

# ترازیابی حین حرکت با رویکرد بهینه‌سازی به کمک انتگرال‌گیری از سرعت/موقعیت در سیستم‌های ناوبری اینرسی

پیام حقیقی<sup>۱</sup>، سیدمحمد مهدی دهقان بنادکی<sup>۲</sup>، محمدجواد رجبی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> فارغ التحصیل دکتری، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران، payam13661987@gmail.com

<sup>۲</sup> دانشیار، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران، smmd@mut.ac.ir

<sup>۳</sup> دانشجو دکتری، مجتمع دانشگاهی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران، mjrajabi@mut.ac.ir

پذیرش: ۱۴۰۳/۱۰/۰۸

ویرایش: ۱۴۰۳/۰۶/۲۹

دریافت: ۱۴۰۳/۰۴/۲۷

**چکیده:** در این مقاله روش جدیدی برای ترازایی در حین حرکت برای سیستم‌های ناوبری اینرسی متصل به بدنه ارزان قیمت با رویکرد مبتنی بر بهینه‌سازی ارائه شده است. در این روش پیشنهادی، از اطلاعات سرعت خطی و موقعیت اندازه‌گیری شده توسط سیستم موقعیت‌یاب جهانی و همچنین خروجی‌های حسگرهای اینرسی برای تولید بردار مشاهدات استفاده شده است. در این روش، با بکارگیری رویکرد تخمین دو نمونه‌ای و گسسته‌سازی جملات انتگرالی موجود در بردار مشاهدات، یک الگوریتم بهینه‌سازی بازگشتی مبتنی بر مشاهدات سرعت/موقعیت برای تخمین ماتریس وضعیت توسعه یافته است. در مقایسه با روش مرسوم تولید بردار مشاهدات با انتگرال‌گیری از سرعت، روش پیشنهادی با حفظ تقریبی سرعت همگرایی، به دلیل استفاده از مشاهدات موقعیت دارای قوام بیشتر در برابر بایاس و نویز اندازه‌گیری موجود در خروجی حسگرهای اینرسی است. الگوریتم پیشنهادی در کاربردهایی که شامل تغییرات سریع در سرعت زاویه‌ای دستگاه بدنه اندازه‌گیری شده توسط ژيروسکوپ‌ها و نیروی اندازه‌گیری شده دستگاه بدنه توسط شتاب‌سنج‌ها است، تخمین‌های مناسبی ارائه می‌دهد. نتایج شبیه‌سازی در سناریوهای مختلف حاکی از آن است که پس از گذشت صد ثانیه، مقدار RMS خطای تخمین در سیستم ناوبری اینرسی ارزان قیمت ADIS16488 برای زاویه سمت<sup>۱</sup> کمتر از مقدار ۰/۶ درجه، زاویه فراز<sup>۲</sup> کمتر از مقدار ۰/۱ درجه و زاویه غلت<sup>۳</sup> کمتر از مقدار ۰/۳ درجه خواهد بود. این دقت در تخمین زوایای اوپلر اولیه برای ترازایی غیردقیق در حین حرکت کافی به حساب می‌آید.

**کلمات کلیدی:** سیستم ناوبری اینرسی متصل به بدنه، ترازایی در حین حرکت، ترازایی مبتنی بر بهینه‌سازی، بردار مشاهدات افزونه، انتگرال‌گیری از سرعت/موقعیت.

## Optimization based In-Motion Alignment for SINS using Velocity/Position Integration

P Haghighi, S. M. M. Dehghan, M.J Rajabi

**Abstract:** This paper is concerned with the in-motion alignment for low-cost strap-down inertial navigation system (SINS) using an optimization method. The proposed method utilizes GPS position/velocity, along with the outputs from inertial sensors to generate the observation vectors. By introducing a two-sample approximation approach, a recursive velocity/position optimization algorithm is developed by discretizing the integral terms of the observation vectors to estimate the initial attitude matrix. Compared with the traditional velocity integration formulae for constructing the vector observations, the proposed method maintains approximately the same convergence speed while exhibiting more robustness against bias and measurement noise present in the inertial sensors outputs due to the use of position observations. The proposed algorithm provides accurate estimates in applications involving rapid changes in the angular velocities measured by gyroscopes and the forces measured by accelerometers. Simulation results in various scenarios indicate that after 100s, the root mean square of estimation error for the low-cost ADIS16488 INS is less than  $0.6^\circ$  for yaw angle, less than  $0.1^\circ$  for pitch angle,

<sup>1</sup> Yaw

<sup>2</sup> Pitch

<sup>3</sup> Roll

and less than  $0.3^\circ$  for roll angle. This accuracy in the initial Euler angle estimates is sufficient for the coarse in-motion alignment.

**Keywords:** Strap-down Inertial Navigation System (SINS), In-motion alignment, optimization based alignment, augmented observation vectors, velocity/position integration formulae.

## ۱- مقدمه

در سیستم ناوبری اینرسی<sup>۱</sup> (INS)، با استفاده از اندازه‌گیری‌های فراهم شده توسط واحد اندازه‌گیری اینرسی<sup>۲</sup> (IMU)، معادلات دیفرانسیل ناوبری به منظور تعیین اطلاعات موقعیت، سرعت و وضعیت جسم حل می‌شوند [۱]. با توجه به استفاده INS از روش محاسبات کور و انتگرال‌گیری، ضروری است قبل از شروع فرآیند ناوبری، مقادیر اولیه موقعیت، سرعت و وضعیت مشخص باشند که از آن تحت عنوان ترازایی اولیه یاد می‌شود [۲]. بروز خطایی کوچک در ترازایی اولیه منجر به خطایی بزرگ در زمان طولانی خواهد گردید. برای کاهش خطای ناوبری در زمان‌های طولانی که عمدتاً ناشی از بایاس شتاب‌سنج‌ها و دررفت ژيروسکوپ‌ها است، عموماً INS با واحد موقعیت‌یاب جهانی<sup>۳</sup> (GPS) یکپارچه می‌شود و سیستم ناوبری یکپارچه INS/GPS تولید می‌گردد. در سیستم INS/GPS، موقعیت و سرعت اولیه را می‌توان مستقیماً با استفاده از واحد GPS تعیین نمود. بنابراین، هدف اصلی از ترازایی اولیه، تعیین ماتریس وضعیت اولیه بین دستگاه‌های بدنه و اینرسی است [۳].

به‌طور رایج، ترازایی اولیه از طریق دو مرحله متوالی ترازایی غیردقیق و سپس ترازایی دقیق انجام می‌گیرد [۴]. اجماع محققین بر آن است که تخمین بهینه مبتنی بر فیلتر کالمن بهترین روش برای ترازایی دقیق است [۵]. با این وجود، رویکرد ترازایی بر مبنای فیلتر کالمن بر اساس مدل خطای سیستم خطی‌سازی شده بنا شده است [۶]. بنابراین، نیاز به دانستن اطلاعات با دقت بالا از ماتریس وضعیت اولیه توسط روش ترازایی غیردقیق خواهد بود تا بتوان صحت الگوریتم کالمن مبتنی بر مدل خطی‌سازی شده را تضمین نمود [۷]. اگرچه در سال‌های گذشته روش‌های متنوعی برای تعیین ماتریس وضعیت اولیه با روش ترازایی غیردقیق از جمله روش ترازایی تحلیلی [۸] و روش ترازایی انتقال [۹، ۱۰] پیشنهاد شده است، با این وجود روش‌های مذکور برای وقتی که جسم در حین حرکت (در شرایط دریا و یا شرایط پرواز) است، قابل استفاده نمی‌باشند [۱۱، ۱۲].

برای حل مساله ترازایی غیردقیق در حین حرکت با استفاده از سیستم ناوبری INS/GPS که هدف اصلی این مقاله نیز می‌باشد، رویکردی مبتنی بر تجزیه ماتریس وضعیت پیشنهاد شده است [۱۳، ۱۴]. برای این منظور، بخش ثابت ماتریس وضعیت تجزیه شده که آنرا "ماتریس وضعیت اولیه" می‌نامند، با استفاده از حل مساله وهبا بر اساس بردار مشاهدات محاسبه

می‌گردد [۱۳، ۱۴]. از آنجایی که وهبا یک مساله بهینه‌سازی حداقل مربعات مقید است، این روش ترازایی اولیه در مراجع تحت عنوان ترازایی مبتنی بر بهینه‌سازی<sup>۴</sup> (OBA) نام برده شده است [۱۵]. با توجه به آنکه الگوریتم‌های کارآمدی در مراجع از جمله روش دانپورت-Q برای حل مساله تعیین وضعیت پیشنهاد شده است [۱۶، ۱۷]، اصلی‌ترین گام در تعیین این ماتریس وضعیت اولیه، ساختن بردار مشاهدات است. از آنجایی که ماتریس وضعیت اولیه نشان‌دهنده تبدیل بین دستگاه‌های ثابت بدنه و ناوبری در شروع فرآیند ترازایی است، بردار مشاهدات در دستگاه‌های مرجع مربوطه بر مبنای معادلات نیروی ویژه تولید می‌شوند [۱۸]. معادله نیروی ویژه نشان‌دهنده ارتباط بین انواع مختلف اطلاعات شتاب است. بردارهای مشاهدات مبتنی بر اطلاعات شتاب برای اولین بار در روش OBA در مرجع [۱۵] بکار گرفته شد. با این وجود، اغتشاشات خارجی فراوانی در اطلاعات شتاب وجود دارد که می‌تواند عملکرد روش OBA را به‌طور قابل توجهی تحت تاثیر قرار دهد. برای مهار اثر نامطلوب اغتشاش‌های موجود، پیشنهاد طراحی فیلتر پایین‌گذر در مرجع [۱۵] ارائه گردید. با این وجود، تعیین بهینه پارامترهای این فیلتر در شرایط مختلف مانوری امری پیچیده است. همچنین، نویزهای وارده در خروجی‌های اندازه‌گیری شده توسط حسگرهای اینرسی در مرجع [۱۵] در نظر گرفته نشده است. یک روش کارآمد و سراسر برای مهار اثرات ناشی از اغتشاش و نویز، انتگرال‌گیری از اطلاعات شتاب در بازه زمانی مشخصی است [۷]. با توجه به طول بازه زمانی انتگرال‌گیری، عمدتاً دو روش اصلی انتگرال‌گیری به‌صورت (۱) انتگرال‌گیری در کل بازه زمانی ترازایی و (۲) انتگرال‌گیری در بازه زمانی معین با طول ثابت گزارش شده است. برای وقتی که طول بازه زمانی انتگرال‌گیری افزایش می‌یابد، اثر مهار اغتشاش بهتر خواهد بود و لذا رویه انتگرال‌گیری در کل بازه ترازایی پاسخ بهتری برای کاربردهای حسگرهای اینرسی ارزان قیمت ارائه می‌دهد. به‌علاوه، استفاده بیشتر از اطلاعات شتاب در روش OBA، می‌تواند سرعت همگرایی الگوریتم پیشنهادی را تسریع بخشد. با این وجود، هنگامی که بازه زمانی انتگرال‌گیری افزایش یابد، بایاس‌های موجود در حسگرهای اینرسی باعث ایجاد خطاهای تجمعی در بردارهای مشاهدات می‌گردند و لذا، کارایی روش OBA کاهش می‌یابد [۱۴].

