مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۴، شماره ۴، زمستان ۱۳۸۹، صفحه ۱۳-۱

# کنترل توزیع شده کلاس خاصی از رفتارهای جمعی در شبکه های چند عاملی

شهرام نصرتی[۱]، مسعود شفیعی[۲]

[۱] فارغ‌التحصیل دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، sh_nosrati@aut.ac.ir

[۲] استاد، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، mshafiee@aut.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۹/۸/۱۰، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۹/۱۱/۵)

**چکیده:** در این مقاله، کلاس خاصی از رفتارهای جمعی در شبکه های چند عاملی مورد بررسی قرار می گیرد. با استفاده از روش معروف معکوس ژاکوبین برای رباتهای مکانیکی افزونه، کنترل کننده متمرکزی برای شبکه چند عاملی بمنظور تعقیب مسیر مطلوب در فضای رفتار جمعی، طراحی می شود. سپس با استفاده از پروتکلهای اجماع میانگین دینامیکی و جایگزینی متغیرهای جمعی کنترل کننده متمرکز با تخمین توزیع شده این متغیرها، کنترل کننده غیر متمرکزی بدست می آید که بر روی هر گراف تعامل، توزیع شده است. در اینصورت، هر عامل شبکه برای محاسبه کنترل کننده خود، فقط نیاز به اطلاعات محلی خود و اطلاعات عاملهای همسایه خود دارد. شرائط کافی برای پایداری کنترل توزیع شده تعیین شده است. همچنین نتایج شبیه سازی برای کنترل توزیع شده آرایش گروهی از رباتهای سیار ارائه شده است.

**کلمات کلیدی:** کنترل توزیع شده، کنترل آرایش شبکه های رباتیک سیار، اجماع میانگین دینامیکی، معکوس ژاکوبین، طرح ریزی غیرمتمرکز مسیر.

# Distributed Control of a Class Collective Behaviors in Multi-Agent Networks

**Shahram Nosrati, Masoud Shafiee**

**Abstract:** A class of collective behaviors is considered. Utilizing inverse jacobian method, a well known technique in redundant manipulators context, centralized controllers is synthesized for a multi-agent network to track desired paths in task space. These centralized controllers are dependent on global variables known as coordination variables. These global variables could be estimated by all the agents using some appropriate dynamic consensus protocols based upon local information which is available to each agent. The consensus protocols make the centralized controllers to be distributed over any interaction topology. Some sufficient conditions are identified to guarantee stability of the interconnection between the centralized controllers and the dynamic consensus estimators. An illustrative example is provided for formation control of a group of mobile agents using some inertial moments of the group.

**Keywords:** Distributed control, formation control of mobile robotic networks, dynamic average consensus, inverse jacobain, distributed path planning.

## ۱- مقدمه

یکی از مسائل بسیار مهم در شبکه های چندعاملی، چگونگی سنتز کنترل کننده های غیرمتمرکز برای عاملهای شبکه بمنظور ظهور یک رفتار جمعی خاص می باشد. از جمله این رفتارهای جمعی می توان موارد زیر را نام برد: همگام سازی در شبکه ای از نوسانسازها یا شبکه ای از سیستمهای پریودیک [۱] و [۳]، آرایش الگوهای



[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.4.5.9 ]

پریودیک مطلوب برای ذرات با سرعت واحد [۲] و [۳]، کنترل آرایش سیستمهای چند رُباتی [۴]،[۶]، و [۸]، تعقیب هدفهای متحرک توسط شبکه های حسگر سیار [۴] و [۷]، صف آرائی و چینش خاص حسگرها در یک محیط توزیع شده طوریکه گرادیان تخمین زده شده جریان محیطی خاصی، بیشینه یا کمینه شود [۵]، مانیتورینگ مرزهای محیط [۱۴]، حرکت گروهی پرنده ها/ماشینها/ رباتهای سیار [۹] و [۱۰]، جمع شدن در یک مکان [۱۱] و [۱۲]، پوشش بهینه محیط های محدّب توسط شبکه های حسگر سیار [۱۳]، مسئله اجماع [۱۵]،[۱۶]،[۱۷]، و [۱۹]، فیلترهای کالمن توزیع شده [۱۷].

یکی از روشهای سنتز سیستماتیک کنترل کننده های توزیع شده، روش بازوهای مکانیکی افزونه [۲۷]-[۲۰] و [۱۸] یا روش معکوس ژاکوبین است که به تازگی در مورد شبکه های چند عاملی بخصوص در مورد مسئله کنترل آرایش شبکه های رباتیک سیار مورد توجه قرار گرفته است. روش معکوس ژاکوبین وقتی قابل استفاده است که رفتار جمعی مورد نظر بصورت یک کمیت جمعی، قابل اندازه گیری باشد، بعبارتی قابل توصیف با یک تابع هموار جمعی باشد، همانند مسئله کینماتیک در رباتیک یا نمایش آرایش گروهی از رباتها با استفاده از ممانهای اینرسی [۶]. در اینصورت رفتار جمعی در شبکه چند عاملی همانند موقعیت و جهت نقطه اثر انتهائی بازوی مکانیکی خواهد بود و همانگونه که این موقعیت و جهت بر حسب متغیرهای مفصلی قابل توصیف است، در شبکه چند عاملی نیز رفتار جمعی مورد نظر بصورت تابعی از حالتهای تمام عوامل توصیف می شود. در این روش تاکید فقط بر کنترل خود رفتار جمعی است (یعنی کنترل کل گروه بعنوان یک شیء) و سعی می شود که تابع جمعی یا همان رفتار جمعی گروه، مسیر مطلوب را در فضای حالت جمعی تعقیب کند. بر عکس روشهای گرادیانی خالص، که از همان ابتدا مسیر عاملها بنوعی مشخص می باشد و اجازه داده می شود که مسیر رفتار جمعی بخودی خود در طول زمان ظهور پیدا کند، در این روش، از همان ابتدا مسیر مطلوب رفتار جمعی مشخص است و اجازه داده می شود که مسیر عاملها در طول زمان ظهور پیدا کند. اساس این روش، استفاده از افزونگی موجود در شبکه های چند عاملی و معکوس ژاکوبین تابع توصیف کننده رفتار جمعی است. از جمله مشکلات مهم این روش می توان سینگولاریتی و متمرکز بودن آن را نام برد. تا به حال، پیاده سازی توزیع شده چنین روشهائی در مورد شبکه های چند عاملی انجام نشده است. یکی از توانائی های این روش، قابلیت پیاده سازی انواع رفتار جمعی در یک گروه بر اساس اولویت می باشد که منجر به شکل گیری روشی بنام روش رفتار فضای پوچی [۲۴] شده است. در این روش، بردار سرعت ناشی از معکوس ژاکوبین متناظر با یک رفتار جمعی با اولویت پایین تر، در فضای پوچی بردار سرعت متناظر با رفتار جمعی با اولویت بالاتر تصویر می شود.

**مرور پیشینه مسئله مورد بحث.** در این قسمت مروری بر استفاده از روشهای بازوهای مکانیکی افزونه در کنترل آرایش رباتهای سیار خواهیم داشت. در [۲۰] و [۲۱]، روشهای معکوس ژاکوبین و کنترل معکوس مجازی در بازوهای مکانیکی افزونه مرور شده است. در [۲۲] و [۲۶]، از روش معکوس ژاکوبین و رفتار فضای پوچی برای تولید مسیرهای مرجع برای گروهی از عاملهای درجه اول برای کنترل مرکز جرم و واریانسهای گروه در حضور موانع محیطی و هدفهای ثانویه از جمله افزایش قابلیت مانور یک ربات خاص و کنترل هدینگ یک ربات خاص استفاده شده است. در [۲۳] و [۲۵]، کلاس خاصی از ماتریس ژاکوبین رفتار جمعی در نظر گرفته شده است بگونه ای که میزان تبادل اطلاعات بین عاملهای شبکه و کنترل کننده متمرکز را کاهش می دهد. در [۲۴]، توابع جمعی توصیف کننده طیف نسبتا گسترده ای از رفتارهای جمعی پایه در بازی فوتبال رباتها ارائه شده است و با استفاده از روش معکوس ژاکوبین و رفتار فضای پوچی، بصورت عملی، چنین رفتارهای جمعی بر روی گروهی از رباتهای سیار واقعی پیاده سازی شده اند. در [۲۷]، کنترل مرکز جرم و واریانس گروهی از عاملهای درجه دوم بر اساس روش معکوس ژاکوبین بررسی شده است. رفتار با اولویت پایین، بصورت جلوگیری از تصادم با مانع محیطی و کنترل هدینگ کل گروه در نظر گرفته شده است. تمام الگوریتم های ارائه شده تاکنون در مورد روش معکوس ژاکوبین، الگوریتم های متمرکز می باشند.

**نوآوریهای مربوطه.** کلاس خاصی از رفتارهای جمعی در نظر گرفته می شود و بصورت متمرکز بر اساس روش معکوس ژاکوبین و حداقل مربعات میرا، کنترل کننده متمرکزی برای تحقق آن طراحی می شود. سپس تمام متغیرهای جمعی موجود در آن، توسط هر عامل شبکه و با استفاده از پروتکلهای اجماع میانگین دینامیکی تخمین زده می شود که منجر به توزیع شدگی کنترل متمرکز می شود. هر عامل شبکه نسخه توزیع شده ای از آن را برای خود اجرا می کند. در این مورد، هم الگوریتم زمان-پیوسته و هم الگوریتم زمان-گسسته ارائه شده و شرائط خوش تعریفی کنترل کننده ها و پایداری کراندار آنها تحلیل شده است. بعنوان مثال، کنترل توزیع شده ای برای کنترل آرایش گروهی از رباتهای سیار توسط ممانهای اینرسی ارائه شده است.



