

طراحی یک روینگر تطبیقی مقاوم و غیر شکننده با خطای فیلتر شده PI برای دسته‌ای از سامانه‌های غیرخطی تاخیردار

مهدی پورقلی^۱، وحید جوهری مجد^۲

^۱ دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، pourgholi@modares.ac.ir

^۲ دانشیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، majd@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۸/۱۲/۲۵، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۹/۳/۱)

چکیده: در این مقاله مساله تخمین همزمان پارامتر و حالت در سامانه‌های دارای عدم قطعیت تاخیردار با حضور اغتشاش در بهره‌ی روینگر مورد بررسی قرار گرفته است. فرض بر آن است که سامانه نسبت به پارامترهای نامعلوم خطی و نسبت به متغیرهای حالت غیر خطی باشد. یک روینگر غیرخطی تطبیقی مقاوم و غیر شکننده با خطای فیلتر شده‌ی تناسبی-انتگرالی (PI) برای تخمین همزمان بردارهای پارامتر و حالات سامانه‌ی طراحی شده و پایداری آن بر پایه روش لیاپانوف استخراج گردیده است. بهره‌ی بهینه این روینگر به‌طوری‌که بتواند اثر اغتشاش را در تخمین کمینه نماید، از میان مجموعه جوابهایی که می‌تواند شرایط پایداری روینگر را فراهم کند به‌روش نابرابری‌های ماتریسی خطی بدست آورده می‌شود. یک مثال عددی به‌منظور نشان دادن تأثیر روش پیشنهادی ارائه و نتایج شبیه سازی آن گزارش گردیده است.

کلمات کلیدی: روینگر غیرخطی، سامانه‌های تاخیردار، روینگر تطبیقی، تخمین مقاوم، طراحی مقاوم، نابرابری‌های ماتریسی خطی.

A New Non-fragile H-infinity PI-Filtered-Error Adaptive Observer for a Class of Nonlinear Time-Delay Systems

Mahdi Pourgholi, Vahid Johari Majd

Abstract: In this paper, parameter and state estimation problem in time delay uncertain systems in the presence of observer gain perturbations is discussed which are linear in unknown parameters and nonlinear in states. A nonlinear non-fragile proportional-integral filtered-error adaptive observer is designed, and its stability conditions based on Lyapunov technique are derived. The optimal gain with maximum disturbance attenuation level among a solution set that satisfies the observer stability conditions is derived using linear matrix inequality approach. A numerical example is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed method and the simulation results are provided.

Keywords: Nonlinear observer; time delay system; adaptive observer; robust estimation; H-infinity design; linear matrix inequality.

۱- مقدمه

رویتگرهای تطبیقی^۱ برای غلبه بر نبود اطلاعات کافی در مورد پارامترهای سامانه در مساله تخمین حالت بکارگرفته می‌شوند. برای سامانه‌های غیرخطی با پارامترهای نامعلوم روینگرهای تطبیقی مختلفی توسط پژوهشگران معرفی گردیده‌اند [۲-۴-۶]. در مرجع [۲] نویسندگان اولین تجربیات را در مورد روینگرهای غیرخطی گزارش نمودند که در آن تخمین بردار حالت سامانه با استفاده از یک قانون

از مهمترین مشکلات طراحی روینگرهای کاربردی در اغلب سامانه‌های فیزیکی، دینامیک غیرخطی و عدم قطعیت مدل سامانه‌ها است که این عدم قطعیت می‌تواند ناشی از وجود برخی پارامترهای فیزیکی با مقادیر نامعلوم یا تغییر در پارامترهای سامانه بدلیل مسائلی مانند پیری، تعمیرات اساسی یا تغییر در شرایط بهره برداری و یا ناشی از کمیت‌هایی با تغییرات سریع مانند اغتشاشات خارجی یا عناصر غیرخطی مدل نشده باشد [۱].

^۱ Adaptive Observers

مقاوم برای یک سامانه‌ی غیرخطی که تابع غیرخطی آن دارای شرایط بسیار محدود کننده‌ای است ارائه گردیده‌است.

بحث شکنندگی^۳ در طراحی روینگرها به‌آشننگی‌های کوچک در بهره‌ی روینگر اطلاق می‌گردد که منجر به‌واگرایی تخمین می‌گردند [۱۳]. از آنجایی که بهره‌ی روینگر عموماً از محاسبات برون خط^۴ تعیین می‌گردد، در بسیاری از کاربردهای عملی امکان وجود تغییرات اندکی در بهره به‌هنگام پیاده‌سازی وجود دارد و بنابراین لازم است تا روینگر نسبت به‌این تغییرات مقاومت داشته باشد. در مرجع [۱۴] نشان داده شده که حتی با اعمال آشفتگی کوچک در ضرایب بهره کنترلگر، سامانه‌ی حلقه بسته می‌تواند ناپایدار گردد. پس از آن بسیاری از محققین توجه خود را به‌این موضوع معطوف داشتند [۱۵-۱۶-۱۷]. در مرجع [۱۵] مروری بر روشهای طراحی غیر شکننده ارائه گردیده است. در [۱۶] یک راه حل مبتنی بر نابرابری‌های خطی ماتریسی برای طراحی روینگر غیرشکننده و غیرخطی ارائه گردیده و در [۱۷] یک روش مبتنی بر نابرابری‌های ماتریسی خطی برای بدست آوردن بهره‌ی روینگر که به‌اغتاشش تصادفی آلوده است ارائه شده است.

