

کنترل محدود نگهدارنده سیستم‌های چندعاملی خطی متشكل از عامل‌های غیریکسان با استفاده از فیدبک خروجی دینامیکی

حامد حق‌شناس^۱، محمدعلی بادامچی‌زاده^۲، مهدی برادران‌نیا^۳

^۱دانشجوی دکتری گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تبریز، haghshenas91@ms.tabrizu.ac.ir

^۲استاد گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تبریز، mbadamchi@tabrizu.ac.ir

^۳استادیار گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تبریز، mbaradaran@tabrizu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله X/X/XX، ۱۳XX، تاریخ پذیرش مقاله X/X/XX)

چکیده: در این مقاله، به مطالعه مسئله کنترل محدود نگهدارنده سیستم‌های چندعاملی خطی ناهمگن و تحت گراف ارتباطات جهت‌دار، بر اساس قالب تنظیم خروجی و با استفاده از فیدبک خروجی پرداخته شده است. با ایده گرفتن از پژوهش‌هایی که به تنظیم خروجی سیستم‌های چندعاملی با وجود عامل سردسته در حوزه رضایت جمعی پرداخته اند، عامل‌های سردسته به صورت سیستم خارجی با دینامیک یکسان در نظر گرفته شده‌اند. در طراحی کنترل کننده برای هر عامل پیرو، از فیدبک خروجی دینامیکی توزیع یافته استفاده شده است. جهت حل مسئله از خطای کنترل محدود نگهدارنده بهره گرفته شده است که این امر، امکان در نظر گرفتن بیش از یک عامل سردسته را در مبحث تنظیم خروجی فراهم ساخته و در نهایت، با استفاده از روش‌های اصلاح شده تنظیم خروجی به حل مسئله پرداخته شده است. یک شبیه‌سازی عددی نیز جهت ارزیابی عملکرد کنترل کننده پیشنهادی انجام یافته، که حاکی از عملکرد مناسب کنترل کننده می‌باشد.

کلمات کلیدی: کنترل محدود نگهدارنده، عامل‌های غیریکسان، تنظیم خروجی، فیدبک خروجی.

Containment Control of Linear Multi-Agent Systems with Non-Identical Agents Using Dynamic Output Feedback

Hamed Haghshenas, Mohammad Ali Badamchizadeh, Mahdi Baradarannia

Abstract: In this paper, we study the containment control problem of heterogeneous linear multi-agent systems under directed topology based on output regulation framework and using output feedback control. Motivated by leader-follower output regulation problems, the leaders are assumed to be ecosystems with identical dynamics. In controller design approach for each follower, we utilize a distributed dynamic output feedback control scheme. To achieve the objective of this work we utilize the containment error, which enables us to consider more than one leader in output regulation framework and to use output regulation techniques with some modifications to solve the containment problem. Finally, the validity of theoretical results are demonstrated through an example.

Keywords: Containment control, Non-Identical agents, Output regulation, Output feedback.

امروزه سیستم‌های چندعاملی^۱ به دلیل کاربردهای وسیعی که در مدل‌سازی رفتار دسته‌جمعی حیوانات، آرایش هندسی هوایی‌ها، شبکه‌های حسگر، تجسس نظامی، عملیات نجات و حتی مدل‌سازی

۱- مقدمه

وجود دارد، دینامیک عامل‌ها می‌تواند متفاوت از هم باشد. دینامیک متفاوت عامل‌ها می‌تواند انعطاف‌پذیری سیستم را نیز افزایش دهد. بدین معنی که، سیستمی که عامل‌هایی با دینامیک‌های مختلف دارد نسبت به سیستمی با عامل‌های یکسان، اهداف وسیع‌تر و کارایی بالاتری می‌تواند داشته باشد. به همین جهت، مطالعه کنترل محدود نگهدارنده سیستم‌های چندعاملی با دینامیک غیریکسان دارای اهمیت می‌باشد. در [۹]، کنترل محدود نگهدارنده برای عامل‌های غیریکسان در دو حالت بررسی شده است. در حالت اول، دینامیک عامل‌های سردسته انتگرال‌گیر مرتبه اول و دینامیک عامل‌های پیرو، انتگرال‌گیر مرتبه دوم فرض شده است. در این حالت، ورودی کنترلی به صورت خطی معرفی شده است. در حالت دوم، معکوس حالت اول فرض شده و قانون کنترلی غیرخطی برای تحقق کنترل محدود نگهدارنده به صورت زمان‌محدود معرفی شده است. برای این حالت، شرایط لازم و کافی برای حل مسئله به دست آمده است. مراجع [۱۰، ۱۱] نیز به مسئله کنترل محدود نگهدارنده سیستم‌های چندعاملی پرداخته‌اند. در [۱۱]، این مسئله برای گروهی از عامل‌های غیریکسان با دینامیک غیرخطی و شامل پارامترهای نامعین، با استفاده از کنترل تطبیقی بررسی شده است. همچنین در [۱۱]، محدودیتی بر روی گراف اربیلات سیستم فرض شده است که گستره سیستم‌های مورد بحث را محدود‌تر می‌کند. در [۱۱]، طراحی کنترل کننده بر اساس کنترل تطبیقی بوده است.

از طرفی در روش‌های طراحی کنترل کننده فیدبک حالت، فرض بر این است که کلیه متغیرهای حالت در دسترس می‌باشند. در صورتی که در عمل برای اندازه‌گیری هر یک از متغیرهای حالت لازم است که یک حس‌گر و سیستم اندازه‌گیری تعیینه نمود که مستلزم هزینه زیادی است. از این رو در کاربردهای عملی، حالت‌های سیستم همیشه در دسترس نیستند و فقط به خروجی‌های سیستم می‌توان دسترسی داشت. در چنین مواقعي، استفاده از فیدبک حالت امکان‌پذیر نبوده و طراحی کنترل کننده بر اساس فیدبک خروجی مطلوب می‌باشد. در [۱۰]، کنترل محدود نگهدارنده سیستم‌های چندعاملی خطی ناهمنگ با استفاده از فیدبک حالت بررسی شده است.

هدف این مقاله، حل مسئله کنترل محدود نگهدارنده برای سیستم‌های چندعاملی خطی با دینامیک غیریکسان، تحت مبحث تنظیم خروجی و با استفاده از فیدبک خروجی می‌باشد. با ایده گرفتن از پژوهش‌هایی که به تنظیم خروجی سیستم‌های چندعاملی با وجود عامل سردسته در حوزه رضایت جمعی پرداخته‌اند، دینامیک عامل‌های سردسته را به صورت سیستم خارجی در نظر می‌گیریم. در مقایسه با [۹] که در آن دینامیک بین پیروها و سردسته‌ها متفاوت است اما دینامیک بین پیروها یکسان است، در این مقاله دینامیک پیروها با یکدیگر نیز متفاوت در نظر گفته شده است. در مقایسه با [۱۰] که در آن از فیدبک حالت بهره گرفته شده، در این مقاله طراحی کنترل کننده بر اساس فیدبک خروجی خواهد بود. همچنین، با اصلاح خطای مرسوم در مبحث تنظیم خروجی به منظور در نظر گرفتن

جوامع انسانی دارند، مورد توجه بسیاری از محققان قرار دارند [۱، ۲]. یکی از مباحث اصلی سیستم‌های چندعاملی، رضایت جمعی^۳ می‌باشد که در ابتدا برای سیستم‌های بدون عامل سردسته مورد بررسی قرار گرفته است [۱، ۲]. سپس، با توجه به اینکه گروهی از عامل‌ها می‌توانند یک سیگنال مرجع را تعقیب کنند، برای سیستم‌هایی با وجود عامل سردسته موردن مطالعه قرار گرفته است [۳].