[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.4.5.9 ]

## ۲- سنتز کنترل کننده های متمرکز برای کلاس خاصی از رفتارهای جمعی

$n$ عامل دینامیکی را در نظر می گیریم که دینامیک آنها بصورت انتگرالگیر ساده زیر است.

$$\dot{x}_i = u_{ic}, \quad i \in \mathcal{V} = \{1, \cdots, n\}$$

متغیر $x_i \in \mathbb{R}^q$ ، موقعیت عامل $i$ام می‌باشد. تعامل محلی بین عاملها، بصورت یک گراف غیرجهت‌دار $\mathcal{G}=(\mathcal{E},\mathcal{V})$ مدل می‌شود. منظور از تعامل در اینجا، بمعنی توانائی ارتباط بین عاملها برای انتقال اطلاعات لازم است. محدوده تعامل بین عاملها، محدود به $R$ می باشد، بگونه ای که وجود لینک $(i,j) \in \mathcal{E}$ معادل این است که $\|x(i)-x(j)\|_2 \le R$. در نتیجه گراف تعامل $\mathcal{G}=(\mathcal{E},\mathcal{V})$ یک گراف وابسته به حالت است و در حین تکامل شبکه، متغیر خواهد بود. مجموعه همسایگی عامل $i$ام بصورت $\mathcal{N}_i = \{ j \in \mathcal{V} \| x(i)-x(j) \|_2 \le R \}$ است. ملاحظه می شود که شبکه چند عاملی مورد بحث، متشکل از سیستمهای دینامیکی است که هیچ کوپل فیزیکی بین آنها وجود ندارد و تنها کوپل دینامیکی بین عاملهای شبکه، بمنظور تحقق یک رفتار جمعی بوجود می آید که خود را بصورت یک جریان اطلاعات بین عاملهای شبکه نشان می دهد.

همچنین فرض می کنیم که رفتار جمعی مورد نظر را می توان توسط یک تابع پیوسته مشتق پذیر مانند $\sigma = f(x) \in \mathbb{R}^m$ نشان دهیم که در آن، $x = [x_1^T \quad x_2^T \quad \cdots \quad x_n^T]^T$ است. فضای متغیر $\sigma$ را فضای حالت رفتار جمعی، فضای متغیرهای $x_i$ را فضای حالت محلی، و فضای $x$ را فضای حالت جمعی می نامیم. تابع رفتار جمعی $f(x)$ ، در واقع اندازه ای از عملکرد شبکه چند عاملی در تحقق یک رفتار جمعی خاص می باشد. معمولا در شبکه های چند عاملی تعداد عاملها یعنی $n$ ، نسبت به بُعد فضای حالت رفتار جمعی یعنی $m$ بزرگتر است. لذا شبکه چند عاملی در تحقق یک رفتار جمعی خاص دارای افزونگی ذاتی خواهد بود. این افزونگی دارای مزیت بسیار مهمی است که بعلت آن، شبکه چند عاملی می تواند خود را بگونه ای کنترل کند که رفتار جمعی مورد نظر را محقق کند در عین اینکه از انواع قیدهای محیطی دوری کند یا اهداف ثانویه و با اولویت کمتر را تحقق ببخشد.

همچنین فرض می کنیم که رفتار جمعی مورد نظر را می توانیم توسط یک تابع پیوسته مشتق پذیر مانند $\sigma = f(x) \in \mathbb{R}^m$ نشان دهیم که در آن $x = [x_1^T \quad x_2^T \quad \cdots \quad x_n^T]^T$ است. فضای متغیر $\sigma$ را فضای حالت رفتار جمعی، فضای متغیرهای $x_i$ را فضای حالت محلی، و فضای $x$ را فضای حالت جمعی می نامیم. تابع رفتار جمعی $f(x)$ ، در واقع اندازه ای از عملکرد شبکه چند عاملی در تحقق یک رفتار جمعی خاص می باشد. معمولا در شبکه های چند عاملی تعداد عاملها یعنی $n$ ، نسبت به بُعد فضای حالت رفتار جمعی یعنی $m$ بزرگتر است. لذا شبکه چند عاملی در تحقق یک رفتار جمعی خاص دارای افزونگی ذاتی خواهد بود. این افزونگی دارای مزیت بسیار مهمی است که بعلت آن، شبکه چند عاملی می تواند خود را بگونه ای کنترل کند که رفتار جمعی مورد نظر را محقق کند در عین اینکه از انواع قیدهای محیطی دوری کند یا اهداف ثانویه و با اولویت کمتر را تحقق ببخشد.

فرض می شود که تابع $\sigma = f(x)$ بصورت $f(x) = [f_1(x) \quad f_2(x) \quad \cdots \quad f_m(x)]^T$ باشد که در آن

$$f_k(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_k(x_i), \quad k = 1, \cdots, m \qquad (۱)$$

و توابع $g_k : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ توابع پیوسته مشتق پذیر می باشند. مسیر مطلوب برای رفتار جمعی $\sigma$ بصورت یک مسیر هموار $\sigma_d$ با مشتق $\dot{\sigma}_d$ ، مفروض می باشد. این مسیرهای جمعی یا توسط یک کنترل کننده توزیع شده سطح بالاتر در یک ساختار سلسله مراتبی در درون عاملها تولید می شود، یا مقادیر نهائی مطلوب $\sigma(t_f)$ و پارامترهای تولید مسیر $\sigma_d$ ، توسط یک ناظر جمعی، فقط در لحظه ای قبل از زمان اولیه $t_0$ به تمام عاملها فرستاده می شود. بوضوح روشن است که در این روش، تاکید بر مسیر جمعی می باشد و نحوه انجام رفتار جمعی کاملا می تواند کنترل شود تا اینکه تاکیدی بر مسیر تک تک عاملها باشد. حتی هنگامی که فقط مطلوب بودن $\sigma(t_f)$ مدنظر باشد، می توانیم نحوه همگرائی به این مقدار مطلوب را نیز کنترل کنیم که در روشهای بر اساس گرادیان، امکان پذیر نیست. هنگامی هم که یک رفتار جمعی متغیر با زمان مطلوب می باشد، با این روش همواره می توان کیفیت مطلوب را در انجام رفتار جمعی کنترل کرد که باز هم توسط روشهای بر اساس گرادیان امکان پذیر نیست.

مسیر مطلوب $\sigma_d$ در فضای حالت رفتار جمعی را در نظر بگیرید. مسیرهای فضای حالت جمعی، یعنی $x_d$ ، که باعث ظهور چنین مسیر در فضای رفتار جمعی می شوند، با توجه به افزونگی فضای حالت جمعی نسبت به فضای حالت رفتار جمعی، بیشمار می باشد. برای حل معادله غیر خطی $\sigma_d = f(x_d)$ بمنظور تعیین مسیرهای مطلوب برای عاملها یعنی $x_d$ ، از معکوس ژاکوبین تابع رفتار جمعی استفاده می شود.

با توجه به $\sigma = f(x)$ ، داریم

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial f(x)}{\partial x}\dot{x} = J(x)\dot{x} \qquad (۲)$$



[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.4.5.9 ]

که در آن، ماتریس $J(x)$ ، ماتریس ژاکوبین رفتار جمعی و وابسته به پیکربندی گروه می باشد. چون $n \geq m$ است از معکوس حداقل مربعات خطا بصورت زیر استفاده می شود

$$\dot{x}_d = J^{\dagger}\dot{\sigma}_d = J^T(JJ^T)^{-1}\dot{\sigma}_d \qquad (۳)$$

مسئله فوق همان مسئله کینماتیک معکوس در بازوهای رباتیک افزونه می باشد. اما این راه حل، یک جواب حلقه باز برای مسئله کینماتیک معکوس است و در فضای رفتار جمعی، پایداری یا همگرائی خاصی را به مسیر رفتار جمعی مطلوب باعث نمی شود. لذا برای رگولاسیون تابع رفتار جمعی، یک دینامیک مطلوب برای خطای تعقیب در فضای رفتار جمعی تعریف می شود. فرض کنید خطای تعقیب در فضای رفتار جمعی بصورت $e_\sigma = \sigma_d - \sigma$ باشد. که در آن، $\sigma$ ، مقدار واقعی تابع رفتار جمعی در نقطه $x$ می باشد. انواع دینامیک خطی یا غیرخطی را می توان به خطای تعقیب $e_\sigma$ نسبت داد بگونه ای که ویژگیهای مطلوب یک سیستم پایدار مجانبی جامع را داشته باشد. با توجه به اینکه در اینجا، دینامیک عاملها از درجه اول است، و هدف تعیین بردار سرعت مطلوب آنها است، دینامیک درجه اول برای خطای تعقیب کافی است. اگر دینامیک عاملها از درجه دوم باشد و هدف تعیین بردار شتاب مطلوب برای آنها باشد، حتما باید دینامیک درجه دوم برای خطای تعقیب در نظر گرفته شود. با توجه به دینامیک عاملها که بصورت $\dot{x}_i = u_{ic}$ می باشد، فرض می کنیم که دینامیک خطای تعقیب، یک سیستم درجه اول بصورت زیر باشد

$$\dot{e}_\sigma + \Lambda e_\sigma = 0 \qquad (۴)$$

که در آن، ماتریس $\Lambda$ یک ماتریس مثبت معین است. واضح است که تنها نقطه تعادل سیستم فوق، که مبدا می باشد، پایدار مجانبی جامع است. لذا، با این سیستم خطا، هر مسیر مطلوب (و پیوسته مشتق پذیر) $\sigma_d$ در فضای حالت رفتار جمعی، پایدار مجانبی جامع است. در اینصورت دینامیک $\sigma$ بصورت زیر است.

$$\dot{\sigma} = \Lambda(\sigma_d - \sigma) + \dot{\sigma}_d$$

از (۲) داریم $\dot{\sigma} = J\dot{x}$. لذا برای تعیین بردار سرعت جمعی بهینه که دارای کمترین نُرم باشد از معکوس ژاکوبین (۳) استفاده می کنیم. لذا داریم

$$\dot{x} = J^{\dagger}(\dot{\sigma}_d + \Lambda(\sigma_d - \sigma)) \qquad (۵)$$

بردار سرعت جمعی فوق در فضای حالت جمعی، بردار سرعت مطلوب را برای تمام عاملهای شبکه مشخص می کند. با اعمال کنترل کننده (۵) توسط عاملهای شبکه، با شروع از هر نطقه کرانداری در فضای حالت جمعی، عاملهای شبکه بگونه ای حرکت می کنند که مسیر رفتار جمعی $\sigma_d$ توسط شبکه تحقق پیدا کند، یعنی $\sigma \to \sigma_d$ ، که دلیل آن نیز از سیستم خطای (۴) روشن است. اگر کنترل کننده سطح پایین عاملها، بصورت رگولاسیون موقعیت باشد، با انتگرالگیری از (۵)، سیگنال مرجع لازم برای این کنترل کننده ها بدست می آید. در اینصورت، دینامیک (۵)، از دریفتهای عددی ناشی از انتگرالگیری نیز جلوگیری می کند. ایراد مهم معکوس ژاکوبین $J^{\dagger} = J^T(JJ^T)^{-1}$ ، سینگولار شدن ماتریس $JJ^T$ می باشد. در نقاطی از فضای حالت جمعی که ماتریس $JJ^T$ رتبه کامل نداشته باشد، دینامیک (۵) منجر به بردارهای سرعت بی کران می شود که از لحاظ عملی کاملا نامطلوب است. هرچند دور از نقاط سینگولار، بردارهای سرعت بهینه با کمترین نُرم ممکن را برای شبکه تعیین می کند. با توجه به اینکه $n \geq m$ است، رتبه ماتریس $JJ^T$ ، رتبه ماتریس ژاکوبین $J$ است. برای عبور نَرم از نقاط سینگولار ماتریس ژاکوبین، از روش حداقل مربعات میرا بصورت زیر استفاده می شود.

