مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۹، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۴، صفحه ۹۹-۸۷

طراحی کنترل‌گر بازخورد خروجی پویای نامتمرکز از مرتبه‌ی ثابت جهت تحقق توافق جمعی در سامانه‌های چندعاملی تأخیردار

امید نیکویی زاده، امیر امینی[۱]، مهدی سجودی[۲]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، {o.nikouyizadeh, amir.amini}@modares.ac.ir

[۲] استادیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، sojoodi@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۴/۴/۱۰، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۴/۹/۱)

چکیده: در این پژوهش با استفاده از کنترل‌گر بازخورد خروجی پویا و مرتبه ثابت، الگوریتم توافق جمعی وابسته به تأخیر نوینی به منظور حل مسئله‌ی توافق جمعی در سامانه‌های چندعاملیِ خطی و دارای تأخیرهای ورودی و ارتباطی متغیر با زمان در قالب نامساوی‌های ماتریسی خطی ارائه گردیده است. در طرح پیشنهادی، هر عامل، خود را بر اساس اطلاعات خروجی خود و همسایه‌ها بهنگام می‌کند و لذا از این منظر، طراحی کنترل‌گر نامتمرکز می‌باشد. جهت تضمین توافق جمعی، ابتدا مبتنی بر قضیه‌ی گراف و با تبدیل‌های مناسب سامانه، مسئله‌ی توافق جمعی به مسئله‌ی پایداری یک سامانه‌ی خطیِ دارای تأخیر در حالت تبدیل می‌شود. سپس با در نظر گرفتن یک تابع لیاپانوف-کراسوفسکی مناسب و اعمال شرایطی خاص برای ماتریس‌های مثبت معین و متقارن آن، معیارهای توافق جمعی وابسته به تأخیر و ضرایب مجهول کنترل‌گر در قالب نامساوی‌های ماتریسی خطی برای سامانه با توپولوژی ارتباطی ثابت بدست می‌آیند که با استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی محدب کارآمد موجود قابل حل می‌باشند. یک ویژگی مهمِ رویکرد پیشنهادی، انتخاب دلخواه مرتبه‌ی کنترل‌گرها بر طبق شرایط و محدودیت‌های سامانه است. در نهایت، یک مثال عددی برای نشان دادن قابلیت اعمال روش و اثربخشی و بهبود صورت پذیرفته در مقایسه با کارهای پیشین آورده شده است.

کلمات کلیدی: سامانه‌ی چندعاملی، توافق جمعی، بازخورد خروجی پویا، تأخیر زمانی، نامساوی ماتریسی خطی.

Fixed-Order Decentralized Dynamic Output Feedback Controller Design for Consensus of Multi-Agent Systems with Time Delay

Omid Nikouei Zadeh, Amir Amini, Mahdi Sojoodi

Abstract: This paper presents a novel delay-dependent consensus algorithm within the linear matrix inequality (LMI) framework to solve consensus problem of linear multi-agent systems with time-varying communication and input delays using fixed-order dynamic output feedback controller. The proposed scheme is decentralized in the sense that each agent updates its state according to the output information of itself and its neighbors. To guarantee consensus in this method, first based on graph theory and by proper system transformations, the consensus problem is converted to the stability problem of an equivalent state-delayed linear system. Then, by considering a suitable Lyapunov-Krasovskii function and applying special conditions on symmetric positive definite matrices, new delay-dependent consensus criteria in LMI form and the unknown controller coefficients are obtained for the system under fixed interconnection topology which can be easily solved by various effective optimization algorithms. As a main feature of the proposed approach, the order of decentralized controllers can be chosen arbitrarily according to the system conditions and limitations. Finally, a numerical example is presented to show the applicability and effectiveness of the proposed method.

Keywords: Multi-Agent Systems, Consensus, Dynamic Output Feedback, Time Delay, Linear Matrix Inequality (LMI).

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.3.5.2]

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، سامانه‌های چندعاملی[1] به دلیل کاربردهای گسترده‌ای که در بسیاری از زمینه‌ها از جمله زیست‌شناسی، ریاضیات، فیزیک، اقتصاد، علوم کامپیوتر، رباتیک و مهندسی کنترل دارند توجه زیادی را به خود جلب نموده و تحلیل، طراحی و بهینه‌سازی انواع گوناگون رفتارهای هماهنگ گروهی در این سامانه‌ها مورد مطالعه بسیاری از محققان قرار گرفته است. سامانه‌ی چندعاملی متشکل از چندین عامل[2] هوشمند و مستقل می‌باشد که با همدیگر دارای تعامل و همکاری هستند [۱]. به طور کلی به هر سامانه‌ی محاسباتی که دارای حس‌گرهایی برای درک و دریافت اطلاعات از محیط و سایر عامل‌ها و واحدهای پردازنده‌ای برای پردازش آن اطلاعات باشد و به واسطه‌ی محرک‌هایی روی محیط تأثیر بگذارد عامل (هوشمند) اطلاق می‌شود [۲]. در بسیاری از کاربردهای عملی لازم است چندین عامل با رفتارهای ساده در کنار یکدیگر قرار بگیرند و ضمن انجام دادن اهداف و مسئولیت‌های مستقل خویش، با یکدیگر در ارتباط و همکاری باشند و هدف مشترک کلی‌تری را برای سامانه‌ای با رفتار پیچیده دنبال کنند.

مسئله‌ی توافق جمعی یکی از مهم‌ترین مسائل کنترلِ مشارکتی[3] در سامانه‌های چندعاملی است. به طور کلی، توافق جمعی به معنای به توافق رسیدن عامل‌های مختلف بر سر موضوعی خاص است که این موضوع خاص می‌تواند حالت عامل‌ها یا خروجی آن‌ها باشد. در واقع در توافق جمعی، با توجه به اطلاعات توزیعی که در اختیار عامل‌ها قرار دارد، گروه به یک ارزیابی و تصمیم مشترک برای انجام هدفی خاص می‌رسد. از جمله کاربردهای توافق جمعی می‌توان به الگوریتم زمان‌بندی بار موثر و حذف بار در سامانه‌های قدرت، همگام‌سازی[4] در شبکه‌های سنسوری مقیاس وسیع[5] و بدون سیم، همگام‌سازی نوسان‌گرهای زیستی تزویج شده و توافق جمعی در دسته‌ی ربات‌ها اشاره کرد [۱]، [۳]. توافق جمعی در سامانه‌های رباتیکی شاید از دسته‌های دیگر پرکاربردتر باشد. برای مثال در صنعت، جابه‌جایی یک شی یا بارگیری یک قطعه بزرگ ایجاب می‌کند که بازوهای مکانیکی[6] موقعیت یکسانی داشته باشند. در این حالت راهبری[7] وجود ندارد و خود عامل‌ها در مورد مقدار نهایی حالات خود به توافق می‌رسند اما در وضعیتی دیگر نیز، یک عامل به عنوان راهبر وجود دارد و عامل‌های دیگر خود را پیرو آن می‌سازند. وضعیت دوم هنگامی کاربرد دارد که چند بازوی مکانیکی دور از هم با یکدیگر شبکه هستند و هنگامی که اپراتور یکی از ربات‌ها را تنظیم می‌کند، ربات‌های دورتر نیز از موقعیت و حالات آن پیروی کنند [۴].