بر مبنای مصالحه صورت پذیرفته مابین (۱) قوام بیشتر در برابر خطاهای تجمعی به‌وجود آمده در بردار مشاهدات به‌علت بایاس‌های موجود در حسگرهای اینرسی و (۲) افزایش سرعت همگرایی الگوریتم OBA، در این

<sup>1</sup> Inertial Navigation System

<sup>2</sup> Inertial Measurement Unit

<sup>3</sup> Global Positioning System

<sup>4</sup> Optimization Based Alignment

گسسته‌سازی بردار مشاهدات صورت می‌پذیرد. در انتهای این بخش، الگوریتم بازگشتی پیشنهادی برای حل مساله ترازیابی بیان می‌گردد. در بخش چهارم با آوردن نتایج شبیه‌سازی به بررسی کارآیی الگوریتم بازگشتی پیشنهادی پرداخته می‌شود. در پایان نیز جمع‌بندی و نتیجه‌گیری آورده می‌شود.

## ۲- طرح مساله

در این مقاله، دستگاه مختصات محلی  $n$  به‌عنوان دستگاه مرجع ناوبری در نظر گرفته شده است که محورهای آن به‌ترتیب بیانگر شمال، عمودی به‌سمت بالا و شرق می‌باشند. دستگاه بدنه INS با  $b$ ، دستگاه زمین با  $e$  و دستگاه اینرسی بدون چرخش با  $i$  نمایش داده می‌شوند. معادلات نرخ ناوبری (وضعیت، سرعت و موقعیت) در دستگاه  $n$  عبارت خواهند بود با [۱۷]:

$$\dot{C}_b^n = \omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - C_n^b (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n), \quad (1)$$

$$- (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times v^n + g^n \quad (2)$$

$$(3)$$

که در آن  $C_b^n$  بیانگر ماتریس وضعیت دستگاه بدنه نسبت به دستگاه ناوبری،  $v^n = [v_N \ v_U \ v_E]^T$  بیانگر سرعت جسم نسبت به زمین،  $\omega_{ib}^b$  نرخ زاویه‌ای دستگاه بدنه نسبت به دستگاه اینرسی بیان شده در دستگاه بدنه (اندازه‌گیری شده توسط ژيروسکوپ‌ها در دستگاه بدنه)،  $f^b$  نیروی ویژه اندازه‌گیری شده توسط شتاب‌سنج‌ها در دستگاه بدنه،  $g^n$  بردار جاذبه در دستگاه ناوبری،  $\omega_{ie}^n = [\Omega \cos L \ \Omega \sin L \ 0]^T$  بیانگر نرخ چرخش زمین در دستگاه ناوبری ( $\Omega$  نرخ زمین و  $L$  عرض جغرافیایی) و  $\omega_{en}^n$  بیانگر نرخ زاویه‌ای دستگاه ناوبری نسبت به دستگاه زمین بیان شده در دستگاه ناوبری است که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\omega_{en}^n = \begin{bmatrix} \frac{v_E}{(R_E + h)} & \frac{v_E \tan L}{(R_E + h)} & -\frac{v_N}{(R_N + h)} \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

که در آن  $R_E$  و  $R_N$  به‌ترتیب بیانگر شعاع انحنای عرضی و شعاع انحنای نصف‌النهاری و  $h$  ارتفاع بالای سطح زمین می‌باشند. ماتریس  $3 \times 3$  پادمتقارن ( $\times$ ) بدین صورت تعریف می‌شود که برای هر دو بردار دلخواه  $a$  و  $b$ ، ضرب خارجی آنها رابطه  $a \times b = (a \times b)$  را برآورده سازد. بردار موقعیت جسم به صورت  $p = [\lambda \ L \ h]^T$  تعریف می‌شود که در آن ارتفاع بالای سطح زمین با  $h$  نمایش داده می‌شود و چرخش زاویه‌ای دستگاه ناوبری نسبت به دستگاه زمین با طول جغرافیایی  $\lambda$  و عرض جغرافیایی  $L$  بیان می‌شود.  $R_c$  بیانگر ماتریس انحنای محلی است و تابعی از موقعیت فعلی است که با رابطه (۵) توصیف می‌گردد:

مقاله از روش انتگرال‌گیری از سرعت/موقعیت در تولید بردار مشاهدات استفاده شده است. برای این منظور، با توجه به وزن تخصیص داده شده به‌هریک از روش‌های تولید بردار مشاهدات سرعت و موقعیت، از ویژگی‌های منحصر به‌فرد هر یک از این دو روش در تولید بردار مشاهدات استفاده شده است. در ادامه، با گسسته‌سازی جملات انتگرالی، یک الگوریتم بهینه‌سازی بازگشتی نوآورانه برای تخمین ماتریس وضعیت ثابت پیشنهاد شده است. مهم‌ترین مزایای این روش ترازیابی در مقایسه با روش‌های مرسوم ترازیابی مبتنی بر انتگرال‌گیری از سرعت در مراجع [۳] و [۱۵، ۱۴] عبارت است از:

(۱) با وجود سرعت بالای همگرایی، الگوریتم پیشنهاد شده به‌دلیل استفاده از بردارهای مشاهدات موقعیت دارای قوام بیشتر در مواجهه با خطاهای حسگرهای اینرسی می‌باشد.

(۲) به‌منظور دقت بیشتر در فرآیند استخراج فرم بازگشتی برای محاسبه بردارهای مشاهدات، از رویکرد "تخمین دو نمونه‌ای" برای محاسبه انتگرال‌های شامل جملات مرتبط با سرعت زاویه‌ای دستگاه بدنه اندازه‌گیری شده توسط ژيروسکوپ‌ها و نیروی اندازه‌گیری شده دستگاه بدنه توسط شتاب‌سنج‌ها استفاده شده است. با توجه به آنکه سرعت زاویه‌ای دستگاه بدنه دارای تغییرات سریعی است، در نظر گرفتن تقریب خطی برای سرعت زاویه‌ای و نیروی اندازه‌گیری شده در هنگام محاسبه انتگرال‌های موجود در فاصله زمانی بین دو گام متوالی الگوریتم قطعاً دارای دقت بالاتری نسبت به وقتی است که مقادیر سرعت زاویه‌ای و نیرو در محاسبه انتگرال‌های موجود در هر گام زمانی ثابت فرض می‌شوند.

(۳) در روش پیشنهادی، نیاز به دانستن شتاب خطی در دستگاه ناوبری به‌عنوان ورودی الگوریتم نیست. بنابراین، الگوریتم ارائه شده در این مقاله برای ترازیابی در شرایط دریایی که در آن سیستم ناوبری اینرسی در معرض حرکت انتقالی ناشی از امواج است، کاملاً کاربردی خواهد بود.

ساختار مقاله بدین صورت است که در بخش اول توصیف مساله ترازیابی و رویکرد ترازیابی مبتنی بر OBA برای تعیین ماتریس وضعیت اولیه و مروری بر سوابق پژوهش‌های مرتبط صورت پذیرفت. بخش دوم به تعریف مساله اختصاص دارد و روابط ریاضی حاکم بر معادلات ناوبری، مساله تجزیه ماتریس وضعیت و فرمول‌بندی مساله OBA ارائه می‌شود. در بخش سوم، الگوریتم ترازیابی مبتنی بر بهینه‌سازی با استفاده از روش انتگرال‌گیری از سرعت/موقعیت ارائه می‌شود و

در این بخش، هدف پیشنهاد الگوریتم ترازیابی با رویکرد بهینه‌سازی و با استفاده از بردار مشاهدات افزونه است. برای این منظور، ابتدا چگونگی تولید بردار مشاهدات با رویکرد انتگرال‌گیری از سرعت/موقعیت توضیح داده می‌شود. در ادامه، با پیشنهاد روش تقریب دوجمله‌ای، روشی برای گسسته‌سازی جملات انتگرالی موجود در بردار مشاهدات ارائه می‌گردد. در انتها، یک الگوریتم بهینه‌سازی بازگشتی برای تخمین ماتریس وضعیت اولیه  $C_b^n(0)$  توسعه داده می‌شود. لازم به ذکر است که ورودی‌های این الگوریتم (۱) اطلاعات سرعت / موقعیت اندازه‌گیری شده توسط واحد GPS، (۲) نیروی اندازه‌گیری شده توسط شتاب‌سنج‌ها و (۳) سرعت زاویه‌ای در دستگاه بدنه اندازه‌گیری شده توسط ژيروسکوپ‌ها است.

### ۱-۳- تولید بردار مشاهدات افزونه

یکی از گام‌های اساسی برای حل مساله ترازیابی با رویکرد مبتنی بر بهینه‌سازی، تولید بردار مشاهدات است. برای این منظور، با جای‌گذاری رابطه (۶) در معادله (۲) و سپس ضرب طرفین معادله از چپ در  $C_{n(t)}^{n(0)}$ ، رابطه (۸) بدست می‌آید:

$$C_b^n(0)C_{b(t)}^{b(0)}f^b = C_{n(t)}^{n(0)} \left( \dot{\cdot} + \omega_{en}^n \right) \times v^n - g^n \quad (8)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه (۸) نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned} C_b^n(0) \int_0^t C_{b(t)}^{b(0)} f^b dt \\ = \int_0^t C_{n(t)}^{n(0)} \dot{\cdot} \\ + \int_0^t C_{n(t)}^{n(0)} (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times v^n dt \\ - \int_0^t C_{n(t)}^{n(0)} g^n dt \end{aligned} \quad (9)$$

با استفاده از روش جزء‌به‌جزء و استفاده از رابطه (۷)، جمله اول از عبارت سمت راست رابطه (۹) برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} \int_0^t C_{n(t)}^{n(0)} \dot{\cdot} \\ = C_{n(t)}^{n(0)} v^n \Big|_0^t - \int_0^t C_{n(t)}^{n(0)} \omega_{in}^n \times v^n dt \\ = C_{n(t)}^{n(0)} v^n - v^n(0) - \int_0^t C_{n(t)}^{n(0)} \omega_{in}^n \times v^n dt \end{aligned} \quad (10)$$

با توجه به برقراری تساوی  $2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n = \omega_{ie}^n + \omega_{in}^n$  در رابطه (۹) و جای‌گذاری از رابطه (۱۰) در رابطه (۹)، بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} C_b^n(0) \int_0^t C_{b(t)}^{b(0)} f^b dt \\ = C_{n(t)}^{n(0)} v^n - v^n(0) \\ + \int_0^t C_{n(t)}^{n(0)} \omega_{ie}^n \times v^n dt - \int_0^t C_{n(t)}^{n(0)} g^n dt \end{aligned} \quad (11)$$

$$R_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{(R_E + h)\cos L} \\ \frac{1}{(R_N + h)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

لازم به ذکر است که تمامی مقادیر ذکر شده در روابط (۱)-(۵) تابعی از زمان می‌باشند و تنها برای خلاصه‌نویسی، وابستگی به زمان حذف شده است.