در این مقاله یک سامانه‌ی غیرخطی دارای عدم قطعیت و تاخیردار با بخشهای غیرخطی لیشیتز و دارای پارامتر نامعلوم تکه‌ای ثابت^۵ و محدود را در نظر می‌گیریم. هدف ما تعیین یک روینگر تطبیقی مقاوم با خطای فیلتر شده PI مبتنی بر نابرابری‌های ماتریسی خطی است که در مقابل تغییرات محدود بهره مقاوم باشد. روینگر پیشنهادی تخمین را به‌مقادیر مطلوب همگرا می‌سازد و در صورتیکه شرایط تحریک پایا برقرار باشد تخمین پارامترها نیز به‌مقادیر واقعی میل خواهد نمود. بر خلاف مقالات [۸] و [۱۰]، فرم کلی تری برای سامانه‌ی غیرخطی در نظر گرفته شده به‌طوریکه، عنصر غیرخطی می‌تواند به‌ورودی و تمام متغیرهای حالت سامانه وابسته باشد و همچنین قانون تطبیقی در تخمین پارامتر طوری اصلاح شده است که هنگامیکه پارامترها از مرز تعیین شده خارج می‌گردند، مشتق تابع لیاپانوف در فضای تخمین پارامتر منفی باقی بماند. در این مقاله، روش انتخاب بهره در مرجع [۱۰] را گسترش داده‌ایم و ورودی اغتشاش و بروز آشفتگی‌های محدود در هر دو بهره تناسبی و انتگرالی در روینگر را در نظر گرفته‌ایم. علاوه بر آن برخلاف اغلب کارهای انجام شده در زمینه روینگرهای تطبیقی [۱-۱۰] سامانه را تاخیردار فرض کرده و برخلاف مراجع [۱۱-۱۲] دسته‌ی وسیع تری از سامانه‌های غیرخطی با پارامترهای نامعلوم را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. بهره‌ی بهینه روینگر از میان مجموعه جوابهایی که می‌تواند شرایط پایداری را فراهم آورد با بکارگیری روش H_{∞} طوری بدست آورده

تطبیقی برخط^۱ برای پارامترها انجام گردید. نویسندگان در مراجع [۳-۵] تمرکز خود را بر روی سامانه‌ی غیرخطی که با یک نگاشت قابل تبدیل به‌دینامیکی که نسبت به‌حالت‌های غیر قابل اندازه‌گیری سامانه، خطی و نسبت به‌ورودی و خروجی‌های قابل اندازه‌گیری غیرخطی باشد، قرار داده‌اند. روینگر تطبیقی طراحی شده برای این سامانه‌ی جدید، همگرایی بردارهای حالت و پارامتر را در صورتیکه شرایط تحریک پایا برقرار باشد تضمین می‌کند. در مقالات فوق‌الذکر قسمت غیرخطی سامانه فقط وابسته به‌خروجی‌های قابل اندازه‌گیری و ورودی فرض شده، و از اغتشاشات خارجی نیز صرف‌نظر گردیده است.

این روش طراحی در مراجع [۷] و [۸] اندکی توسعه داده شد، به‌طوریکه بخش‌های غیرخطی نه تنها به‌حالت‌های قابل اندازه‌گیری بلکه به‌تمام بردار حالت وابسته باشد و شرایط لیشیتز را ارضاء نمایند. در این مقالات یک الگوریتم قانونمند برای تعیین امکان پایداری مجانبی روینگر تطبیقی ارائه گردیده است.

همانطور که در مراجع [۸-۹] اشاره شده است بروز یک اغتشاش کوچک می‌تواند منجر به‌واگرایی پارامترها به‌سمت بینهایت گردد، بنابراین برای بهبود ساختار روینگرهای تطبیقی به‌منظور جلوگیری از واگرایی تخمین پارامترها، روشهایی توسط پژوهشگران ارائه گردید. برای مثال در مرجع [۸] و [۹] به‌منظور رسیدن به‌این هدف روینگرهای تطبیقی مقاوم ارائه گردیده است که در این مقالات نیز فرض بر آن است که عناصر غیرخطی سامانه فقط به‌ورودی و خروجی‌های قابل اندازه‌گیری وابسته باشد.

از دیگر مشکلاتی که اصولاً با طراحی روینگرها همراه است، چگونگی انتخاب بهره‌ی بهینه برای روینگر از میان مجموعه جوابهایی است که می‌تواند شرایط پایداری روینگر را تأمین نماید که پژوهشهای اندکی در این زمینه انجام گردیده است [۹-۱۰]. در مرجع [۱۰] یک روینگر تطبیقی تناسبی-انتگرالی (PI) به‌منظور بهبود کارایی و مقاومت تخمین حالت ماندگار در مقابل اغتشاش ارائه شده که بهره‌ی روینگر را از طریق حل شرایط نابرابری‌های ماتریسی خطی بدست می‌آورد. در این مقاله نیز تابع غیرخطی تابعی از متغیرهای حالت قابل اندازه‌گیری فرض شده است.

از طرفی دیگر در اغلب سامانه‌های فیزیکی با پدیده تاخیر زمانی مواجه هستیم، پژوهشهای زیادی در زمینه طراحی روینگر برای سامانه‌های تاخیردار توسط پژوهشگران صورت پذیرفته است که از آن جمله می‌توان به‌مراجع [۱۱] و [۱۲] اشاره نمود. نویسندگان در مرجع [۱۱] یک روینگر مقاوم و غیرشکننده^۲ برای سامانه‌ی تاخیردار خطی ارائه نموده‌اند و در مرجع [۱۲] یک کنترلگر مود لغزشی برپایه روینگر

^۳ Fragility^۴ Off-line^۵ Piecewise constant^۱ Online^۲ Non-fragile

$$\|w(t)\|_2 \leq \beta \quad (۶)$$

لم ۱- [۱۸]: اگر x و y بردارهای حقیقی هم اندازه باشند، آنگاه برای هر اسکالر $\varepsilon > 0$ نابرابری زیر برقرار است:

$$2x^T y \leq \varepsilon x^T x + \varepsilon^{-1} y^T y \quad (۷)$$

شده که اثر اغتشاش در تخمین کمینه گردد و در نهایت نتایج نظری بدست آورده شده را در یک مثال عددی بررسی نموده‌ایم.