تعیین الگوریتم کنترلی با هدف توافق جمعی عامل‌ها، از مهم‌ترین موضوعات مورد بحث در سامانه‌های چندعاملی است و تاکنون الگوریتم‌های گوناگون روی شبکه‌های مختلف بررسی شده‌اند و این روش‌ها هر روز در حال بهبود می‌باشند و شرایط پیچیده‌تری را پوشش می‌دهند. از زمان مطرح شدن مسئله‌ی توافق، به فراخور محدودیت‌های فیزیکی سامانه‌ی چندعاملی مورد مطالعه، استراتژی‌های کنترلی متفاوتی نظیر بازخورد حالت[8]، بازخورد خروجی[9]، مد لغزشی[10]، کنترل تطبیقی[11]، کنترل مقاوم[12]، کنترل پیش‌بین مدل[13] و کنترل‌گرهای غیرخطی با اهداف مختلف کنترلی طراحی و فرموله شده‌اند [۵]. از اولین پژوهش‌های جدی در جهت تئوری مسئله‌ی توافق جمعی برای سامانه‌های شبکه‌ای می‌توان به [۶] و [۷] اشاره کرد که در آن مفهوم توافق جمعی و اثبات الگوریتم برای عامل‌های ساده‌ی مرتبه اول بیان شده است. مسئله‌ی توافق جمعی عامل‌ها با دینامیک مرتبه دو و بالاتر نسبت به دینامیک مرتبه اول پیچیدگی بیشتری دارد، زیرا علاوه بر نحوه‌ی تعاملات بین عامل‌ها به پارامترهای کنترلی استفاده شده در پروتکل توافق جمعی نیز بستگی دارد. در [۸]، با استفاده از تبدیل لاپلاس چندین پروتکل توافق جمعی برای سامانه‌های مرتبه اول و مرتبه دوم ارائه شده است که باعث توافق عامل‌ها در زمان مناسب می‌شود ولی در مورد سامانه‌ها با دینامیک بالاتر صحبتی نشده است. در [۹]، توافق جمعی سامانه‌های چندعاملی مرتبه دو با اغتشاش خارجی بررسی شده و یک پروتکل توافق جمعی مبتنی بر رویت‌گر اغتشاش ارائه شده است. در [۱۰]، مسئله‌ی توافق جمعی مقاوم سامانه‌های چندعاملی خطی با مرتبه‌ی کسری[14] دارای نامعینی حقیقی مثبت بررسی شده و شرایط توافق جمعی مقاوم بر مبنای نامساوی ماتریسی خطی بدست آمده است. در [۱۱]، مسئله‌ی توافق جمعی مقاوم برای عامل‌های خطی با دینامیک یکسان تحتِ توپولوژی ارتباطی ثابت مطالعه شده و ضمن پیشنهاد کنترل‌گر بازخورد خروجی پویای توزیعی، شرایط کافی جهت رسیدن به توافق جمعی با عملکرد H_∞ ارائه شده است.

در سامانه‌های چندعاملی، هر عامل دارای تأخیر زمانی در ورودیِ خاص خودش جهت دریافت و پردازش اطلاعات است و تأخیرهای ارتباطی بین عامل‌های همسایه هنگام تبادل اطلاعات نیز غیرقابل چشم‌پوشی هستند. تأخیر زمانی منجر به رفتارهای دینامیکی نامطلوب از قبیل نوسان، تنزل کارآیی، ناپایداری شبکه و پیچیدگی بیشتر در پروتکل توافق جمعی می‌شود، بنابراین باید اثر تأخیر بر همگراییِ پروتکل‌های توافق جمعی را مورد توجه قرار داد. بررسی تأخیر ورودی و تأخیر ارتباطی متغییر با زمان یا ثابت یا تأخیر نامعلوم هر یک چالشی جداگانه

[1] Multi-Agent
[2] Agent
[3] Cooperative Control
[4] Synchrornization
[5] Large Scale
[6] Manipulator
[7] Leader
[8] State Feedback
[9] Output Feedback
[10] Sliding Mode
[11] Adaptive
[12] Robust
[13] Model Predictive Control
[14] Fractional-Order

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.3.5.2]

در طراحی الگوریتم توافق جمعی است. در [۱۲] توافق جمعی با راهبر و بدون آن، با شمای کنترل توزیعی برای مدل خطی پیوسته زمان و عمومی فضای حالت عامل‌ها با در نظر گرفتن تأثیر تأخیر ورودی ثابت و متغیر با زمان بررسی شده است. در [۱۳]، به بررسی مسئله‌ی توافق جمعی سامانه‌های چندعاملی متشکل از عامل‌های مرتبه اول و مرتبه دوم تحت توپولوژی‌های ارتباطی ثابت و متغیر و در حضور تأخیر ارتباطی و تأخیر ورودیِ متغیر با زمان پرداخته شده است و با استفاده از قضیه‌ی لیاپانوف- کراسوفسکی، پروتکل توافق جمعی با راهبر در قالب نامساوی‌های ماتریسی خطی ارائه شده است. در [۱۴]، اثبات شده که توافق جمعی در عامل‌های مرتبه دو دست یافتنی است اگر تأخیر ارتباطی در توپولوژی ارتباطی بین عامل‌ها از حد معینی کمتر باشد. در [۱۵] و [۱۶] بدون در نظر گرفتن تأخیر زمانی و عدم قطعیت‌ها، مسئله‌ی توافق جمعی برای سامانه‌های خطی با استفاده از کنترل‌گر بازخورد خروجی پویا مورد بررسی قرار گرفته است و با بکارگیری تبدیلات مناسب، مسئله‌ی توافق جمعی به حلِ یک نامساوی ماتریسی تقلیل یافته است و در نهایت، یافتن ضرایب کنترل‌گر بازخورد خروجی پویای نامتمرکز منجر به حل یک نامساوی ماتریسیِ دوسویه گشته و روش‌های تکرار شونده از قبیل روش هموتوپی برای حل آن بکار گرفته شده است. محاسبات عددی در نامساوی ماتریسی دوسویه نسبت به نامساوی ماتریسی خطی به مراتب دشوارتر بوده و الگوریتم کلیِ موثری برای حل انواع این‌گونه نابرابری‌ها وجود ندارد.