### ۱-۲- تخمین ماتریس وضعیت اولیه در فرآیند ترازیابی

فرض شود که فرآیند ترازیابی در زمان صفر شروع شده و یک بازه زمانی محدود به صورت  $[0, t]$  برای آن در نظر گرفته شود. مساله ترازیابی در سیستم ناوبری اینرسی در حین حرکت معادل با تعیین منحصر به فرد وضعیت فعلی (به عبارتی تعیین ماتریس وضعیت  $C_b^n(t)$ ) با استفاده از خروجی‌های شتاب‌سنج و ژيروسکوپ است. چالش اساسی در محاسبه ماتریس  $C_b^n(t)$  در آن است که مطابق رابطه (۱) این ماتریس تابعی از  $\omega_{nb}^b$  است و از طرفی،  $\omega_{nb}^b$  توسط رابطه  $\omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - C_{n(t)}^b \omega_{in}^n$  به  $C_{n(t)}^b$  وابسته است. طبق قاعده زنجیره‌ای، ماتریس وضعیت  $C_b^n(t)$  به صورت رابطه زیر تجزیه می‌شود:

$$\begin{aligned} C_b^n(t) &= C_{b(t)}^{n(t)} = C_{n(0)}^{n(t)} C_{b(0)}^{b(0)} C_{b(t)}^{b(0)} \\ &= C_{n(0)}^{n(t)} C_b^n(0) C_{b(t)}^{b(0)} \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن  $C_{b(t)}^{b(0)}$  و  $C_{n(0)}^{n(t)}$  به ترتیب بیانگر ماتریس‌های تغییر وضعیت چارچوب بدنه و چارچوب ناوبری از زمان ۰ تا  $t$  هستند. معادلات نرخ تغییرات آنها عبارت است از:

$$\begin{aligned} \dot{C}_{b(t)}^{b(0)} &= \omega_{ib}^b \times C_{b(t)}^{b(0)} \\ \dot{C}_{n(0)}^{n(t)} &= \omega_{in}^n \times C_{n(0)}^{n(t)} \end{aligned} \quad (7)$$

بنابراین، اگر ماتریس وضعیت اولیه  $C_b^n(0)$  در رابطه (۶) که مقداری ثابت است، معلوم شود، ماتریس وضعیت  $C_b^n(t)$  می‌تواند در هر لحظه زمانی با استفاده از روابط (۶) و (۷) مشخص گردد. مساله تعیین ماتریس وضعیت اولیه  $C_b^n(0)$  با دقت نسبتاً مناسب تحت عنوان ترازیابی غیردقیق شناخته می‌شود [۴]. برای این منظور، فرض شود که اطلاعات موقعیت  $p$  و سرعت  $v^n$  در بازه زمانی  $[0, t]$  توسط واحد GPS در دسترس باشند. هدف، ارائه یک روش ترازیابی غیردقیق با استفاده از بهینه‌سازی بر مبنای رویکرد انتگرال‌گیری از سرعت/موقعیت برای تعیین  $C_b^n(0)$  در حین حرکت (در شرایط دریا و یا شرایط پرواز) است. در ادامه، از روش ترازیابی بر مبنای رویکرد انتگرال‌گیری از سرعت/موقعیت تحت عنوان "ترازیابی با استفاده از بردار مشاهدات افزونه" یاد می‌شود.

### ۳- پیشنهاد الگوریتم ترازیابی مبتنی بر بهینه‌سازی با استفاده از بردار مشاهدات افزونه

با تعریف:

است و لذا می‌توان از آن صرف‌نظر نمود. عبارت (۲) نیز با تفاضل‌گیری بین هر دو گام زمانی حذف می‌شود. علاوه بر آن، در کاربردهای عملی سرعت زاویه‌ای  $\omega_{in}^n$  که تابعی از  $v^n$  است، به‌طور مناسبی با سرعت زاویه‌ای  $\omega_{en}^n$  تقریب زده می‌شود.

### ۳-۲- گسسته‌سازی انتگرال‌های موجود در بردار مشاهدات

هدف از این زیربخش، گسسته‌سازی جملات انتگرالی در روابط (۱۲) و (۱۳) است. برای این منظور، فرض شود که زمان فعلی به‌صورت  $t_M \triangleq$  بیانگر فاصله زمانی بین دو زمان به‌روزرسانی  $t_k$  و  $t_{k+1}$  برای  $k=0,1,\dots$  است. از فرضیات ساده شونده به‌صورت بیان شده در ادامه در گسسته‌سازی استفاده می‌شود.

**فرض ۱:** مقدار سرعت  $v^n$  در بازه  $t \in [t_k, t_{k+1})$  دارای تغییرات خطی است. به‌عبارتی:

$$v^n(t) = v^n(t_k) + \frac{t - t_k}{T} (v^n(t_{k+1}) - v^n(t_k)) \quad (16)$$

**فرض ۲:** سرعت زاویه‌ای  $\omega_{in}^n$  دارای تغییرات آهسته در زمان است [۱۵]. بنابراین، می‌توان ماتریس وضعیت  $C_{n(t)}^{n(t_k)}$  را به‌صورت (۱۷) تقریب زد:

$$C_{n(t)}^{n(t_k)} = I + \frac{\sin(\|\varphi_n\|)}{\|\varphi_n\|} \varphi_n \times + \frac{1 - \cos(\|\varphi_n\|)}{\|\varphi_n\|^2} (\varphi_n \times)^2 \approx I + \varphi_n \times$$

$$\text{که در آن } \varphi_n \approx \int_{t_k}^t \omega_{in}^n d\tau \approx (t - t_k) \omega_{in}^n.$$

جمله چهارم از  $\beta_v$  در رابطه (۱۲) در زمان  $t_M$  به‌صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_M} C_{n(t)}^{n(0)} g^n dt \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} C_{n(t)}^{n(0)} g^n dt \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} C_{n(t_k)}^{n(0)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} C_{n(t)}^{n(t_k)} g^n dt \end{aligned} \quad (18)$$

با بکارگیری فرض دوم، رابطه (۱۸) به‌صورت زیر ساده‌سازی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_M} C_{n(t)}^{n(0)} g^n dt \\ & \approx \sum_{k=0}^{M-1} C_{n(t_k)}^{n(0)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (I + (t - t_k) \omega_{in}^n \times) g^n dt \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} C_{n(t_k)}^{n(0)} \left( T I + \frac{T^2}{2} \omega_{in}^n \times \right) g^n \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \alpha_v & \triangleq \int_0^t C_{n(t)}^{n(0)} \omega_{ie}^n \times v^n dt - \int_0^t C_{n(t)}^{n(0)} g^n dt \\ \beta_v & \triangleq -v^n(0) \end{aligned}$$

رابطه (۱۱) به‌فرم زیر بازنویسی می‌گردد:

$$C_b^n(0) \alpha_v = \beta_v \quad (12)$$

از بردارهای  $\alpha_v$  و  $\beta_v$  در رابطه (۱۱) تحت عنوان بردار مشاهدات سرعت یاد می‌شود. از نقطه‌نظر تئوری، اگر دو بردار مستقل خطی  $\alpha_v$  وجود داشته باشند، آنگاه ماتریس وضعیت  $C_b^n(0)$  به‌طور یکتا تعیین می‌شود. در ترازیابی دینامیکی، این شرط به‌صورت طبیعی برقرار است [۱۵].

با انتگرال‌گیری مجدد از طرفین رابطه (۱۱) در بازه زمانی  $[0, t]$ ، فرمول انتگرال‌گیری از موقعیت به‌صورت رابطه (۱۳) بدست می‌آید:

$$C_b^n(0) \alpha_p = \beta_p \quad (13)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \alpha_p & \triangleq \int_0^t \int_0^\tau C_{n(\sigma)}^{n(0)} \omega_{ie}^n \times v^n d\sigma d\tau \\ \beta_p & \triangleq \int_0^t \int_0^\tau C_{n(\sigma)}^{n(0)} \omega_{ie}^n \times v^n d\sigma d\tau - \int_0^t \int_0^\tau C_{n(\sigma)}^{n(0)} g^n d\sigma d\tau \end{aligned} \quad (14)$$

از بردارهای  $\alpha_p$  و  $\beta_p$  تحت عنوان بردار مشاهدات موقعیت یاد می‌شود.

**توجه ۱:** شایان ذکر است که رابطه (۱۳) تنها یک انتگرال‌گیری ساده از طرفین رابطه (۱۱) نیست. با اعمال تقریب‌های پذیرفته شده در کاربردهای عملی، می‌توان به یک الگوریتم ترازیابی بدون نیاز به اطلاعات سرعت  $v^n$  دست پیدا نمود. برای این منظور، با اعمال انتگرال‌گیری جز به‌جز به جمله اول از  $\beta_p(t)$  در رابطه (۱۳)، بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \beta_p &= \left( C_{n(t)}^{n(0)} r^n - \int_0^t C_{n(t)}^{n(0)} \omega_{in}^n \times r^n dt \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t \int_0^\tau C_{n(\sigma)}^{n(0)} \omega_{ie}^n \times v^n d\sigma d\tau - \int_0^t \int_0^\tau C_{n(\sigma)}^{n(0)} g^n d\sigma d\tau \right) - v^n(0) \end{aligned} \quad (15)$$

در رابطه (۱۵) سه جمله وابسته به‌سرعت به‌صورت (۱) انتگرال دوگانه سرعت اولیه جمع‌شونده  $v^n(0)$  و (۲) سرعت اولیه جمع‌شونده  $\int_0^t \int_0^\tau C_{n(\sigma)}^{n(0)} \omega_{ie}^n \times v^n d\sigma d\tau$  و (۳) سرعت زاویه‌ای  $\omega_{in}^n$  وجود دارد. عبارت (۱) دارای مقداری نسبتاً کوچک

که در آن  $a_\omega$ ،  $b_\omega$ ،  $a_f$  و  $b_f$  بردارهای ضرایب مناسب هستند. زوایای افزایشی  $\Delta\theta_1$  و  $\Delta\theta_2$  به صورت رابطه زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}\Delta\theta_1 &= \int_0^{T/2} \omega_{ib}^b dt = \int_0^{T/2} (ta_\omega + b_\omega) dt \\ &= \frac{T^2}{8} a_\omega + \frac{T}{2} b_\omega \\ \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 &= \int_0^T \omega_{ib}^b dt = \int_0^T (ta_\omega + b_\omega) dt \\ &= \frac{T^2}{2} a_\omega + Tb_\omega\end{aligned}\quad (24)$$