در سال‌های اخیر، تنظیم خروجی سیستم‌های چندعاملی از جمله مباحثی بوده است که در حوزه رضایت جمعی مورد توجه محققان قرار گرفته است. برای مثال، رضایت جمعی خروجی بدون عامل سردسته برای سیستم‌های چندعاملی خطی ناهمنگ^۴ بر اساس اصل مدل داخلی در [۴] موردن مطالعه قرار گرفته است. همچنین، تنظیم خروجی سیستم‌های چندعاملی با عامل سردسته‌ای که به صورت یک سیستم خارجی^۵ در نظر گرفته شده، در مراجع مختلفی مورد بحث قرار گرفته است، که برای مثال می‌توان به [۵] اشاره کرد. در [۱۷]، به تحلیل سیستم‌های چندعاملی خطی بر اساس تنظیم خروجی و رفتار گذرای عامل‌ها پرداخته شده که سبب بهبود رفتار گذرای سیستم شده است.

یکی از شاخه‌های مهم کنترل سیستم‌های چندعاملی، کنترل محدود نگهدارنده^۶ می‌باشد که از چندین پدیده طبیعی الهام گرفته شده است و کاربردهای عملی با اهمیت و مختلفی می‌تواند داشته باشد. به عنوان مثال، مشاهده شده است که پروانه‌های کرم ابریشم نر از طریق فرومون پخش شده توسط جنس ماده، به سمت پوش محدب^۷ پروانه‌های کرم ابریشم ماده جذب می‌شوند [۷]. برای یک سیستم چندعاملی، کنترل محدود نگهدارنده وقتی تحقق می‌یابد که بتوان قانون کنترلی هر عامل پیرو را طوری طراحی کرد که عامل‌های پیرو در نهایت، به پوش محدب ایجاد شده توسط عامل‌های سردسته هدایت شوند. یک نمونه از کاربردهای کنترل محدود نگهدارنده، ایجاد فضای امن توسط گروهی از ربات‌ها جهت حفاظت گروهی دیگر و یا انتقال مواد پرخطر و حساس می‌باشد. در این مورد، گروهی از عامل‌ها به عنوان سردسته معرفی می‌شوند و وظیفه مشخص کردن پوش محدب امن را دارند. با اعمال کنترل محدود نگهدارنده به چنین سیستمی، عامل‌های پیرو که باید مورد حفاظت قرار گیرند و یا وظیفه انتقال مواد پرخطر و حساس را دارند، به پوش محدبی که توسط عامل‌های سردسته ایجاد شده است، هدایت شوند. در نتیجه، لازم نخواهد بود که عامل‌های پیرو تجهیزات اضافی داشته و یا به حس‌گرهای تشخیص موضع و نقاط پرخطر مجهز باشند [۸]. مسئله کنترل محدود نگهدارنده برای گستره وسیعی از سیستم‌ها با دینامیک غیرخطی، نامعین و اتفاقی مورد مطالعه قرار گرفته است. برای مثال در [۱۸]، این مسئله برای سیستم‌های غیرخطی اتفاقی و با استفاده از روش بازگشت به عقب بررسی شده است. همچنین، مطالعاتی که تاکنون در حوزه کنترل محدود نگهدارنده انجام گرفته، غالباً بر روی سیستم‌های چندعاملی مشکل از عامل‌هایی با دینامیک یکسان بوده‌اند. در کاربردهای عملی به دلیل شرایط مختلف و قیدهایی که بر روی عامل‌ها

برای مشخص کردن این که k امین سردسته با کدامیک از عامل‌های پیرو در ارتباط می‌باشد، از ماتریس Δ_k استفاده می‌شود که یک ماتریس قطری با درایه‌های قطری $\delta_1^k, \delta_2^k, \dots, \delta_n^k$ می‌باشد. اگر بین پیرو i و سردسته k کanal ارتباطی برقرار باشد، درایه δ_i^k برابر یک و در غیر این صورت برابر با صفر خواهد بود.

۲-۲- تعاریف و نمادها

در این مقاله، برای یک سیستم چندعاملی متشکل از n عامل پیرو و m عامل سردسته، G_n و G_{n+m} به ترتیب، گراف‌هایی در نظر گرفته می‌شوند که برای مدل‌سازی ارتباطات بین تمامی $n+m$ عامل و n عامل پیرو به کار رفته‌اند. G_n را می‌توان از گراف G_{n+m} ، از طریق حذف گره‌های عامل‌های سردسته و یال‌های متصل به آن گره‌ها به دست آورد. از A و L به ترتیب، برای نشان دادن ماتریس‌های مجاورت و لاپلاسین متناظر با گراف G_n استفاده می‌شود. برای عامل‌های پیرو و سردسته به ترتیب، اندیس‌های $\{1, \dots, n\}$ و $\{n+1, \dots, n+m\}$ به کار می‌رود که از اشتراک مجموعه همسایگان پیرو i و مجموعه پیروها به طوری آمده است. در واقع، N مجموعه همسایگان پیرو i می‌باشد به طوری که عامل‌های سردسته از آن حذف شده‌اند.

مجموعه سردسته‌ها و مجموعه پیروها به ترتیب با R و F نشان داده می‌شود. ماتریس‌های I_p و $\mathbf{0}$ به ترتیب نشان‌دهنده بردار ستونی $1 \times n$ با درایه‌های یک، ماتریس همانی با ابعاد p و ماتریس صفر با ابعاد مناسب می‌باشند. ماتریس قطری-بلوکی ایجاد شده توسط ماتریس‌های x_1, x_2, \dots, x_n با $\text{diag}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ نمایش داده می‌شود. نماد \otimes بیان‌گر ضرب کرونکر^۷ است. $\text{dist}(x, C)$ نیز یانگر فاصله $x \in \mathbb{C}^N$ از مجموعه $C \subseteq \mathbb{C}^N$ می‌باشد. به عبارتی دیگر:

$$\text{dist}(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|_2 \quad (2)$$

در ادامه چندین تعریف بیان می‌شود که در این مقاله مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

تعریف ۱ (۱۳) - مجموعه $C \subseteq \mathbb{C}^N$ محدب است اگر به ازای هر $x, y \in C$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$. پوش محدب مجموعه نقاط متناهی $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ که با $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ نشان داده می‌شود، کوچکترین مجموعه محدب شامل تمامی نقاط موجود در X می‌باشد. به عبارتی دیگر:

$$\begin{aligned} Co(X) &= \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \mid x_i \in X, \alpha_i \in \mathbb{C} \right. \\ &\quad \left. , \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

بیش از یک عامل سردسته، از روش‌های موجود در حوزه تنظیم خروجی برای حل مسئله کنترل محدود نگهدارنده استفاده می‌شود. در تحلیل مسئله از فرمول‌بندی خطای کنترل محدود نگهدارنده بر اساس ماتریس H_k استفاده می‌شود که سبب می‌شود تا بتوان از روش‌های اصلاح شده تنظیم خروجی جهت حل مسئله بهره گرفت.