با ظهور ابزار قدرتمند بهینه‌سازی محدب، حل مسائل طراحی با استفاده از این روش بسیار جذابیت پیدا کرده است. در [۱۷] با در نظر گرفتن شرایطی از پیش تعیین شده برای ضرایب کنترل‌گر و ماتریس‌های بلوکی مثبت معین در قضیه‌ی لیاپانوف، روشی مناسب جهت تبدیل نامساوی‌های ماتریسی دوسویه به نامساوی‌های ماتریسی خطی پیشنهاد شده است که در ادامه از آن استفاده خواهد شد.

با توجه به بررسی‌ها و مطالعات انجام شده، مسئله‌ی توافق جمعی در شبکه‌ای از عامل‌ها با دینامیک زمان پیوسته و مرتبه بالا در حضور تأخیرهای دلخواه و متغیر با زمان در ورودی و یا شبکه‌ی ارتباطی، با استفاده از کنترل‌گر بازخورد خروجی پویای نامتمرکزِ مرتبه‌ی ثابت، مورد بررسی قرار نگرفته است. با این پیش زمینه، در این نوشتار به بررسی و حل مسئله‌ی توافق جمعی سامانه‌های چندعاملیِ دارای تأخیر زمانی با استفاده از کنترل‌گر بازخورد خروجی پویای نامتمرکز مرتبه ثابت از طریق رویکرد نامساوی ماتریسی خطی خواهیم پرداخت. در این پژوهش، همگرایی عامل‌ها به میانگین شرایط اولیه‌ی عامل‌ها مدنظر نیست و مقدار توافق جمعی از نقاط موجود در پوش محدب[1] عامل‌ها خواهد بود. همچنین مشابهِ مقالاتی که تاکنون به بررسی تأخیر ارتباطی پرداخته‌اند [۱۳]، تأخیر متغیر با زمان در تمامی کانال‌های ارتباطی یکسان فرض شده است. در الگوریتم‌هایی که از کنترل‌گر بازخورد حالت ایستا استفاده شده است باید تمامی حالت‌های سامانه اندازه‌گیری شود و یا باید جهت استخراج حالات، رویت‌گر طراحی شود. بنابراین، نظر به عملی‌تر بودن کنترل‌گر بازخورد خروجی نسبت به بازخورد حالت و همچنین انعطاف بیشتر کنترل‌گر پویا نسبت به کنترل‌گر ایستا، در این نوشتار کنترل‌گر بازخورد خروجی پویا برای طراحی انتخاب گردیده است. برخلاف کارهای گذشته، پیکربندی مسئله و طراحی به نحوی است که انتخاب مرتبه‌ی کنترل‌گر در اختیار طراح بوده و به راحتی می‌توان نتایج کنترل‌گرهای مرتبه‌های مختلف را مقایسه و مورد ایده‌ال را انتخاب نمود. ضمناً نامساوی ماتریسی نهایی نیز خطی بوده و می‌توان پارامترهای کنترل‌گر را با استفاده از الگوریتم‌های کارآمد پیاده‌سازی شده در نرم‌افزارهای موجود تعیین نمود.

در ادامه این مقاله، در بخش دوم پیش‌نیازهای لازم مطرح می‌شود. در بخش سوم به بیان مسئله پرداخته و کنترل‌گر بازخورد خروجی پویای نامتمرکزِ مرتبه‌ی ثابت طراحی می‌شود. نتایج اصلی کار تحت دو قضیه در بخش چهارم بیان شده است و بخش پنجم به ارائه یک مثال عددی جهت بررسی کارآیی و بهبود صورت گرفته در مقایسه با کارهای پیشین اختصاص یافته است. در نهایت در بخش ششم جمع‌بندی و نتیجه‌گیری مقاله ارائه شده است.

۲- مقدمات ریاضی

عبارت $x \in \Re^n$ معرف بردار ستونی حقیقی n عضوی، علامت $\otimes$ بیان‌گر ضرب کرونکر بین دو ماتریس، عبارت I_n ماتریس قطری واحد $n \times n$ و J_n ماتریس $n \times n$ با تمامی درایه‌ها برابر با واحد می‌باشند. برای نمایش بردار ستونی $n \times 1$ که تمام اعضای آن واحد یا تمامی درایه‌های آن صفر می‌باشد، به ترتیب از 1_n و 0_n استفاده شده است. علامت * استفاده شده در آرایه‌های ماتریس، نشان‌گر ترانهاده‌ی درایه‌ی متقارن آن عضو، نسبت به قطر اصلی است. همچنین برای ماتریس متقارن A، نماد $A > 0$ به معنی مثبت معین بودن آن است. نماد $\|.\|$ معرف نرم ماتریسی و $diag\{A, B\}$ بیان‌گر ماتریس بلوکی قطری ساخته شده از A و B است. همچنین برای دو ماتریس A و B با ابعاد یکسان $m \times n$، ضرب هادامارد به صورت $A \circ B$ و جهت نمایش شبه معکوس ماتریس $A_{m \times n}$ نیز از نماد $A^{\uparrow}$ استفاده گردیده است.

مدل‌سازی نحوه‌ی ارتباطات بین N عامل در شبکه را می‌توان از طریق گراف جهت‌دار $g = (V, E, A)$ از مرتبه‌ی N نشان داد. این گراف، یک گراف وزن‌دار با مجموعه گره‌های $V = \{v_1, \ldots, v_N\}$، مجموعه یال‌های $E \subseteq V \times V$ و ماتریس مجاورت[2] نامنفی $A = [a_{ij}] \in \Re^{N \times N}$ است. هر رأس یا گره در گراف نماینده‌ی یک

[1] Convex Hull

[2] Adjacency Matrix

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.3.5.2]

عامل و هر یال[1] گراف نشان‌دهنده‌ی لینک[2] ارتباطی بین دو عامل است. یک یال جهت‌دار از گراف جهت‌دار g با $e_{ij}=(v_i,v_j)$ نشان داده می‌شود که بیان‌گر دریافت اطلاعات عامل j توسط عامل i می‌باشد. یک زیرگراف از g در حقیقت خود یک گراف است که رئوس و مجموعه یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از رئوس و مجموعه یال‌های گراف اصلی است؛ همچنین پوشا بودن[3] یک زیرگراف به معنی در برداشتن تمام رئوس گراف اصلی می‌باشد. مجموعه‌ی همسایه‌های داخلی[4] گره i عبارت است از مجموعه‌ی تمام گره‌هایی مانند j که گره i از آن‌ها یال ورودی دارد، به عبارت دیگر $N_{in}(i)=\{j\in V:(j,i)\in E\}$. ماتریس لاپلاسی $L=[l_{ij}]\in\Re^{N\times N}$ مرتبط با گراف $g=(V,E,A)$ به صورت رابطه (۱) تعریف می‌گردد [۱۸]:

$$l_{ii}=\sum_{j\in N_i}a_{ij}\ ;\ l_{ij}=-a_{ij}\quad \forall i\neq j;i,j=1,\ldots,N \tag{۱}$$