ساختار این مقاله به صورت زیر سازماندهی گردیده است: در قسمت دوم به تشریح مساله پرداخته می‌شود. در قسمت سوم طراحی روینگر PI تطبیقی مقاوم و غیر شکننده ارائه شده است. مثال عددی در قسمت چهارم مقاله آورده شده و در نهایت در قسمت پنجم، نتایج حاصل از مقاله بیان گردیده است.

۲- تشریح مساله

سامانه‌ی غیر خطی تاخیر دار را به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + A_1 x(t-h) + \phi(x, x(t-h), u) \\ &\quad + bf(x, x(t-h), u)\theta + w \\ y &= Cx \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-h \quad 0] \end{aligned} \quad (۱)$$

که در آن $\theta \in \mathbb{R}^p$ و $y \in \mathbb{R}^m$ ، $u \in \mathbb{R}^q$ ، $x \in \mathbb{R}^n$ بردار حالات، ورودی، خروجی و بردار پارامترها هستند، h اندازه تاخیر که ثابت اما نامعلوم است و $b \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ثوابت ماتریسی و $w \in \mathbb{R}^n$ بردار اغتشاش ورودی و $\varphi(t)$ تابع اولیه برداری پیوسته است و $f: [\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times p}$ و $\phi: [\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q] \rightarrow \mathbb{R}^n$ توابع غیر خطی لپشیتز در x به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} &\|\phi(x_1, x_1(t-h), u) - \phi(x_2, x_2(t-h), u)\| \\ &< \gamma_{11}\|x_1 - x_2\| + \gamma_{12}\|x_1(t-h) - x_2(t-h)\| \end{aligned} \quad (۲)$$

و

$$\begin{aligned} &\|f(x_1, x_1(t-h), u) - f(x_2, x_2(t-h), u)\| \\ &< \gamma_{21}\|x_1 - x_2\| + \gamma_{22}\|x_1(t-h) - x_2(t-h)\| \end{aligned} \quad (۳)$$

که در آن γ_{11} و γ_{12} و γ_{21} و γ_{22} ثوابت لپشیتز می‌باشند. بازای تمام $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ سامانه‌ی (۱) نسبت به θ خطی و نسبت به x غیر خطی و لپشیتز است. این دسته از سامانه‌ها دسته‌ی نسبتاً وسیعی از سامانه‌های غیر خطی را پوشش می‌دهد [۷]. فرض کرده‌ایم که بردار پارامتر نامعلوم، تکه‌ای ثابت و محدود و فاصله آن نسبت به مقدار نامی پارامتر (θ_0) نیز محدود باشد:

$$\|\theta\| \leq \gamma_3 \quad (۴)$$

$$\|\theta - \theta_0\| \leq \gamma_4 \quad (۵)$$

و اغتشاش w به صورت زیر محدود باشد:

۳- طراحی روینگر PI تطبیقی مقاوم و غیر شکننده

یک روینگر تطبیقی غیر خطی به فرم زیر را در نظر می‌گیریم [۷]:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + A\hat{x}(t-h) + \phi(\hat{x}, \hat{x}(t-h), u) \\ &\quad + bf(\hat{x}, \hat{x}(t-h), u)\hat{\theta} + [L + \Delta_1(t)](y - C\hat{x}) \\ &\quad + [K + \Delta_2(t)]z \\ \dot{z} &= -\rho z + H(y - C\hat{x}) \end{aligned} \quad (۸)$$

که در آن $\hat{x}$ و $\hat{\theta}$ به ترتیب تخمین بردار پارامتر و بردار حالت است و L و K به ترتیب بهره‌های روینگر تناسبی و انتگرالی هستند. بردار حالت اضافی $z \in \mathbb{R}^m$ خطای تخمین خروجی فیلتر شده مطابق معادله دوم در (۸) می‌باشد. پارامترهای طراحی شامل ماتریس H و عدد مثبت ρ می‌باشد. $\Delta_1(t)$ و $\Delta_2(t)$ اغتشاشات جمعی روی بهره‌ی خطا با حدود معلوم $\|\Delta_1(t)\| \leq r_1$ و $\|\Delta_2(t)\| \leq r_2$ هستند و اغتشاش خارجی شرط $\|w\|_2 \leq \beta$ را برآورده می‌سازد. معادله دینامیک خطای روینگر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= (A - LC - \Delta_1 C)\tilde{x} + A_1 \tilde{x}(t-h) \\ &\quad + \phi(x, x(t-h), u) - \phi(\hat{x}, \hat{x}(t-h), u) \\ &\quad + bf(x, x(t-h), u)\theta - bf(\hat{x}, \hat{x}(t-h), u)\hat{\theta} \\ &\quad - (K + \Delta_2)z + w \end{aligned} \quad (۹)$$

که در آن $\tilde{x} = x - \hat{x}$ خطای تخمین حالت است. برای کاهش اثرات اغتشاش بر روی خطای تخمین حالت، نرم H^∞ را از w به $\tilde{x}$ و z به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\eta = \sup_{\|w\| \neq 0} \frac{\|\tilde{x}\|_2^2 + \|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} \quad (۱۰)$$

قضیه زیر شرایط کافی برای پایداری مقاوم روینگر PI تطبیقی را بدست می‌دهد:

قضیه ۱: قانون تطبیقی پارامتر به صورت زیر:

$$V = \tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + \int_{t-h}^t \tilde{x}^T(s) P_2 \tilde{x}(s) ds + z^T M z + \tilde{\theta}^T \Gamma \tilde{\theta} \quad (14)$$