مقاله حاضر در شش بخش تنظیم شده است. در بخش دوم مفاهیمی از نظریه گراف و تعاریف و نمادهای استفاده شده در مقاله ارائه شده است. بخش سوم به بیان مسئله پرداخته و سیستم مورد مطالعه را معرفی می‌کند. در بخش چهارم کنترل کننده پیشنهادی ارائه شده و مفاهیم اصلی مقاله بیان می‌شود. جهت ارزیابی عملکرد کنترل کننده پیشنهادی، یک شبیه‌سازی عددی نیز انجام گرفته که در بخش پنجم ارائه می‌شود. در نهایت، نتایج مقاله و کارهای پژوهشی آینده بیان شده است.

۳- پایه‌های نظری

۳-۱- نظریه گراف (۱۲)

برای مدل‌سازی ارتباط بین عامل‌ها در یک سیستم چندعاملی از گراف‌ها استفاده می‌شود. برای یک سیستم چندعاملی متشکل از n عامل، گراف جهت‌دار یا غیرجهت‌دار متناظر G می‌تواند توسط (V, E) نشان داده شود، که $V = \{1, 2, \dots, n\}$ مجموعه گره‌ها و $E \subseteq V \times V$ مجموعه یال‌ها می‌باشد. یالی که به صورت $(i, j) \in E$ نمایش داده می‌شود به این معنی است که z امین عامل به اطلاعات i این عامل دسترسی دارد و همچنین، عامل j یک همسایه عامل j می‌باشد. بنابراین، می‌توان گفت که مجموعه همسایگان عامل j ، عامل‌هایی می‌باشند که عامل j اطلاعات را از آن‌ها دریافت می‌کند.

گراف G را غیرجهت‌دار گویند اگر $(j, i) \in E$ ، $(i, j) \notin E$ ایجاب کند. یک مسیر جهت‌دار از گره i به گره j رشته‌ای از گره‌ها می‌باشد که با گره i شروع می‌شود و در گره j پایان می‌یابد، به طوری که گره‌های متوالی میانی به صورت $(i, p), (p, q), \dots, (r, j)$ مجاور باشند. یک گراف جهت‌دار را قویاً هم‌بند گویند اگر برای هر جفت مرتب از گره‌های متفاوت به صورت $[i, j]$ ، مسیر جهت‌داری از گره i به گره j وجود داشته باشد.

ماتریس مجاورت $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ متناظر با گراف G به گونه‌ای تعریف می‌شود که $a_{ij} > 0$ اگر $a_{ii} = 0$ ، $(j, i) \in E$ ، و در غیر این صورت $a_{ij} = 0$ باشد. ماتریس لاپلاسین $L = [l_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ گراف G نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{r=1, r \neq i}^n a_{ir}, & i = j \\ -a_{ij}, & i \neq j \end{cases} \quad (1)$$

برای حل مسئله مطرح شده، ابتدا خطای کنترل محدود نگهدارنده پیشنهادی برای \dot{x}_i این عامل پیرو به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_i(t) = \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_i - x_j) + \sum_{k=n+1}^{n+m} \delta_i^k(x_i - w_k) \quad (8)$$

بردار خطای جامع

$$e = \begin{bmatrix} e_1^T & e_2^T & \dots & e_n^T \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

را با استفاده از رابطه (8) می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$e(t) = \sum_{k=n+1}^{n+m} (H_k \otimes I_N)(x - \mathbf{1}_n \otimes w_k(t)) \quad (10)$$

که در آن

$$H_k = \frac{1}{m} \mathbf{L} + \Delta_k, k \in \mathbb{R} \quad (11)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T & \dots & x_n^T \end{bmatrix}^T$$

استفاده از ماتریس معرفی شده در رابطه (11) باعث می‌شود که به متغیرهای حالت عامل‌های سردهسته دسترسی داشته باشیم. در واقع، در اغلب کارهای پژوهشی انجام یافته در زمینه کنترل محدود نگهدارنده، ضرایب تشکیل‌دهنده پوش محدب عامل‌های سردهسته توسط ماتریس $L_1^{-1} L_2$ مشخص می‌شوند، که ماتریس‌های $L_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $L_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ از تقسیم‌بندی ماتریس لاپلاسین متناظر با گراف G_{n+m} به صورت

$$\begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (12)$$

به دست می‌آیند. همچنین، مکان‌های نهایی عامل‌های پیرو از طریق عبارت زیر به دست می‌آیند:

$$(-L_1^{-1} L_2) \otimes I_N \mathcal{W}_R \quad (13)$$

که \mathcal{W}_R بردار حالت جامع سردهسته‌ها می‌باشد. به عبارت دیگر:

$$\mathcal{W}_R = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_{n+1}^T & \mathcal{W}_{n+2}^T & \dots & \mathcal{W}_{n+m}^T \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

همانطور که بعداً در اثبات لم ۲ خواهیم دید، \mathcal{W}_R همگرایی عامل‌های پیرو را به سمت عبارت

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \left[\left(\sum_{r=n+1}^{n+m} H_r \right)^{-1} H_k \mathbf{1}_n \right] \otimes w_k(t) \quad (15)$$

ایجاب می‌کند، که ترکیب محدبی از متغیرهای حالت $w_k, k \in \mathbb{R}$ می‌باشد. در نتیجه، استفاده از ماتریس پیشنهادی $H_k, k \in \mathbb{R}$ این امکان را فراهم می‌آورد تا بتوان حالت نهایی عامل‌های پیرو را توسط (15) بیان کرد. مزیت عبارت (15) نسبت به (13) این می‌باشد که در (13) فقط به بردار حالت جامع سردهسته‌ها دسترسی داشته، اما در (15) به متغیرهای حالت عامل‌های سردهسته دسترسی داریم که باعث افزایش انعطاف‌پذیری محاسباتی می‌شود.

ماتریس‌ها دسته‌ای از ماتریس‌ها هستند که در تحلیل سیستم‌های چند عاملی کاربردهای مختلفی دارند. تعریف بعدی به معرفی M -ماتریس‌ها می‌پردازد.

تعریف ۲ $(14) - Z$ را مجموعه ماتریس‌های مربوطی در نظر بگیرید که درایه‌های غیرقطریشان غیرمثبت باشند. به عبارتی دیگر:

$$Z \triangleq \{Q = [q_{ij}] \in \mathbb{R}^{s \times s} : q_{ij} \leq 0, i \neq j\} \quad (4)$$

ماتریس Q یک M -ماتریس ناویژه (ویژه) نامیده می‌شود اگر $Q \in Z$ و تمامی کهادهای اصلی Q مثبت (غیرمنفی) باشند.

تعریف ۳ برای یک سیستم چند عاملی، کنترل محدود نگهدارنده تحقق می‌یابد اگر بتوان قانون کنترلی هر عامل پیرو را طوری طراحی کرد که به ازای $t \rightarrow \infty$, عامل‌های پیرو به پوش محدب ایجاد شده توسط عامل‌های سردهسته هدایت شوند.

با تعریف مناسب شبکه ارتقابی بین عامل‌های پیرو و کنترل مناسب می‌توان از تصادم جلوگیری کرد.