که در آن  $\Delta\theta_1$  و  $\Delta\theta_2$  به ترتیب بیانگر اولین و دومین نمونه از زاویه افزایشی اندازه‌گیری شده توسط ژيروسکوپ می‌باشند. با حل دو معادله دو مجهول رابطه (24)، ضرایب به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\begin{aligned}a_\omega &= \frac{4}{T^2} (\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1) \\ b_\omega &= \frac{1}{T} (3\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2)\end{aligned}\quad (25)$$

به طریق مشابه، با تعریف  $\Delta v_1$  و  $\Delta v_2$  به عنوان اولین و دومین نمونه از سرعت افزایشی اندازه‌گیری شده توسط شتاب‌سنج، ضرایب  $a_f$  و  $b_f$  به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}T^2 a_f &= 4(\Delta v_2 - \Delta v_1) \\ b_f &= \frac{1}{T} (3\Delta v_1 - \Delta v_2)\end{aligned}\quad (26)$$

با بکارگیری روش تخمین دو نمونه‌ای در فرض 3، تقریب انتگرال موجود در رابطه (22) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}& \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left( I + \left( \int_{t_k}^t \omega_{ib}^b d\tau \right) \times \right) f^b dt \\ & \approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[ I + \left( \int_{t_k}^t ((t-t_k)a_\omega + b_\omega) d\tau \right) \times \right] \\ & \quad \left[ (t-t_k)a_f + b_f \right] dt \\ & = \int_{t_k}^{t_{k+1}} ((t-t_k)a_f + b_f) \\ & \quad + \left( \frac{1}{2}(t-t_k)^2 a_\omega + (t-t_k)b_\omega \right) \times (ta_f + b_f) dt \\ & = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (b_f + (t-t_k)(a_f + b_\omega \times b_f) + (t-t_k) \\ & \quad \left( \frac{1}{2} a_\omega \times b_f + b_\omega \times a_f \right) + \frac{1}{2}(t-t_k)^3 (a_\omega \times a_f)) dt \\ & = Tb_f + \frac{1}{2}T^2(a_f + b_\omega \times b_f) \\ & \quad + \frac{1}{3}T^3 \left( \frac{1}{2}a_\omega \times b_f + b_\omega \times a_f \right) + \frac{1}{8}T^3(a_\omega \times a_f) \\ & = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \frac{1}{2}(\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2) \times (\Delta v_1 + \Delta v_2) \\ & \quad + \frac{2}{3}(\Delta\theta_1 \times \Delta v_2 + \Delta v_1 \times \Delta\theta_2)\end{aligned}\quad (27)$$

با جای گذاری رابطه (27) در رابطه (22)، فرم گسسته‌سازی شده  $\alpha_v(t_M)$  عبارت است با:

$$\begin{aligned}\alpha_v(t_M) & \approx \sum_{k=0}^{M-1} C_{b(t_k)}^{b(0)} \left( \Delta v_1 + \Delta v_2 + \frac{1}{2}(\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2) \right. \\ & \quad \left. \times (\Delta v_1 + \Delta v_2) + \frac{2}{3}(\Delta\theta_1 \times \Delta v_2 + \Delta v_1 \times \Delta\theta_2) \right)\end{aligned}\quad (28)$$

که در آن  $\omega_{in}^n(t) = \omega_{in}^n(t_k)$  و  $g^n(t) = g^n(t_k)$  برای هر  $t \in [t_k, t_{k+1})$  در نظر گرفته شده است. با بکارگیری فرض 1، جمله سوم از  $\beta_v$  در رابطه (12) در زمان  $t_M$  به صورت زیر گسسته‌سازی می‌شود:

$$\begin{aligned}& \int_0^{t_M} C_{n(t)}^{n(0)} \omega_{ie}^n \times v^n dt \\ & = \sum_{k=0}^{M-1} C_{n(t_k)}^{n(0)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} C_{n(t)}^{n(t_k)} \omega_{ie}^n \times v^n dt \\ & \approx \sum_{k=0}^{M-1} C_{n(t_k)}^{n(0)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left( (I + (t-t_k)\omega_{in}^n \times) \omega_{ie}^n \right. \\ & \quad \left. \times \left( v^n(t_k) + \frac{t-t_k}{T} (v^n(t_{k+1}) - v^n(t_k)) \right) \right) dt \\ & = \sum_{k=0}^{M-1} C_{n(t_k)}^{n(0)} \left[ \left( TI + \frac{T^2}{2} \omega_{in}^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_k) \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{T}{2} I + \frac{T^2}{3} \omega_{in}^n \times \right) \omega_{ie}^n \times (v^n(t_{k+1}) - v^n(t_k)) \right] \\ & = \sum_{k=0}^{M-1} C_{n(t_k)}^{n(0)} \left[ \left( TI + \frac{T^2}{6} \omega_{in}^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_k) \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{T}{2} I + \frac{T^2}{3} \omega_{in}^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_{k+1}) \right]\end{aligned}\quad (20)$$

که در آن  $\omega_{ie}^n$  در هریک از بازه‌های  $[t_k, t_{k+1})$  مقداری ثابت فرض شده است. با جای گذاری روابط (19) و (20) در رابطه (12)، فرم گسسته‌سازی شده  $\beta_v$  در زمان  $t_M$  به صورت رابطه (21) بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned}\beta_v(t_M) & \approx C_{n(t_M)}^{b(0)} v^n - v^n(0) \\ & + \sum_{k=0}^{M-1} C_{n(t_k)}^{n(0)} \left[ \left( \frac{T}{2} I + \frac{T^2}{6} \omega_{in}^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_k) \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{T}{2} I + \frac{T^2}{3} \omega_{in}^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_{k+1}) \right. \\ & \quad \left. - \left( TI + \frac{T^2}{2} \omega_{in}^n \times \right) g^n \right]\end{aligned}\quad (21)$$

به طور مشابه، بردار  $\alpha_v$  در رابطه (12) در زمان  $t_M$  به صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$\begin{aligned}\alpha_v(t_M) & = \int_0^{t_M} C_{b(t)}^{b(0)} f^b dt \\ & = \sum_{k=0}^{M-1} C_{b(t_k)}^{b(0)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} C_{b(t)}^{b(t_k)} f^b dt \\ & \approx \sum_{k=0}^{M-1} C_{b(t_k)}^{b(0)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left( I + \left( \int_{t_k}^t \omega_{ib}^b d\tau \right) \times \right) f^b dt\end{aligned}\quad (22)$$

در ادامه، روش "تخمین دو نمونه‌ای"<sup>1</sup> برای تقریب جمله انتگرالی موجود در رابطه (22) و تعیین فرم گسسته‌سازی شده بردار  $\alpha_v$  ارائه می‌شود.

### فرض 3 (تخمین دو نمونه‌ای [17]):

زاویه‌ای دستگاه بدنه و نیروی ویژه دستگاه بدنه دارای تغییرات سریعی می‌باشند، می‌توان از روش تقریب دو جمله‌ای به صورت رابطه (23) برای تخمین خطی این دو پارامتر در بازه مابین دو زمان به روزرسانی الگوریتم (فاصله زمانی مابین دریافت اطلاعات از واحد GPS) استفاده نمود.

$$\begin{aligned}\omega_{ib}^b & \approx ta_\omega + b_\omega \\ f^b & \approx ta_f + b_f\end{aligned}\quad (23)$$

<sup>1</sup> Two-Sample Approximation

با توجه به روابط (۲۹)–(۳۱)، فرم گسسته شده بردار مشاهدات  $\beta_p(t_M)$  در رابطه (۱۳) به فرم رابطه زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} \beta_p(t_M) = & \sum_{k=0}^{M-1} C_{n(t_k)}^{n(0)} \left[ \left( \frac{T}{2} I + \frac{T^2}{6} \omega_m^n \times \right) v^n(t_k) \right. \\ & + \left. \left( \frac{T}{2} I + \frac{T^2}{3} \omega_m^n \times \right) v^n(t_k) \right] - t_M v^n(0) \\ & + \sum_{k=0}^{M-1} \left\{ T \sum_{m=0}^{k-1} C_{n(t_m)}^{n(0)} \left[ \left( \frac{T}{2} I + \frac{T^2}{3} \omega_m^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_m) \right. \right. \\ & + \left. \left. \left( \frac{T}{2} I + \frac{T^2}{3} \omega_m^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_{m+1}) \right] \right. \\ & + \left. C_{n(t_k)}^{n(0)} \left[ \left( \frac{T^2}{3} I + \frac{T^3}{12} \omega_m^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_k) \right. \right. \\ & + \left. \left. \left( \frac{T^2}{6} I + \frac{T^3}{12} \omega_m^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_{k+1}) \right] \right\} \\ & - \sum_{k=0}^{M-1} \left( T \sum_{m=0}^{k-1} C_{n(t_m)}^{n(0)} \left( T I + \frac{T^2}{2} \omega_m^n \times \right) g^n \right. \\ & + \left. C_{n(t_k)}^{n(0)} \left( \frac{T^2}{2} I + \frac{T^3}{6} \omega_m^n \times \right) g^n \right) \end{aligned} \quad (32)$$

از طرفی، مشابه روند اشاره شده در رابطه (۲۲)، بردار  $\alpha_p$  در رابطه (۱۳) در زمان  $t_M$  به صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$\begin{aligned} \alpha_p(t_M) = & \int_0^{t_M} \int_0^\tau C_{b(\sigma)}^{b(0)} f^b d\sigma d\tau \\ = & \sum_{k=0}^{M-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_0^\tau C_{b(\sigma)}^{b(0)} f^b d\sigma d\tau \\ = & \sum_{k=0}^{M-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left( \int_0^{t_k} C_{b(\sigma)}^{b(0)} f^b d\sigma + \int_{t_k}^\tau C_{b(\sigma)}^{b(0)} f^b d\sigma \right) d\tau \\ \approx & \sum_{k=0}^{M-1} \left[ T \int_0^{t_k} C_{b(\sigma)}^{b(0)} f^b d\sigma + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^\tau C_{b(\sigma)}^{b(0)} f^b d\sigma d\tau \right] \\ = & \sum_{k=0}^{M-1} T \sum_{m=0}^{k-1} \left[ C_{b(t_m)}^{b(0)} \int_{t_m}^{t_{m+1}} C_{b(\sigma)}^{b(t_m)} f^b d\sigma \right. \\ & + \left. C_{b(t_k)}^{b(0)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} C_{b(\sigma)}^{b(t_k)} f^b d\sigma d\tau \right] \end{aligned} \quad (33)$$

همانند روند اشاره شده در رابطه (۲۲)، عبارت اول انتگرالی در رابطه (۳۳) به فرم زیر تخمین زده می‌شود:

$$\begin{aligned} & \int_{t_m}^{t_{m+1}} C_{b(t_m)}^{b(0)} f^b d\sigma \\ \approx & \int_{t_m}^{t_{m+1}} \left( I + \left( \int_{t_m}^t \omega_{ib}^b d\tau \right) \times \right) f^b dt \end{aligned} \quad (34)$$

با بکارگیری تخمین دونمونه‌ای اشاره شده در فرض ۳ برای تخمین  $\omega_{ib}^b$  و  $f^b$  و مشابه روند توضیح داده شده در رابطه (۲۷)، فرم گسسته‌سازی شده عبارت دوم انتگرالی در رابطه (۳۳) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^\tau C_{b(\sigma)}^{b(t_k)} f^b d\sigma d\tau \\ \approx & \frac{T}{30} (25\Delta v_1 + 5\Delta v_2 + 12\Delta\theta_1 \times \Delta v_1 \\ & + 8\Delta\theta_1 \times \Delta v_2 + 2\Delta v_1 \times \Delta\theta_2 + 2\Delta\theta_2 \times \Delta v_2) \end{aligned} \quad (35)$$

با بکارگیری رابطه (۲۷) برای تعیین فرم گسسته شده (۳۴)، بردار  $\alpha_p(t_M)$  در رابطه (۱۴) به فرم رابطه (۳۶) گسسته‌سازی می‌گردد.