$$\dot{x} = J^T(JJ^T + \lambda^2\mathbf{I}_m)^{-1}(\dot{\sigma}_d + \Lambda(\sigma_d - \sigma)) \qquad (۶)$$

که در آن، $\lambda^2 > 0$ ، یک ضریب میرائی است. استفاده از روش فوق، هر چند باعث عبور بی خطر با بردارهای سرعت کراندار از نقاط سینگولار می شود، اما باعث ایجاد خطای تعقیب کراندار غیر صفر نیز می شود و باعث می شود که $\sigma$ ، مسیر رفتار جمعی مطلوب $\sigma_d$ را بصورت دقیق تعقیب نکند. بهمین خاطر، روشهای تطبیقی بسیاری برای تنظیم بهینه ضریب میرائی $\lambda^2$ توسعه داده شده است، بدینصورت که سیستم هر چه به نقاط سینگولار ماتریس ژاکوبین نزدیکتر می شود، مقدار $\lambda^2$ بزرگتر انتخاب می شود و در نقاط دور، مقدار آن صفر انتخاب می شود. با این حال، پیاده سازی این روشها، بصورت کاملا توزیع شده برای سیستم های چند عاملی هنوز در جائی مورد بررسی قرار نگرفته است.

## ۳- تحلیل همگرائی سیستم متمرکز (۶)

برای تحلیل اثر ضریب میرائی $\lambda^2$ در ویژگیهای پایداری سیستم کاملا متمرکز (۶)، از تجزیه SVD ماتریس ژاکوبین استفاده می کنیم. ماتریس ژاکوبین $J$ می تواند بصورت زیر نوشته شود

$$J = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^{r}\bar{\sigma}_i u_i v_i^T \qquad (۷)$$

که در آن، $r \leq m$ ، $U_{m\times m}$ ماتریس ارتونرمال بردارهای سینگولار خروجی $u_i$ ، $V_{nq\times nq}$ ماتریس ارتونرمال بردارهای سینگولار ورودی $v_i$ ، و $\Sigma_{m\times nq} = [S \quad \mathbf{0}]$ که در آن، زیر ماتریس قطری $S_{m\times m}$ شامل مقادیر سینگولار $\bar{\sigma}_i$ ماتریس $J$ می باشد. بردار سرعت جمعی $\dot{x}$ که منجر به



[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.4.5.9 ]

بردار سرعت صفر در فضای حالت رفتار جمعی می شود بردار سرعت فضای پوچی نامیده می شود. بردار سرعت $\dot{\sigma}$ در فضای حالت رفتار جمعی که می تواند توسط بردار سرعت جمعی ممکن، تولید شود، بردار سرعت قابل تحقق در فضای حالت رفتار جمعی نامیده می شود. از سیستم (۶) داریم

$$\dot{\sigma} = J\dot{x} = JJ^T(JJ^T + \lambda^2\mathbf{I}_m)^{-1}(\dot{\sigma}_d + \Lambda(\sigma_d - \sigma)) \qquad (۸)$$

لذا دینامیک خطای تعقیب در فضای رفتار جمعی بصورت زیر است

$$\dot{e}_\sigma = -JJ^T(JJ^T + \lambda^2\mathbf{I}_m)^{-1}\Lambda(e_\sigma) + \left(I - JJ^T(JJ^T + \lambda^2\mathbf{I}_m)^{-1}\right)\dot{\sigma}_d \qquad (۹)$$

با توجه به (۷)، داریم $JJ^T(JJ^T + \lambda^2\mathbf{I}_m)^{-1} = \sum_{i=1}^{r}\frac{\bar{\sigma}_i^2}{\bar{\sigma}_i^2 + \lambda^2}u_i u_i^T$.

با در نظر گرفتن تابع $W = \frac{1}{2}e_\sigma^T e_\sigma$ بعنوان تابع لیاپانوف کاندید، مشتق آن در امتداد پاسخهای سیستم خطای (۹)، بصورت زیر خواهد بود

$$\dot{W} = -e_\sigma^T JJ^T(JJ^T + \lambda^2\mathbf{I}_m)^{-1}\Lambda(e_\sigma) + e_\sigma^T\left(I - JJ^T(JJ^T + \lambda^2\mathbf{I}_m)^{-1}\right)\dot{\sigma}_d$$

فرض می کنیم که ماتریس ژاکوبین تمام رتبه باشد، یعنی $r = m$ باشد. در اینصورت داریم

$$\dot{W} \le -\|\Lambda\|\frac{\bar{\sigma}_m^2}{\bar{\sigma}_m^2 + \lambda^2}\|e_\sigma\|^2 + \|e_\sigma\|\|\dot{\sigma}_d\|$$

که در آن، $\bar{\sigma}_m$ کوچکترین مقدار سینگولار غیر صفر ماتریس $J$ است. فرض می کنیم $c = \|\Lambda\|\frac{\bar{\sigma}_m^2}{\bar{\sigma}_m^2 + \lambda^2}$، $0 < \theta < 1$، و $\|\dot{\sigma}_d\| \le \delta$ باشد. در اینصورت داریم

$$\dot{W} \le -c\|e_\sigma\|^2 + \delta\|e_\sigma\| = -(1-\theta)c\|e_\sigma\|^2 - \theta c\|e_\sigma\|^2 + \delta\|e_\sigma\| \le -(1-\theta)c\|e_\sigma\|^2, \quad \text{when } \|e_\sigma\| \ge \frac{\delta}{\theta c}$$

لذا با استفاده از لم مقایسه، می توان نتیجه گرفت که

$$\|e_\sigma(t)\| \le \exp\left(-(1-\theta)c(t-t_0)\right)\|e_\sigma(t_0)\| + \frac{\delta}{\theta c},\ t \ge t_0 \qquad (۱۰)$$

وقتی که $\dot{\sigma}_d = 0$ باشد، خطای حالت ماندگار در فضای حالت رفتار جمعی، صفر خواهد شد. بنابراین وقتی ماتریس ژاکوبین تمام رتبه باشد، دینامیک (۸) در فضای حالت رفتار جمعی، پایدار ورودی-به-حالت جامع است. اما برای نتیجه گیری در مورد کراندار بودن حالت جمعی $x$، لازم است که تابع جمعی $\sigma$ نسبت به حالت جمعی، سره یا بصورت شعاعی نامحدود باشد.

اکنون فرض می کنیم که ماتریس $J$ در بعضی نقاط در حین تکامل شبکه، سینگولار می شود، یعنی $r < m$ می شود. در اینصورت فضای قابل تحقق برای بردارهای سرعت فضای حالت رفتار جمعی، یک فضای $r$-بُعدی است که توسط $r$ بردار سینگولار خروجی اول یعنی بردارهای $u_1,\cdots,u_r$ پویش می شود و فضای پوچی ماتریس $J$ یک فضای $n-r$-بُعدی است که توسط $n-r$ بردار سینگولار ورودی آخر یعنی $v_{r+1},\cdots,v_n$ پویش می شود. با توجه به اینکه فضای حالت رفتار جمعی یک فضای $m$-بُعدی است، همواره داریم $\dot{\sigma}_d + \Lambda(\sigma_d - \sigma) = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i$، که در آن، $\alpha_i \in \mathbb{R}$ است. در اینصورت، با توجه به (۷)، داریم

$$\dot{x} = J^T(JJ^T + \lambda^2\mathbf{I}_m)^{-1}(\dot{\sigma}_d + \Lambda(\sigma_d - \sigma)) = \sum_{i=1}^{r}\frac{\bar{\sigma}_i\,\alpha_i}{\bar{\sigma}_i^2 + \lambda^2}v_i$$
$$\dot{\sigma} = \sum_{i=1}^{r}\frac{\bar{\sigma}_i^2\alpha_i}{\bar{\sigma}_i^2 + \lambda^2}u_i \qquad (۱۱)$$

ملاحظه می شود که اگر $\dot{\sigma}_d, \sigma_d$ بگونه ای باشند که در این نطقه سینگولار، $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$ باشد، آنگاه $\dot{x} = 0$ و $\dot{\sigma} = 0$ خواهد بود و سیستم در این نطقه سینگولار، باقی می ماند. اما اگر $\dot{\sigma}_d, \sigma_d$ بگونه ای باشند که حداقل یکی از مقادیر $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ غیر صفر باشند، آنگاه سیستم از این نقطه سینگولار عبور می کند. معمولا برای یک تابع رفتار جمعی معین، آرایشهای فضای حالت جمعی که منجر به سینگولار شدن ماتریس ژاکوبین آن می شود، قابل تعیین و شناسائی است. لذا توانائی ماتریس مثبت معین $\Lambda$ در اینکه باعث شود عبارت $\dot{\sigma}_d + \Lambda(\sigma_d - \sigma)$، (وقتی آرایش سینگولار مدنظر نباشد) همواره دارای مولفه غیر صفری در امتداد حداقل یکی از بردارهای سینگولار خروجی $u_1,\cdots,u_r$ داشته باشد، قابل بررسی است. با فرض $W = \frac{1}{2}e_\sigma^T e_\sigma$، مشتق آن در راستای پاسخهای سیستم خطای (۹) عبارت است از

$$\dot{W} = -e_\sigma^T\sum_{i=1}^{r}\frac{\bar{\sigma}_i^2}{\bar{\sigma}_i^2 + \lambda^2}u_i u_i^T\Lambda(e_\sigma) + e_\sigma^T\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda^2}{\bar{\sigma}_i^2 + \lambda^2}u_i u_i^T\dot{\sigma}_d$$

با فرض $e_\sigma = \sum_{i=1}^{m}\beta_i u_i$، داریم

$$\dot{W} = -\sum_{i=1}^{r}\frac{\bar{\sigma}_i^2\beta_i}{\bar{\sigma}_i^2 + \lambda^2}u_i^T\Lambda e_\sigma + e_\sigma^T\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda^2}{\bar{\sigma}_i^2 + \lambda^2}u_i u_i^T\dot{\sigma}_d$$

لذا در نقاط سینگولار، اگر $\Lambda e_\sigma$ دارای مولفه غیر صفر در راستای حداقل یکی از بردارهای سینگولار خروجی قابل تحقق $u_1,\cdots,u_r$ باشد، بعنوان مثال در راستای بردار $u_l$ بازای کوچکترین $l \in \{1,\cdots,r\}$، آنگاه داریم

$$\dot{W} \le -\|\Lambda\|\frac{\bar{\sigma}_l^2}{\bar{\sigma}_l^2 + \lambda^2}\|e_\sigma\|^2 + \|e_\sigma\|\|\dot{\sigma}_d\|$$

در اینصورت، با توجه به حالتی که $r = m$ بود، می توان نتیجه گرفت که اگر در نقاط سینگولار ماتریس ژاکوبین، $\Lambda e_\sigma$ دارای مولفه غیر صفر در راستای حداقل یکی از بردارهای سینگولار خروجی قابل تحقق باشد، آنگاه سیستم (۸) پایدار ورودی-به-حالت جامع است. اگر چنین تضمینی وجود نداشته باشد، فقط می توان گفت که سیستم (۸) در



[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.4.5.9 ]

فضای حالت رفتار جمعی منهای نقاط سینگولار ماتریس ژاکوبین تابع رفتار جمعی، پایدار ورودی-به-حالت است.