۳- بیان مسئله

سیستم در نظر گرفته شده در این مقاله از n عامل پیرو با دینامیک خطی غیریکسان و m عامل سردهسته یکسان تشکیل یافته است. معادله دینامیکی حاکم بر \dot{x}_i می‌باشد:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i x_i + B_i u_i \\ y_i &= C_i x_i, i \in F \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن $x_i(t) \in \mathbb{R}^N$ متغیر حالت، $u_i(t) \in \mathbb{R}^p$ نیروی کنترلی و $y_i(t) \in \mathbb{R}^M$ خروجی i این پیرو است. A_i, B_i و C_i نیز ماتریس‌هایی با ابعاد مناسب هستند. همچنین فرض می‌شود که در طراحی کنترل کننده توزیع یافته، فقط به خروجی‌های عامل‌های پیرو دسترسی داریم. هر یک از عامل‌های سردهسته نیز، سیستمی خارجی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\dot{w}_k = S w_k, k \in \mathbb{R} \quad (6)$$

که $w_k \in \mathbb{R}^N$ متغیر حالت خارجی k این عامل سردهسته می‌باشد. ماتریس S نیز برای تمامی عامل‌های سردهسته یکسان می‌باشد.

هدف این مقاله، تحقق کنترل محدود نگهدارنده برای سیستم چند عاملی (5) و (6) می‌باشد. یعنی $\forall i \in F$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x_i(t), \text{Co}(w_k(t), k \in \mathbb{R})) = 0 \quad (7)$$

۴- طراحی کنترل کننده

در ادامه، روند طراحی کنترل کننده برای سیستم چند عاملی (5) و (6) به منظور حل مسئله کنترل محدود نگهدارنده شرح داده می‌شود.

۴-۱- خطای کنترل محدود نگهدارنده

که $K_i^1, K_i^2 \in \mathbb{R}^{p \times N}$ ماتریس‌های بهره کنترل کننده و $L_i \in \mathbb{R}^{N \times M}$ ماتریس بهره رویت‌گر هستند و در بخش‌های بعدی در مورد طراحی آن‌ها بحث خواهد شد.
سیستم حلقه-بسته تشکیل شده از (۵)، (۶)، (۸) و قانون کنترلی (۱۹) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= A_c x_c + \sum_{k=n+1}^{n+m} B_c^k \bar{w}_k \\ \dot{\bar{w}}_k &= \bar{S} \bar{w}_k\end{aligned}\quad (۲۰)$$

$$e = C_c x_c + \sum_{k=n+1}^{n+m} D_c^k \bar{w}_k$$

که x_c بردار حالت حلقه-بسته، $\bar{S} = I_n \otimes S$ و بقیه ماتریس‌های موجود در (۲۰) در بخش‌های بعدی ارائه خواهند شد. بدین ترتیب، مسئله‌ای که پیش رو خواهیم داشت به این صورت خواهد بود که برای سیستم چندعاملی (۵) و (۶)، قانون کنترلی (۱۹) طوری تعیین شود که مبدأ سیستم $\dot{x}_c = A_c x_c + \sum_{k=n+1}^{n+m} B_c^k \bar{w}_k$ باشد و به ازای شرایط اولیه دلخواه $w_k(0) \in \mathbb{R}^M$ داشته باشیم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (۲۱)$$

برای حل این مسئله به چند فرض استاندارد نیاز می‌باشد که در ادامه آورده می‌شوند.

فرض ۱ (A_i, B_i) به ازای $i \in F$ پایدارپذیر می‌باشد.

فرض ۲ (C_i, A_i) به ازای $i \in F$ آشکارپذیر می‌باشد.

فرض ۳ معادلات ماتریسی خطی

$$S = A_i + B_i U_i, i \in F \quad (۲۲)$$

به ترتیب دارای پاسخ U_i هستند.

فرض ۱ و فرض ۲ در اثبات قضیه ۱ مورد استفاده قرار خواهند گرفت. فرض‌هایی مشابه فرض ۳ در [۶] آورده شده‌اند. در رابطه (۲۲) با توجه به ابعاد ماتریس‌های برای ماتریس U یا جوابی نخواهیم داشت و یا یک جواب منحصر به فرد خواهیم داشت که طبق فرض ۳، وجود جواب منحصر به فرد فرض شده است. فرض زیر نیز بعداً در لم ۱ استفاده خواهد شد.

فرض ۴ گراف‌های G_n و G_{n+m} به ترتیب، قویاً همبند و هم‌بند می‌باشند.

برای بررسی ارتباط بین مسئله کنترل محدود نگهدارنده و معادله خطای (۱۰)، ابتدا لازم است با ویژگی‌های ماتریس H_k آشنا شد. به همین منظور لم بعدی ارائه می‌گردد:

در فرمول‌بندی خطای مرسوم مبحث تنظیم خروجی حداکثر یک عامل سردسته را می‌توان در نظر گرفت. به دلیل این که در کنترل محدود نگهدارنده با بیش از یک عامل سردسته سروکار داریم، در این مقاله خطای مرسوم در مبحث تنظیم خروجی به گونه‌ای اصلاح شده است تا بتوان بیش از یک عامل سردسته را در نظر گرفت و از روش‌های موجود در مبحث تنظیم خروجی برای حل مسئله کنترل محدود نگهدارنده استفاده کرد. بدین منظور با تعریف ماتریس‌های

$$\begin{cases} \bar{H}_k = H_k \otimes I_N \\ \bar{w}_k = \mathbf{1}_n \otimes w_k \\ C = \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \\ D^k = -\bar{H}_k \end{cases} \quad (۱۶)$$

رابطه (۱۰) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$e = Cx + \sum_{k=n+1}^{n+m} D^k \bar{w}_k \quad (۱۷)$$

که مشابه بردار خطای به کار رفته در [۵، ۶، ۱۵] می‌باشد، با این تفاوت که بیش از یک عامل سردسته در رابطه (۱۷) در نظر گرفته شده است. بنابراین، بیان خطای کنترل محدود نگهدارنده به صورت روابط (۱۰) و (۱۷)، امکان استفاده از روش‌های موجود در مبحث کنترل خروجی را با برخی اصلاحات، برای حل مسئله کنترل محدود نگهدارنده سیستم چندعاملی فراهم می‌سازد.

۴-۲-۴- قانون کنترلی پیشنهادی

در ادامه، به منظور طراحی کنترل کننده برای مسئله کنترل محدود نگهدارنده سیستم چندعاملی (۵) و (۶)، یک جبران‌ساز دینامیکی با بردار حالت N که برای $i \in F$ نامین پیرو به صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$\begin{aligned}\zeta_i &= S \zeta_i + \beta \left[\sum_{j \in N_i} a_{ij} (\zeta_j - \zeta_i) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=n+1}^{n+m} \delta_i^k (w_k - \zeta_i) \right]\end{aligned}\quad (۱۸)$$

که در رابطه بالا، β ضریبی ثابت و مثبت می‌باشد. همان‌طور که در ملاحظه ۱ مشاهده خواهد شد، رابطه (۳۵) که شکل فشرده (۱۸) می‌باشد، می‌تواند به عنوان رویت‌گر ترکیب محاسبه بردارهای حالت عامل‌های سردسته در نظر گرفته شود.