که در آن $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ خطای تخمین پارامتر است. با مشتق‌گیری از معادله (۱۴) و استفاده از معادله (۹) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \tilde{x}^T \left[(A-LC)^T P_1 + P_1 (A-LC) \right] \tilde{x} \\ & + 2\tilde{x}^T P_1 A_1 \tilde{x}(t-h) - 2\tilde{x}^T \left[C^T \Delta_1^T P_1 \right] \tilde{x} \\ & - 2z^T \Delta_2^T P_1 \tilde{x} \\ & + 2\tilde{x}^T P_1 [\phi(x, x(t-h), u) - \phi(\hat{x}, \hat{x}(t-h), u)] \\ & + 2[bf(x, x(t-h), u)\theta - bf(\hat{x}, \hat{x}(t-h), u)\hat{\theta}]^T P_1 \tilde{x} \\ & + \tilde{x}^T (F^T - Q)z + z^T (F - Q^T) \tilde{x} \\ & + \tilde{x}^T P_2 \tilde{x} - \tilde{x}^T (t-h) P_2 \tilde{x}(t-h) \\ & + 2\tilde{\theta}^T \Gamma \dot{\tilde{\theta}} - 2z^T Gz + \tilde{x}^T P_1 w + w^T P_1 \tilde{x} \end{aligned} \quad (15)$$

که در آن $G = \rho M$ و $F = MHC$ ، $Q = P_1 K$ است. با بکارگیری لم ۱ بر روی قسمت‌های سوم، چهارم و پنجم به ترتیب با ε_1 ، ε_2 و ε_3 در معادله (۱۵) و جایگذاری $\hat{\theta} = \theta - \tilde{\theta}$ در قسمت ششم معادله (۱۵) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \tilde{x}^T \left[(A-LC)^T P_1 + P_1 (A-LC) \right] \tilde{x} \\ & + 2\tilde{x}^T P_1 A_1 \tilde{x}(t-h) \\ & + \tilde{x}^T \left[\varepsilon_1 C^T \Delta_1^T \Delta C \tilde{x} + \varepsilon_1^{-1} P_1 P_1 \right] \tilde{x} \\ & + \varepsilon_2 z^T \Delta_2^T \Delta_2 z + \varepsilon_2^{-1} \tilde{x}^T P_1 P_1 \tilde{x} \\ & + \tilde{x}^T (\varepsilon_3 \gamma_{11}^2 + \varepsilon_3^{-1} P_1 P_1) \tilde{x} \\ & + \tilde{x}^T (t-h) \varepsilon_3 \gamma_{12}^2 \tilde{x}(t-h) \\ & + 2[bf(x, x(t-h), u)\theta - bf(\hat{x}, \hat{x}(t-h), u)\hat{\theta}]^T P_1 \tilde{x} \\ & + 2[bf(\hat{x}, \hat{x}(t-h), u)\hat{\theta}]^T P_1 \tilde{x} + \tilde{x}^T (F^T - Q)z \\ & + z^T (F - Q^T) \tilde{x} + 2\tilde{\theta}^T \Gamma \dot{\tilde{\theta}} \\ & - 2z^T Gz + \tilde{x}^T P_1 w + w^T P_1 \tilde{x} \\ & + \tilde{x}^T P_2 \tilde{x} - \tilde{x}^T (t-h) P_2 \tilde{x}(t-h) \end{aligned} \quad (16)$$

همچنین با بکارگیری دوباره لم ۱ در قسمت هشتم نابرابری (۱۶) با ε_4 و استفاده از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که:

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma^{-1} (f(\hat{x}, \hat{x}(t-h), u)^T C \tilde{x}) - \sigma \Gamma^{-1} (\hat{\theta} - \theta_0) \quad (11)$$

را در نظر بگیرید که در آن $\Gamma = \Gamma^T > 0$ ماتریس ثابت دلخواه و مقدار معلوم و تخمین اولیه ما از مقدار پارامتر است و:

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{if } \|\hat{\theta} - \theta_0\| < \gamma_4 \\ \sigma_0 \left(\frac{\|\hat{\theta} - \theta_0\|}{\gamma_4} - 1 \right) & \text{if } \gamma_4 \leq \|\hat{\theta} - \theta_0\| \leq 2\gamma_4 \\ \sigma_0 & \text{if } \|\hat{\theta} - \theta_0\| > 2\gamma_4 \end{cases} \quad (12)$$

که σ_0 اسکالر ثابت و γ_4 در (۵) تعریف شده است. اگر اعداد مثبت حقیقی ε_1 ، ε_2 ، ε_3 ، ε_4 و ماتریسهای $P_1 = P_1^T > 0$ و $P_2 = P_2^T > 0$ و $G = G^T > 0$ و S و F و Q وجود داشته باشند به طوریکه:

Minimize η
subject to $P_1 b = C^T$ and $\rho > 0$ and

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1 & A P_1 & F^T - Q & P_1 & P_1 & P_1 & P_1 & P_1 & P_1 \\ P_1 A_1^T & \Lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F - Q^T & 0 & \varepsilon_2 r_2^2 I - 2G + I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & -\eta I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_4 I & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = & A^T P_1 + P_1 A - C^T S - S^T C + \\ & (\varepsilon_3 \gamma_{11}^2 + \varepsilon_4 \gamma_{21}^2 \gamma_3^2 \|b\|^2) I + \varepsilon_1 C^T r_1^2 C + I + P_2 \\ \Lambda_2 = & \varepsilon_3 \gamma_{12}^2 + \varepsilon_4 \gamma_{22}^2 \gamma_3^2 \|b\|^2 - P_2 \end{aligned}$$

و γ_{11} ، γ_{12} ، γ_{21} ، γ_{22} به ترتیب در (۲)، (۳) و (۴) تعریف شده‌اند، آنگاه با بهره‌های تناسبی و انتگرالی $L = P_1^{-1} S^T$ و با پارامتر $K = P_1^{-1} Q$ که در آن $H = M^{-1} F \times \text{pinv}(C)$ و $M = \rho^{-1} G$ و $\text{pinv}(\cdot)$ نشان دهنده شبه معکوس است، دینامیک خطای (۱۱) برای تمام اغتشاشات در بهره که شرایط $\|\Delta_1(t)\| \leq r_1$ و $\|\Delta_2(t)\| \leq r_2$ را داشته باشند، با نرم H_∞ کمینه می‌گردد.