درخت‌ها[5] زیرمجموعه‌ای از گراف‌های بدون حلقه هستند که در آن‌ها هر گره فقط و فقط یک یال ورودی دارد، به غیر از یک گره که هیچ ورودی ندارد و پایه‌ی درخت[6] نامیده می‌شود. یک گراف در بردارنده یک درخت پوشا[7] است اگر بتوان زیرمجموعه‌ای از یال‌های آن (زیرگراف) یافت که یک درخت تشکیل دهند به گونه‌ای که تمامی گره‌ها را شامل شود. باید توجه داشت که شرط لازم برای تحقق توافق جمعی در یک سامانه‌ی چندعاملی وجود حداقل یک درخت پوشا در گراف ارتباطی عامل‌هاست [۱۶]. این فرض نیز برای سامانه‌ی چندعاملی مورد نظر، صادق است. تحت این فرض، عدد صفر حتماً از مقادیر ویژه‌ی ماتریس لاپلاسی و بردار واحد $1_N=[1,\ldots,1]^T$، بردار ویژه‌ی متناظر با آن است و سایر مقادیر ویژه‌ی ماتریس لاپلاسی همگی دارای قسمت حقیقی مثبت می‌باشند. بنابراین، رتبه‌ی ماتریس لاپلاسی L برابر با $N-1$ می‌باشد، یا به طور معادل، $N-1$ سطر مستقل خطی در L وجود دارد.

لم ۱ (مکمل شور[8]) [۱۹]: با در نظر گرفتن ماتریس‌های $Q(x)=Q(x)^T$، $R(x)=R(x)^T$ با ابعاد مناسب، مکمل شور نابرابری غیرخطی زیر را:

$$R(x)>0\ ,\ Q(x)-S(x)R(x)^{-1}S(x)^T>0 \tag{۲}$$

به نابرابری خطی (۳) تبدیل می‌کند.

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x)\\ S(x)^T & R(x)\end{bmatrix}>0 \tag{۳}$$

لم ۲ [۲۰]: برای ماتریس‌های ثابت دلخواه $D\in R^{n\times m}$، $E\in R^{n\times m}$، ماتریس متغیر با زمان $F(t)\in R^{m\times m}$ با $\|F(t)\|\le 1$ و هر اسکالر $\varepsilon>0$ رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$DF(t)E+E^TF^T(t)D^T\le\varepsilon^{-1}DD^T+\varepsilon E^TE \tag{۴}$$

همچنین برای هر ماتریس G و $R>0$ با ابعاد مناسب رابطه (۵) برقرار است.

$$G^TR^{-1}G\ge G+G^T-R \tag{۵}$$

۳- تعریف مسئله

در این بخش به پیکربندی مسئله و طراحی کنترل‌گر پرداخته می‌شود.

۳-۱ سامانه چندعاملی با تأخیر در ورودی

دینامیک هر عامل در یک سامانه چندعاملی خطی با تأخیر ورودی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{pi}(t)&=Ax_{pi}(t)+B_iu_i(t-\tau(t))\\ y_{pi}(t)&=Cx_{pi}(t)\qquad\qquad i=1,2,\ldots,N\end{aligned} \tag{۶}$$

که در آن N تعداد عامل‌های سامانه‌ی چندعاملی در نظر گرفته شده است. همچنین $x_{pi}(t)\in\Re^n$، $u_i(t)\in\Re^m$ و $y_{pi}(t)\in\Re^q$ به ترتیب بردار حالات، ورودی کنترلی و خروجی می‌باشند. A، B_i و C نیز ماتریس‌های ثابت و نامتغیر با زمان با ابعاد مناسب بوده و (A,B_i) کنترل‌پذیر می‌باشند. تأخیر متغیر با زمان $\tau(t)$ برای همه‌ی عامل‌ها یکسان بوده و در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$0<\tau(t)<\tau\quad,\quad\dot{\tau}(t)<\mu \tag{۷}$$

می‌توان سامانه‌ی چندعاملی به هم پیوسته[9] را به صورت زیر نشان داد:

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t)&=\bar{A}x_p(t)+\bar{B}u(t-\tau(t))\\ y_p(t)&=\bar{C}x_p(t)\end{aligned} \tag{۸}$$

که در آن $x_p(t)=[x_{p1}^T(t)\ \ldots\ x_{pN}^T(t)]^T$ بردار حالات، $u(t)=[u_1^T(t)\ \ldots\ u_N^T(t)]^T$ بردار ورودی و $y_p(t)=[y_{p1}^T(t)\ \ldots\ y_{pN}^T(t)]^T$ بردار خروجی سامانه به هم پیوسته هستند. همچنین $\bar{A}=I_N\otimes A$ ماتریس سامانه، $\bar{B}=diag\{B_1,\ldots,B_N\}$ ماتریس ورودی و $\bar{C}=I_N\otimes C$ ماتریس خروجی سامانه تشکیل شده از تجمع عامل‌ها می‌باشند.

مسئله‌ی توافق جمعی به معنی طراحی کنترل‌گریست که با توجه به نحوه‌ی ارتباط عامل‌ها با یک‌دیگر، بتواند حالات عامل‌ها را به بردار مشترکی همگرا کند. به بیان ریاضی یعنی [۱۵]:

[1] Edge
[2] Link
[3] Spanning
[4] In-neighbor
[5] Tree
[6] Root
[7] Spanning Tree
[8] Schur Complement
[9] Augmented

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.3.5.2]

$$\lim_{t\to\infty}\left\|x_i(t)-x_j(t)\right\|=0,\quad \forall i\neq j \tag{۹}$$

اکنون به منظور رسیدن به توافق جمعی، کنترل‌گر بازخورد خروجی پویای نامتمرکز در مرجع [۱۶] مبتنی بر خواص ماتریس لاپلاسی شبکه‌ی در رابطه (۱۰) به کار گرفته می‌شود. n_c عامل‌ها و از مرتبه‌ی ثابت

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t)&=A_C x_c(t)+B_C L_{\bar{C}} y_p(t)\\ u(t)&=C_C x_c(t)+D_C L_{\bar{C}} y_p(t)\end{aligned} \tag{۱۰}$$

که در آن $x_c(t)=[x_{c1}^T(t)\ \dots\ x_{cN}^T(t)^T]^T\in\Re^{n_c N}$ بردار حالت‌های همه‌ی کنترل‌گرهای محلی و $L_{\bar{C}}=L\otimes I_q$ می‌باشد. همچنین A_C ، B_C، C_C و D_C به صورت زیر هستند که A_{Ci}، B_{Ci}، C_{Ci} و D_{Ci} پارامترهای نامشخص کنترل‌گر محلی عامل iام می‌باشند:

$$\begin{aligned}A_C&=diag\{A_{C1},A_{C2},\dots,A_{CN}\}\\ B_C&=diag\{B_{C1},B_{C2},\dots,B_{CN}\}\\ C_C&=diag\{C_{C1},C_{C2},\dots,C_{CN}\}\\ D_C&=diag\{D_{C1},D_{C2},\dots,D_{CN}\}\end{aligned} \tag{۱۱}$$

