}_i(u_i)\beta_{1i} \text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}} \\ &+ \bar{D}_i \beta_{1i} \text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}} + \bar{M}_{2i} \beta_{1i} \text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}} \end{aligned} \quad (46)$$

### ۷- تخمین نامعینی های پارامتری با استفاده از

### تخمین زن فازی تطبیقی

هستند. خطای تخمین بردار مراکز نامعین به شکل  $\tilde{\Phi}_i = \Phi_i^* - \hat{\Phi}_i$  تعریف می شود. همچنین، بردار خطای تخمین کمینه سیستم فازی  $\omega_i(\bar{x}_i) \in R^{2 \times 1}$ ، به صورت زیر بیان می شود:

$$\omega_i(\bar{x}_i) = \mathfrak{R}_i(\bar{x}_i) - \mathfrak{R}_i(\bar{x}_i | \hat{\Phi}_i^*) \quad (52)$$

**فرض ۵:** بردار خطای تخمین کمینه سیستم فازی کراندار است به این معنا که با در نظر گرفتن ثابت مثبت  $\beta_i$  می توان گفت که

$$\| \omega_i(\bar{x}_i) \| \leq \beta_i \text{ برقرار است.}$$

با در نظر گرفتن عبارت  $\mathfrak{R}_i(\bar{x}_i | \hat{\Phi}_i^*) = \Phi_i^* \xi_i(\bar{x}_i)$  و با توجه به رابطه (۵۲)، عبارت  $\mathfrak{R}_i(\bar{x}_i) = \omega_i(\bar{x}_i) + \Phi_i^* \xi_i(\bar{x}_i)$  نتیجه می شود.

بنابراین، رابطه (۴۵) را می توان به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{1i} \dot{u}_{ei} = & -\bar{C}_i(\dot{u}_i)u_{ei} - \bar{D}_i u_{ei} + \bar{B}_i \tau_{fdsci} \\ & + M_{1i} \beta_i \gamma_{pi} |P_{ei}|^{\gamma_{pi}-1} \dot{P}_{ei} \\ & + \tilde{d}_{ii} + \omega_i(\bar{x}_i) + \Phi_i^* \xi_i(\bar{x}_i) \end{aligned} \quad (53)$$

**تذکره ۲:** جمله  $\omega_i(\bar{x}_i)$ ، در غالب نامعینی غیر پارامتری توسط رؤیتگر اغتشاش تخمین زده و جبران می شود. بنابراین، در رابطه (۵۳) این عبارت قابل چشم پوشی است.

در نهایت، با در نظر گرفتن رابطه (۵۳)، قانون کنترل واقعی به صورت زیر پیشنهاد می گردد:

$$\begin{aligned} \tau_{fdsci} = & \bar{B}_{li}^{-1} (-E_i^T(q_i, q_d) P_{ei} - \hat{\Phi}_i \xi_i(\bar{x}_i) - K_{0ui} u_{ei} \\ & - \bar{M}_{1i} \beta_i \gamma_{pi} |P_{ei}|^{\gamma_{pi}-1} \dot{P}_{ei} - K_{1ui} \text{sig}(u_{ei})^{\rho_{uei}}) \end{aligned} \quad (54)$$

که در این رابطه  $0 < \rho_{uei} < 1$  و  $K_{0ui}, K_{1ui} > 0$  ماتریس های قطری شامل بهره های کنترل کننده واقعی هستند. با قرار دادن قانون کنترل (۵۴) در (۵۳) دینامیک خطای حلقه بسته در سطح دینامیک به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{li} \dot{u}_{ei} = & -\bar{C}_i(\dot{u}_i)u_{ei} - \bar{D}_i u_{ei} + \tilde{d}_{ii} + \tilde{\Phi}_i \xi_i(\bar{x}_i) \\ & - K_{0ui} u_{ei} - K_{1ui} \text{sig}(u_{ei})^{\rho_{uei}} \end{aligned} \quad (55)$$

از طرفی، با توجه به عبارت،  $\chi_{fi} = u_{dif} - u_{di}$  و ترکیب آن با (۴۲)، عبارت  $u_i = u_{ei} + \mathfrak{T}_{fi} + u_{di} - \beta_i \text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}}$  حاصل می شود که از جایگذاری این عبارت و رابطه (۳۵) در (۳۴) خطای حلقه بسته در سطح سینماتیک به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} \dot{p}_{ei}(t) = & E_i(q_i, q_d)(u_{ei} + \chi_{fi} - \beta_i \text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}}) \\ & - k_{0i} p_{ei} - k_{1i} \text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}} \end{aligned} \quad (56)$$

شکل ۲، روش کنترلی و رؤیتگر ارائه شده را به صورت کلی نمایش می دهد.

همان طور که اشاره شد، جمله  $\mathfrak{R}_i(\bar{x}_i)$  شامل جملات دارای نامعینی پارامتری است. این عبارت، توسط یک تابع تخمین زن فازی تخمین زده خواهد شد که در این بخش به طور خلاصه معرفی می گردد. بر اساس ساختار کلی سیستم های فازی، فازی ساز تکین<sup>۱</sup> موتور استنتاج و نافازی ساز میانگین مراکز به عنوان بخش های اصلی سیستم فازی مورد نظر انتخاب می شوند. به علاوه، قوانین فازی برای سیستم  $\hat{I}^m$  به صورت زیر در نظر گرفته می شوند:

• IF  $\bar{x}_{i1}$  is  $F_{i1}^j$  and ... and  $\bar{x}_{in}$  is  $F_{in}^j$  THEN  $y = G_i^l$

که در عبارت بالا  $F_{ki}^l$  به ازای  $k = 0, \dots, n$  و  $G_i^l$  به ترتیب، مجموعه های فازی ورودی و خروجی هستند که برای آنها توابع عضویت  $\mu_{G_i^l}(y_i)$  و  $\mu_{F_{ki}^l}(\bar{x}_{ki})$  در نظر گرفته می شود و پارامتر  $n$  بیانگر تعداد ورودی های مجموعه فازی است. علاوه بر این، بردار ورودی سیستم فازی به صورت  $\bar{x}_i = (u_i, u_{dif}, \dot{u}_{dif}, u_{ei}, p_{ei})^T$  در نظر گرفته می شود و در نهایت، بردار خروجی تخمین زن فازی  $\hat{I}^m$  با توجه به نکات مذکور به صورت زیر تولید می شود:

$$y_i = \frac{\sum_{l=1}^m y_i^l (\prod_{k=1}^n \mu_{F_{ki}^l}(\bar{x}_{ki}))}{\sum_{l=1}^m \prod_{k=1}^n \mu_{F_{ki}^l}(\bar{x}_{ki})} \quad (47)$$

که در این رابطه،  $\bar{m}$  نشان دهنده تعداد قوانین  $l = 1, \dots, \bar{m}$  می باشد و  $y_i^l$  بیانگر نقطه ای است که بیشترین مقدار خود را دارد. رابطه (۴۷)، به فرم ساده زیر قابل بازنویسی است:

$$y_i = \hat{\Phi}_i \xi_i(\bar{x}_i) = \mathfrak{R}_i(\bar{x}_i | \hat{\Phi}_i) \quad (48)$$

$\Phi_i = [y_i^1, \dots, y_i^m]$  بردار مراکز نامعین توابع عضویت خروجی است و  $\hat{\Phi}_i$  بیانگر تخمین آن است که توسط قوانین تطبیق به روز رسانی می گردد. به علاوه،  $\xi_i(\bar{x}_i) = [\xi_{i1}(\bar{x}_i), \dots, \xi_{im}(\bar{x}_i)]$  بردار تابع پایه فازی است که به شکل زیر بیان می شود:

$$\xi_i(x_i) = \frac{(\prod_{k=1}^n \mu_{F_{ki}^l}(x_{ki}))}{\sum_{l=1}^m \prod_{k=1}^n \mu_{F_{ki}^l}(x_{ki})} \quad (49)$$

$$\hat{\Phi}_i = \Gamma_{\xi_i} u_{ei} \xi_i(x_i) + \Gamma_{\xi_i} \delta_{\xi_i} \hat{\Phi}_i \quad (50)$$

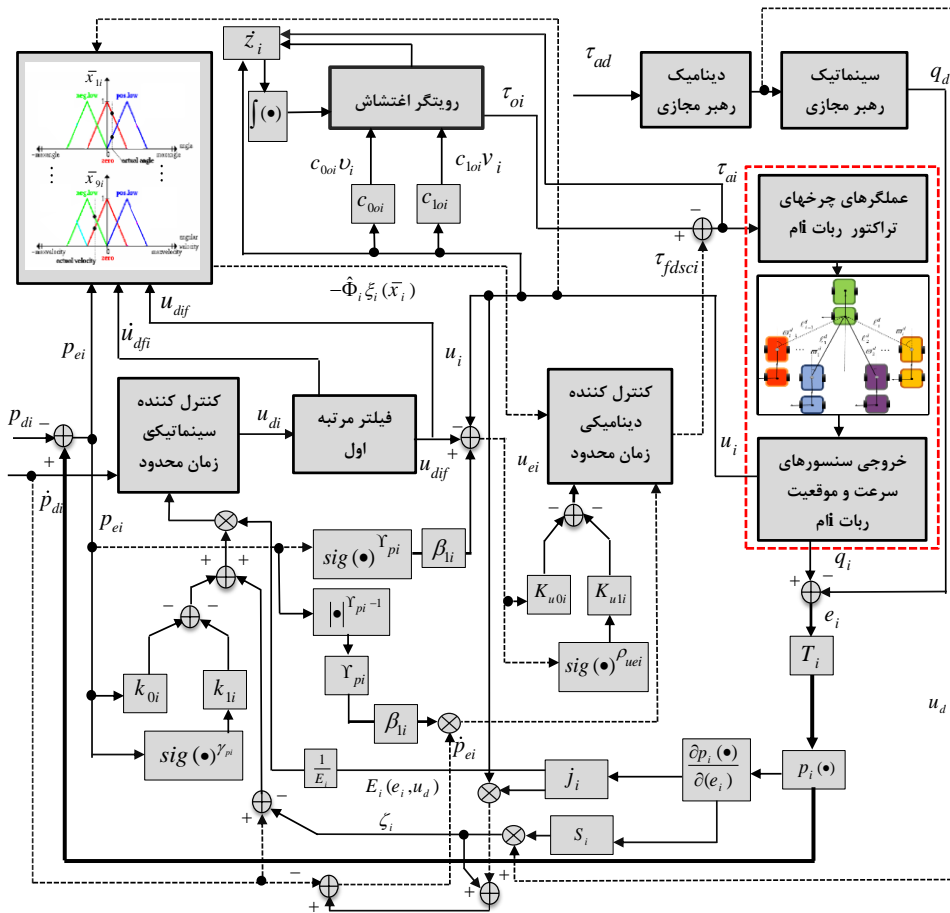
که در آن  $\Gamma_{\xi_i} = \text{diag}(\Gamma_{\xi_{i1}}, \Gamma_{\xi_{i2}})$  ماتریس بهره های تطبیق و  $\delta_{\xi_i} = \text{diag}(\delta_{\xi_{i1}}, \delta_{\xi_{i2}})$  ماتریس ضرایب اصلاح سیگما می باشد. بردار بهینه پارامترها را می توان به صورت زیر تعیین نمود [۲۱].

$$\Phi_i^* = \arg \min \left\{ \sup_{\bar{x}_i \in \Delta_i} | \mathfrak{R}_i(\bar{x}_i) - \mathfrak{R}_i(\bar{x}_i | \hat{\Phi}_i) | \right\} \quad (51)$$

که  $\Delta_i$  و  $\Omega_i$  مجموعه های فشرده از مقادیر مجاز پارامترهای کنترل کننده

<sup>1</sup> singleton





شکل ۲: بلوک دیاگرام روش کنترلی سطح دینامیکی فازی تطبیقی زمان محدود مبتنی بر روینگر اغتشاش

### ۸- تحلیل پایداری

ریلی-ریتز به صورت زیر برقرار است [۲۴]:

$$\lambda_{\min}\{P\}\|x\|^2 \leq x^T P x \leq \lambda_{\max}\{P\}\|x\|^2 \quad (59)$$

که در این رابطه،  $\lambda_{\min}$  و  $\lambda_{\max}$  به ترتیب کوچکترین و بزرگترین مقدار ویژه ماتریس  $P$  هستند.