در ادامه، قانون کنترلی توزیع یافته زیر که متشکل از یک جبران‌ساز دینامیکی و یک رویت‌گر با متغیر $\eta_i \in \mathbb{R}^M$ است، برای $i \in F$ عامل پیرو پیشنهاد می‌شود:

$$\begin{cases} u_i = K_i^1 \eta_i + K_i^2 \zeta_i \\ \dot{\zeta}_i = S \zeta_i + \beta \left[\sum_{j \in N_i} a_{ij} (\zeta_j - \zeta_i) + \right. \\ \quad \left. \sum_{k=n+1}^{n+m} \delta_i^k (w_k - \zeta_i) \right] \\ \dot{\eta}_i = A_i \eta_i + B_i u_i + L_i (C_i \eta_i - y_i) \end{cases} \quad (۱۹)$$

ل^{م ۱} (۱۰) با برقرار بودن فرض ۴، ماتریس H_k مثبت معین و متقارن است. همچنین H_k یک M -ماتریس ناویژه بوده و دارای ویژگی‌های زیر است:

$$\alpha_{ki} = \sum_{j=1}^n h_{ij} \delta_j^k + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n h_{ij} \left[\sum_{r=1}^n l_{jr} \right] \quad (25)$$

که l_{jr} ها درایه‌های ماتریس لاپلاسین هستند. با توجه به این‌که هر سطر ماتریس لاپلاسین مجموعی برابر صفر دارد، α_{ki} را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\alpha_{ki} = \sum_{j=1}^n h_{ij} \delta_j^k, k \in \mathbb{R} \quad (26)$$

طبق ل^{م ۱}، درایه‌های ماتریس $(\sum_{r=n+1}^{n+m} H_r)^{-1}$ نامنفی هستند، به عبارتی دیگر برای تمامی $i \in F$ و $j = 1, 2, \dots, n$ ، $h_{ij} \geq 0$. از طرفی دیگر به ازای تمامی $j = 1, 2, \dots, n$ و $k \in \mathbb{R}$ ، $\delta_j^k \geq 0$ می‌باشد. بنابراین، با توجه به رابطه (۲۶) مشخص است که تمامی مؤلفه‌های بردار $(\sum_{r=n+1}^{n+m} H_r)^{-1} H_k \mathbf{1}_n$ که همان ضرایب تشکیل‌دهنده پوش محدب عامل‌های سردهست می‌باشند، نامنفی هستند. در نتیجه طبق تعریف ۱، تعریف ۳ و رابطه (۲۳)، می‌توان نتیجه گرفت که اگر $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \mathbf{0}$ برقرار باشد، عامل‌های پیرو به سمت پوش محدب عامل‌های سردهسته هدایت خواهد شد.

در ادامه لمی ارائه می‌شود که با ایده گرفتن از ل^{م ۱} در [۱۶] شرایطی را بیان می‌کند که در حل مسئله کنترل محدود نگهدارنده با استفاده از روش‌های تنظیم خروجی کاربرد خواهد داشت.

ل^{م ۳} سیستم حلقه‌بسته (۲۰) را در نظر بگیرید. فرض کنید که ماتریس A_c هرویتر باشد. اگر ماتریس ثابتی همانند X_c وجود داشته باشد که به ازای $k \in \mathbb{R}$ در معادلات ماتریسی خطی

$$\begin{aligned} X_c \bar{H}_k \bar{S} &= A_c X_c \bar{H}_k + B_c^k \\ 0 &= C_c X_c \bar{H}_k + D_c^k \end{aligned} \quad (27)$$

صدق کند، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \mathbf{0} \quad (28)$$

اثبات: ابتدا متغیری به صورت

تعریف می‌گردد. اگر X_c در معادلات ماتریسی خطی (۲۷) صدق کند، می‌توان نوشت:

ل^{م ۱} (۱۰) با برقرار بودن فرض ۴، ماتریس H_k مثبت معین و متقارن است. همچنین H_k یک M -ماتریس ناویژه بوده و دارای ویژگی‌های زیر است:

- قسمت حقیقی مقادیر ویژه H_k مثبت می‌باشد.

- H_k^{-1} وجود داشته و درایه‌های نامنفی است.

ماتریس $\sum_{k=n+1}^{n+m} H_k$ نیز مثبت معین، متقارن و یک M -ماتریس ناویژه بوده و ویژگی‌های ذکر شده برای H_k ، در مورد نیز صدق می‌کند.

در ادامه، ارتباط بین مسئله کنترل محدود نگهدارنده و معادله خطای (۱۰) به وسیله لمی بیان گردیده و نشان داده شده است که همگرایی خطای (۱۰) به صفر، به مفهوم تحقق کنترل محدود نگهدارنده می‌باشد.

ل^{م ۲} برای سیستم چند عاملی (۵) و (۶) و تحت فرض ۴، با تعریف خطای به صورت (۱۰)، $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \mathbf{0}$ هدایت عامل‌های پیرو را به سمت پوش محدب ایجاد شده توسط عامل‌های سردهسته ایجاد می‌کند.

اثبات: اگر $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \mathbf{0}$ برقرار باشد، از رابطه (۱۰) و با توجه به خواص ضرب کرونکر به ازای $t \rightarrow \infty$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow \left[\sum_{r=n+1}^{n+m} (H_r \otimes I_N) \right]^{-1} \\ &\quad \left[\sum_{k=n+1}^{n+m} (H_k \otimes I_N) (\mathbf{1}_n \otimes w_k(t)) \right] \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+m} \left[\left(\sum_{r=n+1}^{n+m} H_r \right)^{-1} \otimes I_N \right] (H_k \otimes I_N) \\ &\quad (\mathbf{1}_n \otimes w_k(t)) \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+m} \left[\left(\sum_{r=n+1}^{n+m} H_r \right)^{-1} H_k \mathbf{1}_n \right] \otimes w_k(t) \end{aligned} \quad (23)$$

در واقع، ضرایب تشکیل‌دهنده

پوش محدب عامل‌های سردهسته محسوب می‌شوند و باید اثبات شود که این ضرایب نامنفی هستند و مجموع عشان در هر سطر برابر یک می‌باشد. با

توجه به این‌که:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+m} \left[\left(\sum_{r=n+1}^{n+m} H_r \right)^{-1} H_k \mathbf{1}_n \right] &= \\ \left(\sum_{r=n+1}^{n+m} H_r \right)^{-1} \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} H_k \mathbf{1}_n \right) &= \mathbf{1}_n \end{aligned} \quad (24)$$

می‌توان نتیجه گرفت که مجموع ضرایب مذکور در هر سطر برابر یک می‌باشد.

در ادامه، نامنفی بودن این ضرایب بررسی می‌گردد. اگر درایه‌های

ماتریس $(\sum_{r=n+1}^{n+m} H_r)^{-1}$ با h_{ij} نشان داده شوند، به عبارتی دیگر

ماتریس‌های بهره K_i^1 و L_i طوری انتخاب شده باشد که به ترتیب $A_i + L_i C_i$ و $A_i + B_i K_i^1$ هرویتز بوده و K_i^2 از طریق رابطه (۳۲) را پایدار محسوبه شود، پاسخی می‌باشد که مبدأ سیستم $\dot{x}_c = A_c x_c$ را پایدار نمایی می‌کند و به ازای شرایط اولیه دلخواه $w_k(0 \leq k \in \mathbb{R})$ و $x_i(0), \zeta_i(0), \eta_i(0), i \in \mathbb{F}$ خواهیم داشت.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \mathbf{0}$$

اثبات: با استفاده از قانون کنترلی (۱۹) داریم:

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i K_i^1 \eta_i + B_i K_i^2 \zeta_i \quad (۳۴)$$

از طرفی، رابطه (۱۸) را می‌توان در حالت فشرده به صورت زیر بیان کرد:

$$\dot{\zeta} = \bar{S} \zeta - \beta \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k (\zeta - \bar{w}_k) \quad (۳۵)$$

که $\zeta = [\zeta_1^T \ \zeta_2^T \ \dots \ \zeta_n^T]^T$. با براین سیستم حلقه-بسته را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BK_1 \eta + BK_2 \zeta \\ \dot{\eta} &= (A + BK_1 + LC)\eta + BK_2 \zeta - LCx \\ \dot{\zeta} &= [\bar{S} - \beta \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k] \zeta + \beta \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \bar{w}_k \quad (۳۶) \\ \dot{\bar{w}}_k &= \bar{S} \bar{w}_k \end{aligned}$$

که در روابط فوق $\eta = [\eta_1^T \ \eta_2^T \ \dots \ \eta_n^T]^T$ و $C = \text{diag}\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ و $L = \text{diag}\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ است. با درنظر گرفتن $x_c = [x^T, \eta^T, \zeta^T]^T$ و ماتریس‌های

$$A_c = \begin{bmatrix} A & BK_1 & BK_2 \\ -LC & A + BK_1 + LC & BK_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{S} - \beta \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \end{bmatrix},$$

$$B_c^k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \bar{H}_k \end{bmatrix}, \quad C_c = [C \quad 0 \quad 0], \quad D_c^k = D^k \quad (۱)$$

می‌توان سیستم (۳۶) را به شکل سیستم حلقه-بسته (۲۰) بیان نمود.