## ۴- غیرمتمرکزسازی سیستم (۶)

دینامیک (۶) یک رابطه کاملا متمرکز می باشد و اگر قرار باشد هر عامل شبکه، مسیر مطلوب خود را، خود محاسبه نماید باید به تمام حالتهای تمام عاملهای شبکه دسترسی داشته باشد. بمنظور پیاده سازی توزیع شده کنترل کننده فوق، با شکل خاصی که برای $\sigma = f(x)$ در (۱) فرض کرده ایم، می توانیم از پروتکلهای اجماع میانگین دینامیکی توسعه داده شده در [۱۹] استفاده کنیم. برای ژاکوبین $\sigma$ داریم.

$$J = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x_2)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1(x_n)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2(x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x_2)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2(x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m(x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m(x_2)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m(x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad (۱۲)$$

که در آن، $\frac{\partial g_j(x_i)}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_j(x_i)}{\partial x_i^1} & \cdots & \frac{\partial g_i(x_i)}{\partial x_i^q} \end{bmatrix}$. در اینصورت $JJ^T$ عبارت است از

$$JJ^T = \frac{1}{n^2}\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_1(x_i)}{\partial x_i}\frac{\partial g_1^T(x_i)}{\partial x_i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_1(x_i)}{\partial x_i}\frac{\partial g_m^T(x_i)}{\partial x_i} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_m(x_i)}{\partial x_i}\frac{\partial g_1^T(x_i)}{\partial x_i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_m(x_i)}{\partial x_i}\frac{\partial g_m^T(x_i)}{\partial x_i} \end{bmatrix} \qquad (۱۳)$$

هر عامل شبکه برای محاسبه بردار سرعت مطلوب متناظر خود، باید بتواند ماتریس فوق را محاسبه کند. اما المانهای ماتریس فوق وابسته به حالت جمعی شبکه است و هر عامل شبکه مجاز به ارسال اطلاعات محلی خود به عاملهای همسایه و در نتیجه، دریافت اطلاعات محلی همسایه های خود می باشد. با توجه به این جریان اطلاعات بر روی یک شبکه ارتباطی وابسته به حالت و نوع المانهای ماتریس فوق که بصورت جمع توابعی از متغیرهای مستقل می باشند، می توان از پروتکل اجماع میانگین دینامیکی برای محاسبه المانهای ماتریس فوق استفاده کرد. لذا با پیاده سازی یک پروتکل اجماع میانگین دینامیکی متناظر به هر المان، هر عامل می تواند تخمینی از المانهای این ماتریس داشته باشد. ماتریس فوق یک ماتریس متقارن $m$ در $m$ است لذا دارای $m(m+1)/2$ المان مستقل می باشد. بنابراین به تعداد $m(m+1)/2$ پروتکل اجماع میانگین دینامیکی لازم داریم. بعنوان مثال، برای پروتکل متناظر برای تخمین المان $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_l(x_i)}{\partial x_i}\frac{\partial g_h^T(x_i)}{\partial x_i}$ در ماتریس $JJ^T$، ورودی عامل $i$ام به این پروتکل بصورت $n\frac{\partial g_l(x_i)}{\partial x_i}\frac{\partial g_h^T(x_i)}{\partial x_i}$ خواهد بود که کاملا توسط آن قابل اندازه گیری و محاسبه است. فرض می کنیم که در نهایت، تخمین عامل $i$ام از ماتریس $JJ^T$ بصورت $(JJ^T)_i$ باشد. همچنین برای پیاده سازی (۶)، هر عامل باید بتواند تخمین درستی از کمیتهای رفتار جمعی نیز داشته باشد، یعنی $\sigma = f(x)$. با توجه به فرم خاص $\sigma = f(x)$ در (۱)، این مقادیر نیز می توانند با برپائی پروتکلهای اجماع میانگین دینامیکی بصورت توزیع شده محاسبه شوند. بعنوان مثال، برای پروتکل متناظر برای تخمین کمیت $f_k(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_k(x_i)$ ، ورودی عامل $i$ام به این پروتکل، بصورت $g_k(x_i)$ خواهد بود. در نهایت فرض می کنیم که تخمین عامل $i$ام از $\sigma = f(x)$، بصورت $\hat{\sigma}_i$ باشد. لذا مشاهده می شود، که با بنا نهادن پروتکلهای اجماع میانگین دینامیکی، تمام عاملها فقط بر اساس اطلاعات محلی در دسترس، می توانند مسیرهای مطلوب خود را تولید کنند بگونه ای که با تعقیب این مسیرها، رفتار جمعی مطلوب محقق خواهد شد. در اینصورت، پیاده سازی توزیع شده کنترل کننده (۶) برای عامل $i$ام، بصورت زیر خواهد بود.

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_1(x_i)}{\partial x_i}\right)^T & \left(\frac{\partial g_2(x_i)}{\partial x_i}\right)^T & \cdots & \left(\frac{\partial g_m(x_i)}{\partial x_i}\right)^T \end{bmatrix} \qquad (۱۴)$$
$$\left((JJ^T)_i + \lambda^2 \mathbf{I}_m\right)^{-1}\left(\dot{\sigma}_d + \Lambda(\sigma_d - \hat{\sigma}_i)\right),\ \ i = 1,\cdots,n$$

## ۵- الگوریتم توزیع شده زمان-گسسته و تحلیل همگرائی آن

اگر دینامیک عاملها بصورت زمان-پیوسته، بصورت $\dot{x}_i = u_{ic}$ باشد و تولید بردار کنترلی $u_{ic}$ در زمانهای گسسته $\{t_0 + k\Delta T \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ انجام شود، روش فوق بصورت زیر پیاده سازی می شود. فرض می شود که بصورت متناوب، در یک لحظه پروتکلهای اجماع میانگین دینامیکی اجرا شوند، و بعد از محاسبه توزیع شده متغیرهای جمعی لازم و در نتیجه محاسبه بردار کنترلی لازم، در لحظه بعد، بردارهای کنترلی محاسبه شده اعمال شوند. لذا اگر در لحظه $t_c \in \{t_0 + s\Delta T \mid s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$، پروتکلهای اجماع میانگین دینامیکی اجرا شوند، فرض می شود که در فاصله زمانی $[t_c, t_c + \Delta T)$، $\dot{x}_i = \mathbf{0}$ است. همچنین فرض می شود که فاصله زمانی $\Delta T$ برای همگرائی پروتکلهای اجماع میانگین به مقدار مطلوب، در بدترین شرائط همبندی شبکه ارتباطی و شرائط اولیه شبکه، کافی است. برای همگرائی در زمان محدود $\Delta T$، می توان از پروتکلهای غیر خطی استفاده کرد. در اینصورت در انتهای فاصله زمانی $[t_c, t_c + \Delta T)$، تمام عاملهای شبکه، متغیرهای جمعی لازم را برای پیاده سازی (۶) بصورت توزیع شده



[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.4.5.9 ]

می دانند، لذا می توانند بردار سرعت مطلوب خود را از رابطه زیر محاسبه کنند. این بردار سرعت در فاصله زمانی $[t_c+\Delta T, t_c+2\Delta T)$ معتبر خواهد بود.

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix}\left(\frac{\partial g_1(x_i)}{\partial x_i}\right)^T & \left(\frac{\partial g_2(x_i)}{\partial x_i}\right)^T & \cdots & \left(\frac{\partial g_m(x_i)}{\partial x_i}\right)^T\end{bmatrix} \\ \left(JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}\begin{pmatrix}\sigma_d(t_c+2\Delta T)-\sigma_d(t_c+\Delta T)\\ +(\Delta T)\Lambda(\sigma_d(t_c+\Delta T)-\sigma(t_c+\Delta T))\end{pmatrix} \quad (۱۵)$$

$i=1,\cdots,n$

در رابطه فوق، فرض شده است که خطای محاسبات توزیع شده ناشی از اجرای پروتکلهای اجماع میانگین، بسیار ناچیز و قابل چشم پوشی است که با بکار بردن پروتکلهای همگرای زمان-محدود، فرض درستی است. در اینصورت بردار سرعت جمعی شبکه در فاصله زمانی $[t_c+\Delta T, t_c+2\Delta T)$ بصورت زیر خواهد بود

$$\dot{x} = J^T(t_c+\Delta T)\left(J(t_c+\Delta T)J^T(t_c+\Delta T)+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}\times \\ \begin{pmatrix}\sigma_d(t_c+2\Delta T)-\sigma_d(t_c+\Delta T)\\ +(\Delta T)\Lambda(\sigma_d(t_c+\Delta T)-\sigma(t_c+\Delta T))\end{pmatrix} \quad (۱۶)$$

دینامیک فوق را می توان در زمان-گسسته، با استفاده از اندیس $k$، بصورت زیر باز نویسی کرد

$$x(k+1)-x(k) = J^T(k)\left(J(k)J^T(k)+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}\times \\ \left(\sigma_d(k+1)-\sigma_d(k)+(\Delta T)\Lambda(\sigma_d(k)-\sigma(k))\right) \quad (۱۷)$$

لذا داریم

$$J(k)\left(x(k+1)-x(k)\right) = J(k)J^T(k)\left(J(k)J^T(k)+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}\times \\ \left(\sigma_d(k+1)-\sigma_d(k)+(\Delta T)\Lambda(\sigma_d(k)-\sigma(k))\right)$$

با توجه به $\dot{\sigma}=J\dot{x}$، فرض می کنیم

$$\left(\sigma(k+1)-\sigma(k)\right) = J(k)\left(x(k+1)-x(k)\right)+\delta(k+1)$$