**لم ۵:** برای هر ماتریس مثبت معین  $P$  و بردارهای  $x, y \in R^n$  اسکالر مثبت  $k$ ، نامساوی زیر برقرار است:

$$x^T P y \leq \frac{1}{2k^2} \lambda_{\max}\{P\}\|x\|^2 + \frac{k^2}{2} \lambda_{\max}\{P\}\|y\|^2 \quad (60)$$

**لم ۶:** به ازای اسکالرهایی مثبت  $a_1, \dots, a_n$  و ثابت کوچک  $0 < p < 1$ ، نامساوی  $(a_1^p, \dots, a_n^p)^p \leq (a_1^p, \dots, a_n^p)^2$  قابل بیان است [۲۱].

**لم ۷:** اگر  $a, b, p, q$  اعداد حقیقی مثبت باشند، به طوری که مجموع  $(1/p) + (1/q) = 1$  باشد، آن گاه برای آنها نامساوی یانگ به شکل های زیر برقرار است [۲۹]:

$$ab \leq (a^p/p) + (b^q/q), \quad ab \leq a^2 + b^2/4 \quad (61)$$

**قضیه ۱:** با در نظر گرفتن فرض های ۱ تا ۵، قانون کنترل سطح دینامیکی فازی تطبیقی زمان محدود با روینگر اغتشاش معرفی شده در رابطه (۶۲)،

در این بخش، با در نظر گرفتن روابط حاصل از الگوریتم کنترلی ارائه شده در بخش قبل، پایداری سیستم حلقه بسته با طرح یک قضیه در دو مرحله مورد بررسی قرار می گیرد. در بخش اول، کراننداری سیگنال های حلقه بسته و خطاهای ردیابی موقعیت و سرعت اثبات می گردد و در بخش دوم، همگرایی خطای ردیابی در سطح دینامیک و سینماتیک، در زمان محدود در نهایت به ناحیه کوچکی اطراف مبدأ، اثبات خواهد شد.

**لم ۲:** برای هر بردار  $\bar{a} \in R^n$  و هر عدد مثبت  $0 < \delta < 1$ ، با فرض اینکه  $\bar{a}^\delta = (a_1^\delta, \dots, a_n^\delta)^T$  رابطه زیر برقرار است [۲۷]:

$$\|\bar{a}^\delta\|^2 = \sum_{i=1}^L (a_i^\delta)^2 \geq \|\bar{a}\|^{2\delta} = \left(\sum_{i=1}^L a_i^2\right)^\delta \quad (57)$$

**لم ۳:** برای هر اسکالر مثبت  $x \in R$  و  $0 < \beta < 1$ ، نامساوی زیر قابل بیان است [۲۸]:

$$\left(\sum_{i=1}^m |x_i|\right)^\beta \leq \sum_{i=1}^m |x_i|^\beta \leq m^{1-\beta} \left(\sum_{i=1}^m |x_i|\right)^\beta \quad (58)$$

**لم ۴:** برای هر ماتریس مثبت معین  $P$  و هر بردار  $x \in R^n$ ، نامساوی

از طرفی، در صورتی که شرط  $\Upsilon_{pi} = \gamma_{pi}$  برقرار باشد، می توان نوشت:

$$-(\beta_{li} E_i(q_i, q_d) \text{sig}(p_{ei})^{\Upsilon_{pi}} + k_{li} \text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}}) \tag{69}$$

$$= -(\beta_{li} E_i(q_i, q_d) + k_{li}) \text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}}$$

بنابراین، با ترکیب روابط (68)، (69) و (66) با رابطه (65)، عبارت زیر حاصل می شود:

$$\dot{V}_i(t) \leq p_{ei}^T E_i \chi_{fi} - p_{ei}^T k_{0i} p_{ei} + \chi_{fi}^T \dot{\chi}_{fi} - (\beta_{li} E_i + k_{li}) \text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}} - u_{ei}^T \bar{D}_i u_{ei} + u_{ei}^T \tilde{\Phi}_i \xi_i(x_i) - u_{ei}^T K_{1ui} \text{sig}(u_{ei})^{\rho_{uei}} + \tilde{\Phi}_i^T \Gamma_{\xi_i}^{-1} \dot{\tilde{\Phi}}_i - u_{ei}^T K_{0ui} u_{ei} + \|u_{ei}^T\| \|(\tilde{d}_{ii})\| - (\tilde{d}_{ii})^T Q_{Mi} (\tilde{d}_{ii}) \tag{70}$$

واضح است که با توجه به تعریف خطای تخمین، برای قانون تطبیق

ارائه شده در رابطه (62)، رابطه زیر قابل دستیابی است:

$$\dot{\tilde{\Phi}}_i = -\dot{\hat{\Phi}}_i = \Gamma_{\xi_i} u_{ei} \xi_i(x_i) + \Gamma_{\xi_i} \delta_{\xi_i} \hat{\Phi}_i \tag{71}$$

از طرفی، رابطه (37) به فرم  $\dot{\chi}_{fi} = -\chi_{fi} / \tau_{d_{fi}} + du_{di}/dt$  قابل بیان است و بر این اساس، رابطه زیر نتیجه می شود:

$$\dot{\chi}_{fi} = -\chi_{fi} / \tau_{d_{fi}} + du_{di}/dt \tag{72}$$

همچنین، با ضرب طرفین رابطه (72) در جمله  $\tau_{d_{fi}}^T$ ، رابطه  $\tau_{d_{fi}}^T \dot{\chi}_{fi} = -\tau_{d_{fi}}^T \chi_{fi} / \tau_{d_{fi}} + \tau_{d_{fi}}^T (du_{di}/dt)$  حاصل می شود. از طرفی، با توجه به رابطه (35)، می توان نتیجه گرفت  $\|du_{di}/dt\| \leq \zeta_{di}$  که در این رابطه  $\zeta_{di}$ ، تابعی پیوسته از سیگنال های حلقه بسته می باشد. بنابراین، طبق نامساوی یانگ در لم (7)، می توان نوشت:

$$\tau_{d_{fi}}^T \dot{\chi}_{fi} \leq -\tau_{d_{fi}}^T \chi_{fi} / \tau_{d_{fi}} + \|\tau_{d_{fi}}\| \zeta_{di} \leq -\tau_{d_{fi}}^T \chi_{fi} / \tau_{d_{fi}} + \chi_{fi}^T \chi_{fi} + 0.25 \zeta_{di}^2 \tag{73}$$

ضمناً، با توجه به لم 4، روابط زیر نیز برقرار هستند:

$$-u_{ei}^T K_{1ui} \text{sig}(u_{ei})^{\rho_{uei}} \leq -\lambda_{\min}(K_{1ui}) \|u_{ei}\|^{\rho_{uei}+1} - (\beta_{li} E_i(q_i, q_d) + k_{li}) \text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}} \leq -\lambda_{\min}(\beta_{li} E_i(q_i, q_d) + k_{li}) \|p_{ei}\|^{\gamma_{pi}+1} \tag{74}$$

که در نهایت، با در نظر گرفتن روابط (71) تا (74)، رابطه (70) به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$\dot{V}_i(t) \leq p_{ei}^T \|E_i\| \chi_{fi} - p_{ei}^T k_{0i} p_{ei} + 0.25 \zeta_{di}^2 - \lambda_{\min}(\beta_{li} E_i + k_{li}) \|p_{ei}\|^{\gamma_{pi}+1} + \|u_{ei}^T\| \|(\tilde{d}_{ii})\| - \chi_{fi}^T \chi_{fi} / \tau_{d_{fi}} + \chi_{fi}^T \chi_{fi} - (\tilde{d}_{ii})^T Q_{Mi} (\tilde{d}_{ii}) - u_{ei}^T (K_{0ui} + \bar{D}_i) u_{ei} - \lambda_{\min}(K_{1ui}) \|u_{ei}\|^{\rho_{uei}+1} - \tilde{\Phi}_i^T \delta_{\xi_i} \tilde{\Phi}_i + \tilde{\Phi}_i^T \delta_{\xi_i} \Phi_i^* \tag{75}$$

که با استفاده از لم 7 و با تعریف  $b_{ui} = (1/2) \|E_i(q_i, q_d)\|$  رابطه

برای سیستم کلی آرایش بندی ربات تراکتور- تریلر با معادلات (1) و (2)، تضمین می نماید که: الف) تمامی سیگنال های سیستم حلقه بسته کران دار هستند، ب) خطای ردیابی در سطح دینامیک و سینماتیک در نهایت در زمان محدود، به ترتیب به نواحی کوچک  $\{\delta_{1ui}, \delta_{2ui}\}$  و  $\{\delta_{1pi}, \delta_{2pi}\}$  حول مبدأ همگرا خواهد شد.

$$\delta_{1ui} = \frac{\|\hat{\mathfrak{Y}}_i(x_i / \Phi_i^*) - \hat{\mathfrak{Y}}_i(x_i / \hat{\Phi}_i) + \|\tilde{d}_{ii}\|}{\lambda \{\bar{K}_{0ui}\}} \tag{62}$$

$$\delta_{2ui} = \left( \frac{\|\hat{\mathfrak{Y}}_i(x_i / \Phi_i^*) - \hat{\mathfrak{Y}}_i(x_i / \hat{\Phi}_i) + \|\tilde{d}_{ii}\|}{\lambda \{\bar{K}_{1ui}\}} \right)^{1/\rho_{uei}} \tag{63}$$

$$\delta_{2pi} = \left( \frac{\|\sigma_{ei}\|}{\lambda \{\bar{k}_{li}\}} \right)^{1/\gamma_{pi}} \quad \delta_{1pi} = \frac{\|\sigma_{ei}\|}{\lambda \{\bar{k}_{0i}\}} \tag{63}$$

**اثبات:** با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف سیستم کلی آرایش بندی به شکل

$$V(t) = \sum_{i=1}^N V_i(t) \tag{64}$$

می شود [24].

$$\dot{V}_i(t) = \frac{1}{2} (p_{ei}^T p_{ei} + u_{ei}^T M_{1i} u_{ei} + \chi_{fi}^T \chi_{fi} - \tilde{\Phi}_i^T \Gamma_{\xi_i}^{-1} \dot{\tilde{\Phi}}_i + \tilde{d}_{ii}^T \dot{\tilde{d}}_{ii}) \tag{64}$$

که مشتق گیری از این رابطه و جایگذاری خطاهای حلقه بسته در روابط (55) و (56)، رابطه زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &= p_{ei}^T E_i u_{ei} + p_{ei}^T E_i \chi_{fi} - p_{ei}^T k_{0i} p_{ei} - p_{ei}^T E_i \beta_{li} \text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}} + \chi_{fi}^T \dot{\chi}_{fi} - p_{ei}^T k_{1i} \text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}} + \frac{1}{2} u_{ei}^T \dot{M}_{1i} u_{ei} - u_{ei}^T \bar{C}_i(u_i) u_{ei} + u_{ei}^T \tilde{\Phi}_i \xi_i(x_i) - u_{ei}^T K_{1ui} \text{sig}(u_{ei})^{\rho_{uei}} + \tilde{\Phi}_i^T \Gamma_{\xi_i}^{-1} \dot{\tilde{\Phi}}_i + u_{ei}^T \tilde{d}_{ii} - u_{ei}^T K_{0ui} u_{ei} + \tilde{d}_{ii}^T \dot{\tilde{d}}_{ii} - u_{ei}^T E_i^T p_{ei} - u_{ei}^T \bar{D}_i u_{ei} \end{aligned} \tag{65}$$