اثبات: نامزد تابع لیاپانوف برای دینامیک خطا (۹) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$N = -\frac{\sigma_0}{\gamma_4} \|\hat{\theta} - \theta_0\| \left(\gamma_4 - \|\hat{\theta} - \theta_0\| \right)^2 \leq 0.$$

و برای $\|\hat{\theta} - \theta_0\| > 2\gamma_4$ داریم:

$$N \leq -\sigma_0 \gamma_4 \|\hat{\theta} - \theta_0\| \leq 0.$$

بنابراین نابرابری زیر در حالت کلی برقرار است:

$$2\sigma\tilde{\theta}^T(\hat{\theta} - \theta_0) \leq 0 \quad (21)$$

با جایگذاری نابرابری بالا در (۱۸) داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \tilde{x}^T \left[\Omega_1 + (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} + \varepsilon_3^{-1} + \varepsilon_4^{-1}) P_1 P_1 \right] \tilde{x} \\ & + 2\tilde{x}^T P_1 A_1 \tilde{x}(t-h) + \varepsilon_2 z^T r_2^2 z + \\ & + \tilde{x}^T (t-h) \Omega_2 \tilde{x}(t-h) + \tilde{x}^T (F^T - Q) z \\ & + z^T (F - Q^T) \tilde{x} - 2z^T Gz + \tilde{x}^T P_1 w + w^T P_1 \tilde{x} \\ & + \tilde{x}^T P_2 \tilde{x} - \tilde{x}^T (t-h) P_2 \tilde{x}(t-h) \end{aligned} \quad (22)$$

حال J را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$J = \int_0^\infty (\tilde{x}^T \tilde{x} + z^T z - \eta w^T w) dt \quad (23)$$

از معادله (۲۳) می توان (۲۵) را نتیجه گرفت:

$$J < \int_0^\infty (\tilde{x}^T \tilde{x} + z^T z - \eta w^T w + \dot{V}) dt \quad (24)$$

شرط کافی برای تحقق هدف که همانا $J < 0$ می باشد آن است که:

$$\frac{dV}{dt} + \tilde{x}^T \tilde{x} + z^T z - \eta w^T w < 0 \quad (25)$$

با تلفیق شروط (۲۲) و (۲۵) شرط کافی (۲۶) بدست می آید، که خود شرط (۲۷) را ایجاب می نماید. با بکارگیری لم مکمل شور بر روی (۲۷) می توان نامعادله (۲۸) را بدست آورد

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \tilde{x}^T \left[\Omega_1 + (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} + \varepsilon_3^{-1} + \varepsilon_4^{-1}) P_1 P_1 \right] \tilde{x} \\ & + 2\tilde{x}^T P_1 A_1 \tilde{x}(t-h) + \varepsilon_2 z^T r_2^2 z \\ & + \tilde{x}^T (t-h) \Omega_2 \tilde{x}(t-h) \\ & + 2 \left[bf(\hat{x}, \hat{x}(t-h), u) \tilde{\theta} \right]^T P_1 \tilde{x} + \tilde{x}^T (F^T - Q) z \\ & + z^T (F - Q^T) \tilde{x} + 2\tilde{\theta}^T \Gamma \tilde{\theta} \\ & - 2z^T Gz + \tilde{x}^T P_1 w + w^T P_1 \tilde{x} \\ & + \tilde{x}^T P_2 \tilde{x} - \tilde{x}^T (t-h) P_2 \tilde{x}(t-h) \end{aligned} \quad (17)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \Omega_1 = & (A - LC)^T P_1 + P_1 (A - LC) + \varepsilon_1 C^T r_1^2 C \\ & + \varepsilon_3 \gamma_{11}^2 I + \varepsilon_4 \gamma_{21}^2 \gamma_3^2 \|b\|^2 I \\ \Omega_2 = & \varepsilon_3 \gamma_{12}^2 + \varepsilon_4 \gamma_{22}^2 \gamma_3^2 \|b\|^2 \end{aligned}$$

از آنجا که پارامتر θ بصورت تکه‌ای ثابت است، پس $\dot{\theta} = 0$ بطور تکه‌ای صادق است و بنابراین می توان نتیجه گرفت که $\dot{\theta} = -\hat{\theta}$. با بکارگیری این تساوی و جایگذاری (۱۱) در (۱۷) و استفاده از فرض قضیه $b^T P_1 = C$ نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \tilde{x}^T \left[\Omega_1 + (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} + \varepsilon_3^{-1} + \varepsilon_4^{-1}) P_1 P_1 \right] \tilde{x} \\ & + 2\tilde{x}^T P_1 A_1 \tilde{x}(t-h) + \varepsilon_2 z^T r_2^2 z \\ & + \tilde{x}^T (t-h) \Omega_2 \tilde{x}(t-h) + \tilde{x}^T (F^T - Q) z \\ & + z^T (F - Q^T) \tilde{x} - 2z^T Gz + 2\sigma\tilde{\theta}^T (\hat{\theta} - \theta_0) \\ & + \tilde{x}^T P_1 w + w^T P_1 \tilde{x} + \tilde{x}^T P_2 \tilde{x} \\ & - \tilde{x}^T (t-h) P_2 \tilde{x}(t-h) \end{aligned} \quad (18)$$

از طرفی با استفاده از (۵) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \sigma\tilde{\theta}^T (\hat{\theta} - \theta_0) = & \sigma[\theta - \hat{\theta}]^T (\hat{\theta} - \theta_0) = \\ & \sigma(\theta - \theta_0)^T (\hat{\theta} - \theta_0) - \sigma(\hat{\theta} - \theta_0)^T (\hat{\theta} - \theta_0) \\ & \leq \sigma\gamma_4 \|\hat{\theta} - \theta_0\| - \sigma\|\hat{\theta} - \theta_0\|^2 \\ & \leq N \end{aligned} \quad (19)$$