با در نظر گرفتن سامانه‌ی چندعاملی به هم پیوسته در (۸) و کنترل‌گر پیشنهادی در (۱۰) به صورت توأم، سامانه حلقه بسته را می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_p(t)\\ \dot{x}_c(t)\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\bar{A}&0\\ B_C L_{\bar{C}}\bar{C}&A_C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_p(t)\\ x_c(t)\end{bmatrix}\\ &+\begin{bmatrix}\bar{B}D_C L_{\bar{C}}\bar{C}&\bar{B}C_C\\ 0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_p(t-\tau(t))\\ x_c(t-\tau(t))\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{۱۲}$$

۳-۲ سامانه چندعاملی با تأخیر در توپولوژی ارتباطی

در این قسمت برای بررسی تاثیر تأخیر در ارتباط بین عامل‌ها، با در نظر گرفتن سامانه (۶) بدون داشتن تأخیر زمانی در ورودی، سامانه‌ی به هم پیوسته به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t)&=\bar{A}x_p(t)+\bar{B}u(t)\\ y_p(t)&=\bar{C}x_p(t)\end{aligned} \tag{۱۳}$$

تأخیر ارتباطی موجود در شبکه‌ی عامل‌ها در همه‌ی کانال‌های ارتباطی یکسان و به صورت رابطه (۷) فرض می‌شود. بنابراین به منظور تحقق توافق جمعی (۹)، با در نظر گرفتن تأخیر متغیر با زمان $\tau(t)$ در همه‌ی کانال‌های ارتباطی شبکه‌ی عامل‌ها، بر طبق رویکرد [۲۱] با استفاده از ماتریس لاپلاسی شبکه، کنترل‌گر بازخورد خروجی پویای به هم پیوسته برای کنترل‌گرهای محلی به صورت (۱۴) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t)&=A_C x_c(t)+B_C L_{\bar{C}} y_p(t-\tau(t))\\ u(t)&=C_C x_c(t)+D_C L_{\bar{C}} y_p(t-\tau(t))\end{aligned} \tag{۱۴}$$

حال با در نظر گرفتن سامانه‌ی چندعاملی به هم پیوسته در (۱۳) و کنترل‌گر پیشنهادی در (۱۴) به صورت توأم، سامانه حلقه بسته را می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_p(t)\\ \dot{x}_c(t)\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\bar{A}&\bar{B}C_C\\ 0&A_C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_p(t)\\ x_c(t)\end{bmatrix}\\ &+\begin{bmatrix}\bar{B}D_C L_{\bar{C}}\bar{C}&0\\ B_C L_{\bar{C}}\bar{C}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_p(t-\tau(t))\\ x_c(t-\tau(t))\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{۱۵}$$

ایده‌ی اصلی برای یافتن شرط توافق جمعی عامل‌ها و پارامترهای کنترل‌گر، تبدیل مسئله‌ی توافق جمعی به مسئله‌ی پایداری یک سامانه‌ی حلقه بسته واحد می‌باشد. در ادامه چالش‌ها، لم‌ها و نحوه‌ی تبدیل مسئله توافق جمعی به مسئله پایداری بررسی می‌گردد.

۳-۳ تبدیل مسئله‌ی توافق جمعی به مسئله‌ی پایداری

هدف از بدست آوردن A_C ، B_C، C_C و D_C بر طبق رابطه (۹)، همگرا کردن همه‌ی حالات عامل‌ها به برداری یکسان یا معادلاً همگرایی تفاضل بین بردار حالت عامل‌ها به صفر برای تحقق توافق جمعی است و همگرایی حالات خود عامل‌ها به مقدار صفر مد نظر نیست. این در حالی است که هرگونه تلاش برای بدست آوردن شرایط پایداری برای سامانه‌های (۱۲) و (۱۵) ممکن است منجر به همگرایی همه‌ی حالات خود عامل‌ها (نه تفاضل بین حالات عامل‌های مختلف) به مقدار صفر شود. بدین منظور، متغیرهای حالت جدیدی به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۶]:

$$\hat{x}(t)=L_C x_p(t)\ ,\ \ L_C=L\otimes I_n \tag{۱۶}$$

با توجه به رابطه‌ی فوق، متغیرهای حالت جدید $\hat{x}(t)$ اختلاف بردار حالت هر عامل با عامل‌های همسایه را نشان می‌دهد. بنابراین، اگر بتوان پارامترهای کنترل‌گر را به گونه‌ای طراحی کرد که سامانه‌های حلقه بسته (۱۲) و (۱۵) با جایگزینی $\hat{x}(t)$ به جای $x_p(t)$ دارای پایداری مجانبی گردند، با گذشت زمان متغیرهای حالت $\hat{x}(t)$ که بیان‌گر اختلاف بین بردار حالات عامل‌هاست به صفر میل نموده و طبق رابطه (۹) توافق جمعی محقق می‌گردد. اما همان‌طور که گفته شد به دلیل وجود مقدار ویژه صفر در ماتریس لاپلاسی شبکه‌ی عامل‌ها، ماتریس L رتبه‌ی کامل ندارد و دارای $N-1$ سطر مستقل خطی می‌باشد و در نتیجه آن وجود ماتریس $L_{\bar{C}}$ در معادله سامانه‌های (۱۲) و (۱۵) باعث ایجاد معادلات اضافی شده است. بنابراین، متغیر حالت $\hat{x}(t)$ دارای اطلاعات تکراری بوده و در نتیجه سامانه‌ی جایگزین شامل آن نیز از مرتبه کامل نمی‌باشد و قضیه پایداری لیاپانوف-کراسوفسکی را نمی‌توان برای تضمین پایداری چنین سامانه‌یِ دارای افزونگی[1] به کار گرفت. برای حل مشکل افزونگی، $N-1$ سطر مستقل خطی از L را استخراج کرده و با نشان دادن آن‌ها با ماتریس جدید و مرتبه کامل $\tilde{L}\in\Re^{(N-1)\times N}$ نتیجه می‌شود:

$$\tilde{x}(t)=\tilde{L}_C x_p(t)\ ,\ \ \tilde{L}_C=\tilde{L}\otimes I_n \tag{۱۷}$$

[1] Redundancy

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.3.5.2]

با توجه به روابط (۱۶) و (۱۷)، درایه‌های $\tilde{x}(t)$ نسبت به هم کاملاً مستقل خطی بوده و اختلاف بین حالات عامل‌ها را نشان می‌دهند، در نتیجه امکان استفاده از قضایای تحلیل پایداری لیاپانوف-کراسوفسکی وجود داشته و با توجه به تعریف توافق جمعی در (۹)، مسئله‌ی توافق جمعی در بین عامل‌ها با همگرایی $\tilde{x}(t)$ به مقدار صفر تضمین شده است. با توجه به تغییرات انجام شده، در ادامه لم زیر برای بازنویسی سامانه‌ی حلقه بسته بکار گرفته می‌شود.