از طرفی، طبق خاصیت 2، عبارت زیر از رابطه (65) حذف می گردد.

$$u_{ei}^T \frac{1}{2} (\dot{M}_{1i} - 2\bar{C}_i(u_i)) u_{ei} = 0 \tag{66}$$

همچنین، رابطه (31) را می توان به شکل زیر ساده سازی نمود:

$$\dot{\tilde{d}}_{ii} = L_i g_{2mi}(x_i) \tilde{d}_{ii} = L_i \bar{M}_{1i}^{-1} \tilde{d}_{ii} \tag{67}$$

ضمناً با توجه به تعریف خطای تخمین رویکرد، واضح است که  $\dot{\tilde{d}}_{ii} = -\dot{\tilde{d}}_{ii}$  بر این اساس، رابطه (67) عبارت زیر را نتیجه می دهد:

$$\dot{\tilde{d}}_{ii} = -L_i \bar{M}_{1i}^{-1} \tilde{d}_{ii} \tag{68}$$

مقادیر ویژه ماتریس‌ها هستند. نهایتاً، مشتق تابع لیپانوف برای سیستم کلی آرایش‌بندی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^N -c_{mi} \|x_{ti}(t)\|^2 + \eta_i \leq -C_m \|x_t(t)\|^2 + \eta \quad (81)$$

که در آن،  $\eta$  دارای مقدار مثبت بوده و به صورت  $\eta = \sum_{i=1}^N \eta_i$  بیان می‌شود. همچنین،  $C_m$  و بردار  $x_t(t)$  به صورت  $C_m = \min\{c_{mi}\}_{i=1}^N$  و  $x_t(t) = (x_{t1}^T(t), x_{t2}^T(t), \dots, x_{tN}^T(t))^T$  اینک مقدار  $\eta$  همواره مثبت است، منفی شدن مشتق تابع لیپانوف تنها در صورتی امکان‌پذیر است که رابطه  $\|x_t(t)\| \leq \sqrt{\eta/C_m}$  برقرار باشد. در این صورت، نزولی بودن تابع لیپانوف و منفی شدن مشتق آن در خارج از ناحیه فشرده  $\Omega_0 = \{x_t(t) \mid 0 < \|x_t(t)\| \leq \sqrt{\eta/C_m}\}$  تضمین خواهد شد. به علاوه، منفی شدن تابع لیپانوف نتیجه می‌دهد که سیستم پایداری کران‌داری نهایی یکنواخت دارد و تمامی حالات سیستم کراندار هستند. همچنین، خطای تخمین پارامترها و خطاهای ردیابی در نهایت، به ناحیه کوچکی اطراف صفر همگرا خواهند شد.

در ادامه، به منظور اثبات همگرایی زمان محدود خطاهای ردیابی موقعیت و سرعت با حذف جملات مربوط به خطای تخمین پارامترها، خطای رؤیتگر و خروجی فیلترها از تابع لیپانوف ارائه شده در رابطه (۶۴)، تابع لیپانوف به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$V_i(t) = \frac{1}{2} p_{ei}^T p_{ei} + \frac{1}{2} u_{ei}^T \bar{M}_i u_{ei} \quad (82)$$

سپس، با مشتق گرفتن از تابع لیپانوف (۸۲) و جایگذاری خطاهای حلقه- بسته ارائه شده در روابط (۵۵) و (۵۶)، عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) = & p_{ei}^T E_i \chi_{fi} - p_{ei}^T E_i \beta_i \text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}} \\ & - p_{ei}^T k_{0i} p_{ei} - p_{ei}^T k_{1i} \text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}} \\ & - u_{ei}^T \bar{C}_i (u_{ei}) + u_{ei}^T \bar{\Phi}_i \xi_i(x_i) \\ & - u_{ei}^T K_{1i} \text{sig}(u_{ei})^{\rho_{uei}} - u_{ei}^T K_{0i} u_{ei} \\ & + u_{ei}^T \bar{d}_i + \frac{1}{2} u_{ei}^T \bar{M}_i \dot{u}_{ei} - u_{ei}^T \bar{D}_i u_{ei} \end{aligned} \quad (83)$$

**تذکره ۲:** همان‌گونه که در بخش قبل اثبات شد، تمامی سیگنال‌های سیستم، خطای حالات و خطای خروجی فیلترها در نهایت کراندار هستند. بنابراین می‌توان اینگونه بیان نمود که،  $\|E_i \chi_{fi}\| \leq \sigma_{ei}$ . در این رابطه،  $\sigma_{ei}$  بیانگر یک اسکالر مثبت است.

با در نظر گرفتن روابط (۶۸)، (۶۹) و (۶۶) و بر اساس تذکره ۴، با اندکی ساده‌سازی رابطه (۸۳) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) \leq & p_{ei}^T \sigma_{ei} - p_{ei}^T k_{0i} p_{ei} - p_{ei}^T \bar{k}_{1i} \text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}} \\ & - u_{ei}^T K_{1i} \text{sig}(u_{ei})^{\rho_{uei}} - u_{ei}^T \bar{K}_{0i} u_{ei} \\ & + u_{ei}^T \bar{\Phi}_i \xi_i(x_i) + u_{ei}^T \bar{d}_i \end{aligned} \quad (84)$$

$\|E_i(q_i, q_d)\| \chi_{fi} \leq b_{ui} (\|p_{ei}\|^2 + \|\chi_{fi}\|^2)$  نامساوی- قابل اثبات هستند. علاوه بر این، با به کارگیری لم ۵، نامساوی  $-\bar{\Phi}_i^T \delta_{\xi_i} \bar{\Phi}_i \leq -\lambda_{\min \delta_{\xi_i}} \|\bar{\Phi}_i\|^2$  و  $-p_{ei}^T k_{0i} p_{ei} \leq -\lambda_{\min k_{0i}} \|p_{ei}\|^2$  حاصل می‌شود. همچنین، با استفاده از نامساوی یانگ، به فرم  $\|u_{ei}^T \bar{d}_i\| \leq u_{ei}^T u_{ei} + (1/4)(\bar{d}_i)^T (\bar{d}_i)$  تبدیل می‌شود. **تذکره ۳:** با توجه به رابطه  $\|p_{ei}\|^{\gamma_{pi}+1} + k_{1i} \|p_{ei}\|$  و لم ۲، تساوی  $-\lambda_{\min L_i} \|p_{ei}\|^{\hat{\rho}_i \times 2} = -\lambda_{\min L_i} \left(\sum_{j=1}^2 p_{eij}^2\right)^{\hat{\rho}_i}$  قابل بیان است که  $\hat{\rho}_i = \gamma_{pi} + 1/2$  و  $L_i = (\beta_i \|E_i(q_i, q_d)\| + k_{1i})$  می‌باشند. از طرفی، با ترکیب لم‌های ۲ و ۳، نامساوی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \|p_{ei}^{\hat{\rho}_i}\|^2 = & \sum_{j=1}^2 (p_{eij}^2)^{\hat{\rho}_i} \leq (2^{1-\hat{\rho}_i})^2 \left(\sum_{j=1}^2 p_{eij}^2\right)^{\hat{\rho}_i} \\ \rightarrow & -(1/(2^{1-\hat{\rho}_i})^2) \|p_{ei}^{\hat{\rho}_i}\|^2 \geq -\left(\sum_{j=1}^2 p_{eij}^2\right)^{\hat{\rho}_i} \end{aligned} \quad (76)$$

بنابر این می‌توان نوشت:

$$-\lambda_{\min L_i} \|p_{ei}^2\|^{\hat{\rho}_i \times 2} \leq -\lambda_{\min L_i} (1/(2^{1-\hat{\rho}_i})^2) \|p_{ei}^{\hat{\rho}_i}\|^2 \quad (77)$$

با توجه به توضیحات فوق و با لحاظ نمودن نکته ۳، مشتق تابع لیپانوف از رابطه (۷۵)، در نهایت به صورت خلاصه زیر بیان می‌شود:

$$\dot{V}_i(t) \leq -c_{mi} \|x_{ti}(t)\|^2 + \eta_i \quad (78)$$

که در این رابطه  $c_{mi} = \min\{\bar{c}_{1i}, \bar{c}_{2i}, \dots, \bar{c}_{7i}\}$ :

$$\begin{aligned} x_{ti}(t) = & (p_{ei}^T, u_{ei}^T, \chi_{fi}^T, (p_{ei}^{\gamma_{pi}+1/2})^T) \\ & , (u_{ei}^{(\rho_{uei}+1)/2})^T, \bar{\Phi}_{1i}, \dots, \bar{\Phi}_{mi}, \bar{d}_i) \end{aligned} \quad (79)$$

$$\eta_i = 0.25 \bar{c}_i^2 + (k^2/2) \lambda_{\max}(\delta_{\xi_i}) \|\Phi_i^*\|^2$$

می‌باشند. دقت شود که،  $c_{\min}$  ایجاد کننده بیشترین مقدار منفی در مشتق تابع لیپانوف است. با توجه به رابطه (۷۵) و ساده‌سازی‌های لازم، هریک از ثابت‌های  $\bar{c}_{1i}, \dots, \bar{c}_{7i}$  به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \bar{c}_{1i} = & (\lambda_{\min}(k_{0i}) - 0.5 \|E_i(q_i, q_d)\|), \\ \bar{c}_{5i} = & \lambda_{\min}(K_{1i}) (1/(2^{1-(\gamma_{pi}+1)/2})^2) \\ \bar{c}_{2i} = & \lambda_{\min}(K_{0i} + \bar{D}_i - I), \\ \bar{c}_{6i} = & (\lambda_{\min}(\delta_{\xi_i}) - (1/2k^2) \lambda_{\max}(\delta_{\xi_i})), \\ \bar{c}_{3i} = & (1/\bar{\mathfrak{A}}_{dfi} - 1 - 0.5 \|E_i(q_i, q_d)\|) \\ \bar{c}_{7i} = & (0.25 - Q_{Mini}), \quad Q_{Mini} = \lambda_{\min}\{Q_{Mi}\} \\ \bar{c}_{4i} = & (\beta_i \|E_i(q_i, q_d)\| + k_{1i}) (1/(2^{1-(\gamma_{pi}+1/2)})^2) \end{aligned} \quad (80)$$

که در این روابط،  $\lambda_{\min}$  و  $\lambda_{\max}$  به ترتیب، بیانگر کمترین و بیشترین