که در آن

$$N = \sigma\|\hat{\theta} - \theta_0\| \left(\gamma_4 - \|\hat{\theta} - \theta_0\| \right) \quad (20)$$

اگر شرط (۱۲) برقرار باشد، مقدار N غیر مثبت خواهد بود چرا که:

برای $\|\hat{\theta} - \theta_0\| < \gamma_4$ از آنجا که $\sigma = 0$ است، نتیجه می شود:

$$N = 0.$$

برای $\|\hat{\theta} - \theta_0\| \leq 2\gamma_4$ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{x}(t-h) \\ z \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega_1 + (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} + \varepsilon_3^{-1} + \varepsilon_4^{-1})P_1P_1 + I + P_2 & A_1P_1 & F^T - Q & P_1 \\ P_1A_1^T & -P_2 + \Omega_2 & 0 & 0 \\ F - Q^T & 0 & \varepsilon_2r_2^2I - 2G + I & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & -\eta I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{x}(t-h) \\ z \\ w \end{bmatrix} < 0 \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 + (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} + \varepsilon_3^{-1} + \varepsilon_4^{-1})P_1P_1 + I + P_2 & A_1P_1 & F^T - Q & P_1 \\ P_1A_1^T & -P_2 + \Omega_2 & 0 & 0 \\ F - Q^T & 0 & \varepsilon_2r_2^2I - 2G + I & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & -\eta I \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 + I + P_2 & A_1P_1 & F^T - Q & P_1 & P_1 & P_1 & P_1 & P_1 & P_1 \\ P_1A_1^T & -P_2 + \Omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F - Q^T & 0 & \varepsilon_2r_2^2I - 2G + I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & -\eta I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2I & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3I & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_4I & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (bf(x, x(t-h), u)\theta - bf(\hat{x}, \hat{x}(t-h), u)\hat{\theta} + w) = 0 \quad (30)$$

از آنجا که $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x} = x$ معادله (۳۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (bf(x, x(t-h), u)(\theta - \hat{\theta}) + w) = 0 \quad (31)$$

با استفاده از معادله (۳۱) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t (\theta - \hat{\theta})^T f(x, x(t-h), u)^T b^T b f(x, x(t-h), u)(\theta - \hat{\theta}) d\tau \right) = \int_0^\infty w(\tau)^T w(\tau) d\tau + C_1 \quad (32)$$

که در آن C_1 مقدار ثابتی است. معادله (۳۲) می‌تواند به صورت (۳۳) نوشته شود:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^n \delta_{i+1}^{\delta_i} (\theta - \hat{\theta})^T f(x, u)^T b^T b f(x, u)(\theta - \hat{\theta}) \right) = \int_0^\infty w(\tau)^T w(\tau) d\tau + C_1 \quad (33)$$

اگر شرایط تحریک پایای زیر برقرار باشد:

با قرار دادن $\Lambda_1 = \Omega_1 + I + P_2$ و $\Lambda_2 = -P_2 + \Omega_2$ LMI نشان داده شده در (۱۳) حاصل می‌گردد. □

با انتگرال گیری از دو طرف نابرابری (۲۵) از $t = 0$ تا $t = t_f$ نتیجه می‌شود:

$$V(t_f) \leq V(0) - \int_0^{t_f} \tilde{x}^T(\tau) \tilde{x}(\tau) d\tau - \int_0^{t_f} z^T(\tau) z(\tau) d\tau + \int_0^{t_f} w^T(\tau) w(\tau) d\tau \quad (29)$$

از آنجا که $V(x, \theta) \geq 0$ و غیر نزولی است، بنابراین می‌توان گفت $V \in L_\infty$. در نتیجه با توجه به تعریف (۱۴) می‌توان نتیجه گرفت $\tilde{\theta} \in L_\infty$ ، $\tilde{x} \in L_\infty$ و $z \in L_\infty$. همچنین از آنجایی که $w \in L_2$ ، نابرابری (۲۹) ایجاب می‌کند که $\tilde{x} \in L_2$ و $z \in L_2$ باشد. همچنین از آنجایی که هر دو تابع $\phi(x, x(t-h), u)$ و $f(x, x(t-h), u)$ لیپشیتز هستند، معادله (۹) موجب می‌شود که $\dot{\tilde{x}} \in L_\infty$. با توجه به $\tilde{x} \in L_2$ ، $\tilde{x} \in L_\infty$ و $\dot{\tilde{x}} \in L_\infty$ و لم باربالات [۱۹] می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$ و همچنین نتیجه می‌شود که $\dot{\tilde{x}}(t) = 0$ ، علاوه بر این از آنجا که $z \in L_2$ و $z \in L_\infty$ و $\dot{z} \in L_\infty$ و دوباره با استفاده از لم باربالات می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{t \rightarrow \infty} z = 0$. در نتیجه با استفاده از معادله (۹) و نتایج فوق الذکر می‌توان گفت:

با بکارگیری $\|\Delta_1(t)\| \leq 2$ و $\|\Delta_1(t)\| \leq 2$ در نظر گرفته شده است. با بکارگیری جعبه ابزار YALMIP بعنوان تجزیه کننده [۲۱] و جعبه ابزار LMI در MATLAB بعنوان حل کننده نامعادلات ماتریسی خطی [۲۲]، جوابها به صورت زیر تعیین می گردند:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 53.89 & 4.97 \\ 4.97 & 15 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} 3.33 & 0 \\ 0 & 10.23 \end{bmatrix}$$

$$M = 3.63, \quad \rho = 47.76, \quad S = \begin{bmatrix} 221.13 & -1.91 \end{bmatrix}$$