که با توجه به پیوسته بودن ماتریس ژاکوبین $J$، خطای تقریب $\delta$ کراندار خواهد بود، لذا فرض می شود که بازای یک $K>0$، $\|\delta\|\le K$ باشد، در اینصورت خواهیم داشت

$$\sigma(k+1)-\sigma(k) = J(k)J^T(k)\left(J(k)J^T(k)+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}\times \\ \left(\sigma_d(k+1)-\sigma_d(k)+\Lambda(\sigma_d(k)-\sigma(k))\Delta T\right)+\delta(k+1) \quad (۱۸)$$

برای تحلیل ویژگیهای همگرائی سیستم گسسته فوق، فرض می کنیم که $\lambda^2=0$ باشد. در اینصورت خواهیم داشت

$$\sigma(k+1)-\sigma(k) = \sigma_d(k+1)-\sigma_d(k)+ \\ (\Delta T)\Lambda(\sigma_d(k)-\sigma(k))+\delta(k+1)$$

بنابراین دینامیک بردار خطای تعقیب، $e_\sigma=\sigma_d-\sigma$، بصورت زیر خواهد بود

$$e_\sigma(k+1) = \left(I-(\Delta T)\Lambda\right)e_\sigma(k)-\delta(k+1) \quad (۱۹)$$

لذا برای اینکه خطای تعقیب، پایدار باشد باید مقادیر ویژه ماتریس $I-(\Delta T)\Lambda$ درون دایره واحد قرار داشته باشند، که با توجه به مثبت معین بودن ماتریس $\Lambda$، لازم و کافی است که مقادیر ویژه $\Lambda$ کوچکتر از $2/\Delta T$ باشند. در اینصورت، بازای خطای تقریب کراندار $\|\delta\|\le K$، خطای تعقیب در فضای حالت رفتار جمعی، پایدار کراندار خواهد بود، یا بعبارتی، سیستم خطای تعقیب رفتار جمعی (۱۹)، پایدار ورودی-به-حالت خواهد بود. حالت $\lambda^2>0$ برای سیستم زمان-پیوسته (۶) بررسی خواهد شد که شبیه همان مراحل تحلیل می تواند در مورد سیستم (۱۸) نیز انجام شود که در نهایت نشان دهنده پایدار ورودی-به-حالت سیستم (۱۷) می باشد. یکی از مزایای الگوریتم (۱۷)، این است که ویژگیهای پایداری آن از ویژگیهای پایداری پروتکلهای اجماع میانگین مستقل است. ملاحظه می شود که هر چه فاصله زمانی $\Delta T$ کوچکتر باشد، خطای تقریب $\delta$ کوچکتر خواهد شد، و لذا خطای تعقیب نیز طبق (۱۹) کوچکتر خواهد شد.

## ۶- تحلیل همگرائی سیستم توزیع شده (۱۴)

در این قسمت، به تحلیل سیستم توزیع شده (۱۴) خواهیم پرداخت. با نمایش ماتریس $J_i$ بصورت زیر

$$J_i = \begin{bmatrix}\left(\frac{\partial g_1(x_i)}{\partial x_i}\right)^T & \left(\frac{\partial g_2(x_i)}{\partial x_i}\right)^T & \cdots & \left(\frac{\partial g_m(x_i)}{\partial x_i}\right)^T\end{bmatrix}^T \quad (۲۰)$$

سیستم (۱۴) را می توان بصورت زیر بازنویسی کرد

$$\dot{x}_i = J_i^T\left((JJ^T)_i+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}\left(\dot{\sigma}_d+\Lambda(\sigma_d-\hat{\sigma}_i)\right), i=1,\cdots,n \quad (۲۱)$$

و معادله $\dot{\sigma}$ بصورت زیر خواهد بود

$$\dot{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} J_i J_i^T\left((JJ^T)_i+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}\left(\dot{\sigma}_d+\Lambda(\sigma_d-\hat{\sigma}_i)\right) \quad (۲۲)$$

فرض می کنیم که ورودیهای پروتکل اجماع میانگین دینامیکی برای محاسبه توزیع شده $JJ^T$، بصورت ماتریسهای $J_1J_1^T,\cdots,J_nJ_n^T$ باشد، بعبارتی دیگر،

$$U_e = \begin{bmatrix}\left(J_1J_1^T\right)^T & \cdots & \left(J_nJ_n^T\right)^T\end{bmatrix}^T \quad (۲۳)$$

خطای تخمین عامل $i$ام در محاسبه $JJ^T$ را با ماتریس $E_i$ نشان می دهیم. در اینصورت داریم

$$(JJ^T)_i = JJ^T+E_i \quad (۲۴)$$

و ماتریس خطای کل را بصورت $E=\begin{bmatrix}E_1^T & \cdots & E_n^T\end{bmatrix}^T$ نشان می دهیم. در اینصورت با توجه به نتایج ارائه شده در [۱۹] می توان نتیجه گرفت که با فرض شرائط اولیه صفر برای تمام تخمینگرها، بازای یک ثابت مثبت $c_e$ داریم

$$\|E_i\|\le\|E\|\le c_e\|U_e\| \quad (۲۵)$$



[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.4.5.9 ]

برای $\frac{d}{dt}J_iJ_i^T$ داریم $\frac{d}{dt}J_iJ_i^T=\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_i^2}J_i^T+J_i\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_i^2}\right)^T\right)\dot{x}_i$ . با توجه به شکل خاص (۱) برای $\sigma=f(x)$، فرض می کنیم که بیشترین مقدار $\left\|\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_i^2}J_i^T+J_i\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_i^2}\right)^T\right\|$ در فضای کاری مورد نظر در فضای حالت محلی، باندازه $a$ باشد، یعنی

$$\max_{\text{workspace of } x_i}\left\|\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_i^2}J_i^T+J_i\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_i^2}\right)^T\right\|=a \qquad (۲۶)$$

در اینصورت برای $\dot{U}_e$ داریم $\|\dot{U}_e\|\le a\|\dot{x}\|$، لذا

$$\|E_i\|\le\|E\|\le c_e\|\dot{U}_e\|\le ac_e\|\dot{x}\| \qquad (۲۷)$$

همچنین فرض می کنیم ورودیهای پروتکل اجماع میانگین دینامیکی برای محاسبه توزیع شده $\sigma$، بصورت بردارهای زیر باشند.

$$u_{1e}=[g_1(x_1)\ \cdots\ g_m(x_1)]^T,\cdots,u_{ne}=[g_1(x_n)\ \cdots\ g_m(x_n)]^T$$

همچنین فرض می شود که $U_e'=\left[u_{1e}^T\ \cdots\ u_{ne}^T\right]^T$. خطای تخمین عامل $i$ام در محاسبه $\sigma$ را با بردار $e_i$ نشان می دهیم. در اینصورت داریم

$$\hat{\sigma}_i=\sigma-e_i \qquad (۲۸)$$

و بردار خطای کل را بصورت $e=\left[e_1^T\ \cdots\ e_n^T\right]^T$ نشان می دهیم. با فرض شرائط اولیه صفر برای تمام تخمینگرها، بازای یک ثابت مثبت $c_e'$ داریم

$$\|e_i\|\le\|e\|\le c_e'\|\dot{U}_e'\| \qquad (۲۵)$$

برای $\frac{d}{dt}u_{ie}=J_i\dot{x}_i$، فرض می کنیم

$$\max_{\text{workspace of } x_i}\|J_i(x_i)\|=b \qquad (۲۶)$$

در اینصورت، داریم

$$\|e_i\|\le\|e\|\le c_e'b\|\dot{x}\| \qquad (۲۷)$$

با توجه به (۲۸) و (۲۴)، سیستمهای (۲۱) و (۲۲) را می توانیم برحسب خطاهای تخمین پروتکلهای اجماع میانگین دینامیکی بصورت زیر بنویسیم.

$$\dot{x}_i=J_i^T\left(JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m+E_i\right)^{-1}\left(\dot{\sigma}_d+\Lambda(\sigma_d-\sigma)+\Lambda e_i\right) \qquad (۲۸)$$
$$,i=1,\cdots,n$$

$$\dot{\sigma}=\sum_{i=1}^{n}J_iJ_i^T\left(JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m+E_i\right)^{-1}\left(\dot{\sigma}_d+\Lambda(\sigma_d-\sigma)+\Lambda e_i\right) \qquad (۲۹)$$

مشکل عمده سیستم های فوق بعلت حضور خطاهای تخمین، در عبارت $\left(JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m+E_i\right)^{-1}$ خود را نشان می دهد. ماتریس $JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m$، همواره معکوس پذیر است اما حضور ماتریس خطای $E_i$ که باعث انحراف این ماتریس می شود ممکن است باعث سینگولار شدن ماتریس مذکور شود، چون هیچ نوع ویژگی خاصی برای ماتریسهای خطای $E_i$ مترتب نیست (جز اینکه $\sum_{i=1}^{n}E_i=\mathbf{0}$ است). لذا با توجه به اینکه ماتریس $JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m$ ، غیر سینگولار است، شرط کافی برای اینکه ماتریس $JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m+E_i$ معکوس پذیر باشد این است که

$$\|E_i\|<1\Big/\left\|\left(JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}\right\| \qquad (۳۰)$$

با توجه به (۷)، داریم $\left\|\left(JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}\right\|\le1/\lambda^2$. لذا اگر بازای یک $0<\varepsilon<1$، فرض کنیم که

$$\|E_i\|\le\varepsilon\lambda^2 \qquad (۳۱)$$

آنگاه شرط (۳۰) برآورده می شود. با برقراری شرط (۳۰)، سیستم (۲۸) را می توان بصورت زیر نوشت

(۳۲)

$$\begin{aligned}\dot{x}_i=&J_i^T\left(JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}\left(\dot{\sigma}_d+\Lambda(\sigma_d-\sigma)\right)+\\&+J_i^T\left(JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}\Lambda e_i+\\&+J_i^T\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\left(JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}E_i\right)^k\right\}\left(JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}\times\\&\left(\dot{\sigma}_d+\Lambda(\sigma_d-\sigma)\right)+J_i^T\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\left(JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}E_i\right)^k\right\}\times\\&\left(JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}\Lambda e_i\qquad,i=1,\cdots,n\end{aligned}$$

با توجه به فرض $\|E_i\|\le\varepsilon\lambda^2$ و شرط (۳۰)، می توان نتیجه گرفت که

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\left(JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}E_i\right)^k\right\|\le\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \qquad (۳۳)$$