، شرایط  $|p_{eik}| \leq |f_{pki}| / |\lambda\{\bar{k}_{li}\}|$  و  $|u_{eik}| \leq |\tilde{f}_{uki}| / |\lambda\{\bar{K}_{1ui}\}|$  به ترتیب برقرار خواهد شد. بر این اساس با توجه به لم ۶، برای کل بردارهای  $u_{ei}$  و  $p_{ei}$ ، همگرایی به نواحی  $\delta_{2pi}$  و  $\delta_{2ui}$  به شکل زیر قابل اثبات است:

$$\begin{aligned} \|u_{ei}\|^{4\rho_{ei}} &= (v_{ei}^2 + v_{ei}^2)^{2\rho_{ei}} \leq (v_{ei}^{2\rho_{ei}} + v_{ei}^{2\rho_{ei}})^2 \\ &\leq \left( \frac{\tilde{f}_{u1i}^2 + \tilde{f}_{u2i}^2}{\lambda^2\{\bar{K}_{1ui}\}} \right)^2 = \frac{\|\tilde{\Phi}_i \xi_i(x_i) + \mathcal{G}\tilde{d}_i\|^4}{\lambda^4\{\bar{K}_{1ui}\}} \\ \rightarrow \|u_{ei}\| &\leq \left( \frac{\|\tilde{\Phi}_i \xi_i(x_i)\| + \|\mathcal{G}\tilde{d}_i\|}{\lambda\{\bar{K}_{1ui}\}} \right)^{1/\rho_{ei}} =: \delta_{2ui} \end{aligned} \quad (۸۸)$$

$$\begin{aligned} \|p_{ei}\|^{4\gamma_{pi}} &= (\ell_{ei}^2 + \omega_{ei}^2)^{2\gamma_{pi}} \leq (\ell_{ei}^{2\gamma_{pi}} + \omega_{ei}^{2\gamma_{pi}})^2 \\ &\leq \left( \frac{f_1^2 + \tilde{f}_2^2}{\lambda^2\{\bar{k}_{li}\}} \right)^2 = \frac{\|\sigma_{ei}\|^4}{\lambda^4\{\bar{k}_{li}\}} \\ \rightarrow \|p_{ei}\| &\leq \left( \frac{\|\sigma_{ei}\|}{\lambda\{\bar{k}_{li}\}} \right)^{1/\gamma_{pi}} =: \delta_{2pi} \end{aligned}$$

که  $\lambda\{\bar{k}_{li}\} = \min\{\bar{k}_{11i}, \bar{k}_{12i}\}$  و  $\lambda\{\bar{K}_{1ui}\} = \min\{\bar{K}_{11ui}, \bar{K}_{21ui}\}$  می باشد. بر این اساس، هر یک از روابط (۸۵) و (۸۶) را می توان به- صورت های زیر بازنویسی نمود:

$$\dot{V}_i(t) \leq -u_{ei}^T \bar{K}_{0ui} u_{ei} - u_{ei}^T K_{1ui} \text{sig}(u_{ei})^{\rho_{ei}} - p_{ei}^T \bar{k}_{0i} p_{ei} - p_{ei}^T \bar{k}_{li} \text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}} \quad (۸۹)$$

$$\dot{V}_i(t) \leq -u_{ei}^T \bar{K}_{0ui} u_{ei} - u_{ei}^T \bar{K}_{1ui} \text{sig}(u_{ei})^{\rho_{ei}} - p_{ei}^T k_{0i} p_{ei} - p_{ei}^T \bar{k}_{li} \text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}} \quad (۹۰)$$

هریک از روابط (۸۹) و (۹۰) به شکل زیر قابل بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &\leq C_{p1i} (-\|u_{ei}\|^2 - \|p_{ei}\|^2) \\ &\quad + C_{p2i} (-\|u_{ei}\|^{\Lambda_i+1} - \|p_{ei}\|^{\Lambda_i+1}) \end{aligned} \quad (۹۱)$$

که براساس روابط (۸۹) و (۹۰)،  $C_{p1i} = \min\{\lambda_{\min}\{\bar{K}_{0ui}\}, \lambda_{\min}\{\bar{k}_{0i}\}\}$  و  $C_{p2i} = \min\{\lambda_{\min}\{\bar{K}_{1ui}\}, \lambda_{\min}\{\bar{k}_{li}\}\}$  و  $C_{p1i} = \min\{\lambda_{\min}\{\bar{K}_{0ui}\}, \lambda_{\min}\{k_{0i}\}\}$  خواهد بود. همچنین، در هر دو حالت  $\Lambda_i = \min\{\rho_{ei}, \gamma_{pi}\}$  می باشد. از طرفی، طبق لم ۲، برای تابع لیاپانوف (۸۲) می توان نوشت:

$$\dot{V}_i(t) \leq \frac{1}{2} C_{\max i} (\|u_{ei}\|^2 + \|p_{ei}\|^2) \quad (۹۲)$$

که در آن  $C_{\max i} = \max\{\lambda_{\max}\{\bar{M}_{1i}\}, 1\}$  می باشد. در نهایت، با مقایسه رابطه (۹۱) و (۹۲)، مشتق تابع لیاپانوف به فرم زیر حاصل می شود:

$$\dot{V}_i(t) \leq -\psi_{1i} V_i - \psi_{2i} V_i^{(\Lambda_i+1)/2} \quad (۹۳)$$

که  $\psi_{1i} = 2C_{p1i} / C_{\max i}$  و  $\psi_{2i} = 2^{(\Lambda_i+1)/2} C_{p2i} / C_{\max i}$  می باشد.

که در آن  $\bar{K}_{0ui} = (K_{0ui} + \bar{D}_i)$  و  $\bar{k}_{li} = (\beta_{1i} \|E_i\| + k_{li})$  هستند. نامساوی (۸۴) به دو صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &\leq -u_{ei}^T \times \underbrace{(\bar{K}_{0ui} - \text{diag}(\tilde{\Phi}_i \xi_i(x_i) + \tilde{d}_i))}_{\bar{K}_{0ui}} \times \text{diag}^{-1}(u_{ei}) \\ &\quad \times u_{ei} - p_{ei}^T \underbrace{(k_{0i} - \text{diag}(\sigma_{ei}))}_{\bar{k}_{0i}} \times \text{diag}^{-1}(p_{ei}) p_{ei} \\ &\quad - p_{ei}^T \bar{k}_{li} \text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}} - u_{ei}^T K_{1ui} \text{sig}(u_{ei})^{\rho_{ei}} \end{aligned} \quad (۸۵)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &\leq -u_{ei}^T \times \underbrace{(K_{1ui} - \text{diag}(\tilde{\Phi}_i \xi_i(x_i) + \tilde{d}_i))}_{\bar{K}_{1ui}} \times \text{diag}^{-1}(\text{sig}(u_{ei})^{\rho_{ei}}) \\ &\quad \times \text{sig}(u_{ei})^{\rho_{ei}} - p_{ei}^T \underbrace{(\bar{k}_{li} - \text{diag}(\sigma_{ei}))}_{\bar{k}_{li}} \times \text{diag}^{-1}(\text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}}) \\ &\quad \times \text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}} - p_{ei}^T k_{0i} p_{ei} - u_{ei}^T \bar{K}_{0ui} u_{ei} \end{aligned} \quad (۸۶)$$

بر این اساس، با در نظر گرفتن  $(\tilde{\Phi}_i \xi_i(x_i) + \tilde{d}_i) = \tilde{F}_{ui} = (\tilde{f}_{u1i}, \tilde{f}_{u2i})^T$  و  $(\sigma_{ei}) = F_{pi} = (f_{p1i}, f_{p2i})^T$  تنها زمانی منفی خواهد شد که جملات  $\bar{k}_{0i}$  و  $\bar{K}_{0ui}$  مثبت معین باشد. بنابراین، لازم است که  $\lambda\{\bar{K}_{0ui}\} - |\tilde{f}_{uki}| / |u_{eik}| > 0$  باشد که در این صورت، شرایط  $\lambda\{\bar{k}_{0i}\} - |f_{pki}| / |p_{eik}| > 0$  به ترتیب برای هر یک از درایه های بردارهای  $u_{ei} = (v_{ei}, v_{ei})^T$  و  $p_{ei} = (\ell_{ei}, \omega_{ei})^T$  همگرای برآورده خواهند شد. همچنین، برای کل بردارهای  $u_{ei}$  و  $p_{ei}$ ، همگرایی به نواحی  $\delta_{1pi}$  و  $\delta_{1ui}$  به شکل زیر اثبات می شود:

$$\begin{aligned} \|u_{ei}\|^2 &= (v_{ei}^2 + v_{ei}^2) \leq \frac{\tilde{f}_{u1i}^2 + \tilde{f}_{u2i}^2}{\lambda^2\{\bar{K}_{0ui}\}} = \frac{\|\tilde{\Phi}_i \xi_i(x_i) + \tilde{d}_i\|^2}{\lambda^2\{\bar{K}_{0ui}\}} \\ \rightarrow \|u_{ei}\| &\leq \frac{\|\tilde{\Phi}_i \xi_i(x_i)\| + \|\tilde{d}_i\|}{\lambda\{\bar{K}_{0ui}\}} = \delta_{1ui} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|p_{ei}\|^2 &= (\ell_{ei}^2 + \omega_{ei}^2) \leq \frac{f_{p1i}^2 + f_{p2i}^2}{\lambda^2\{\bar{k}_{0i}\}} = \frac{\|\sigma_{ei}\|^2}{\lambda^2\{\bar{k}_{0i}\}} \\ \rightarrow \|p_{ei}\| &\leq \frac{\|\sigma_{ei}\|}{\lambda\{\bar{k}_{0i}\}} = \delta_{1pi} \end{aligned} \quad (۸۷)$$

به طور مشابه، با در نظر گرفتن رابطه (۸۶)، جهت تضمین منفی شدن مشتق تابع لیاپانوف لازم است که جملات  $\bar{k}_{li}$  و  $\bar{K}_{1ui}$  مثبت معین باشد. که این امر مستلزم این است که روابط  $\lambda\{\bar{K}_{1ui}\} - |\tilde{f}_{uki}| / |u_{eik}| > 0$  و  $\lambda\{\bar{k}_{li}\} - |f_{pki}| / |p_{eik}| > 0$  برقرار باشند. در این صورت، برای هر یک از درایه های بردارهای  $u_{ei} = (v_{ei}, v_{ei})^T$  و  $p_{ei} = (\ell_{ei}, \omega_{ei})^T$

$$\dot{V}(t) \leq -\sum_{i=1}^N \psi_{1i} V_i - \sum_{i=1}^N \psi_{2i} V_i^{(\Lambda_i+1)/2} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\psi_1 \sum_{i=1}^N V_i - \psi_2 \left( \sum_{i=1}^N V_i \right)^{(\Lambda+1)/2} \\ &= -\psi_1 V - \psi_2 V^{(\Lambda+1)/2} \end{aligned} \quad (96)$$

که در این روابط  $\Lambda = \Lambda_1 = \dots = \Lambda_N$ ،  $\psi_1 = \min\{\psi_{1i}\}_{i=1}^N$  و  $\psi_2 = \min\{\psi_{2i}\}_{i=1}^N$  می‌باشند. در نهایت، قانون کنترل پیشنهادی، همگرایی خطای ردیابی به ناحیه کوچک حول مبدأ را برای سیستم کلی آرایش‌بندی، در زمان محدود  $T_s = \max\{T_{si}\}_{i=1}^N$  تضمین خواهد کرد.

بنابراین، طبق لم ۱، سیستم تحت اعمال کنترل‌کننده پیشنهادی، در زمان محدود به پایداری رسیده و خطاهای موقعیت و سرعت در زمان محدودی به ناحیه کوچکی اطراف صفر همگرا خواهند شد که در این صورت زمان نشست به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} T_{si} &\leq \left( \frac{1}{2C_{pli}} (1 - (\Lambda_i + 1)/2) \right) \\ &\times \ln \left( \frac{2C_{pli} V(0)^{1 - (\Lambda_i + 1)/2} + 2^{(\Lambda_i + 1)/2} C_{p2i}}{2^{(\Lambda + 1)/2} C_{p2i}} \right) \end{aligned} \quad (94)$$

با توجه به اینکه نامساوی (۹۴)، برای زیرسیستم  $i$ ام اثبات شده است، برای سیستم کلی آرایش‌بندی به‌صورت زیر توسعه داده می‌شود:

الگوریتم ۱: شبه کد روش سطح دینامیکی فازی تطبیقی زمان محدود با رؤیتگر اغتشاش

مقدار دهی اولیه پارامترهای ربات پیشرو مجازی و ربات‌های پیرو و تعیین بردار آرایش مطلوب هر یک از ربات‌ها ( $p_{di}$ ).