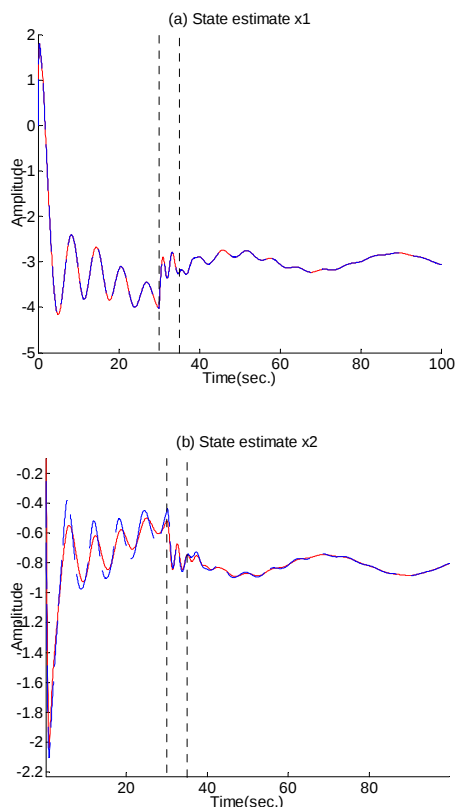
$$G = 178.46, \quad Q = \begin{bmatrix} 49.07 & 49.07 \end{bmatrix}^T, \quad \eta = 7.5$$

$$F = \begin{bmatrix} 49.07 & 49.07 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 49.07 & 49.07 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_4 = 27.93, \quad \varepsilon_3 = 40.29, \quad \varepsilon_2 = 75.71, \quad \varepsilon_1 = 75.71$$

بنابراین بهره‌های رویکرد به صورت $L = \begin{bmatrix} 66.39 & -0.18 \end{bmatrix}^T$ و $K = \begin{bmatrix} 14.72 & 4.66 \end{bmatrix}^T$ بدست خواهد آمد.

همانطور که در شکل (۱) نشان داده شده است، بهره‌های رویکرد تطبیقی مقاوم بدست آمده از روش پیشنهادی سبب شده است که تخمینگر به خوبی بتواند بردار حالات سامانه با حضور اغتشاشات و عدم قطعیت‌ها را تعقیب نماید.



شکل ۱: بردار حالت سامانه‌ای اصلی (خط)، تخمین حالت روش پیشنهادی (خط چین)

$\forall t_0, \exists \xi, \delta > 0$ such that :

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta} f^T(x(\tau), x(\tau-h), u(\tau)) b^T b f(x(\tau), x(\tau-h), u(\tau)) d\tau > \xi I \quad (34)$$

با استفاده از (۶) و (۳۳) نتیجه می گیریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^n (\theta - \hat{\theta})^T \xi_i (\theta - \hat{\theta}) \right) \leq \beta^2 + C_1 \quad (35)$$

که در آن ξ_i حد پایین در تعریف تحریک پایای (۳۴) در بازه $[\delta_i, \delta_{i+1}]$ می باشد، و لذا می توان نوشت:

$$\|\theta - \hat{\theta}\| \leq \sqrt{\frac{\beta^2 + C_1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^n \lambda_{\min}(\xi_i) \right)}} \quad (36)$$

از آنجا که همواره $\xi_i > 0$ ، برای تمامی آشفته‌گی‌های بهره با $i=1, \dots, n$ شرایط $\|\Delta_1(t)\| \leq r_1$ و $\|\Delta_2(t)\| \leq r_2$ و اغتشاشات به صورت $\|w\|_2 \leq \beta$ ، و تئیکه $t \rightarrow \infty$ ، تخمین پارامتر به سمت مقادیر واقعی خود همگرا می گردد ($\hat{\theta} \rightarrow \theta$).

تکته ۱: قسمت دوم در (۱۱) به منظور اصلاح قانون تطبیقی اضافه شده است که اگر پارامترها از مرز تعیین شده خارج گردند، مشتق تابع لیاپانوف در فضای تخمین پارامتر منفی باقی بماند [۲۰].

۴- مثال عددی

سامانه‌ی غیر خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.25 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-0.5) \\ x_2(t-0.5) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(x_2) \sin(x_2 - 0.5) + 4u(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \end{bmatrix} \theta [-\cos(x_2) \cos(x_2 - 0.5) + \sin(0.5t)]$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

با یک ورودی تابع ورودی پله واحد به صورت $u(t)$ و $\theta = 3$ برای $0 \leq t < 30$ که به صورت ناگهانی در زمانهای $t \geq 30$ تغییر و برابر $\theta = 7$ می شود. همچنین فرض می شود در زمان $t = 35$ بهره رویکرد نیز دچار تغییرات شده و مقدار ۲- به صورت اغتشاش جمعی به آن اضافه می گردد. پارامترهای طراحی به صورت زیر انتخاب شده اند: $\sigma_0 = 10$ و $\theta_0 = 2.5$. همچنین مرز نایقینی به صورت $\gamma_1 = 0.2$, $\gamma_2 = 0.2$, $\gamma_3 = 7$, $\gamma_4 = 5$, $\Gamma = 0.0001$

تغییر با زمان به صورت تکه‌ای ثابت و اغتشاشات ورودی محدود و اغتشاشات جمعی محدود در بهره روینگر باشد، ارائه گردید. قسمت غیر خطی در سامانه در حالت کلی می‌تواند به بردارهای حالت غیر قابل اندازه‌گیری وابسته باشد. با حل نابرابری‌های ماتریسی خطی به کمک نرم افزارهای عددی موجود، بهره‌های روینگر تطبیقی PI مقاوم که همگرایی تخمین بردار حالات سامانه را تضمین می‌کند بدست می‌آید، هر چند که همگرایی دقیق پارامترها به مقادیر واقعی خودش وابسته به ارضاء شرط تحریک پایا است. با بکارگیری حلقه بازخورد انتگرالی در این طراحی، صحت تخمین حالت ماندگار و مقاومت آن در برابر اغتشاشات، ورودی‌های نامعلوم و خطاهای مدلسازی بیشتر می‌گردد.