در ادامه، هدف ارائه فرم گسسته بردارهای مشاهدات موقعیت  $\alpha_p$  و  $\beta_p$  در رابطه (۱۳) در زمان  $t_M$  است. با توجه به فرض ۱ که در آن تغییرات سرعت  $v^n$  به صورت خطی فرض شده است، ترم اول از  $\beta_p$  در رابطه (۱۳) در زمان  $t_M$  به صورت زیر گسسته‌سازی می‌گردد:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_M} C_{n(\tau)}^{n(0)} v^n d\tau &= \sum_{k=0}^{M-1} C_{n(t_k)}^{n(0)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} C_{n(\tau)}^{n(t_k)} v^n d\tau \\ \approx & \sum_{k=0}^{M-1} C_{n(t_k)}^{n(0)} \left[ \left( \frac{T}{2} I + \frac{T^2}{6} \omega_m^n \times \right) v^n(t_k) \right. \\ & + \left. \left( \frac{T}{2} I + \frac{T^2}{6} \omega_m^n \times \right) v^n(t_k) \right] \end{aligned} \quad (29)$$

با بکارگیری روابط (۱۶) و (۲۰)، ترم دوم از  $\beta_p$  در زمان  $t_M$  به فرم رابطه (۳۰) گسسته‌سازی می‌گردد:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_M} \int_0^\tau C_{n(\sigma)}^{n(0)} \omega_{ie}^n \times v^n d\sigma d\tau \\ = & \sum_{k=0}^{M-1} \left( T \sum_{m=0}^{k-1} C_{n(t_m)}^{n(0)} \int_{t_m}^{t_{m+1}} C_{n(\sigma)}^{n(t_m)} \omega_{ie}^n \times v^n d\sigma \right. \\ & + \left. C_{n(t_k)}^{n(0)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} C_{n(\sigma)}^{n(t_k)} \omega_{ie}^n \times v^n d\sigma d\tau \right) \\ \approx & \sum_{k=0}^{M-1} \left\{ T \sum_{m=0}^{k-1} C_{n(t_m)}^{n(0)} \left[ \left( \frac{T}{2} I + \frac{T^2}{6} \omega_m^n \times \right) \omega_{ie}^n \right. \right. \\ & + \left. \left. v^n(t_m) + \left( \frac{T}{2} I + \frac{T^2}{3} \omega_m^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_{m+1}) \right] \right. \\ & + \left. C_{n(t_k)}^{n(0)} \left[ \left( \frac{T^2}{3} I + \frac{T^3}{12} \omega_m^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_k) \right. \right. \\ & + \left. \left. \left( \frac{T^2}{6} I + \frac{T^3}{12} \omega_m^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_{k+1}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

به طور مشابه، با توجه به رابطه (۱۹)، ترم سوم از  $\beta_p$  در زمان  $t_M$  به فرم رابطه (۳۱) گسسته‌سازی می‌گردد:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_M} \int_0^\tau C_{n(\sigma)}^{n(0)} g^n d\sigma d\tau \\ = & \sum_{k=0}^{M-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_0^\tau C_{n(\sigma)}^{n(0)} g^n d\sigma d\tau \\ = & \sum_{k=0}^{M-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left( \int_0^{t_k} C_{n(\sigma)}^{n(0)} g^n d\sigma \right. \\ & + \left. \int_{t_k}^\tau C_{n(\sigma)}^{n(0)} g^n d\sigma \right) d\tau \\ \approx & \sum_{k=0}^{M-1} \left( T \int_0^{t_k} C_{n(\sigma)}^{n(0)} g^n d\sigma \right. \\ & + \left. \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^\tau C_{n(\sigma)}^{n(0)} g^n d\sigma d\tau \right) \\ = & \sum_{k=0}^{M-1} \left( T \sum_{m=0}^{k-1} C_{n(t_m)}^{n(0)} \int_{t_m}^{t_{m+1}} C_{n(\sigma)}^{n(t_m)} g^n d\sigma \right. \\ & + \left. C_{n(t_k)}^{n(0)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} C_{n(\sigma)}^{n(t_k)} g^n d\sigma d\tau \right) \\ \approx & \sum_{k=0}^{M-1} \left( T \sum_{m=0}^{k-1} C_{n(t_m)}^{n(0)} \left( T I + \frac{T^2}{2} \omega_m^n \times \right) g^n \right. \\ & + \left. C_{n(t_k)}^{n(0)} \left( \frac{T^2}{2} I + \frac{T^3}{6} \omega_m^n \times \right) g^n \right) \end{aligned} \quad (31)$$

$$C_b^n(0) = (s^2 - \eta^T \eta)I + 2\eta\eta^T - 2s(\eta \times) \quad (39)$$

کلیت الگوریتم بدین صورت است که با تعریف

$$\begin{bmatrix} q^+ \\ q^- \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} -\eta^T \\ L'_{\eta} \times (\eta \times) \end{bmatrix}, \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} q^+ \\ q^- \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} -\eta^T \\ L'_{\eta} \times (-\eta \times) \end{bmatrix}$$

رابطه (۳۷) به فرم معادل  $q = 0$   $([\beta_a^+(t_M)] - [\alpha_a^-(t_M)])$  بازنویسی می‌گردد. در مرجع [۱۵] اثبات شده است که تعیین کواترنیون وضعیت به صورت مساله بهینه‌سازی رابطه (۴۱) تبدیل می‌شود.

$$\min_q q^T K q \text{ subject to } q^T q = 1 \quad (41)$$

که در آن ماتریس متقارن  $K_{4 \times 4}$  به صورت رابطه (۴۲) بیان می‌گردد.

$$K(t_M) = \sum_M \left( ([\beta_a^+(t_M)] - [\alpha_a^-(t_M)])^T ([\beta_a^+(t_M)] - [\alpha_a^-(t_M)]) \right) \quad (42)$$

کواترنیون بهینه در مساله بهینه‌سازی رابطه (۴۱) برابر با بردار ویژه نرمالیزه شده متناظر با کوچک‌ترین مقدار ویژه ماتریس  $K$  است [۳].  
در جدول ۱، الگوریتم بازگشتی توسعه داده شده برای حل مساله ترازایی مبتنی بر بهینه‌سازی آورده شده است.

#### ۴- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، شبیه‌سازی مساله ترازایی در حین حرکت با الگوریتم توسعه داده شده در جدول ۱ در قالب دو مثال صورت می‌پذیرد.

**مثال ۱:** در این مثال مساله شبیه‌سازی ترازایی در حین حرکت برای وقتی که دریافت/بایاس و همچنین نویز اندازه‌گیری بر روی خروجی‌های حسگرهای اینرسی وجود دارد، در سناریوهای مختلف صورت می‌پذیرد و RMS های خطای بدست آمده در تخمین زوایای اوایل اولیه در هریک از سناریوها گزارش می‌گردد. در جدول ۲ سه سناریوی مختلف مربوط به زوایای اوایل در ماتریس  $C_b^n(0)$  آورده شده است.

در جدول ۳ اطلاعات مرتبط با مقادیر در نظر گرفته شده برای بایاس/دریفت و انحراف معیار نویزهای موجود در شتاب‌سنج و ژيروسکوپ آورده شده است. لازم به ذکر است که این مشخصات براساس سیستم ناوبری اینرسی ADIS16488 انتخاب شده‌اند.

جدول ۲: سناریوهای مختلف در نظر گرفته شده برای زوایای اوایل ماتریس

$C_b^n(0)$  بر حسب درجه

| سناریوی ۳ | سناریوی ۲ | سناریوی ۱ | زوایای اوایل ماتریس $C_b^n(0)$ |
|-----------|-----------|-----------|--------------------------------|
| ۲۳/۵      | ۱۰        | ۳/۵       | زاویه سمت                      |
| ۵/۶۵۶۹    | ۲/۸۲۸۴    | ۱/۴۱۴۲    | زاویه غلت                      |
| ۹/۰۰۹۷    | ۴/۵۰۴۸    | ۲/۷۰۲۹    | زاویه فراز                     |

$$\begin{aligned} \alpha_p(t_M) \approx & T \sum_{m=0}^{M-1} C_{b(t_m)}^{b(0)} (\Delta v_1 + \Delta v_2) \\ & + \frac{1}{2} (\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2) \times (\Delta v_1 + \Delta v_2) \\ & + \frac{2}{3} (\Delta \theta_1 \times \Delta v_2 + \Delta v_1 \times \Delta \theta_2) \\ & + C_{b(t_{M-1})}^{b(0)} \left[ \frac{T}{30} (25\Delta v_1 + 5\Delta v_2 + 12\Delta \theta_1 \times \Delta v_1 \right. \\ & \left. + 8\Delta \theta_1 \times \Delta v_2 + 2\Delta v_1 \times \Delta \theta_2 + 2\Delta \theta_2 \times \Delta v_2) \right] \end{aligned} \quad (36)$$

۳-۳- پیشنهاد الگوریتم مبتنی بر بهینه‌سازی بازگشتی برای

حل مساله ترازایی

در زیر بخش ۳-۲ فرم گسسته شده بردارهای مشاهدات سرعت  $\alpha_v(t_M)$  و  $\beta_v(t_M)$  در رابطه (۱۲) برای زمان  $t_M$  و همچنین فرم گسسته‌شده بردارهای مشاهدات موقعیت  $\alpha_p(t_M)$  و  $\beta_p(t_M)$  در رابطه (۱۳) برای زمان  $t_M$  ارائه گردید. در این بخش، بر پایه این فرم‌های گسسته‌سازی شده، هدف پیشنهاد یک الگوریتم بازگشتی برای حل مساله ترازایی است. برای این منظور، با بهره‌گیری از رابطه (۱۱)، مساله تعیین ماتریس وضعیت اولیه  $C_b^n(0)$  به صورت رابطه (۳۷) می‌باشد:

$$C_b^n(0) \alpha_a(t_M) = \beta_a(t_M), \quad (M = 1, 2, \dots) \quad (37)$$

که در آن بردارهای مشاهدات افزونه  $\alpha_a$  و  $\beta_a$  به صورت رابطه زیر پیشنهاد شده است:

$$\begin{aligned} \alpha_a(t_M) &= \eta \alpha_v(t_M) + \alpha_p(t_M) \\ \beta_a(t_M) &= \eta \beta_v(t_M) + \beta_p(t_M) \end{aligned} \quad (38)$$

که در آن اسکالر مثبت  $\eta$  بیانگر وزن تخصیص داده شده به هریک از روش‌های تولید بردار مشاهدات سرعت و موقعیت است.