شروع حلقه محاسبات (تعیین شرط حلقه)

**گام ۱**

تولید پارامترهای بردار حالت مطلوب ( $q_d$ )، توسط ربات پیشرو مجازی و ارسال  $q_d$  به گام ۲.

**گام ۲**

دریافت  $q_i$  و  $\dot{q}_i$  و تولید خطای ردیابی حالات، مطابق با روابط (۱۶) تا (۱۸).

تشکیل بردار آرایش پیشرو-پیرو ( $p_i$ ) با استفاده از خطای ردیابی حالات، طبق روابط (۱۶) تا (۱۸) و محاسبه مشتق بردار آرایش ( $\dot{p}_i$ )، مطابق با روابط (۲۲) تا (۲۴) و ارسال  $p_i$  و  $p_{di}$  به گام ۳.

**گام ۳**

دریافت  $p_{di}$ ،  $p_i$  و تولید خطای ردیابی آرایش مطلوب ( $p_{ei}$ ) و مشتق آن، طبق رابطه (۳۴).

تشکیل جمله زمان محدود  $\text{sig}(p_{ei})^{\gamma_{pi}}$  براساس خطای ردیابی، طبق رابطه (۳۶) و تولید قانون کنترل مجازی  $u_{di}$ ، مطابق با رابطه (۳۵).  
فیلتر نمودن قانون کنترل مجازی به شکل رابطه (۳۷) و ارسال قانون کنترل مجازی فیلترشده به گام ۴.

**گام ۴**

دریافت قانون کنترل مجازی فیلترشده  $u_{dif}$  و  $u_{ei}$  و تولید خطای دینامیکی زمان محدود ( $u_{ei}$ )، مطابق با رابطه (۴۲).  
محاسبه دینامیک خطای ردیابی و ارسال به گام ۵.

**گام ۵**

دریافت  $p_{ei}$ ،  $u_{dif}$ ،  $\dot{u}_{dif}$ ،  $u_{ei}$  و  $\dot{u}_{ei}$  و انجام ترکیب‌های فازی جهت تولید جمله  $\xi_i(\bar{x}_i)$  به‌صورت رابطه (۴۹).  
به‌روز رسانی مراکز توابع عضویت خروجی و تولید  $\hat{\Phi}_i$  طبق رابطه (۵۰) و تشکیل  $\hat{\Phi}_i \xi_i(\bar{x}_i)$ .

و تولید قانون کنترل واقعی سطح دینامیکی زمان محدود ( $\tau_{fdsci}$ ) مطابق با رابطه (۵۴) و ارسال  $\tau_{fdsci}$  به گام ۶.

**گام ۶**

دریافت ماتریس‌های مدل دینامیکی سیستم چند عاملی مطابق با روابط (۲۶).

تولید جمله  $\hat{z}_i$  مطابق با رابطه (۳۰) و تولید تخمین اغتشاشات خارجی ( $\hat{d}_{ii}$ ) مطابق با رابطه (۲۹).

تولید سیگنال خروجی رؤیتگر مطابق با رابطه  $\tau_{oi} = g_{1mi}^{-1}(q_i) M_{1i}^{-1} \hat{d}_{ii}$  و ارسال آن به گام ۷.

**گام ۷**

دریافت  $\tau_{fdsci}$  و  $\tau_{oi}$  و تولید گشتاور کنترلی کلی  $\tau_{ai}$  مطابق با رابطه (۳۸) و اعمال آن به دینامیک آرایش‌بندی مطابق با رابطه (۴).  
تولید بردار حالت جدید و ارسال به ابتدای حلقه.

بازگشت به ابتدای حلقه کنترلی

$$\mu_{F_{ki}^2}(\bar{x}_{ki}) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}_{ki}}{z_i}\right)^2\right) \quad (99)$$

$$\mu_{F_{ki}^3}(\bar{x}_{ki}) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}_{ki} - a_i}{z_i}\right)^2\right) \quad (100)$$

که در این روابط،  $a_i$  تعیین کننده مراکز توابع عضویت می باشد که به- ترتیب، برای دو درایه از ورودی اول  $1/25$  و  $1/75$ ، ورودی دوم  $10$  و  $1/75$ ، ورودی سوم  $5$  و  $1/2$ ، ورودی چهارم  $10$  و  $1/2$  و ورودی پنجم  $5$  و  $1/2$  در نظر گرفته شده است. همچنین، پارامتر  $z_i$  به ترتیب برای هر سه تابع عضویت از هر ورودی،  $0.1/6$ ،  $0.1/5$ ،  $2$ ،  $0.1/5$ ،  $2$ ،  $0.1/1$ ،  $2$ ،  $0.1/1$ ،  $2$ ،  $0.1/1$ ،  $2$ ،  $0.1/1$  در نظر گرفته شده است. جمله اغتشاش  $\bar{\tau}_{di}$  به صورت مجموع نامعینی مربوط به اصطکاک های ویسکوز و کولمب به ترتیب به شکل بردارهای  $F_{Vi} = 2[\nu, \nu]^T$  و  $F_{Ci} = [0.5\text{sign}(\nu_i), 0.5\text{sign}(\nu_i)]^T$  و اختلالات سینوسی به شکل زیر در شبیه سازی لحاظ گردیده است.

$$\bar{\tau}_{di} = [2\sin(0.5t), 2\sin(0.5t)]^T + \sum_{i=1}^2 (\sin(2ti) + \sin(t)\sin(2ti/2)) \quad (101)$$

در ادامه، با در نظر گرفتن شرایط مذکور، نتایج شبیه سازی در دو حالت زیر ارائه می گردد:

۱- فرمان حلقه باز  $u_{a_d} = [0.35, 0.25]^T$  جهت تولید مسیر مرجع دایره ای، به ربات پیشرو مجازی با دینامیک و سینماتیک مشابه به مدل ربات های پیرو اعمال می شود.

۲- مسیر مرجع با در نظر گرفتن روابط زیر تولید می گردد:

$$\begin{cases} x_d = x_g + R \sin(5\omega_d t) + R \sin(\omega_d t) \\ y_d = y_g + R \sin(\omega_d t) + R \sin(5\omega_d t) \\ \theta_{0d} = a_1 + b_1 t \\ \theta_{1d} = \omega_d t \end{cases} \quad (102)$$

که پارامترهای  $\omega_d = 0.05$ ،  $R = 10$ ، و  $[x_g, y_g] = [0, 0]$  تولید می- گردد. بهره های کنترل کننده در هر حالت، طبق جدول ۲ با استفاده از روش سعی و خطا و به صورت مرحله به مرحله با توجه به اهداف کنترلی بیان شده، تنظیم شده اند. نتایج حاصل از شبیه سازی طبق حالت اول با وجود اغتشاش و بدون حضور نویز در شکل های ۳ تا ۹ ارائه شده است.

در شکل های ۱۰ تا ۱۳، نتایج شبیه سازی با وجود نویز و بدون تغییر در پارامترهای کنترلی ارائه شده است. در این حالت، شرایط اولیه متغیرهای

حالت به صورت  $q_1 = [-4, -2.5, 0, 0]^T$ ،  $q_2 = [-4, 2.5, 0, 0]^T$ ،  $q_3 = [-4, -4.5, 0, 0]^T$ ،  $q_4 = [-4, 4.5, 0, 0]^T$  و بردار آرایش مطلوب برای هر یک از ربات های پیرو به فرم  $p_{d1} = (3.5, -45^\circ)$ ،  $p_{d2} = (3.5, 45^\circ)$ ،  $p_{d3} = (5, -60^\circ)$ ،  $p_{d4} = (5, 60^\circ)$  در نظر گرفته شده است. به علاوه، بردار شرایط اولیه متغیرهای حالت مطلوب به شکل  $q_3 = [2, 0, 0, 0]^T$  در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که در کلیه مراحل شبیه سازی، حد اشباع  $\|\tau_a\| \leq 200 \text{ Nm}$  بر

**تذکر ۵:** شرایط بیان شده بعد از رابطه (۸۱) و پس از روابط (۸۷) و (۸۸)، براساس تولید منفی ترین مقدار از مشتق تابع لیاپانوف و یا به عبارتی حساس ترین حالت، حاصل شده است. این در حالی است که در عمل، پایداری سیستم حلقه بسته تا حد زیادی با نقض این شرایط نیز ممکن است امکان پذیر باشد و اثبات محافظه کارانه برای اطمینان از پایداری سیستم حلقه بسته ارائه شده است.

**تذکر ۶:** وجود جمله ناپیوسته  $\text{sig}(u_{ei})^{\rho_{nei}}$  در قانون کنترل (۵۴) در شرایطی که خطاهای ردیابی دینامیکی مقادیر بزرگی داشته باشند، ممکن است باعث ایجاد نوسانات فرکانس بالا در ورودی های کنترلی گردد. جهت حل این مشکل، می توان این جمله را با یک تابع اشباع مشابه به تابع زیر جایگزین نمود [۳۰]:

$$\text{sat}\left(\frac{\text{sig}(u_{ei})^{\rho_{nei}}}{\varepsilon^\rho}\right) = \begin{cases} \frac{\text{sig}(u_{ei})^{\rho_{nei}}}{\|\text{sig}(u_{ei})^{\rho_{nei}}\|} & \text{if } \|s\| > \varepsilon \\ \frac{\text{sig}(u_{ei})^{\rho_{nei}}}{\varepsilon^\rho} & \text{if } \|s\| < \varepsilon \end{cases} \quad (97)$$

که در این رابطه،  $\varepsilon^\rho$  بیانگر ضخامت لایه مرزی است.

## ۹- نتایج شبیه سازی

در این بخش، به منظور نمایش میزان اثربخشی الگوریتم کنترلی پیشنهادی، نتایج حاصل از شبیه سازی های انجام شده، مورد بررسی قرار می گیرد. شبیه سازی با در نظر گرفتن پارامترهای گروهی شامل چهار ربات تراکتور- ترپلر پیرو انجام شده است. پارامترهای مربوط به جرم، اینرسی و ضرایب میرایی هر چهار ربات پیرو به طور یکسان، مطابق با مدل آزمایشگاهی ارائه شده در مرجع [۲۴] در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱: پارامترهای ربات تراکتور- ترپلر

مقدار	توصیف	پارامتر
0.15, 0.005 m	فاصله $p_0 c_0$ و $p_1 c_1$	$a_0, a_1$
0.8 m	فاصله بین چرخ های تراکتور	$2b$
15, 15 kg	جرم های ترپلر و تراکتور	$m_1, m_0$
2, 2 kg.m <sup>2</sup>	ممان های اینرسی	$I_1, I_0$
1.5 m	فاصله $p_0 p_1$	$d$
0.15 m	شعاع چرخ ها	$r$

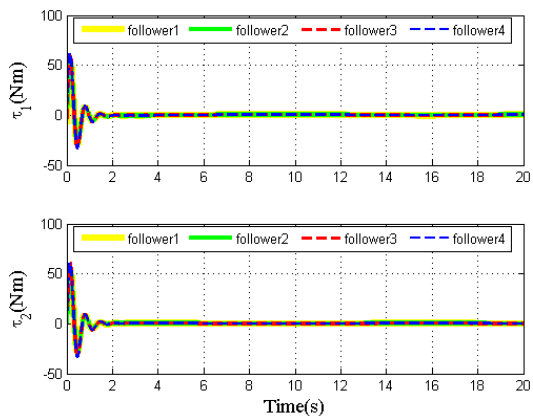
بردار  $\bar{x}_i = (u_i, u_{dif}, \dot{u}_{dif}, u_{ei}, p_{ei})^T$  به عنوان ورودی مجموعه فازی در نظر گرفته شده و توابع عضویت فازی به صورت رابطه زیر تعریف شده اند. به علاوه، شرایط اولیه کلیه پارامترهای بردار  $\hat{\Phi}_{ij}$  به- ازای  $j = 1, 2$ ،  $0.5$  در نظر گرفته شده است [۱۷].

$$\mu_{F_{ki}^1}(\bar{x}_{ki}) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}_{ki} + a_i}{z_i}\right)^2\right) \quad (98)$$

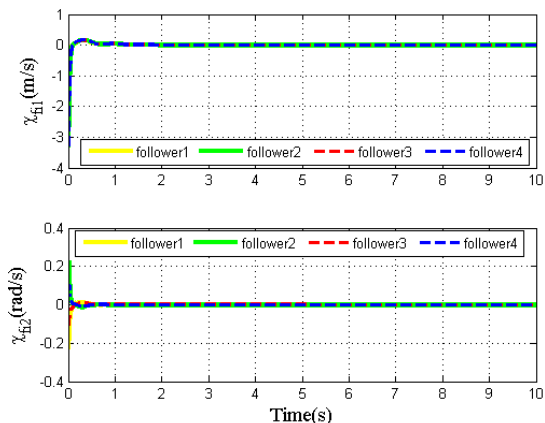
گشتاورهای ورودی لحاظ گردیده است.