اگر مقادیر ویژه ماتریس‌های S و \bar{H}_k به ترتیب، با λ_r و

μ_q نشان داده شوند، در آن صورت مقادیر ویژه $(\bar{S} - \beta \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k)$ نشان داده شوند، در آن صورت مقادیر ویژه $(\lambda_r - \beta \mu_q)$ خواهند بود. با توجه

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_c &= \dot{x}_c - X_c \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \bar{w}_k \\ &= A_c x_c + \sum_{k=n+1}^{n+m} B_c^k \bar{w}_k - \sum_{k=n+1}^{n+m} X_c \bar{H}_k \bar{S} \bar{w}_k \\ &= A_c x_c - A_c X_c \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \bar{w}_k = A_c \tilde{x}_c \end{aligned} \quad (۲۹)$$

با توجه به این که ماتریس A_c هرویتز می‌باشد می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}_c(t) = \mathbf{0}$. از طرفی، خطای حلقه-بسته را با استفاده از رابطه (۲۷) می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} e &= C_c x_c + \sum_{k=n+1}^{n+m} D_c^k \bar{w}_k \\ &= C_c \tilde{x}_c + \sum_{k=n+1}^{n+m} (C_c X_c \bar{H}_k + D_c^k) \bar{w}_k = C_c \tilde{x}_c \end{aligned} \quad (۳۰)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} C_c \tilde{x}_c(t) = \mathbf{0} \quad (۳۱)$$

و اثبات تمام است.

توجه شود که در لم ۱.۴ از [۱۶]، ماتریس ثابت X_c باید در یک جفت معادله صدق کند تا شرط لم تحقق یابد. اما به دلیل این که در کنترل محدود نگهدارنده با بیش از یک عامل سردهسته مواجه هستیم، m جفت معادله در لم ۳ وجود دارند که ماتریس X_c باید در آنها صدق کند تا شرایط لم تحقق یابد.

در ادامه، انتخاب ماتریس‌های K_i^1 و K_i^2 که بهره‌های کنترل کننده پیشنهادی هستند، مورد بحث قرار گرفته و نتیجه اصلی مقاله در قالب قضیه ۱ ارائه خواهد شد.

با توجه به فرض ۱، $K_i^1, i \in \mathbb{F}$ را می‌توان طوری انتخاب کرد که

$$K_i^2 = U_i - K_i^1, i \in \mathbb{F} \quad (۳۲)$$

انتخاب می‌شود که U_i پاسخی است که از معادله ماتریسی خطی $L_i, i \in \mathbb{F}$ به دست آمده است. در نهایت با توجه به فرض ۲، طوری انتخاب می‌شود که $A_i + L_i C_i$ هرویتز باشد. با توجه به روابط

(۲۲) و (۳۲) می‌توان به رابطه زیر رسید:

$$\bar{S} = A + BK_1 + BK_2 \quad (۳۳)$$

که ماتریس‌های موجود در رابطه فوق به صورت ماتریس‌های $A = \text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ، $B = \text{diag}\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ و

$K_1 = \text{diag}\{K_1^1, K_2^1, \dots, K_n^1\}$ ، $K_2 = \text{diag}\{K_1^2, K_2^2, \dots, K_n^2\}$ تعريف شده‌اند. رابطه (۳۳) در اثبات قضیه ۱ مورد نیاز خواهد بود.

قضیه ۱ – سیستم چندعاملی (۵) و (۶) و حلقه-بسته (۲۰) را در نظر بگیرید. تحت فرض‌های ۱ الی ۴، قانون کنترلی (۱۹) در صورتی که ضریب ثابت و مثبت β به حد کافی بزرگ باشد و به ازای $i \in \mathbb{F}$

$$C_c X_c \bar{H}_k + D_c^k = \bar{H}_k + D_c^k = \mathbf{0} \quad (43)$$

بنابراین X_c در نظر گرفته شده در (۴۱)، پاسخی برای معادلات ماتریسی خطی (۲۷) می‌باشد و با توجه به لم ۳ می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \mathbf{0}$ و اثبات کامل می‌شود.

بنابراین با حل مسئله بیان شده در قضیه ۱، از لم ۲ نتیجه گرفته می‌شود که عامل‌های پیرو (۵) به سمت پوش محدودی که توسط عامل‌های سردسته (۶) ایجاد می‌شود، هدایت خواهند شد. در ادامه اثبات خواهد شد رابطه (۳۵) که شکل فشرده (۱۸) می‌باشد، می‌تواند به عنوان رویتگر ترکیب محدب بردارهای حالت عامل‌های سردسته در نظر گرفته شود.

ملاحظه ۱_ با تعریف متغیر جدید $\tilde{\zeta}$ به صورت

$$\tilde{\zeta} = \zeta - \left(\sum_{r=n+1}^{n+m} \bar{H}_r \right)^{-1} \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \bar{w}_k \quad (44)$$

و با استفاده از روابط (۳۶) و (۴۰) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta} &= \zeta - \sum_{k=n+1}^{n+m} \left[\left(\sum_{r=n+1}^{n+m} \bar{H}_r \right)^{-1} \bar{H}_k \bar{S} \bar{w}_k \right] \\ &= \left[\bar{S} - \beta \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \right] \zeta + \beta \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \bar{w}_k \\ &\quad - \bar{S} \left(\sum_{r=n+1}^{n+m} \bar{H}_r \right)^{-1} \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \bar{w}_k \\ &= \left[\bar{S} - \beta \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \right] \\ &\quad \left[\zeta - \left(\sum_{r=n+1}^{n+m} \bar{H}_r \right)^{-1} \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \bar{w}_k \right] \\ &= \left[\bar{S} - \beta \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \right] \tilde{\zeta} \end{aligned} \quad (45)$$

از آنجایی که $(\bar{S} - \beta \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k)$ هرویتز می‌باشد، داریم

$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\zeta}(t) = \mathbf{0}$. از طرفی، همان طور که در اثبات لم ۲ نشان داده شد،

بنابراین، $\left(\sum_{r=n+1}^{n+m} \bar{H}_r \right)^{-1} \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \bar{w}_k$ می‌باشد.

بنابراین، (۳۵) را می‌توان به عنوان رویتگر ترکیب محدب بردارهای حالت سردسته‌ها در نظر گرفت. علاوه بر این، سرعت همگرایی $\tilde{\zeta}$ را با انتخاب مقادیر بزرگتر β می‌توان بیشتر کرد.