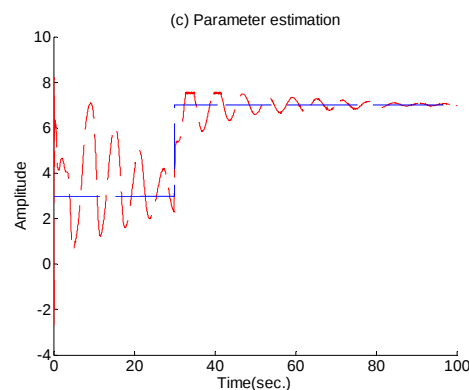
تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله تمایل دارند از جناب آقای مهندس علی اشرف مدرس بعثت پیشنهادات سودمند ایشان سپاسگزاری نمایند. این پژوهش با حمایت مادی و معنوی شرکت مدیریت پروژه‌های نیروگاهی ایران (مینا) بر پایه قرارداد شماره RD-88-09 مورخ ۸۸/۶/۵ انجام گردیده است.

مراجع

- [1] Garimella, P., Yao, B., 2003, "Nonlinear adaptive robust observer design for a class of nonlinear systems", *Proc. American Control Conf.*, 4391–4396.
- [2] Bastin, G., Gevers, M. R., 1988, "Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 33, 650–658.
- [3] Marino, R., 1990, "Adaptive observers for single output nonlinear systems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 35, 1054–1058.
- [4] Marino, R., Tomei, P., 1992, "Global adaptive observers for nonlinear systems via filtered transformations", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 37, 1239–1245.
- [5] Marino, R., Tomei, P., 1995, "Adaptive observers with arbitrary exponential rate of convergence for nonlinear systems", *IEEE Trans. Automatic Control*, 40, 1300–1304.
- [6] Rajamani, R., Hedrick, J. K., 1995, "Adaptive observers for active automotive suspensions: Theory and experiment", *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 3, 86–93.
- [7] Cho, Y. M., Rajamani R., 1997, "A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42, 534–537.
- [8] Marino, R., Santosuosso, G. L., Tomei, P., 2001, "Robust adaptive observers for nonlinear systems

شکل (۲) نشان می‌دهد تخمین پارامتر در روش پیشنهادی به خوبی توانسته پارامتر حقیقی سامانه را دنبال کند. همانطور که انتظار می‌رفت تغییرات بهره در زمان $t=35$ تاثیر زیادی در مساله تخمین در روش پیشنهادی ندارد، چراکه دینامیک روینگر (۹) در خطای خروجی ضرب می‌شود و از آنجایی که این خطا در روش پیشنهادی به سمت صفر می‌رود لذا تاثیر این اغتشاشات نیز صفر می‌گردد.



شکل ۲: تخمین پارامتر با استفاده از روش پیشنهادی

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، یک روینگر PI تطبیقی مقاوم و غیر شکننده برای دسته‌ای از سامانه‌های تاخیردار غیر خطی که می‌تواند دارای پارامتر قابل

- with bounded disturbances", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 46, 967–972.
- [9] Jung, J., Hul, K., Fathy, H.K., Srein, J.L., 2006, "Optimal robust adaptive observer design for a class of nonlinear systems via an H-infinity approach", *Proc. American Control Conf.*, 3637–3642.
 - [10] Jung, J., Hwang, J., Huh, K., 2007, "Optimal Proportional-Integral Adaptive Observer Design for a Class, of Uncertain Nonlinear Systems", *Proc. of American Control Conf.*, 1931–1936.
 - [11] Liu, L., Han, Z., Li, W., 2010, "H_∞ non-fragile observer-based sliding mode control for uncertain time-delay systems", *Int. Journal of franklin*, 347, 567–576.
 - [12] Chen, J.D., Yang, C.D., Lien, C.H., Horng, J.H., 2008, "New delay-dependent non-fragile H_∞ observer-based control for continuous time-delay systems", *Information Sciences*, 178, 4699–4706.
 - [13] Jeong, C. S., Yaz, E. E., Bahakeem, A., Yaz, Y. I., 2006, "Resilient design of observers with general criteria using LMIs", *Proc. of American Control Conf.*, 111–116.
 - [14] Keel, L.H., Bhattacharyya, S.P., 1997, "Robust, fragile, or optimal?", *IEEE – Trans. Autom. Control*, 42, 1098–1105.
 - [15] Dorato, P., 1998, "non-fragile controller design: an overview", *Proc. of American Control Conf.*, 2829–2831.

- [16] Jeong, C. S., Yaz, E. E., Yaz, Y. I., 2008, "Lyapunov-Based design of resilient observers for a class of nonlinear systems and general performance criteria", *IEEE Multi-conference on Systems and Control*, 942-947.
- [17] Jeong, C. S., Yaz, E. E., Yaz, Y. I., 2007, "Stochastically resilient design of H_∞ observers for discrete-time nonlinear systems", *IEEE Conf. CDC*, 1227- 1232.
- [18] Chen, F., Zhang, W., 2007, "LMI criteria for robust chaos synchronization of a class of chaotic systems", *Nonlinear Analysis*, 67, 3384-3393.
- [19] Krstic, M., Kanellakopoulos, I., P. Kokotovic, "Nonlinear and Adaptive Control Design", *John Wiley and Sons*, 1995.
- [20] Ioannou, P. A., Sun, J., *Robust Adaptive Control*, Prentice Hall, 1996.
- [21] Lofberg, J., 2004, "YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB", *IEEE Int. Symp. Computer Aided Contol Syst. Design Conf.*, 284-289.
- [22] Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A., Chilai, M., *LMI control toolbox user's guide*, Massachusetts: The Mathworks, 1995.