جدول ۲: مقادیر بهره ها و پارامترهای کنترل کننده

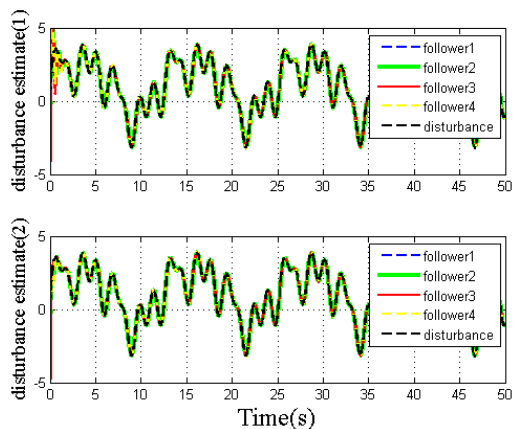
حالت دوم	حالت اول	مقادیر در هر حالت پارامتر طراحی
$10I_{2 \times 2}$	$1I_{2 \times 2}$	$k_{oi}$
$10I_{2 \times 2}$	$1I_{2 \times 2}$	$k_{li}$
$45I_{2 \times 2}$	$25I_{2 \times 2}$	$K_{oui}$
$45I_{2 \times 2}$	$28I_{2 \times 2}$	$K_{lui}$
0.81	0.81	$\gamma_{Pi}$
0.89	0.89	$\rho_{uei}$
0.89	0.89	$\Upsilon_{qi}$
0.5	1.2	$\beta_{li}$
170, 100	150, 75	$C_{li}, C_{li}$
$2I_{2 \times 2}$	$10I_{2 \times 2}$	$\Gamma_{\xi i}$
0.09	0.08	$\delta_{\xi i}$
0.025	0.025	$\Im_{dfi}$



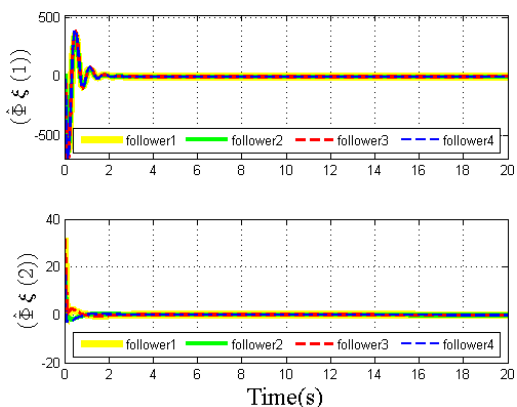
شکل ۵: گشتاورهای ورودی



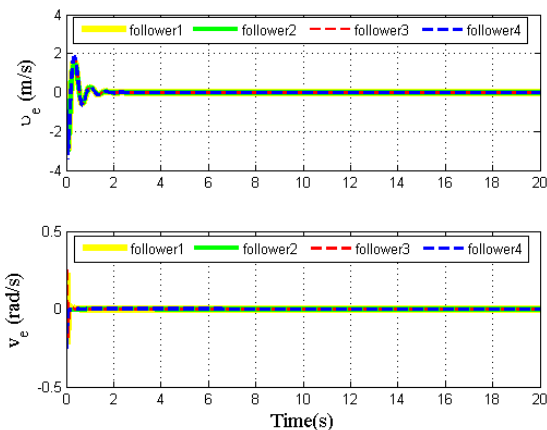
شکل ۶: خطای خروجی فیلترها



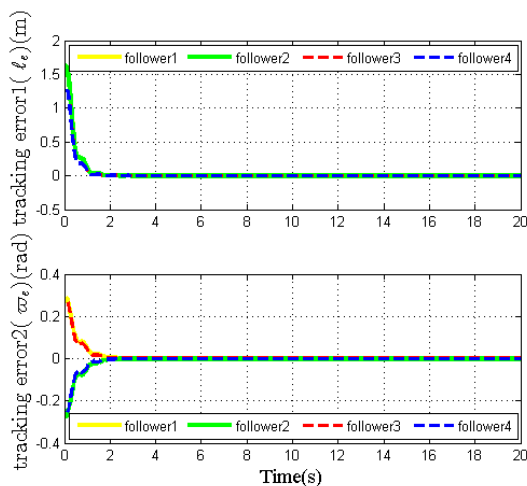
شکل ۷: تخمین اغتشاشات خارجی



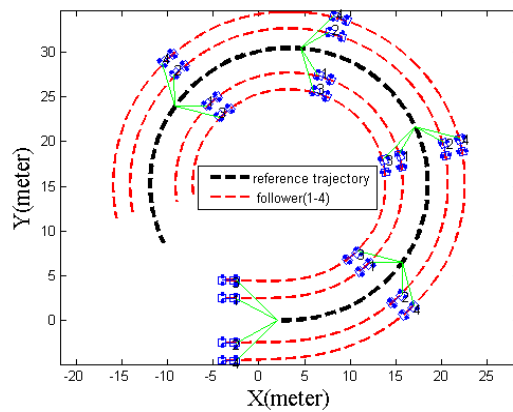
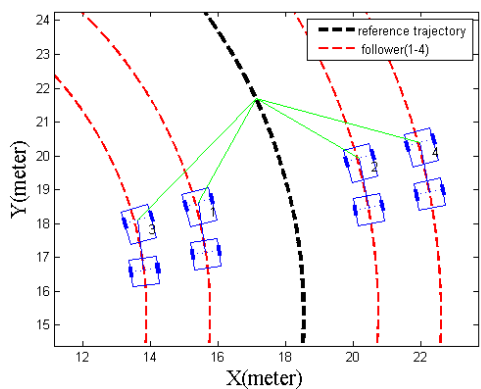
شکل ۸: تخمین نامعینی های پارامتری



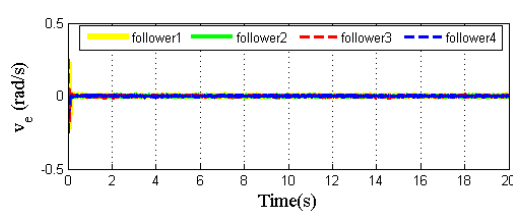
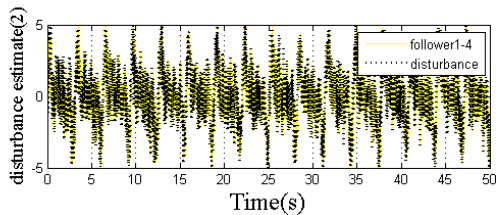
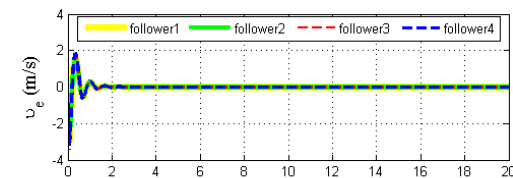
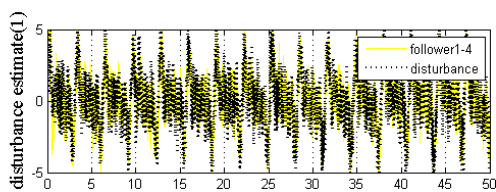
شکل ۳: خطای ردیابی سرعت های خطی و زاویه ای



شکل ۴: خطای ردیابی موقعیت و جهت گیری

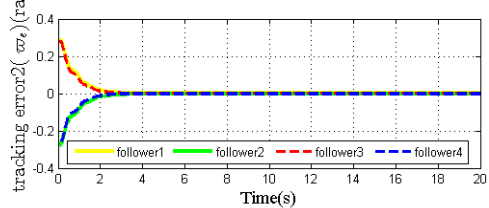
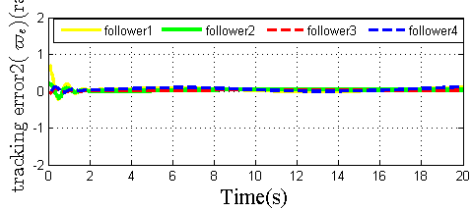
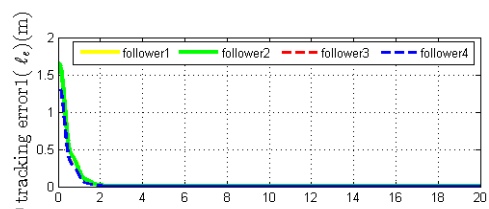
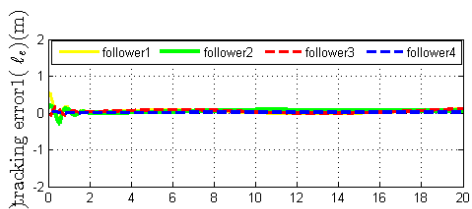


شکل ۹: ردیابی مسیر زمانی مرجع توسط ربات های پیرو



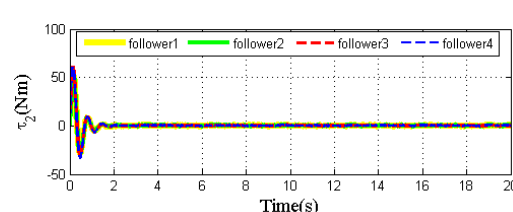
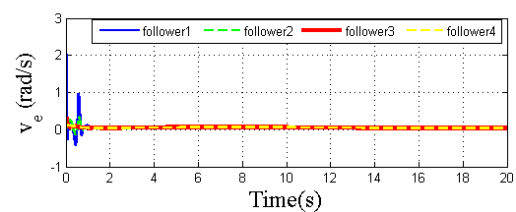
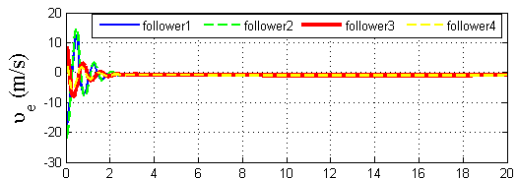
شکل ۱۳: تخمین اغتشاشات خارجی به همراه نویز