۵- شبیه‌سازی عددی

در این بخش، روش پیشنهادشده در بخش چهارم بر روی یک سیستم چند عاملی با هفت عامل شبیه‌سازی می‌شود تا عملکرد مناسب کنترل کننده طراحی شده نشان داده شود. گراف ارتباطات متناظر با سیستم چند عاملی مفروض در شکل ۱ نشان داده شده است که گره‌های ۱ تا ۴ و ۵ تا ۷ به ترتیب، نمایش دهنده عامل‌های پیرو و سردسته می‌باشند. همچنین اگر گره ۷ ام

به لم ۱، قسمت حقیقی مقادیر ویژه ماتریس $\sum_{k=n+1}^{n+m} H_k$ مثبت می‌باشد. بنابراین با انتخاب به حد کافی بزرگ β ، می‌توان نتیجه گرفت که به ازای $\lambda_r - \beta \mu_q < 0$ ، $q = 1, \dots, n$ و $r = 1, \dots, N$ داریم با در نظر گرفتن ماتریس‌های

$$T = \begin{bmatrix} A & BK_1 \\ -LC & A + BK_1 + LC \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$P^{-1}TP$ را که متشابه T می‌باشد می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$P^{-1}TP = \begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_1 \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \quad (49)$$

ماتریس‌های $A + BK_1$ و $A + LC$ هرویتز می‌باشند، و در نتیجه $P^{-1}TP$ هرویتز می‌باشد. از طرفی ماتریس‌های متشابه مقادیر ویژه یکسانی دارند، و با توجه به اینکه ماتریس T و ماتریس بیان شده توسط (۴۹) متشابه می‌باشند، می‌توان نتیجه گرفت که T هرویتز می‌باشد. بنابراین با انتخاب به حد کافی بزرگ β ، ماتریس A_c هرویتز می‌باشد. در نتیجه، اولین ویژگی مسئله بیان شده در قضیه ۱ برقرار است.

در ادامه، ویژگی دوم مسئله مطرح شده در قضیه ۱ اثبات می‌شود. با استفاده از خاصیت ضرب کرونکر $(P \otimes Q)(Y \otimes Z) = (PY) \otimes (QZ)$ ماتریس $\bar{S} = I_n \otimes S$ می‌توان نشان داد:

$$\bar{S} \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \right)^{-1} \bar{H}_k = \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \right)^{-1} \bar{H}_k \bar{S} \quad (40)$$

با در نظر گرفتن X_c به صورت

$$X_c = (\mathbf{1}_3 \otimes I_{nN}) \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \right)^{-1} \quad (41)$$

و با استفاده از روابط (۳۷)، (۳۸) و (۴۰) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} A_c X_c \bar{H}_k + B_c^k &= \\ &\quad \left[(A + BK_1 + BK_2) \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \right)^{-1} \bar{H}_k \right] \\ &\quad \left[(A + BK_1 + BK_2) \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \right)^{-1} \bar{H}_k \right] \\ &\quad \left[\bar{S} \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \right)^{-1} \bar{H}_k - \beta \bar{H}_k + \beta \bar{H}_k \right] \end{aligned} \quad (42)$$

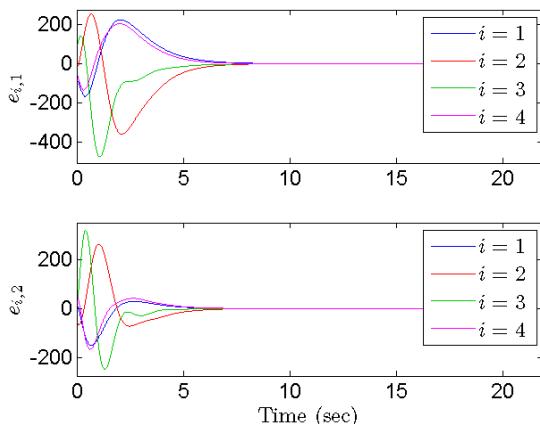
$$= (\mathbf{1}_3 \otimes I_{nN}) \bar{S} \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \right)^{-1} \bar{H}_k$$

$$= (\mathbf{1}_3 \otimes I_{nN}) \left(\sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \right)^{-1} \bar{H}_k \bar{S} = X_c \bar{H}_k \bar{S}$$

همچنین با توجه به روابط (۱۶)، (۳۷) و (۴۱) داریم:

$$\begin{aligned} x_1 &= [-30 \quad 4], \quad x_2 = [20 \quad -10], \\ x_3 &= [30 \quad 30] \quad x_4 = [-10 \quad 30], \\ \eta_1 &= [1 \quad 2], \quad \eta_2 = [1 \quad -2], \\ \eta_3 &= [-1 \quad 3] \quad \eta_4 = [-2 \quad 0], \\ \zeta_1 &= [2 \quad 4], \quad \zeta_2 = [1 \quad 1], \\ \zeta_3 &= [0 \quad -3] \quad \zeta_4 = [1 \quad -2], \\ w_5 &= [5 \quad 6], \quad w_6 = [25 \quad 9], \\ w_7 &= [20 \quad 20] \end{aligned} \quad (50)$$

جهت ارزیابی عملکرد کنترل کننده، تغییرات بردار خطای کنترل محدود نگهدارنده در شکل ۲ رسم شده است. در این شکل، $e_{i,1}$ و $e_{i,2}$ مؤلفه‌های i باشند. با توجه به این شکل ملاحظه می‌شود که مؤلفه‌های بردار خطای کنترل محدود نگهدارنده به صورت مجانبی به صفر همگرا می‌شوند، که نشان‌دهنده تحقق کنترل محدود نگهدارنده برای سیستم شبیه‌سازی شده می‌باشد.



شکل ۲: نمودار تغییرات مؤلفه‌های بردار خطای کنترل محدود نگهدارنده

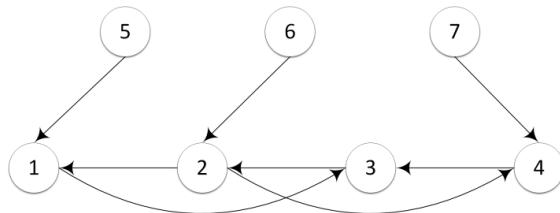
جهت درک بهتر رفتار عامل‌ها در حوزه زمان، تغییرات زمانی مؤلفه‌های بردار حالت تمامی عامل‌ها نیز در شکل ۳ رسم شده است. پوشی که توسط عامل‌های سرددسته در حوزه زمان ایجاد می‌شود، با خط تیره و به رنگ سیاه در این شکل مشخص شده است. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که در زمان‌های ابتدایی، مؤلفه‌های بردار حالت عامل‌های پیرو که با رنگ آبی مشخص شده‌اند، خارج از پوش تشکیل شده توسط سرددسته‌ها هستند. اما با گذشت زمان در داخل این پوش قرار می‌گیرند که نشان‌دهنده تحقق کنترل محدود نگهدارنده می‌باشد.