لم ۳ [۱۶]: $L_C\overline{A}=\overline{A}L_C$ ، $L_{\overline{C}}\overline{C}=\overline{C}L_C$.

با توجه به کاهش تعداد حالات سامانه در نتیجه بکارگیری ماتریس $\tilde{L}$ و بردار حالت جدید $\tilde{x}(t)\in\Re^{n\times(N-1)}$، ابعاد ماتریس‌های A و C در نمایش فضای حالت جدید با ابعاد حالات سامانه همخوانی ندارد؛ بنابراین برای تطبیق ابعاد ماتریس‌های سامانه، ماتریس‌های $\tilde{A}=I_{N-1}\otimes A$ و $\tilde{C}$ به ترتیب جایگزین ماتریس‌های $\overline{A}$ و $\overline{C}$ می‌شوند به طوری‌که ماتریس $\tilde{C}$ از رابطه‌ی $\tilde{C}\tilde{L}_C=\overline{C}L_C$ محاسبه می‌شود. در نهایت با اعمال تغییرات بیان شده، سامانه‌های حلقه بسته (۱۲) و (۱۵) به ترتیب به صورت سامانه‌های تقلیل یافته و بدون افزونگی (۱۸) و (۱۹) بازنویسی می‌شوند.

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=A_{clp}x(t)+B_{clp}x(t-\tau(t))\\&y(t)=C_{clp}x(t)\\&A_{clp}=\begin{bmatrix}\tilde{A}&0\\B_C\tilde{C}&A_C\end{bmatrix}\\&B_{clp}=\begin{bmatrix}\tilde{L}_C\overline{B}D_C\tilde{C}&\tilde{L}_C\overline{B}C_C\\0&0\end{bmatrix}\end{aligned}\qquad(۱۸)$$

و

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=A_{clp}x(t)+B_{clp}x(t-\tau(t))\\&y(t)=C_{clp}x(t)\\&A_{clp}=\begin{bmatrix}\tilde{A}&\tilde{L}_C\overline{B}C_C\\0&A_C\end{bmatrix},\ B_{clp}=\begin{bmatrix}\tilde{L}_C\overline{B}D_C\tilde{C}&0\\B_C\tilde{C}&0\end{bmatrix}\end{aligned}\qquad(۱۹)$$

که در آن‌ها $C_{clp}=diag\{\tilde{C},0\}$ و $x(t)=[\tilde{x}^T(t)\quad x_c^T(t)]^T$ می‌باشد.

با تغییرات اعمال شده، مسئله‌ی توافق جمعی سامانه‌های (۸) و (۱۳) به مسئله‌ی پایداری‌سازی سامانه‌های (۱۸) و (۱۹) تبدیل شده و اگر بتوان پارامترهای کنترل‌گر را به گونه‌ای یافت که این سامانه‌ها پایدار مجانبی باشند، حالت‌های $\tilde{x}(t)$ به صفر میل خواهند کرد و توافق جمعی بین عامل‌ها محقق می‌شود. برای بدست آوردن شرایط پایدارسازی سامانه‌های (۱۸) و (۱۹) که معادل با مسئله‌ی توافق جمعی بین عامل‌هاست، از قضیه‌ی لیاپانوف-کراسوفسکی استفاده می‌شود.

۴- نتایج اصلی

قضیه ۱: با مشخص بودن مقادیر مثبت τ و μ، کنترل‌گر بازخورد خروجی پویای پیشنهاد شده در رابطه (۱۰)، سامانه‌ی چندعاملی تعریف شده در (۸) را ضمن حفظ نمودن پایداری سامانه به توافق جمعی می‌رساند اگر ماتریس‌های $Q_1>0$، $Q_2>0$، $R>0$، T، $S_{ij}(i,j=1,2,3,4)$، f_i و k_i برای $i=1,2,\ldots,N$، $Q=diag\{q_1,\ldots,q_N\}$، $W=diag\{w_1,\ldots,w_N\}$ و ماتریس $P=P^T>0$ به فرم

$$\begin{aligned}&P=diag\{P_S,P_C\},\ P_S=I_{N-1}\otimes\overline{p}_s\\&P_C=diag\{P_{C_1},\ldots,P_{C_N}\}\end{aligned}\qquad(۲۰)$$

وجود داشته باشند، به طوری که نامساوی‌های ماتریسی خطی زیر:

$$\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}&S_{13}&S_{14}*&S_{22}&S_{23}&S_{24}*&*&S_{33}&S_{34}*&*&*&R\end{bmatrix}>0\qquad(۲۱)$$

$$\begin{bmatrix}\Phi_{11}&\Phi_{12}&\Phi_{13}&0&\Phi_{15}*&\Phi_{22}&\Phi_{23}&\tau T&\Phi_{25}*&*&\Phi_{33}&0&0*&*&*&-\tau R&0*&*&*&*&-2\tau(2P-R)\end{bmatrix}<0\qquad(۲۲)$$

که در آن

$$\begin{aligned}\Phi_{11}&=\begin{bmatrix}\tilde{A}^TP_S+P_S\tilde{A}&\tilde{C}^TW^T*&Q+Q^T\end{bmatrix}+Q_1+Q_2+\tau S_{11}\\&\quad+S_{14}+S_{14}^T\\\Phi_{12}&=\begin{bmatrix}\Pi_D\tilde{C}&\Pi_C\\0&0\end{bmatrix}+\tau S_{12}+S_{24}^T+T^T\\\Phi_{13}&=\tau S_{13}-S_{14}+S_{34}^T\\\Phi_{15}&=2\tau\begin{bmatrix}\tilde{A}^TP_S&\tilde{C}^TW^T\\0&Q^T\end{bmatrix}\\\Phi_{22}&=-(1-\mu)Q_1-T-T^T+\tau S_{22}\\\Phi_{23}&=\tau S_{23}-S_{24},\ \Phi_{25}=2\tau\begin{bmatrix}\Pi_D\tilde{C}&\Pi_C\\0&0\end{bmatrix}^T\\\Phi_{33}&=-Q_2+\tau S_{33}-S_{34}-S_{34}^T\\\Pi_C&=(\tilde{L}\otimes J_{n\times n_c})\circ(1_{N-1}\otimes[f_1,\ldots,f_N])\\\Pi_D&=(\tilde{L}\otimes 1_n)\circ(1_{N-1}\otimes[k_1,\ldots,k_N])\end{aligned}\qquad(۲۳)$$

دارای جواب باشند. در این صورت ضرایب کنترل‌گر بازخورد خروجی A_C، B_C، C_C و D_C از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}&A_C=P_C^{-1}Q\quad,\quad B_C=P_C^{-1}W\\&C_{C1}=B_1^{\uparrow}\overline{p}_s^{-1}f_1,\ldots,C_{CN}=B_N^{\uparrow}\overline{p}_s^{-1}f_N\\&D_{C1}=B_1^{\uparrow}\overline{p}_s^{-1}k_1,\ldots,D_{CN}=B_N^{\uparrow}\overline{p}_s^{-1}k_N\end{aligned}\qquad(۲۴)$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.3.5.2]