شکل ۱۰: خطای ردیابی سرعت در حضور نویز



شکل ۱۴: خطای ردیابی سرعت های خطی و زاویه ای

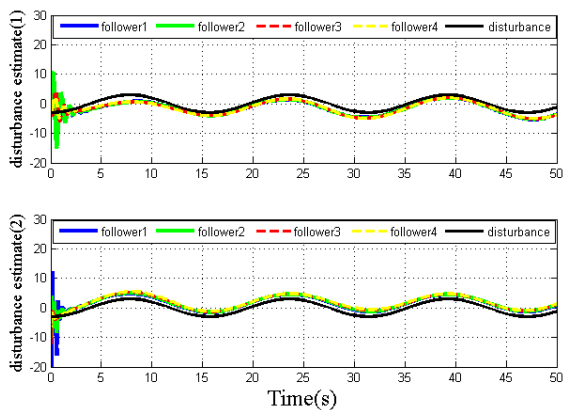
شکل ۱۱: خطای ردیابی موقعیت و جهت گیری در حضور نویز



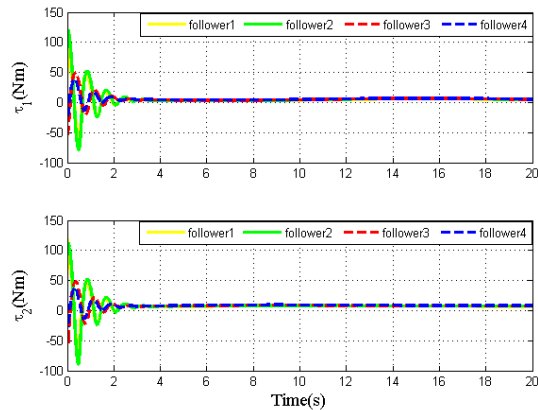
شکل ۱۵: خطای ردیابی موقعیت و جهت گیری

شکل ۱۲: ورودی های کنترلی در حضور نویز

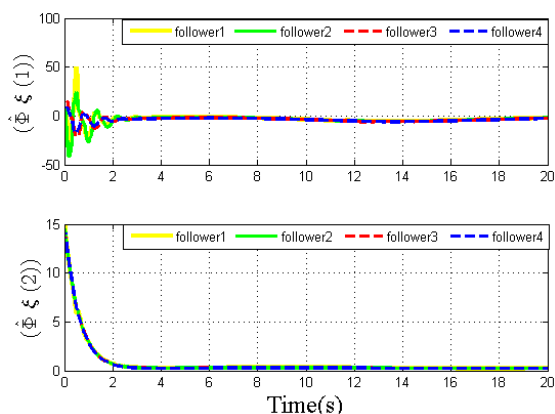




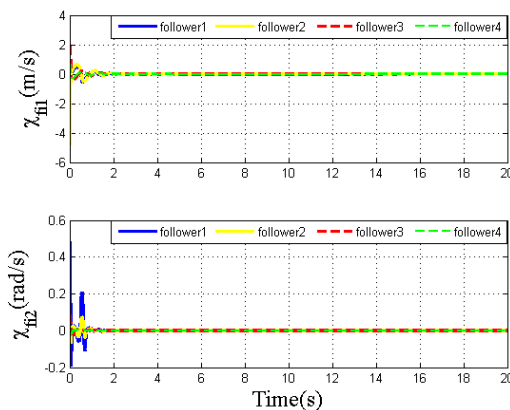
شکل ۱۸: تخمین اغتشاشات خارجی



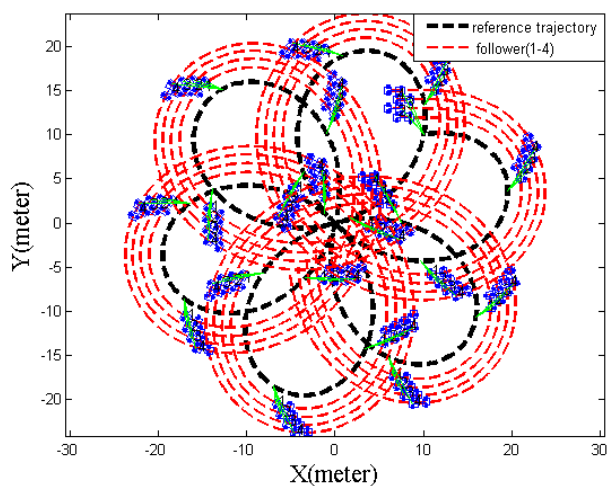
شکل ۱۶: گشتاورهای ورودی



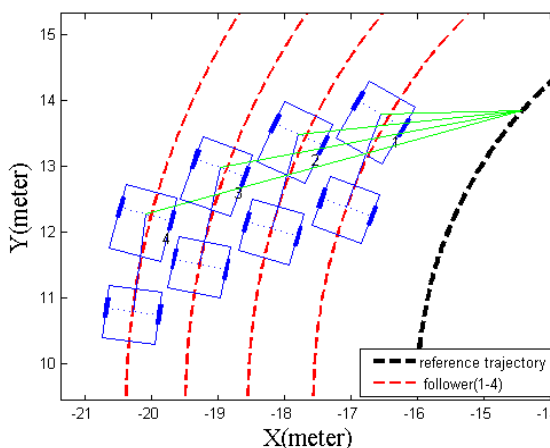
شکل ۱۹: تخمین نامعینی های پارامتری



شکل ۱۷: خطای خروجی فیلترها

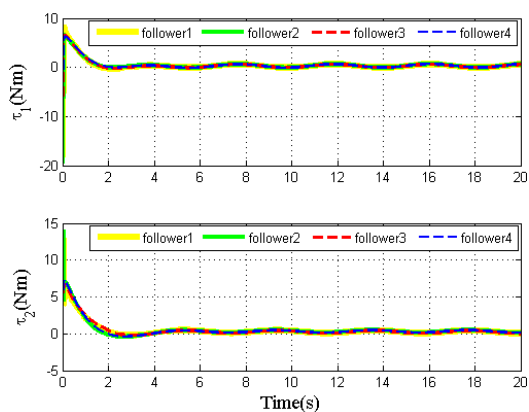


شکل ۲۰: ردیابی مسیر زمانی مرجع سینوسی توسط ربات های پیرو

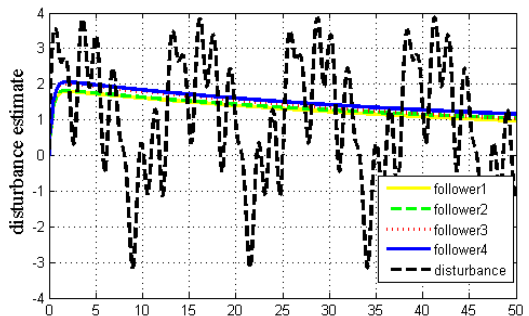


انتخاب گردیده است. از شکل های ۳، ۴، ۱۰، ۱۱، ۱۴ و ۱۵ می توان دریافت که با اعمال روش کنترلی پیشنهادی، برای هر دو مسیر، همگرایی بسیار سریع خطاهای ردیابی در سطح دینامیک و سینماتیک به ناحیه بسیار کوچکی اطراف مبدأ، حتی با وجود نویز و اغتشاش تضمین شده است. در شکل های ۷، ۱۳، ۱۸، تخمین مقادیر دقیق اغتشاشات خارجی همراه

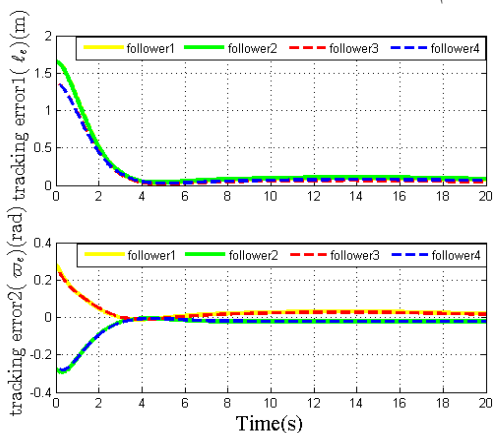
شکل های ۱۴ تا ۲۰، نتایج حاصل از شبیه سازی انجام شده بر اساس حالت دوم را نمایش می دهند. در این حالت، شرایط اولیه متغیرهای حالت ربات به صورت  $q_2 = [6, 13, 0, 0]^T$ ،  $q_1 = [7, 12.5, 0, 0]^T$ ،  $q_3 = [7, 14, 0, 0]^T$ ،  $q_4 = [6, 15, 0, 0]^T$  و بردار آرایش مطلوب برای هریک از ربات های پیرو به شکل های  $p_{d3} = (4.5, -60^\circ)$ ،  $p_{d1} = (2, -60^\circ)$  و  $p_{d2} = (3.25, -60^\circ)$ ،  $p_{d3} = (5.7, -60^\circ)$ ،  $p_{d2} = (3.25, -60^\circ)$



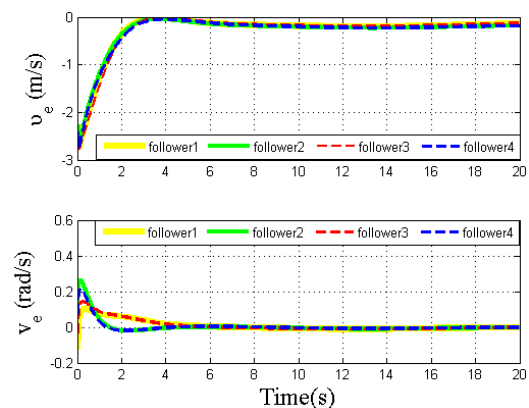
شکل ۲۳: ورودی های کنترلی با کنترل سطح دینامیکی عصبی مقاوم تطبیقی



شکل ۲۴: تخمین کران بالای اغتشاشات خارجی با کنترل سطح دینامیکی عصبی مقاوم تطبیقی.

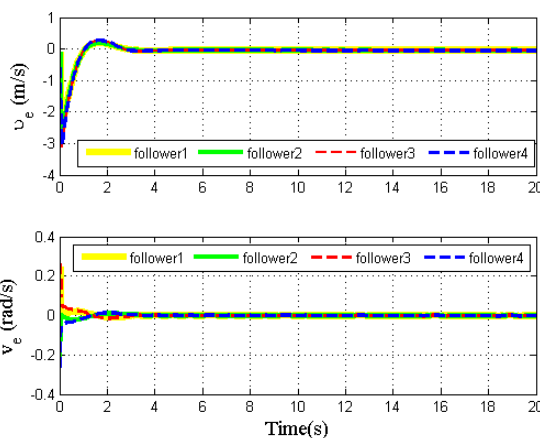


شکل ۲۵: خطای ردیابی سینماتیک با کنترل سطح دینامیکی عصبی مقاوم تطبیقی

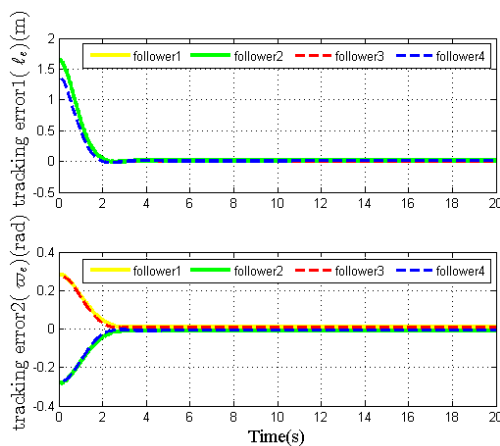


شکل ۲۶: خطای ردیابی دینامیکی با کنترل سطح دینامیکی عصبی مقاوم تطبیقی

با نویز و در شکل های ۸ و ۱۹، همگرایی تخمین پارامترهای نامعین به کرانی ثابت نشان داده شده است. در شکل های ۵، ۱۲ و ۱۶، سیگنال های ورودی کنترلی نمایش داده شده است که با وجود اغتشاشات و نویز اعمال شده به سیستم، هموار و دارای دامنه تغییرات معقولی هستند. در ادامه، جهت نمایش میزان اثربخشی تخمین زن فازی تطبیقی در همگرایی خطاهای ردیابی، شبیه سازی با حذف جمله  $\hat{\Phi}_i, \hat{\xi}_i(\bar{x}_i)$  از سیگنال های کنترلی تکرار شده و نتایج آن به صورت زیر ارائه می شوند.