گراف ارتباطات به گره i ام متصل باشد، a_{ij} برابر یک در نظر گرفته می‌شود. عامل‌های سرددسته به صورت (۶) هستند و ماتریس S به صورت

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

در نظر گرفته شده است. معادلات دینامیکی عامل‌های پیرو نیز توسط ماتریس‌های زیر مشخص شده‌اند:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [1 \quad 2] \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [-1 \quad 1] \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C_3 = [3 \quad 2] \\ A_4 &= \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_4 = [2 \quad -1] \end{aligned} \quad (47)$$



شکل ۱: گراف ارتباطات

با حل معادله (۲۲) برای هر عامل پیرو، می‌توان پاسخ‌های زیر را به دست آورد:

$$\begin{aligned} U_1 &= [0 \quad 1], \quad U_2 = [1 \quad 3], \\ U_3 &= [-1 \quad -2], \quad U_4 = [-2 \quad -1] \end{aligned} \quad (48)$$

ماتریس‌های بهره استفاده شده در شبیه‌سازی نیز به صورت

$$\begin{aligned} K_1^1 &= [1 \quad 1], \quad K_2^1 = [-0.5 \quad 9], \\ K_3^1 &= [2 \quad -5], \quad K_4^1 = [2 \quad 0], \\ L_1 &= \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} -7.5 \\ -15.5 \end{bmatrix}, \\ L_3 &= \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (49)$$

انتخاب شده‌اند. شرایط اولیه مورد استفاده در شبیه‌سازی نیز به صورت زیر می‌باشد:

[1] R. Olfati-Saber, J. A. Fax and R. M. Murray, "Consensus and cooperation in networked multi-agent systems," Proceedings of the IEEE, vol. 95, no. 1, pp. 215-233, 2007.

[2] W. Ren, R. W. Beard and E. M. Atkins, "Information consensus in multivehicle cooperative control," IEEE Control Systems Magazine, vol. 27, no. 2, pp. 71-82, 2007.

[3] K. Peng, and Y. Yang, "Leader-following consensus problem with a varying-velocity leader and time-varying delays," Physica A, vol. 388, no. 2, pp. 193-208, 2009.

[4] P. Wieland, R. Sepulchre and F. Allgower, "An internal model principle is necessary and sufficient for linear output synchronization," Automatica, vol. 47, no. 4, pp. 1068-1074, 2011.

[5] Y. Su and J. Huang, "Cooperative output regulation of linear multi-agent systems by output feedback," Systems & Control Letters, vol. 61, no. 12, pp. 1248-1253, 2012.

[6] Y. Hong, X. Wang and Z. Jiang, "Distributed output regulation of leader-follower multi-agent systems," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 23, no. 1, pp. 48-66, 2013.

[7] H. Liu, G. Xie and L. Wang, "Necessary and sufficient conditions for containment control of networked multi-agent systems," Automatica, vol. 48, no. 7, pp. 1415-1422, 2012.

[8] M. Ji, G. Ferrari-Trecate, M. Egerstedt and A. Buffa, "Containment control in mobile networks," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 53, no. 8, pp. 1972-1975, 2008.

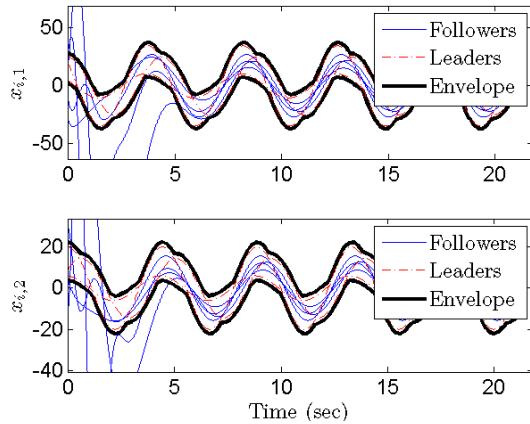
[9] Y. Zheng and L. Wang, "Containment control of heterogeneous multi-agent systems," International Journal of Control, vol. 87, no. 1, pp. 1-8, 2014.

[10] H. Haghshenas, M. A. Badamchizadeh and M. Baradarannia, "Containment control of heterogeneous linear multi-agent systems," Automatica, vol. 54, pp. 210-216, 2015.

[11] H. Haghshenas, M. A. Badamchizadeh and M. Baradarannia, "Adaptive containment control of nonlinear multi-agent systems with non-identical agents," International Journal of Control, vol. 88, no. 8, pp. 1586-1593, 2015.

[12] C. Godsil and G. Royle, Algebraic Graph Theory, New York: Springer-Verlag, 2001.

[13] R. T. Rockafellar, Convex Analysis, New Jersey: Princeton University Press, 1972.



شکل ۳: نمودار تغییرات زمانی مؤلفه‌های بردار حالت عامل‌ها

۶- نتیجه

در این مقاله، مسئله کنترل محدود نگهدارنده برای سیستم‌های چند عاملی مشکل از عامل‌های پیرو خطی با دینامیک غیریکسان و با گراف ارتباطات جهت‌دار، مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. دینامیک عامل‌های سردهسته نیز به صورت سیستم خارجی در نظر گرفته شد. با توجه به اینکه در کاربردهای عملی متغیرهای حالت همیشه در دسترس نیستند، از فیدبک خروجی دینامیکی در طراحی کنترل کننده استفاده شد. به دلیل این که روش‌های موجود در مبحث تنظیم خروجی امکان در نظر گرفتن عامل‌های با دینامیک غیریکسان را دارند، برای حل این مسئله از قالب تنظیم خروجی استفاده گردید. بهره‌گیری از خط‌وا ماتریس H_k این امکان را فراهم آورد تا بتوان حالت نهایی عامل‌های پیرو را به صورت مجموع عبارت‌هایی از متغیرهای حالت عامل‌های سردهسته بیان کرد و در محاسبات به متغیرهای حالت عامل‌های سردهسته دسترسی داشت. همچنین، خطای مرسوم در مبحث تنظیم خروجی به گونه‌ای اصلاح شد که بتوان بیش از یک عامل سردهسته را در نظر گرفت. در طراحی کنترل کننده توزیع یافته نیز از یک جبران‌ساز دینامیکی استفاده شد، که در واقع نقش رویت‌گر ترکیب معدب بردارهای حالت عامل‌های سردهسته را داشت.

از زمینه‌های تحقیقاتی آینده می‌توان به در نظر گرفتن گراف‌های سوئیچینگ با عامل‌های سردهسته غیریکسان به صورت $\dot{w}_k = S_k w_k$ ، که هر عامل سردهسته ماتریس S_k مخصوص به خود را دارد، اشاره کرد. همچنین، می‌توان دینامیک عامل‌ها را در شرایط واقعی که شامل نویز و نامعینی می‌باشد بررسی کرد تا میزان حساسیت روش پیشنهادی به این دو پدیده معمول در سیستم‌های واقعی ارزیابی شود. برای مثال دینامیک عامل‌های پیرو به صورت $\dot{x}_i = (A_i + \Delta A_i)x_i + (B_i + \Delta B_i)u_i$ در نظر گرفت.

مراجع

[14] Z. Qu, Cooperative Control of Dynamical Systems: Applications to Autonomous Vehicles, London: Springer-Verlag, 2009.

[15] J. Xiang, W. Wei and Y. Li, "Synchronized output regulation of linear networked systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 54, no. 6, pp. 1336-1341, 2009.

[16] J. Huang, Nonlinear Output Regulation: Theory and Applications, Philadelphia: SIAM, 2004.

[17] G. Seyboth, W. Ren and F. Allgöwer, "Cooperative control of linear multi-agent systems via distributed output regulation and transient synchronization," Automatica, vol. 68, pp. 132-139, 2016.

[18] W. Li, L. Liu and G. Feng, "Distributed containment tracking of multiple stochastic nonlinear systems," Automatica, vol. 69, pp. 214-221, 2016.

زیرنویس‌ها

¹Multi-Agent

²Consensus

³Heterogeneous

⁴Exosystem

⁵Containment Control

⁶Convex Hull

⁷Kronecker