با فرض $\|\Lambda\|=K$، از (۳۲) داریم

$$\|\dot{x}_i\|\le\frac{b}{\lambda^2}\frac{1}{1-\varepsilon}\left(\|\dot{\sigma}_d\|+K\|e_\sigma\|+Kc_e'b\|\dot{x}\|\right),\ i=1,\cdots,n \qquad (۳۴)$$

لذا داریم

$$\|\dot{x}\|\le\sqrt{n}\frac{b}{\lambda^2}\frac{1}{1-\varepsilon}\left(\|\dot{\sigma}_d\|+K\|e_\sigma\|+Kc_e'b\|\dot{x}\|\right) \qquad (۳۵)$$

لذا بافرض $\gamma_1=\frac{\sqrt{n}Kc_e'b^2}{\lambda^2(1-\varepsilon)}$، داریم

$$\|\dot{x}\|\le\gamma_1\|\dot{x}\|+\sqrt{n}\frac{b}{\lambda^2}\frac{1}{1-\varepsilon}\left(\|\dot{\sigma}_d\|+K\|e_\sigma\|\right) \qquad (۳۶)$$

باید $\gamma_1<1$ باشد که در اینصورت خواهیم داشت

$$\|\dot{x}\|\le\sqrt{n}\frac{b}{\lambda^2}\frac{1}{1-\varepsilon}\frac{1}{1-\gamma_1}\left(\|\dot{\sigma}_d\|+K\|e_\sigma\|\right) \qquad (۳۷)$$

با برقراری شرط (۳۰)، دینامیک خطای $e_\sigma$ برای سیستم (۲۹) را می توان بصورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned}\dot{e}_\sigma=&-M_1\left(\dot{\sigma}_d+\Lambda e_\sigma\right)-M_2+\\&M_3\left(JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}\left(\dot{\sigma}_d+\Lambda e_\sigma\right)+M_4+\dot{\sigma}_d\end{aligned} \qquad (۳۸)$$

که در آن،



[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.4.5.9 ]

$$M_1 = JJ^T\left(JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}$$
$$M_2 = \sum_{i=1}^{n} J_i J_i^T\left(JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}\Lambda e_i$$
$$M_3 = \sum_{i=1}^{n} J_i J_i^T\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\left(JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}E_i\right)^k\right)$$
$$M_4 = \sum_{i=1}^{n}\left\{\begin{array}{c} J_i J_i^T\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\left(JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}E_i\right)^k\right)\times \\ \left(JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}\Lambda e_i \end{array}\right\}$$

با در نظر گرفتن تابع $W=\frac{1}{2}e_\sigma^T e_\sigma$ بعنوان تابع لیاپانوف کاندید، مشتق آن در راستای پاسخهای سیستم (۳۸) بصورت زیر خواهد بود

(۳۹)

$$\begin{aligned}\dot{W} =& -e_\sigma^T M_1\Lambda e_\sigma - e_\sigma^T M_1\dot{\sigma}_d - e_\sigma^T M_2 + e_\sigma^T M_3\left(JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}\dot{\sigma}_d \\ &+ e_\sigma^T M_3\left(JJ^T+\lambda^2\mathbf{I}_m\right)^{-1}\Lambda e_\sigma + e_\sigma^T M_4 + e_\sigma^T\dot{\sigma}_d\end{aligned}$$

فرض می کنیم که در حین تکامل شبکه، ماتریس ژاکوبین، تمام رتبه باقی می ماند، لذا $\|M_1\|\le\bar{\sigma}_m^2/\left(\bar{\sigma}_m^2+\lambda^2\right)$. همچنین داریم $\|M_2\|\le b^2K\|e\|/\lambda^2$، $\|M_4\|\le b^2\varepsilon K\|e\|/\left(\lambda^2(1-\varepsilon)\right)$، $\|M_3\|\le b^2\varepsilon/(1-\varepsilon)$. لذا برای $\dot{W}$، می توان نوشت

(۴۰)

$$\begin{aligned}\dot{W} \le& -\underbrace{\left(\frac{\bar{\sigma}_m^2K}{\bar{\sigma}_m^2+\lambda^2}-\frac{b^2\varepsilon K}{\lambda^2(1-\varepsilon)}\right)}_{c_1}\|e_\sigma\|^2 + \\ &\|e_\sigma\|\left(\underbrace{\left(\frac{b^2K}{\lambda^2}+\frac{b^2\varepsilon K}{\lambda^2(1-\varepsilon)}\right)}_{c_2}\|e\|+\underbrace{\left(\frac{b^2\varepsilon}{\lambda^2(1-\varepsilon)}-\frac{\bar{\sigma}_m^2}{\bar{\sigma}_m^2+\lambda^2}+1\right)}_{c_3}\|\dot{\sigma}_d\|\right)\end{aligned}$$

از (۲۷) داریم $\|e\|\le c_e'b\|\dot{x}\|$. همچنین فرض شده است که $\|E_i\|\le\varepsilon\lambda^2$ باشد، اما داریم $\|E_i\|\le ac_e\|\dot{x}\|$. لذا باید داشته باشیم

$$\|\dot{x}\|\le\varepsilon\lambda^2/(ac_e) \qquad (۴۱)$$

در اینصورت $\|e\|\le c_e'b\varepsilon\lambda^2/(ac_e)$ خواهد بود. همچنین برای اینکه ضریب $c_1>0$ باشد، باید داشته باشیم

$$\frac{\bar{\sigma}_m^2K}{\bar{\sigma}_m^2+\lambda^2}>\frac{b^2\varepsilon K}{\lambda^2(1-\varepsilon)} \qquad (۴۲)$$

دراینصورت از (۴۰) خواهیم داشت

$$\dot{W} \le -c_1\|e_\sigma\|^2+\|e_\sigma\|\left(c_2\frac{c_e'b\varepsilon\lambda^2}{ac_e}+c_3\|\dot{\sigma}_d\|\right) \qquad (۴۳)$$

همچنین فرض می کنیم که $\|\dot{\sigma}_d\|\le\delta$ باشد. در نتیجه داریم

$$\dot{W} \le -c_1\|e_\sigma\|^2+\underbrace{\left(c_2\frac{c_e'b\varepsilon\lambda^2}{ac_e}+c_3\delta\right)}_{c_4}\|e_\sigma\| \qquad (۴۴)$$

در اینصورت خطای تعقیب $e_\sigma$ کراندار خواهد بود، طوریکه اگر شرائط اولیه خطای تعقیب $e_\sigma$، صفر باشد آنگاه بازای یک $0<\theta<1$، خواهیم داشت

$$\|e_\sigma\|\le c_4/(\theta c_1) \qquad (۴۵)$$

در اینصورت از (۳۷) می توان نتیجه گرفت که

$$\|\dot{x}\|\le\sqrt{n}\frac{b}{\lambda^2}\frac{1}{1-\varepsilon}\frac{1}{1-\gamma_1}\left(\delta+K\frac{c_4}{\theta c_1}\right) \qquad (۴۶)$$

لذا برای برقراری (۴۱)، باید داشته باشیم

$$\sqrt{n}\frac{b}{\lambda^2}\frac{1}{1-\varepsilon}\frac{1}{1-\gamma_1}\left(\delta+K\frac{c_4}{\theta c_1}\right)\le\frac{\varepsilon\lambda^2}{ac_e} \qquad (۴۷)$$

لذا شرائطی که باید برقرار باشد تا پایداری کراندار سیستم خطای تعقیب در فضای حالت رفتار جمعی (۳۸) تضمین شود عبارتند از

$$\begin{aligned}&\frac{\bar{\sigma}_m^2K}{\bar{\sigma}_m^2+\lambda^2}>\frac{b^2\varepsilon K}{\lambda^2(1-\varepsilon)} \\ &\sqrt{n}\frac{b}{\lambda^2}\frac{1}{1-\varepsilon}\frac{1}{1-\gamma_1}\left(\delta+K\frac{c_4}{\theta c_1}\right)\le\frac{\varepsilon\lambda^2}{ac_e}\end{aligned} \qquad (۴۸)$$

## ۷- کنترل آرایش گروهی از رباتهای سیار توسط کنترل توزیع شده ممانهای اینرسی آرایش

ممانهای اینرسی یک گروه می تواند بعنوان مدلی برای آرایش گروه در نظر گرفته شود. در اینجا، ممانهای اینرسی اول و دوم در فضای دو بعدی بعنوان نمونه ارائه می شود. در اینصورت تابع $f(x)$ بصورت زیر خواهد بود.

$$f(x)=\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \sigma_1^2\\ \sigma_2^2\\ \sigma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^1\\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^1-\mu_1\right)^2\\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-\mu_2\right)^2\\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^1-\mu_1\right)\left(x_i^2-\mu_2\right)\end{bmatrix} \qquad (۴۹)$$

ماتریس ژاکوبین محلی $J_i$ در (۲۰) عبارت است از

$$J_i=\begin{bmatrix}\frac{1}{n} & 0\\ 0 & \frac{1}{n}\\ \frac{2(n-1)}{n^2}\left(x_i^1-\mu_1\right) & 0\\ 0 & \frac{2(n-1)}{n^2}\left(x_i^2-\mu_2\right)\\ \frac{(n-1)}{n^2}\left(x_i^2-\mu_2\right) & \frac{(n-1)}{n^2}\left(x_i^1-\mu_1\right)\end{bmatrix} \qquad (۵۰)$$

و ماتریس ژاکوبین $J$ عبارت است از $J=\begin{bmatrix}J_1 & \cdots & J_n\end{bmatrix}$ و ماتریس $JJ^T$ بصورت زیر است

(۵۱)

[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.4.5.9 ]

$$JJ^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{n} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{n} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{4(n-1)^2}{n^3}\sigma_1^2 & 0 & \frac{2(n-1)^2}{n^3}\sigma_{12}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{4(n-1)^2}{n^3}\sigma_2^2 & \frac{2(n-1)^2}{n^3}\sigma_{12}\\ 0 & 0 & \frac{2(n-1)^2}{n^3}\sigma_{12} & \frac{2(n-1)^2}{n^3}\sigma_{12} & \frac{(n-1)^2}{n^3}\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)\end{bmatrix}$$

ملاحظه می شود که هر عامل با تخمین $f(x)$ می تواند ماتریس $JJ^T$ را نیز محاسبه کند. لذا، برای این رفتار جمعی خاص، فقط نیاز به اجرای ۵ پروتکل اجماع میانگین دینامیکی می باشد که در مورد شبکه های بزرگ با تعداد زیادی ربات سیار، استفاده از آن کاملا از لحاظ مقیاس پذیر بودن جریان اطلاعات در شبکه نسبت به اندازه شبکه، توجیه پذیر و بصرفه است.