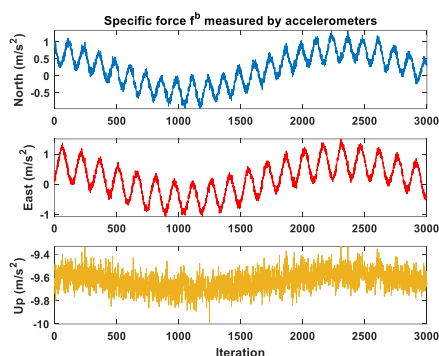
**توجه ۲:** مزیت روش تولید بردار مشاهدات افزونه در مقایسه با هریک از روش‌های تولید بردار مشاهدات سرعت و موقعیت در آن است که می‌توان با ادغام هریک از ویژگی‌های منحصر به فرد این دو روش تولید بردار مشاهدات به صورت (۱) سرعت همگرایی سریع‌تر الگوریتم ترازایی پیشنهادی بر مبنای بردارهای مشاهدات سرعت و (۲) قوام بیشتر الگوریتم ترازایی بر مبنای بردارهای مشاهدات موقعیت در برابر دریافت/بایاس و همچنین نویز اندازه‌گیری بر روی خروجی‌های حسگرهای اینرسی، نتایج الگوریتم ترازایی را بهبود بخشید. این مساله در بخش نتایج شبیه‌سازی دقیق‌تر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

نحوه تعیین ماتریس  $C_b^n(0)$  با رویکرد مبتنی بر بهینه‌سازی با استفاده از پارامتر کواترنیون وضعیت واحد در مرجع [۱] توضیح داده شده است. برای این منظور، اگر بردار کواترنیون واحد به صورت  $q = [s \ \eta^T]^T$  تجزیه شود، که در آن  $s$  بیانگر بخش اسکالر و  $\eta$  بخش برداری بردار کواترنیون هستند، ماتریس وضعیت  $C_b^n(0)$  به صورت رابطه (۳۹) بیان می‌گردد:

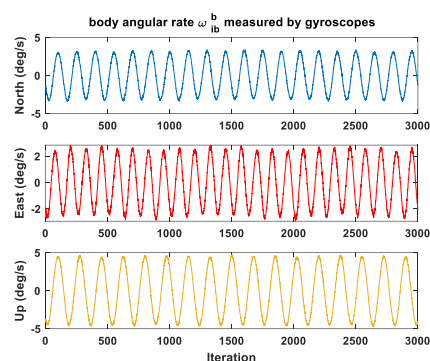


جدول ۱: الگوریتم مربوط به ترازایی در شرایط پرواز بر مبنای بردار مشاهدات افزونه

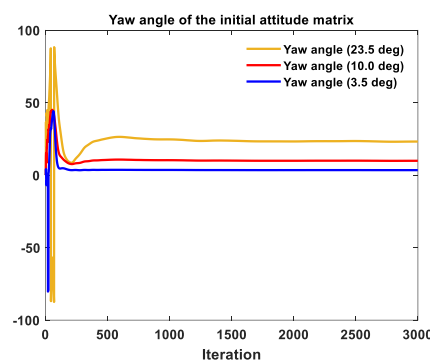
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>مرحله مقداردهی اولیه:</b> <math>M = 0</math>، <math>\alpha_v(0) = \beta'_v(0) = 0_{3 \times 1}</math>، <math>\alpha_p(0) = r^n(0) = 0_{3 \times 1}</math>، <math>u_r(0) = u_v(0) = u_g(0) = 0_{3 \times 1}</math>، <math>K = 0_{4 \times 4}</math> و برای <math>\eta</math> یک مقدار مثبت دلخواه در نظر گرفته شود.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <p><b>مرحله اول:</b> <math>M = M + 1</math> قرار دهید.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <p><b>مرحله دوم:</b> با استفاده از اطلاعات <math>\omega_{in}^n</math>، ماتریس <math>C_{n(t_M-1)}^{n(0)}</math> به <math>C_{n(t_M)}^{n(0)}</math> به صورت رابطه زیر به‌روزرسانی شود.</p> $\varphi_n = T \omega_{in}^n C_{n(t_M)}^{n(t_{M-1})} = I + \frac{\sin(\ \varphi_n\ )}{\ \varphi_n\ } \varphi_n \times + \frac{1 - \cos(\ \varphi_n\ )}{\ \varphi_n\ ^2} (\varphi_n \times)^2, \quad C_{n(t_M)}^{n(0)} = C_{n(t_{M-1})}^{n(0)} C_{n(0)}^{n(t_{M-1})}$ <p>با استفاده از اطلاعات مربوط به اندازه‌گیری زاویه‌ای ژيروسکوپ، ماتریس <math>C_{b(t_M-1)}^{b(0)}</math> به <math>C_{b(t_M)}^{b(0)}</math> به صورت رابطه زیر به‌روزرسانی شود.</p> $\varphi_b = \Delta \theta_1 \times \Delta \theta_2, \quad C_{b(t_M)}^{b(t_{M-1})} = I + \frac{\sin(\ \varphi_b\ )}{\ \varphi_b\ } \varphi_b \times + \frac{1 - \cos(\ \varphi_b\ )}{\ \varphi_b\ ^2} (\varphi_b \times)^2,$ $C_{b(t_M)}^{b(0)} = C_{b(t_{M-1})}^{b(0)} C_{b(0)}^{b(t_{M-1})}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <p><b>مرحله سوم:</b> با استفاده از خروجی‌های حسگرهای ژيروسکوپ و شتاب‌سنج، بردار <math>\alpha_v(t_M)</math> و <math>\alpha_p(t_M)</math> به صورت زیر محاسبه گردند.</p> $\alpha_v(t_M) = \alpha_v(t_{M-1}) + C_{b(t_{M-1})}^{b(0)} \left[ \Delta v_1 + \Delta v_2 + \frac{1}{2} (\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2) \times (\Delta v_1 + \Delta v_2) + \frac{2}{3} (\Delta \theta_1 \times \Delta v_2 + \Delta v_1 \times \Delta \theta_2) \right]$ $\alpha_p(t_M) = \alpha_p(t_{M-1}) + T \sum_{m=0}^{M-2} C_{b(t_m)}^{b(0)} \left( \Delta v_1 + \Delta v_2 + \frac{1}{2} (\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2) \times (\Delta v_1 + \Delta v_2) + \frac{2}{3} (\Delta \theta_1 \times \Delta v_2 + \Delta v_1 \times \Delta \theta_2) \right) + C_{b(t_{M-1})}^{b(0)} \left[ \frac{T}{30} (25 \Delta v_1 + 5 \Delta v_2 + 12 \Delta \theta_1 \times \Delta v_1 + 8 \Delta \theta_1 \times \Delta v_2 + 2 \Delta v_1 \times \Delta \theta_2 + 2 \Delta \theta_2 \times \Delta v_2) \right]$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <p><b>مرحله چهارم:</b> با استفاده از اطلاعات سرعت و موقعیت بدست آمده از واحد GPS، بردار <math>\beta_v(t_M)</math> به صورت زیر محاسبه گردد:</p> $\beta'_v(t_M) = \beta'_v(t_{M-1}) + C_{n(t_{M-1})}^{n(0)} \left[ \left( \frac{T}{2} I + \frac{T^2}{6} \omega_{in}^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_{M-1}) + \left( \frac{T}{2} I + \frac{T^2}{3} \omega_{in}^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_M) - \left( T I + \frac{T^2}{2} \omega_{in}^n \times \right) g^n \right]$ $\beta_v(t_M) = C_{n(t_M)}^{n(0)} v^n - v^n(0) + \beta'_v(t_M)$ <p>با استفاده از اطلاعات واحد GPS، بردار <math>\beta_p(t_M)</math> به صورت زیر محاسبه گردد:</p> $u_r(t_M) = u_r(t_{M-1}) + C_{n(t_{M-1})}^{n(0)} \left[ \left( \frac{T}{2} I + \frac{T^2}{6} \omega_{in}^n \times \right) v^n(t_k) + \left( \frac{T}{2} I + \frac{T^2}{3} \omega_{in}^n \times \right) v^n(t_{k+1}) \right]$ $u_v(t_M) = u_v(t_{M-1}) + C_{n(t_{M-1})}^{n(0)} \left[ \left( \frac{T^2}{3} I + \frac{T^3}{12} \omega_{in}^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_{M-1}) + \left( \frac{T^2}{6} I + \frac{T^3}{12} \omega_{in}^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_M) \right] + T \sum_{m=0}^{M-2} C_{n(t_m)}^{n(0)} \left[ \left( \frac{T}{2} I + \frac{T^2}{6} \omega_{in}^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_m) + \left( \frac{T}{2} I + \frac{T^2}{3} \omega_{in}^n \times \right) \omega_{ie}^n \times v^n(t_{m+1}) \right]$ $u_g(t_M) = u_g(t_{M-1}) + C_{n(t_{M-1})}^{n(0)} \left( \frac{T^2}{2} I + \frac{T^3}{12} \omega_{in}^n \times \right) g^n + T \sum_{m=0}^{M-2} C_{n(t_m)}^{n(0)} \left( T I + \frac{T^2}{2} \omega_{in}^n \times \right) g^n$ $\beta_p(t_M) = u_r(t_M) - t_M v^n(0) + u_v(t_M) - u_g(t_M)$ |
| <p><b>مرحله پنجم:</b> بردارهای مشاهدات افزونه به صورت <math>\alpha_a(t_M) = \eta \alpha_v(t_M) + \alpha_p(t_M)</math> و <math>\beta_a(t_M) = \eta \beta_v(t_M) + \beta_p(t_M)</math> محاسبه گردند.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <p><b>مرحله ششم:</b> <math>K(t_M) = K(t_{M-1}) + ([\beta_a^+(t_M)] - [\alpha_a^-(t_M)])^T ([\beta_a^+(t_M)] - [\alpha_a^-(t_M)])</math> محاسبه گردد.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <p><b>مرحله ششم:</b> بردار کواترنیون وضعیت <math>q</math> با توجه به بردار ویژه نرمالیزه شده ماتریس <math>K(t_M)</math> متناظر با کوچک‌ترین مقدار ویژه تعیین گردد.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <p><b>مرحله هفتم:</b> ماتریس وضعیت در زمان صفر با توجه به بردار کواترنیون در مرحله هفتم تعیین گردد. (رابطه (۳۹))</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <p><b>مرحله هشتم:</b> به مرحله اول بروید و روند ذکر شده تا پایان زمان ترازایی تکرار گردد.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |



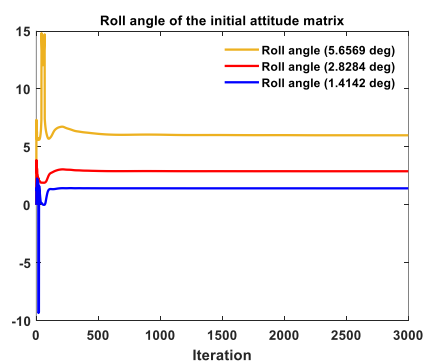
شکل ۲: نیروی ویژه اندازه‌گیری شده توسط شتاب‌سنج‌ها در دستگاه بدنه (سناریوی اول)



شکل ۳: نرخ زاویه‌ای دستگاه بدنه نسبت به اینرسی اندازه‌گیری شده توسط ژيروسکوپ‌ها در دستگاه بدنه (سناریوی اول)



شکل ۴: نمایش از تخمین زاویه سمت در ماتریس وضعیت اولیه در شرایط ترازیابی در حین حرکت



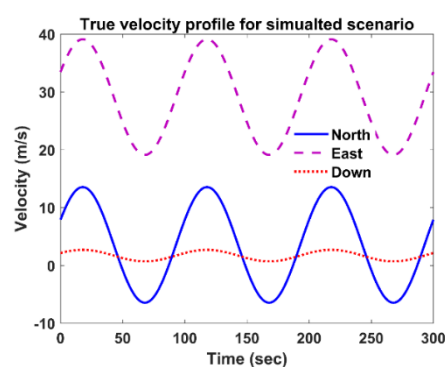
شکل ۵: نمایش از تخمین زاویه غلت در ماتریس وضعیت اولیه در شرایط ترازیابی در حین حرکت

جدول ۳: اطلاعات مربوط به نویزها و بایاس / دررفت شتاب‌سنج‌ها و

ژيروسکوپ‌ها

| شتاب‌سنج                          | ژيروسکوپ              |                   |
|-----------------------------------|-----------------------|-------------------|
| $16 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$ | $0.2 \text{ deg/s}$   | دررفت/بایاس       |
| $5 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$  | $0.005 \text{ deg/h}$ | انحراف معیار نویز |

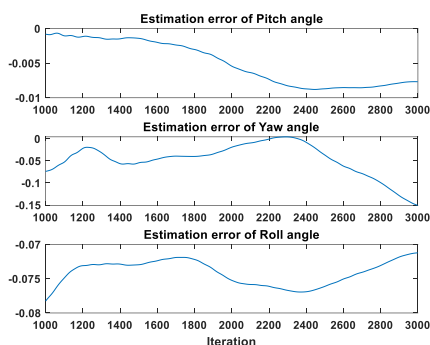
در شبیه‌سازی فرض بر آن است که در تولید داده‌های ناوبری، نرخ نمونه‌برداری مربوط به واحد IMU برابر با ۲۰ Hz و نرخ نمونه‌برداری مربوط به واحد GPS برابر با ۱۰ Hz در نظر گرفته شده است و داده‌ها برای مدت زمان ۳۰۰ ثانیه تولید شده است. در شکل ۱ نمایشی از پروفایل در نظر گرفته شده برای سرعت  $v^n$  به منظور شبیه‌سازی مشاهده می‌شود.



شکل ۱: منحنی‌های در نظر گرفته شده برای سرعت  $v^n$  به منظور تولید داده‌های شبیه‌سازی

در شکل‌های ۲ و ۳ به ترتیب قسمتی از داده‌های مرتبط با نیروی ویژه اندازه‌گیری شده توسط شتاب‌سنج‌ها و نرخ زاویه‌ای دستگاه بدنه نسبت به اینرسی اندازه‌گیری شده توسط ژيروسکوپ‌ها در دستگاه بدنه که به عنوان ورودی الگوریتم می‌باشند، مشاهده می‌شود. لازم به ذکر است که در ۶۰۰۰ داده از حسگرهای اینرسی برای پیاده‌سازی الگوریتم در دسترس است که تنها برای نمایش بهتر، ۳۰۰۰ داده اول از هریک از حسگرهای اینرسی نمایش داده شده است.

وزن تخصیص داده به هریک از روش‌های تولید بردار مشاهدات سرعت و موقعیت در رابطه (۳۷) به صورت  $\eta = 0.7$  در نظر گرفته شده است. با اجرای الگوریتم توسعه داده شده در جدول ۱، در شکل‌های ۴، ۵ و ۶ همگرایی تخمین هریک از زوایای اوپلر ماتریس  $C_b^n(0)$  آورده شده در جدول ۲ به مقدار واقعی این سه زاویه مشاهده می‌شود. با توجه به شکل‌های ۴، ۵ و ۶ مشاهده می‌شود که پس از ۱۰۰۰ مرتبه تکرار الگوریتم (معادل ۱۰۰ ثانیه)، مقدار تخمین زده شده برای زوایای اوپلر ماتریس وضعیت اولیه همگرا شده است.



شکل ۷: نمایشی از خطای وضعیت در ترازیابی با روش انتگرال‌گیری از

سرعت/موقعیت

در جدول ۵ نتایج مربوط به مقدار میانگین RMS خطای ترازیابی هریک از روش‌های مذکور با ۱۰ مرتبه تکرار الگوریتم به همراه سرعت همگرایی روش مذکور آورده شده است.

جدول ۵: مقدار میانگین RMS خطای ترازیابی و سرعت همگرایی در

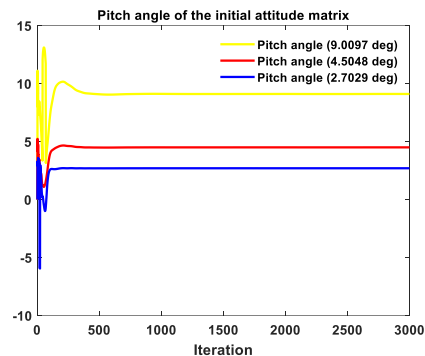
سناریوی ۲ جدول ۲

| روش ترازیابی             | RMS خطای سمت | RMS خطای غلت | RMS خطای فراز | گام زمانی همگرایی |
|--------------------------|--------------|--------------|---------------|-------------------|
| انتگرال‌گیری سرعت/موقعیت | ۰/۱۷۶۴       | ۰/۰۷۲۵       | ۰/۰۰۹۱        | ۴۹۴               |
| انتگرال‌گیری سرعت        | ۰/۱۹۱۲       | ۰/۰۹۰۱       | ۰/۰۱۳۲        | ۴۷۶               |
| انتگرال‌گیری موقعیت      | ۰/۱۷۲۸       | ۰/۰۷۰۸       | ۰/۰۰۸۹        | ۵۵۸               |

نتایج آورده شده در جدول ۵ گویای آن است که مقدار میانگین RMS خطای ترازیابی برای هریک از زوایای اوایل اولیه بدست آمده از الگوریتم پیشنهادی در این مقاله کمتر از روش مرسوم ترازیابی با رویکرد انتگرال‌گیری از سرعت است. با این وجود، گام زمانی همگرایی روش پیشنهاد شده در اینجا بسیار نزدیک به روش انتگرال‌گیری از سرعت است. روش ترازیابی مبتنی بر انتگرال‌گیری از موقعیت دارای خطای ترازیابی کمتری از روش پیشنهاد شده در این مقاله است. با این وجود، گام زمانی همگرایی روش مبتنی بر انتگرال‌گیری از موقعیت به میزان قابل توجهی افزایش یافته است.

**مثال ۲:** مساله ترازیابی غیردقیق با رویکرد بهینه‌سازی در

مرجع [۱۵] مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور ارزیابی الگوریتم توسعه داده شده در این مقاله، در این مثال مقایسه الگوریتم جدول ۱ و مرجع [۱۵] صورت می‌پذیرد. برای این منظور، در یکی از حالت‌های مورد مطالعه در بخش شبیه‌سازی مرجع [۱۵]، حرکت‌های زاویه‌ای بدون تغییر در نظر گرفته شده است و تنها انتقال‌های ارتعاشی بر روی آنها اضافه گردیده است. نرخ تغییرات مربوط به زوایای سمت، فراز و غلت به ترتیب برابر  $7.85 \times 10^{-4} \sin(0.1\pi t + 2\pi/3)$ ،  $7.85 \times 10^{-4} \sin(0.1\pi t)$  و  $7.85 \times 10^{-4} \sin(0.1\pi t + 4\pi/3)$  در نظر گرفته شده است. همچنین،



شکل ۸: نمایشی از تخمین زاویه فراز در ماتریس وضعیت اولیه در شرایط

ترازیابی در حین حرکت

در ادامه، برای هریک از سناریوهای ذکر شده در جدول ۱ شبیه‌سازی ۱۰۰ مرتبه تکرار می‌گردد و از RMS خطای بدست آمده در تخمین زوایای اوایل برای گام ۵۰۰ تا ۳۰۰۰ میانگین‌گیری می‌گردد. مقدار میانگین RMS خطای بدست آمده برای هریک از سناریوها در جدول ۴ آورده شده است.

جدول ۴: مقدار RMS خطا در سناریوهای مختلف شبیه‌سازی

| سناریوی ۳ | سناریوی ۲ | سناریوی ۱ | مقدار میانگین RMS خطای تخمین بر حسب درجه |
|-----------|-----------|-----------|------------------------------------------|
| ۰/۵۴۵۸    | ۰/۱۷۶۴    | ۰/۰۶۴۹    | زاویه سمت                                |
| ۰/۲۶۵۶    | ۰/۰۷۲۵    | ۰/۰۴۱۰    | زاویه غلت                                |
| ۰/۰۹۷۷    | ۰/۰۰۹۱    | ۰/۰۰۲۳    | زاویه فراز                               |

نتایج آورده شده در جدول ۴ گویای آن است که مقدار میانگین RMS خطای تخمین برای زاویه سمت در سناریوهای اشاره شده کمتر از ۰/۵۵ درجه است. از طرفی، برای وقتی که داده‌های INS/GPS تنها برای مدت زمانی ۴۰ ثانیه در دسترس هستند، میزان میانگین خطای تخمین زاویه سمت کمتر از مقدار ۰/۹۴ درجه بدست می‌آید. این دقت‌های بدست آمده از الگوریتم پیشنهادی در جدول ۱ کاملاً مناسب برای ترازیابی غیردقیق در شرایط پروازی و همچنین شرایط دریا است و می‌توان از تخمین‌های بدست آمده برای زوایای اوایل به عنوان شرایط اولیه در الگوریتم ترازیابی دقیق با استفاده از فیلتر کالمن استفاده نمود.