اثبات: برای اینکه سامانه حلقه بسته (۱۸) پایدار باشد و ضمن برآورده-سازی معیار قضیه‌ی پایداری لیاپانوف-کراسوفسکی، پارامترهای مجهول کنترل‌گر بدست آیند، لیاپانوف-کراسوفسکی تابعی (LKF) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۰]:

$$\begin{aligned}V(t) &= x^T(t)Px(t)+\int_{t-\tau(t)}^{t}x^T(s)Q_1x(s)ds\\&+\int_{t-\tau}^{t}x^T(s)Q_2x(s)ds+2\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds\,d\theta\\&+\int_{0}^{t}\int_{\theta-\tau}^{\theta}\xi^T(s,\theta)S\xi(s,\theta)ds\,d\theta\end{aligned}\qquad(۲۵)$$

که $\xi^T(s,\theta)=[x^T(\theta)\quad x^T(\theta-\tau(t))\quad x^T(\theta-\tau)\quad \dot{x}^T(s)]$ و ماتریس‌های P، Q_1، Q_2، R و ماتریس S به فرم

$$S=\begin{bmatrix}S_1 & S_2\\ * & R\end{bmatrix},\ S_1=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13}\\ * & S_{22} & S_{23}\\ * & * & S_{33}\end{bmatrix},\ S_2=\begin{bmatrix}S_{14}\\ S_{24}\\ S_{34}\end{bmatrix}\qquad(۲۶)$$

ماتریس‌هایی مثبت معین هستند که باید مشخص شوند. از فرمول نیوتون-لیبنیز[1]، برای هر ماتریس T با ابعاد مناسب، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$2x^T(t-\tau(t))T[x(t)-x(t-\tau(t))-\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot{x}(s)ds]=0\qquad(۲۷)$$

با در نظر گرفتن $\xi_0^T(t,\theta)=[x^T(\theta)\quad x^T(\theta-\tau(t))\quad x^T(\theta-\tau)]$، مشتق‌گیری از (۲۵) نسبت به زمان و (۲۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= \dot{x}^T(t)Px(t)+x^T(t)P\dot{x}(t)+x^T(t)Q_1x(t)\\&-(1-\dot{\tau}(t))x^T(t-\tau(t))Q_1x(t-\tau(t))\\&+x^T(t)Q_2x(t)-x^T(t-\tau)Q_2x(t-\tau)\\&+2\tau\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t)-2\int_{t-\tau}^{t}\dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds\\&+\int_{t-\tau}^{t}\xi^T(s,t)S\xi(s,t)ds\\&\le\dot{x}^T(t)Px(t)+x^T(t)P\dot{x}(t)+x^T(t)(Q_1+Q_2)x(t)\\&-(1-\mu)x^T(t-\tau(t))Q_1x(t-\tau(t))\\&-x^T(t-\tau)Q_2x(t-\tau)+2\tau\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t)\\&+\xi_0^T(t,t)(\tau S_1+S_2\bar{I}+\bar{I}^TS_2^T)\xi_0(t,t)\\&+2x^T(t-\tau(t))T[x(t)-x(t-\tau(t)-\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot{x}(s)ds)]\\&-\int_{t-\tau}^{t}\dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds\end{aligned}\qquad(۲۸)$$

که $\bar{I}=[I\ \ 0\ \ -I]$. با توجه به لم ۲ رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}-2x^T(t-\tau(t))T\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot{x}(s)ds &\le x^T(t-\tau(t))TR^{-1}T^Tx(t-\tau(t))\\&+\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds\end{aligned}\qquad(۲۹)$$

با در نظر گرفتن بردار حالت $\Phi^T=[x^T(t)\quad x^T(t-\tau(t))\quad x^T(t-\tau)]$، از (۱۸)، (۲۸) و (۲۹) رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

$$\dot{V}(t)\le\Phi^T\Xi\Phi\qquad(۳۰)$$

که در آن

$$\Xi=\begin{bmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12} & \tau S_{13}-S_{14}+S_{34}^T\\ * & \Omega_{22} & \tau S_{23}-S_{24}\\ * & * & -Q_2+\tau S_{33}-S_{34}-S_{34}^T\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{11} &= A_{clp}^TP+PA_{clp}+Q_1+Q_2+\tau S_{11}+S_{14}\\&+S_{14}^T+2\tau A_{clp}^TRA_{clp}\\\Omega_{12} &= PB_{clp}+\tau S_{12}+S_{24}^T+T^T+2\tau A_{clp}^TRB_{clp}\\\Omega_{22} &= -(1-\mu)Q_1+\tau S_{22}-T-T^T\\&+\tau TR^{-1}T^T+2\tau B_{clp}^TRB_{clp}\end{aligned}\qquad(۳۱)$$

طبق معیار پایداری لیاپانوف-کراسوفسکی، از آنجایی که ماتریس‌های مجهول را به‌گونه‌ای در نظر گرفتیم که $V(t)>0$ باشد، برای تضمین $\dot{V}(t)<0$ و حصول پایداری مجانبی باید $\Xi<0$ برقرار باشد. نامعادله ماتریسی $\Xi<0$ به فرم خطی نیست و با اعمال تکنیک مکمل شور خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}\bar{\Omega}_{11} & \bar{\Omega}_{12} & \tau S_{13}-S_{14}+S_{34}^T & 0 & 2\tau A_{clp}^T\\ * & \bar{\Omega}_{22} & \tau S_{23}-S_{24} & \tau T & 2\tau B_{clp}^T\\ * & * & -Q_2+\tau S_{33}-S_{34}-S_{34}^T & 0 & 0\\ * & * & * & -\tau R & 0\\ * & * & * & * & -2\tau R^{-1}\end{bmatrix}<0\qquad(۳۲)$$

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_{11} &= A_{clp}^TP+PA_{clp}+Q_1+Q_2+\tau S_{11}+S_{14}+S_{14}^T\\\bar{\Omega}_{12} &= PB_{clp}+\tau S_{12}+S_{24}^T+T^T\\\bar{\Omega}_{22} &= -(1-\mu)Q_1+\tau S_{22}-T-T^T\end{aligned}$$