شکل ۲۱: خطای ردیابی سرعت های خطی و زاویه ای بدون تخمین زن فازی تطبیقی



شکل ۲۲: خطای ردیابی موقعیت و جهت گیری بدون تخمین زن فازی تطبیقی

در مقاله [۲۴]، جهت حل مسأله ردیابی مسیرهای زمانی مرجع برای آرایش بندی ربات های تراکتور- تریلر، یک طرح کنترلی بر اساس روش سطح دینامیکی ارائه شده است که در آن، کران بالای اغتشاشات خارجی توسط کنترل کننده مقاوم جبران شده است. جهت مقایسه و نمایش میزان اثربخشی طرح پیشنهادی در زمان همگرایی خطاهای ردیابی و تخمین اغتشاشات خارجی، شبیه سازی بر اساس روش سطح دینامیکی عصبی مقاوم تطبیقی ارائه شده در [۲۴]، تکرار شده و نتایج آن در شکل های ۲۳ تا ۲۶ ارائه شده است.

گرفته شود، تعداد ورودی‌ها از ۱۰ به ۵ کاهش می‌یابد. در این صورت، لازم است که مجدداً با توجه به دامنه تغییرات اندازه بردارهای ورودی، مراکز و انحراف معیار توابع عضویت تعیین شوند. جهت نمایش عملکرد کنترل‌کننده پیشنهادی، مقادیر مؤثر سیگنال‌های کنترلی و خطاهای ردیابی سرعت و موقعیت ارائه شده در شکل‌های ۳ تا ۵، در جدول ۳ نمایش داده شده‌اند.

**تذکره ۷:** با افزایش ورودی‌ها و توابع عضویت، قوانین فازی افزایش یافته و در نتیجه، زمان بیشتری جهت انجام محاسبات و اجرای الگوریتم کنترلی نیاز است. در این شرایط، می‌توان با استفاده از روش‌های مختلف، مانند ترکیب خطی درایه‌های بردارهای ورودی و یا در نظر گرفتن اندازه بردارها به عنوان ورودی سیستم فازی، قوانین را کاهش داده و زمان انجام محاسبات را بهبود بخشید [۳۱]. لازم به ذکر است که در این مقاله، اگر اندازه بردارهای  $u_i$ ،  $u_{dif}$ ،  $\dot{u}_{dif}$ ،  $u_{ei}$ ،  $p_{ei}$  به عنوان ورودی در نظر

جدول ۳: نمایش عملکرد کنترل‌کننده پیشنهادی به صورت کمی

شماره ربات	مقدار مؤثر $v_{ei}(t)$	مقدار مؤثر $u_{ei}(t)$	مقدار مؤثر $\omega_{ei}(t)$	مقدار مؤثر $l_{ei}(t)$	مقدار مؤثر $\tau_{a1}$ و $\tau_{a2}$
1	0.0728	1.6455	0.2872	1.6478	35.3901, 36.0319
2	0.0476	1.6657	0.2783	1.6478	36.1555, 36.2907
3	0.0687	1.7303	0.2767	1.3640	39.5673, 39.6716
4	0.0619	1.7687	0.2618	1.3640	40.2170, 40.9035

[2] J. Cheng, B. Wang, Y. Zhang, and Z. Wang, "Backward orientation tracking control of mobile robot with N trailers," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 15, no. 2, pp. 867-874, 2017.

[3] J. L. Martínez, J. Morales, A. Mandow, and A. García-Cerezo, "Steering limitations for a vehicle pulling passive trailers," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 16, no. 4, pp. 809-818, 2008.

[4] C. Altafini, "Some properties of the general n-trailer," *International Journal of Control*, vol. 74, no. 4, pp. 409-424, 2001.

[5] J. David and P. Manivannan, "Control of truck-trailer mobile robots: a survey," *Intelligent Service Robotics*, vol. 7, no. 4, pp. 245-258, 2014.

[6] J. Morales, J. L. Martínez, A. Mandow, and A. J. García-Cerezo, "Steering the last trailer as a virtual tractor for reversing vehicles with passive on-and-off-axle hitches," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 60, no. 12, pp. 5729-5736, 2013.

[7] J. Yuan, F. Sun, and Y. Huang, "Trajectory generation and tracking control for double-steering tractor-trailer mobile robots with on-axle hitching," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 62, no. 12, pp. 7665-7677, 2015.

[8] J. Yuan, "Hierarchical motion planning for multisteering tractor-trailer mobile robots with on-axle hitching," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 22, no. 4, pp. 1652-1662, 2017.

[9] E. Kayacan, E. Kayacan, H. Ramon, and W. Saeys, "Learning in centralized nonlinear model predictive control: Application to an autonomous tractor-trailer system," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 23, no. 1, pp. 197-205, 2014.

[10] E. Kayacan, H. Ramon, and W. Saeys, "Robust trajectory tracking error model-based predictive control for unmanned ground vehicles,"

## ۱۰- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسأله ردیابی مسیرهای مرجع زمانی برای گروهی از ربات‌های چرخ‌دار غیرهولونومیک تراکتور-تریلر مورد بررسی قرار گرفت. برای این منظور، ابتدا براساس مدل دینامیکی آرایش‌بندی، یک رؤیتگر اغتشاش غیرخطی جهت جبران آثار نامعینی‌های غیرپارامتری و اغتشاشات خارجی طراحی و ارائه شد. در ادامه، با در نظر گرفتن مدل دینامیکی مبتنی بر رؤیتگر و مدل سینماتیکی آرایش‌بندی، یک کنترل‌کننده سطح دینامیکی زمان‌محدود جهت همگرایی سریع خطاهای ردیابی ارائه گردید. به‌علاوه، نامعینی‌های پارامتری، با بهره‌گیری از یک تخمین‌زن فازی تطبیقی جبران شد. طرح پیشنهادی در نهایت، کران‌داری یکنواخت سیگنال‌های حلقه‌بسته و همگرایی خطاهای ردیابی به ناحیه کوچکی اطراف مبدأ را تضمین نمود که این امر ردیابی سریع و دقیق ربات پیشرو مجازی، توسط هریک از ربات‌های پیرو در آرایش مطلوب را به دنبال داشت. به‌عنوان یک نکته قابل توجه در ادامه تحقیقات در زمینه طرح پیشنهادی، لازم به ذکر است که در نظر گرفتن دینامیک عملگرها در مدل سیستم و اعمال حد اشباع واقعی بر روی ولتاژ آن‌ها، قابلیت پیاده‌سازی و اطمینان طرح کنترلی را افزایش می‌دهد. طراحی کنترل‌کننده مبتنی بر مدل عملگرها و اشباع آن‌ها به کارهای آتی موکول می‌شود.

## مراجع

[1] B. Deepak, D. R. Parhi, and A. K. Jha, "Kinematic Model of Wheeled Mobile Robots," *Int. J. on Recent Trends in Engineering & Technology*, vol. 5, no. 4, pp. 5-10, 2011.

- measurements," *Advanced Robotics*, vol. 31, no. 18, pp. 947-964, 2017.
- [23] N. Lashkari, M. Biglarbegan, and S. X. Yang, "Optimal design of formation tracking control for a tractor-trailer robotic system with omnidirectional wheels," in *2016 IEEE 19th International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*, 2016: IEEE, pp. 1826-1831.
- [24] K. Shojaei, "Neural network formation control of a team of tractor-trailer systems," *Robotica*, vol. 36, no. 1, p. 39, 2018.
- [25] J. Huang, S. Ri, L. Liu, Y. Wang, J. Kim, and G. Pak, "Nonlinear disturbance observer-based dynamic surface control of mobile wheeled inverted pendulum," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 23, no. 6, pp. 2400-2407, 2015.
- [26] S. Luo, S. Wu, Z. Liu, and H. Guan, "Wheeled mobile robot RBFNN dynamic surface control based on disturbance observer," *International Scholarly Research Notices*, vol. 2014, 2014.
- [27] M. Galicki, "Robust task space finite-time chattering-free control of robotic manipulators," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 85, no. 3, pp. 471-489, 2017.
- [28] M. Cai, Z. Xiang, and J. Guo, "Adaptive finite-time consensus protocols for multi-agent systems by using neural networks," *IET Control Theory & Applications*, vol. 10, no. 4, pp. 371-380, 2016.
- [29] J. Wu, J. Huang, Y. Wang, and K. Xing, "Nonlinear disturbance observer-based dynamic surface control for trajectory tracking of pneumatic muscle system," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 22, no. 2, pp. 440-455, 2013.
- [30] S. Yu, X. Yu, B. Shirinzadeh, and Z. Man, "Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode," *Automatica*, vol. 41, no. 11, pp. 1957-1964, 2005.
- [31] H. Fallah Ghavidel, A. Akbarzadeh Kalat, and V. Ghorbani, "Observer-Based robust adaptive fuzzy approach for current control of robot manipulators by estimation of uncertainties," *Modares Mechanical Engineering*, vol. 17, no. 6, pp. 286-294, 2017.
- IEEE/ASME *Transactions on Mechatronics*, vol. 21, no. 2, pp. 806-814, 2015.
- [11] P. Kassaeiyan, B. Tarvirdizadeh, and K. Alipour, "Control of tractor-trailer wheeled robots considering self-collision effect and actuator saturation limitations," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 127, pp. 388-411, 2019.
- [12] A. K. Khalaji and S. A. A. Moosavian, "Stabilization of a tractor-trailer wheeled robot," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 30, no. 1, pp. 421-428, 2016.
- [13] A. K. Khalaji and S. A. A. Moosavian, "Switching control of a Tractor-Trailer wheeled robot," *International Journal of Robotics and Automation*, vol. 30, no. 2, p. 10.2316, 2015.
- [14] A. K. Khalaji and S. A. A. Moosavian, "Modified transpose Jacobian control of a tractor-trailer wheeled robot," *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 29, no. 9, pp. 3961-3969, 2015.
- [15] K. Alipour, A. B. Robot, and B. Tarvirdizadeh, "Dynamics modeling and sliding mode control of tractor-trailer wheeled mobile robots subject to wheels' slip," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 138, pp. 16-37, 2019.
- [16] A. Keymasi Khalaji and S. A. A. Moosavian, "Adaptive sliding mode control of a wheeled mobile robot towing a trailer," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 229, no. 2, pp. 169-183, 2015.
- [17] A. Keymasi Khalaji and S. A. A. Moosavian, "Design and implementation of a fuzzy sliding mode control law for a wheeled robot towing a trailer," *Modares Mechanical Engineering*, vol. 14, no. 4, pp. 91-98, 2014.
- [18] N. T. Binh, N. A. Tung, D. P. Nam, and N. H. Quang, "An adaptive backstepping trajectory tracking control of a tractor trailer wheeled mobile robot," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 17, no. 2, pp. 465-473, 2019.
- [19] A. K. Khalaji and S. A. A. Moosavian, "Robust adaptive controller for a tractor-trailer mobile robot," *IEEE Transactions on Mechatronics*, vol. 19, no. 3, pp. 943-953, 2013.
- [20] M. Yue, X. Hou, R. Gao, and J. Chen, "Trajectory tracking control for tractor-trailer vehicles: a coordinated control approach," *Nonlinear Dynamics*, vol. 91, no. 2, pp. 1061-1074, 2018.
- [21] S. Peng and W. Shi, "Adaptive fuzzy integral terminal sliding mode control of a nonholonomic wheeled mobile robot," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2017, 2017.
- [22] K. Shojaei, "Neural adaptive PID formation control of car-like mobile robots without velocity