به منظور بررسی سرعت همگرایی به همراه قوام الگوریتم پیشنهادی در برابر خطاهای مربوط به حسگرهای اینرسی، مقایسه‌ای با الگوریتم ترازیابی مرسوم انتگرال‌گیری از سرعت و الگوریتم انتگرال‌گیری از موقعیت پیشنهاد شده صورت پذیرفته است. داده‌های ورودی الگوریتم مربوط به سناریوی ۲ است.

در شکل ۷ نمایشی از خطای تخمین وضعیت زوایای اوایل برای حالت ترازیابی با استفاده از روش انتگرال‌گیری از سرعت/موقعیت مشاهده می‌شود. برای نمایش بهتر مقدار تقریبی خطای تخمین، نتایج مربوطه از گام زمانی ۱۰۰۰ به بعد الگوریتم نمایش داده شده است.

نماید. براساس نتایج شبیه‌سازی ارائه شده برای سیستم ناوبری اینرسی ارزان‌قیمت ADIS16488، الگوریتم پیشنهادی دارای قوام کافی در برابر خطای حسگرهای اینرسی و سرعت همگرایی مناسب در تخمین زوایای اوایل اولیه است. همچنین، با توجه به دقت بدست آمده در بخش نتایج شبیه‌سازی، الگوریتم پیشنهادی برای رویکرد ترازیابی غیردقیق در حین حرکت کاملاً مناسب است و می‌توان از تخمین‌های بدست آمده از الگوریتم، به‌عنوان شرایط اولیه روش ترازیابی دقیق بر مبنای فیلتر کالمن استفاده نمود. علاوه بر آن، با توجه به آنکه این الگوریتم به اطلاعات شتاب در دستگاه ناوبری نیاز ندارد، می‌تواند برای ترازیابی در شرایط دریایی که در آن سیستم ناوبری اینرسی در معرض حرکت انتقالی ناشی از امواج است، کارآمد باشد. به‌عنوان یک پیشنهاد برای پژوهش‌های آتی می‌توان به توسعه الگوریتمی برای تعیین مناسب وزن تخصیص داده شده به هر یک از روش‌های تولید بردار مشاهدات سرعت و موقعیت اشاره نمود. همچنین، با الهام از مرجع [۱۹]، می‌توان تلفیق مراحل غیردقیق و دقیق در رویکرد رایج ترازیابی دو مرحله‌ای و پیشنهاد یک الگوریتم ترازیابی تک‌مرحله‌ای را مدنظر قرار داد که در آن با بکارگیری یک فیلتر کالمن به موازات الگوریتم ترازیابی مبتنی بر بهینه‌سازی، بایاس شتاب‌سنج و دریافت ژيروسکوپ نیز همراه با وضعیت اولیه تخمین زده می‌شوند.

## مراجع

[۱] قسمتی، حیرانی نوری، عاروان، کاشانی نیا، ۱۳۹۹. تحلیل خطای انحراف ژيروسکوپ در الگوریتم ناوبری مستقل از موقعیت سامانه‌ی اینرسی صفحه پایدار. مجله کنترل، جلد ۱۴، شماره ۲، صفحه ۱۵-۱.

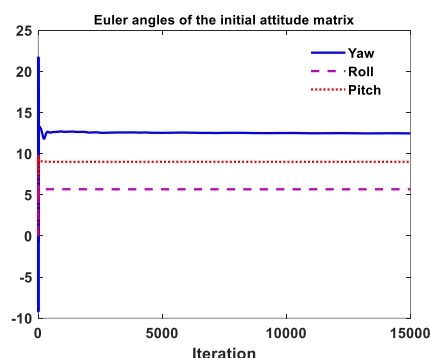
- [2] Savage, P.G., 2008. Computational elements for strapdown systems. Low Cost Navigation Sensors and Integration Technology, pp.3-3.
- [3] Lu, Z., Li, J., Zhang, X., Feng, K., Wei, X., Zhang, D., Mi, J. and Liu, Y., 2020. A new in-flight alignment method with an application to the low-cost SINS/GPS integrated navigation system. Sensors, 20(2), p.512.
- [4] Xu, X., Sun, Y., Yao, Y. and Zhang, T., 2021. A robust in-motion optimization-based alignment for SINS/GPS integration. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 23(5), pp.4362-4372.
- [5] Ouyang, W. and Wu, Y., 2022. Optimization-based strapdown attitude alignment for high-accuracy systems: Covariance analysis with applications. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic systems, 58(5), pp.4053-4069.

[۶] قهرمانی، ماجدالحسن، ۱۴۰۱. طراحی الگوریتمی برای افزایش همگرایی فیلتر کالمن توسعه‌یافته مبنی بر مدل پیش‌بین تفاضلی در ترازیابی سامانه ناوبری اینرسی و تحلیل پایداری آن. مجله کنترل، جلد ۱۶، شماره ۱، صفحه ۳۶-۲۷.

سرعت  $v^n$  در زمان شروع ( $t=0$ ) برابر صفر فرض شده است و نرخ تغییرات آن در راستای شمال، عمودی به سمت بالا و شرق به ترتیب برابر با  $0.05\sin(4\pi t)$ ،  $0.05\sin(4\pi t + 2\pi/3)$  و  $0.05\sin(4\pi t + 4\pi/3)$  در نظر گرفته شده است. نرخ نمونه‌برداری مربوط به واحد GPS برابر با ۱۰۰ Hz در نظر گرفته شده است. در تولید داده‌های مربوطه برای مدت زمان ۳۰۰ ثانیه، زوایای اوایل اولیه در تولید ماتریس وضعیت به صورت زاویه سمت ۱۲/۵ درجه، زاویه فراز ۹/۰۰۹۷ درجه و زاویه غلت ۵/۶۵۶۹ درجه در نظر گرفته شده است. همچنین، از اطلاعات جدول ۳ برای بایاس/دریفت و انحراف معیار نویزهای موجود در حسگرهای ناوبری اینرسی استفاده شده است.

برای اجرای الگوریتم ترازیابی جدول ۱، فاصله زمانی بین هر دو اجرای الگوریتم برابر ۰/۰۲ در نظر گرفته شده است. همچنین، وزن تخصیص داده به هر یک از روش‌های تولید بردار مشاهدات سرعت و موقعیت در رابطه (۳۷) به صورت  $\eta = 0.7$  در نظر گرفته شده است. با اجرای الگوریتم جدول ۱، در شکل زیر نمایی از همگرایی مقادیر تخمین زده شده برای زوایای اوایل مربوط به ماتریس  $C_b''(0)$  به مقدار واقعی آنها مشاهده می‌شود.

با ۱۰۰ مرتبه تکرار الگوریتم و میانگین‌گیری از RMS خطای تخمین مربوط به هر یک از زوایا، مقادیر بدست آمده به صورت  $RMS(e_{roll}) = 0.0006$  و  $RMS(e_{pitch}) = 2.3443 \times 10^{-4}$ ،  $RMS(e_{yaw}) = 0.0215$  است. در مقایسه با نتایج گزارش شده برای خطای تخمین در مرجع [۱۵]، دقت الگوریتم پیشنهادی در اینجا در حدود سه برابر بهبود یافته است.



شکل ۸: نمایی از چگونگی همگرایی تخمین زوایای اوایل ماتریس وضعیت اولیه به مقدار واقعی آنها در شرایط ترازیابی دینامیکی (در حضور نویز و دریفت)

## ۵- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله روش جدیدی برای ترازیابی غیردقیق با رویکرد مبتنی بر بهینه‌سازی پیشنهاد گردید. الگوریتم ارائه شده بر مبنای بردار مشاهدات افزونه با انتگرال‌گیری توأم از بردارهای مشاهدات سرعت و موقعیت است. این روش توانسته است مزایای هر یک از روش‌های ترازیابی به صورت (۱) ترازیابی بر مبنای بردار مشاهدات سرعت مرسوم در مراجع و (۲) ترازیابی بر مبنای بردار مشاهدات موقعیت پیشنهادی در این مقاله را توأمأ حفظ

- [7] Chang, L., Qin, F. and Jiang, S., 2019. Strap-down inertial navigation system initial alignment based on modified process model. *IEEE Sensors Journal*, 19(15), pp.6381-6391.
- [8] Lu, J., Xie, L. and Li, B., 2015. Analytic coarse transfer alignment based on inertial measurement vector matching and real-time precision evaluation. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 65(2), pp.355-364.
- [9] Chattaraj, S., Mukherjee, A. and Chaudhuri, S.K., 2013. Transfer alignment problem: Algorithms and design issues. *Gyroscopy and navigation*, 4(3), pp.130-146.
- [10] Zhao, H., Shang, H., Wang, Z. and Jiang, M., 2011, June. Comparison of initial alignment methods for SINS. In 2011 9th World Congress on Intelligent Control and Automation (pp. 42-47). IEEE.
- [11] Li, W., Tang, K., Lu, L. and Wu, Y., 2013. Optimization-based INS in-motion alignment approach for underwater vehicles. *Optik*, 124(20), pp.4581-4585.
- [12] Jin, K., Chai, H., Su, C., Xiang, M. and Hui, J., 2022. An optimization-based in-motion fine alignment and positioning algorithm for underwater vehicles. *Measurement*, 202, p.111746.
- [13] Chang, L., Qin, F. and Jiang, S., 2019. Strap-down inertial navigation system initial alignment based on modified process model. *IEEE Sensors Journal*, 19(15), pp.6381-6391.
- [14] Chang, L., Li, J. and Li, K., 2016. Optimization-based alignment for strap-down inertial navigation system: Comparison and extension. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 52(4), pp.1697-1713.
- [15] Wu, M., Wu, Y., Hu, X. and Hu, D., 2011. Optimization-based alignment for inertial navigation systems: Theory and algorithm. *Aerospace science and technology*, 15(1), pp.1-17.
- [16] Wahba, G., 1965. A least squares estimate of satellite attitude. *SIAM review*, 7(3), pp.409-409.
- [17] Titterton, D. and Weston, J.L., 2004. Strap-down inertial navigation technology (Vol. 17). IET.
- [18] Huang, Y., Zhang, Y. and Chang, L., 2018. A new fast in-motion coarse alignment method for GPS-aided low-cost SINS. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 23(3), pp.1303-1313.
- [19] Chang, L., Zha, F. and Qin, F., 2017. Indirect Kalman filtering based attitude estimation for low-cost attitude and heading reference systems. *IEEE/ASME Transactions On Mechatronics*, 22(4), pp.1850-1858.