اگر تخمین عامل $i$ام از متغیرهای جمعی $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\sigma_{12}$ بترتیب بصورت $\mu_1^i,\mu_2^i,\sigma_1^{2,i},\sigma_2^{2,i},\sigma_{12}^i$ باشد، ورودیهای آن به پروتکلهای اجماع میانگین متناظر، بصورت زیر خواهد بود

$$\left\{x_i^1, x_i^2, \left(x_i^1-\mu_1^i\right)^2, \left(x_i^2-\mu_2^i\right)^2, \left(x_i^1-\mu_1^i\right)\left(x_i^2-\mu_2^i\right)\right\} \qquad (۵۲)$$

در ادامه سینگولاریتیهای کینماتیکی ماتریس ژاکوبین آرایش مورد نظر را بررسی می کنیم. با توجه به شکل ماتریس $J_i$ در (۵۰)، ماتریس ژاکوبین $J$، فقط وقتی رتبه از دست می دهد که شرط زیر بازای یک $\alpha\in\mathbb{R}$ برقرار باشد

$$x_i^2-\mu_2=\alpha\left(x_i^1-\mu_1\right),\ i=1,\cdots,n \qquad (۵۳)$$

در اینصورت $\alpha=\sqrt{\sigma_2^2/\sigma_1^2}$ است. تعبیر هندسی شرط فوق بدینصورت است که همه عاملهای شبکه بر روی یک خط مستقیم قرار داشته باشند. بنابراین وقتی عاملهای شبکه بر روی یک خط مستقیم قرار گیرند، ماتریس ژاکوبین سینگولار می شود و یک رتبه از دست می دهد.

در ادامه نحوه انتخاب مقادیر مطلوب برای پارامترهای $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\sigma_{12}$ بمنظور تحقق یک آرایش مطلوب ارائه می شود. ماتریس $A_{n\times 2}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$A=\begin{bmatrix}x_1^1-\mu_1 & x_1^2-\mu_2\\ \vdots & \vdots\\ x_n^1-\mu_1 & x_n^2-\mu_2\end{bmatrix} \qquad (۵۴)$$

که ستونهای آن، موقعیتهای نسبی عاملها نسبت به مرکز ثقل گروه می باشد. بردارهای ویژه متعامد ماتریس $A^TA$، بردارهای اصلی مجموعه داده $A$ نامیده می شوند. بردار ویژه متناظر با بزرگترین مقدار ویژه ماتریس $A$، برداری است که بیشترین داده در امتداد آن کشیده شده است، یا بعبارتی این بردار ویژه، بیشترین اطلاعات را درباره مجموعه داده $A$ بدست می دهد. ماتریس $A^TA$ بصورت زیر است

$$A^TA=n\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_2^2\end{bmatrix} \qquad (۵۵)$$

معادله مشخصه ماتریس فوق بصورت $\lambda^2-n(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\lambda+n^2\sigma_1^2\sigma_2^2-n^2(\sigma_{12})^2=0$ است. ملاحظه می شود که اگر $\sigma_{12}=\pm\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}$ باشد، در اینصورت، مقادیر ویژه ماتریس $A^TA$، بصورت $\lambda_1=0,\lambda_2=n(\sigma_1^2+\sigma_2^2)$ خواهند بود. بردار ویژه متناظر با $\lambda_2=n(\sigma_1^2+\sigma_2^2)$، وقتی $\sigma_{12}=\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}$ است، عبارت است از $\left[\sqrt{\sigma_1^2}\quad\sqrt{\sigma_2^2}\right]^T$. در اینصورت تمام داده ماتریس $A$، در راستای خط $x^2-\mu_2=\sqrt{\sigma_2^2/\sigma_1^2}\left(x^1-\mu_1\right)$ کشیده شده است (در فضای دو بعدی $(x^1,x^2)$) . در اینصورت مقدار $\alpha$ در (۵۳) عبارت است از $\alpha=\sqrt{\sigma_2^2/\sigma_1^2}$. بردار ویژه متناظر با $\lambda_2=n(\sigma_1^2+\sigma_2^2)$، وقتی $\sigma_{12}=-\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}$ است، عبارت است از $\left[\sqrt{\sigma_1^2}\quad-\sqrt{\sigma_2^2}\right]^T$. در اینصورت تمام داده ماتریس $A$، در راستای خط $x^2-\mu_2=-\sqrt{\sigma_2^2/\sigma_1^2}\left(x^1-\mu_1\right)$ کشیده شده است (در فضای دو بعدی $(x^1,x^2)$) . در اینصورت مقدار $\alpha$ در (۵۳) عبارت است از $\alpha=-\sqrt{\sigma_2^2/\sigma_1^2}$. تعبیر هندسی آن بدینصورت است که اگر در فضای دو بعدی $(x^1,x^2)$، مبدا مختصات را نقطه $(\mu_1,\mu_2)$ در نظر بگیریم، وقتی $\sigma_{12}>0$ باشد، عاملهای شبکه بیشتر در ربع اول و سوم توزیع خواهند شد و وقتی $\sigma_{12}<0$ باشد، بیشتر عاملها در ربع دوم و چهارم توزیع خواهند شد. در واقع $\sigma_{12}$، راستای کشیدگی آرایش و میزان توزیع شدگی عاملها در این راستا را مشخص می کند. همچنین برای تعیین محدوده مجاز قابل تحقق برای $\sigma_{12}$، بصورت زیر اقدام می کنیم. با فرض بردار $v_1=\left[x_1^1-\mu_1\ \cdots\ x_n^1-\mu_1\right]^T$، و $v_2=\left[x_1^2-\mu_2\ \cdots\ x_n^2-\mu_2\right]^T$، داریم $\|v_1\|^2=n\sigma_1^2$ و $\|v_2\|^2=n\sigma_2^2$. همچنین $v_1^Tv_2=\|v_1^T\|\|v_2\|\cos\angle(v_1,v_2)=n\sigma_{12}$. لذا محدوده مجاز قابل تحقق برای $\sigma_{12}$ بصورت زیر است

$$-\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}\le\sigma_{12}\le\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2} \qquad (۵۶)$$

لذا در اولین قدم در تحقق چنین رفتار جمعی، باید بتوانیم آرایش مورد نظر را توسط پارامترهای آماری درست مدلسازی کنیم. متناظر با یک آرایش مطلوب، انتخاب مقادیر مطلوب $\mu_1,\mu_2$ به آسانی انجام می شود؛ پارامترهای مطلوب برای $\mu_1,\mu_2$، همان مراکز ثقل آرایش مورد نظر است. اما انتخاب پارامترهای $\sigma_1^2,\sigma_2^2,\sigma_{12}$ خیلی روشن نیست. درست است که پارامترهای $\sigma_1^2,\sigma_2^2$ مستقل هستند، اما $\sigma_{12}$ وابسته به



[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.4.5.9 ]

$\sigma_1^2,\sigma_2^2$ است. مقادیر مطلوب برای $\sigma_1^2,\sigma_2^2$، همان واریانسهای آرایش مورد نظر می باشند. بعد از انتخاب مقادیر مطلوب برای $\sigma_1^2,\sigma_2^2$، بر اساس بحثی که در مورد ماتریس دادهٔ $A$ در (۵۴) داشتیم، باید تعیین کنیم که بیشترین عاملهای شبکه در آرایش مورد نظر، در چه راستائی کشیده خواهند شد. بر این اساس و با توجه به قید (۵۶)، مقدار مطلوب برای $\sigma_{12}$ تعیین می شود.

نتایج شبیه سازی کنترل کننده توزیع شده (۲۱) برای تحقق آرایش مطلوب برای یک گروه ۵۰ تائی از رباتهای سیار در فضای دو بعدی، در شکلهای ۱ الی ۴ نشان داده شده است. پروتکل اجماع میانگین دینامیکی مورد استفاده، نمونه پروتکل طراحی شده در [۱۹] و بصورت زیر می باشد.

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}_{ci}(t)=\mathbf{A}_c\sum_{j\in N_i(\mathcal{G})}\left(\mathbf{x}_{ci}(t)-\mathbf{x}_{cj}(t)\right)+\mathbf{B}_c\sum_{j\in N_i(\mathcal{G})}\left(w_i(t)-w_j(t)\right)\\ \qquad\qquad +\mathbf{B}_c\sum_{j\in N_i(\mathcal{G})}\left(u_{ie}(t)-u_{je}(t)\right)\\ \dot{w}_i(t)=-\mathbf{C}_c\sum_{j\in N_i(\mathcal{G})}\left(\mathbf{x}_{ci}(t)-\mathbf{x}_{cj}(t)\right)-d_c\sum_{j\in N_i(\mathcal{G})}\left(w_i(t)-w_j(t)\right)\\ \qquad\qquad -d_c\sum_{j\in N_i(\mathcal{G})}\left(u_{ie}(t)-u_{je}(t)\right)-\beta w_i(t)\\ y_i(t)=w_i(t)+u_{ie}(t),\quad i=1,\cdots,n\end{cases}$$

که در آن، $u_{ie}$ سیگنال ورودی مختص عامل $i$ام، $w_i\in\mathbb{R},\mathbf{x}_{ci}\in\mathbb{R}^2$ حالتهای درونی عامل $i$ام، $y_i\in\mathbb{R}$ خروجی مختص عامل $i$ام، $\mathcal{G}$ گراف ارتباطی غیرجهت دار همبند، $\beta=3.8$، و

$$\mathbf{A}_c=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\mathbf{B}_c=\begin{bmatrix}0\\ 161.57\end{bmatrix},\mathbf{C}_c=\begin{bmatrix}196.22 & 14.83\end{bmatrix},d_c=78.94$$

است. سیگنالهای خروجی پروتکل فوق، یعنی $y_i$ها، میانگین سیگنالهای ورودی، یعنی $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u_{ie}$ را تعقیب می کنند. در شبیه سازی، گراف تعامل بین عاملها، بصورت یک گراف تصادفی همبند انتخاب شده است. شرائط اولیه پروتکلها نیز بصورت تصادفی انتخاب شده اند.

## ۸- مقایسه با روشهای موجود

با توجه به اینکه کنترل توزیع شده ارائه شده در این مقاله، برای اولین بار از تلفیق روش معکوس ژاکوبین با پروتکلهای اجماع استفاده می کند، بهترین حالت برای مقایسه، قطعا مقایسه با کنترل کننده های متمرکز بر اساس روش معکوس ژاکوبین می باشد. در واقع نوآوری اساسی ارائه شده در این مقاله، ارائه راهکاری در راستای غیرمتمرکزسازی کنترل کننده های متمرکز فوق، با درنظر گرفتن مشکلات اساسی روش معکوس ژاکوبین می باشد. قطعا استفاده از پروتکلهای اجماع برای غیرمتمرکزسازی کنترل کننده های متمرکز، باعث ایجاد اعوجاج و انحراف در مشخصه های عملکردی و سرعت همگرائی آنها خواهد شد. بررسی چگونگی و میزان تغییر این مشخصه های عملکردی در حین غیرمتمرکزسازی، مجال دیگری را می طلبد. اما، بصورت کیفی می توان ادعا نمود که اگر ثابت زمانی پروتکلهای اجماع خیلی کوچکتر از ثابت زمانی کنترل کننده های متمرکز باشد (کوچکتر از یک دهم)، قطعا مشخصه های عملکردی و کارائی کنترل کننده های متمرکز تا حد قابل قبولی در نوع غیرمتمرکز آنها، بازیافت می شود. بعنوان نمونه، نتایج شبیه سازی مثال قبلی با کنترل کننده های متمرکز، با دقت بسیار خوبی بر نتایج شبیه سازی نشان داده شده در شکلهای ۱ الی ۴ منطبق شده است. لذا اگر پروتکلهای اجماع در قیاس با سرعت مطلوب انجام رفتار جمعی، بتوانند تخمینهای درست و بموقع از متغیرهای جمعی مورد نظر را در اختیار عاملهای شبکه قرار دهند، کارائی کنترل کننده های متمرکز، در حین اجرای کنترل کننده های غیرمتمرکز، حفظ خواهد شد. با این جداسازی و لحاظ کیفیت تعقیب پروتکلهای اجماع (که وابسته به شرائط همبندی شیکه و محدودیت پهنای باند لینکهای شبکه است [۱۹]) می توان به بهینه سازی کارائی انجام رفتار جمعی در حالت متمرکز آن پرداخت.

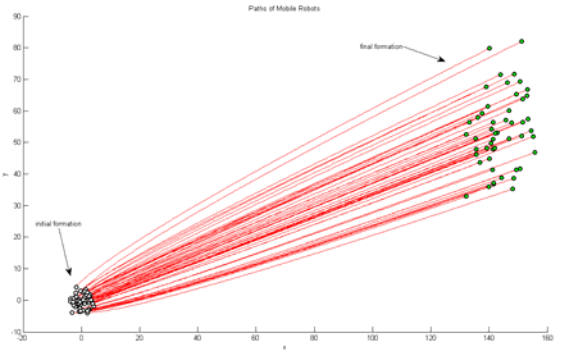
روش ارائه شده، بعنوان گونه ای از روش معکوس ژاکوبین، در قیاس با روشهای دیگر، که عمدتا بصورت گرادیانی می باشند، وارث مزایای اساسی روش معکوس ژاکوبین است که در مقدمه به آنها اشاره شده است.

## ۹- نتیجه گیری

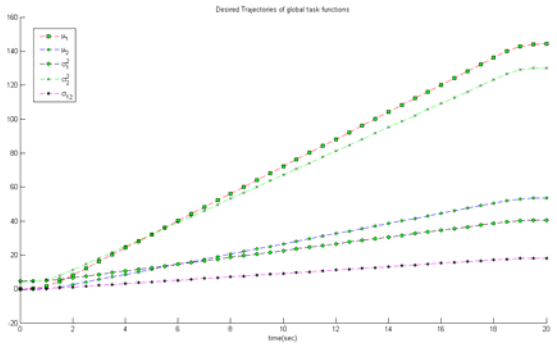
در این مقاله، کلاس خاصی از رفتارهای جمعی در شبکه های چندعاملی در نظرگرفته شده است. بر اساس پروتکلهای اجماع میانگین دینامیکی و روش معکوس ژاکوبین، دو الگوریتم زمان-گسسته و زمان-پیوسته برای طرح ریزی غیرمتمرکز مسیر برای عاملهای شبکه بمنظور تحقق مسیرهای مطلوب در فضای رفتار جمعی ارائه و تحلیل شده است. روش ارائه شده بر روی هر گراف تعاملی، توزیع شده می باشد و فقط در ابتدای مانور جمعی، پارامترهای مسیر مطلوب رفتار جمعی باید در اختیار تمام عاملهای شبکه قرار گیرد.



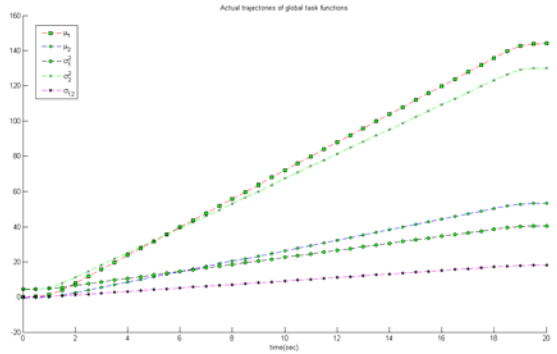
[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.4.5.9 ]



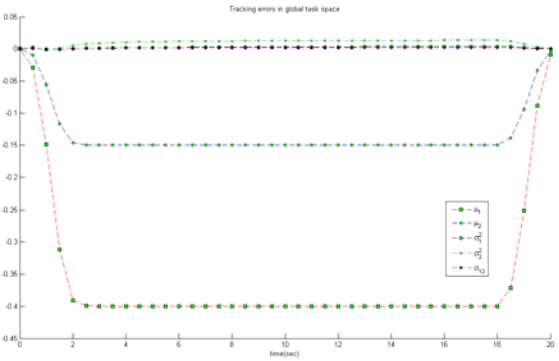

شکل ۱: مسیر رباتها در حین تکامل شبکه و آرایش اولیه و نهائی




شکل ۲: مسیر مطلوب برای توابع جمعی مورد نظر




شکل ۳: مسیر واقعی توابع جمعی مورد نظر در حین تکامل شبکه




شکل ۴: نمودار خطای تعقیب در فضای حالت رفتار جمعی مورد نظر در حین تکامل شبکه

## مراجع

[1] L. Scardovi and R. Sepulchre, "*Collective optimization over average quantities*," *IEEE CDC* 2006.

[2] R. Sepulchre, D. Paley, and N. Leonard, "Stabilization of planar collective motion with limited communication", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2008.

[3] Derek A. Paley, Naomi E. Leonard, Rodolphe Sepulchre, and Daniel Grunbaum, "Oscillator models and collective motion: spatial patterns in the dynamics of engineered and biological networks", *CSM spatial issue on complex networked control systems*, Dec. 2005.

[4] Peng Yang, Randy A. Freeman, Kevin M. Lynch, "Multi-agent coordination by decentralized estimation and control", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2009.

[5] Petter Ogren, Edward Fiorelli, and Naomi Ehrich Leonard, "Cooperative control of mobile sensor networks: adaptive gradient climbing in a distributed environment", *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 49, no. 8, pp. 1292-1302, Aug. 2004.

[6] C. Belta and V. Kumar, "Abstraction and control for groups of robots," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 20, no. 5, pp. 865–875, Oct. 2004.

[7] R. Olfati Saber, "Distributed tracking for mobile sensor networks with information-driven mobility", *ACC* 2007.

[8] J. A. Fax and R. M. Murray, "Information flow and cooperative control of vehicle formations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1465–1476, Sep 2004.

[9] R. Olfati Saber, "Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory", *Technical report CIT-CDS 2004-005*, Caltech.

[10] A. Jadbabaie, J. Lin, and A. S. Morse, "Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no. 6, pp. 988–1001, Jun 2003.

[11] J. Cortes, S. Martinez, and F. Bullo, "Analysis and design tools for distributed motion coordination," *ACC* 2005, pp. 1680–1685.

[12] J. Lin, A. S. Morse, and B. D. O. Anderson, "The multi-agent rendezvous problem," *CDC* 2003, pp. 1508-1513.

[13] J. Cortes, S. Martinez, T. Karatas, and F. Bullo, "Coverage control for mobile sensing networks," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 20, no. 2, pp. 243-255, 2004.

[14] S. Susca, S. Martinez, and F. Bullo, "Monitoring environmental boundaries with a robotic sensor network," *ACC* 2006.

[15] R. Olfati-Saber and R. Murray, "Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1520–1533, Sep 2004.

[16] D. P. Spanos, R. Olfati-Saber, and R. M. Murray, "Dynamic consensus on mobile networks," *IFAC* 2005.

[17] R. Olfati Saber, "Distributed kalman filtering and sensor fusion in sensor networks," *Technical Report, Dartmouth College, Thayer School of Engineering*, 2006

[18] Bradley E. Bishop, "On the use of redundant manipulator techniques for control of platoon of cooperating robotic vehicles", *IEEE Transactions*



[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.4.5.9 ]

[19] Nosrati sh., Shafiee M., M.B. Menhaj, "Synthesis and analysis of robust dynamic linear protocols for dynamic average consensus estimators", *IET Control Theory & Applications*, Vol. 3 – Issue 11, pp. 1499-1516, 2009.

[20] B. Siciliano, "Kinematic control of redundant robot manipulators: a tutorial," *J. Intell. Robot. Syst.*, vol. 3, pp. 201–212, 1990.

[21] C. A. Klein and C.-H. Huang, "Review of pseudoinverse control for use with kinematically redundant manipulators," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. SMC-13, no. 3, pp. 245–250, 1983.

[22] B. E. Bishop and D. J. Stilwell, "On the application of redundant manipulator techniques to the control of platoons of autonomous vehicles," *IEEE CCA* 2001, pp. 823–828.

[23] D. J. Stilwell and B. E. Bishop, "Redundant manipulator techniques for path planning and control of a platoon of autonomous vehicles," *IEEE CDC* 2002, pp. 2093–2098.

[24] Arrichiello F., "Coordinated control of multiple mobile robots", *PhD Thesis*, Nov 2006

[25] D. J. Stilwell, B. E. Bishop, and Caleb A. Sylvester, "Redundant manipulator techniques for partially decentralized path planning and control of a platoon of autonomous vehicles", *IEEE Trans. Syst., Man, Cyber- Part B*, Vol. 35, No. 4, 2005.

[26] B. E. Bishop, "On the use of redundant manipulator techniques for control of platoon of cooperating robotic vehicles", *IEEE Trans. Syst., Man, Cyber- Part A*, Vol. 33, No. 5, 2003.

[27] Nasser Sadati and Ehsan Elhamifar, "Semi-decentralized control of multi-agent systems based on redundant manipulator optimization methods", *IEEE, AMC'06*-Istanbul, Turkey, 2006

[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02 ]

[ DOR: 20.1001.1.20088345.1389.4.4.5.9 ]