ابتدا با ضرب نامعادله‌ی غیرخطی (۳۲) از چپ و راست در ماتریس $diag\{I,I,I,I,P\}$، درایه‌ی $-2\tau R^{-1}$ به درایه‌ی غیرخطی $-2\tau PR^{-1}P$ تبدیل شده و سپس با بکارگیری رابطه (۵) در لم ۲ معادله ماتریسی زیر نتیجه خواهد شد:

$$\begin{bmatrix}\bar{\Omega}_{11} & \bar{\Omega}_{12} & \tau S_{13}-S_{14}+S_{34}^T & 0 & 2\tau A_{clp}^TP\\ * & \bar{\Omega}_{22} & \tau S_{23}-S_{24} & \tau T & 2\tau B_{clp}^TP\\ * & * & -Q_2+\tau S_{33}-S_{34}-S_{34}^T & 0 & 0\\ * & * & * & -\tau R & 0\\ * & * & * & * & -2\tau(2P-R)\end{bmatrix}<0\qquad(۳۳)$$

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_{11} &= A_{clp}^TP+PA_{clp}+Q_1+Q_2+\tau S_{11}+S_{14}+S_{14}^T\\\bar{\Omega}_{12} &= PB_{clp}+\tau S_{12}+S_{24}^T+T^T\\\bar{\Omega}_{22} &= -(1-\mu)Q_1+\tau S_{22}-T-T^T\end{aligned}$$

نامعادله ماتریسی (۳۳) به دلیل ضرب ماتریس مجهول P در پارامترهای مجهول کنترل‌گرهای موجود در A_{clp} و B_{clp} خطی نیست. در ادامه بر اساس ساختار فرض شده برای ماتریس P در (۲۰)، جمله‌های $A_{clp}^TP+PA_{clp}$ و PB_{clp} به فرم زیر بسط داده می‌شوند:

$$A_{clp}{}^TP+PA_{clp}=\begin{bmatrix}\tilde{A}^TP_S+P_S\tilde{A} & \tilde{C}^TB_C{}^TP_C\\ * & A_C{}^TP_C+P_CA_C\end{bmatrix}$$

$$PB_{clp}=\begin{bmatrix}P_S\tilde{L}_C\bar{B}D_C\tilde{C} & P_S\tilde{L}_C\bar{B}C_C\\ 0 & 0\end{bmatrix}\qquad(۳۴)$$

[1] Newton-Leibniz Formula

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.3.5.2]

بلوک‌های غیرصفر ماتریس PB_{clp} در (۳۴) را می‌توان با ترکیبی از ضرب‌های هادامارد و کرونکر به صورت زیر بازنوشت:

$$\begin{aligned} P_S\tilde{L}_C\bar{B}D_C &= \left(\tilde{L}\otimes 1_n\right)\circ\left(1_{N-1}\otimes\left[\bar{p}_sB_1D_{C1},...,\ \bar{p}_sB_ND_{CN}\right]\right)\\ P_S\tilde{L}_C\bar{B}C_C &= \left(\tilde{L}\otimes J_{n\times nc}\right)\circ\left(1_{N-1}\otimes\left[\bar{p}_sB_1C_{C1},...,\ \bar{p}_sB_NC_{CN}\right]\right)\end{aligned} \quad (۳۵)$$

اکنون با اعمال تغییر متغیرهایی به صورت زیر:

$$\begin{aligned} &Q=P_CA_C\ ,\ W=P_CB_C\\ &k_i=\bar{p}_sB_iD_{Ci}\ ,\ f_i=\bar{p}_sB_iC_{Ci}\ ,\ i=1,2,\ldots,N\end{aligned} \quad (۳۶)$$

Π_C، Π_D به صورت بیان شده در (۲۳) بدست می‌آیند و نامعادله (۳۳) به ازای Q، W، k_i، f_i و P خطی شده و نامعادله ماتریسی (۲۲) حاصل می‌شود. با استفاده از الگوریتم‌های موجود در نرم‌افزارها و افزونه‌های CVX و YALMIP می‌توان جواب سراسری برای متغیرها یافت [۲۲]. بنابراین، با مشخص شدن ماتریس‌های Q، W، k_iها، f_i ها و P و در نتیجه $\bar{p}_s$ و P_C، ضرایب کنترل‌گر بازخورد خروجی پویا طبق روابط بیان شده در (۲۴) حاصل خواهند شد و بدین ترتیب اثبات قضیه کامل می‌گردد. □

نتیجه فرعی ۱: اگر برای سامانه خطی (۱۸)، تأخیر زمانی در ورودی مقدار ثابت τ باشد، با قرار دادن $S_{12}=0$، $S_{13}=0$، $S_{22}=0$، $S_{23}=0$، $S_{24}=0$، $S_{33}=0$ و $S_{34}=0$ در رابطه (۲۵)، ضمن حفظ پایداری، توافق جمعی بین عامل‌ها محقق می‌شود اگر ماتریس‌های $Q_2>0$، $R>0$، S_{11}، S_{14}، f_i و k_i برای $i=1,\ldots,N$، $Q=diag\{q_1,\ldots,q_N\}$، $W=diag\{w_1,\ldots,w_N\}$ و ماتریس $P=P^T>0$ به فرم (۲۰) وجود داشته باشند، به طوری که نامعادله‌های ماتریسی خطی زیر:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{14}\\ * & R\end{bmatrix}>0 \quad (۳۷)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi & \begin{bmatrix}\Pi_D\tilde{C} & \Pi_C\\ 0 & 0\end{bmatrix}-S_{14} & \tau\begin{bmatrix}\tilde{A}^TP_S & \tilde{C}^TW^T\\ 0 & Q^T\end{bmatrix}\\ * & -Q_2 & \tau\begin{bmatrix}\Pi_D\tilde{C} & \Pi_C\\ 0 & 0\end{bmatrix}^T\\ * & * & -\tau(2P-R)\end{bmatrix}<0 \quad (۳۸)$$

$$\Psi=\begin{bmatrix}\tilde{A}^TP_S+P_S\tilde{A} & \tilde{C}^TW^T\\ * & Q+Q^T\end{bmatrix}+Q_2+\tau S_{11}+S_{14}+S_{14}^T$$

دارای جواب باشند. در این صورت ضرایب کنترل‌گر بازخورد خروجی A_C، B_C، C_C و D_C از رابطه (۲۴) بدست می‌آیند.

قضیه ۲: با مشخص بودن مقادیر مثبت τ و μ، کنترل‌گر بازخورد خروجی پویای پیشنهاد شده در رابطه (۱۴)، سامانه‌ی چندعاملی تعریف شده در (۱۳) را در حضور تأخیر متغیر با زمان (۷) در کلیه‌ی کانال‌های ارتباطی عامل‌ها به توافق جمعی می‌رساند اگر ماتریس‌های $Q_1>0$، $Q_2>0$، $R>0$، T، $S_{ij}(i,j=1,2,3,4)$، f_i و k_i برای $i=1,\ldots,N$، $Q=diag\{q_1,\ldots,q_N\}$، $W=diag\{w_1,\ldots,w_N\}$ و ماتریس $P=P^T>0$ به فرم (۲۰) وجود داشته باشند، به طوری که نامعادله ماتریسی خطی (۲۱) و نامعادله ماتریسی خطی زیر:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{11} & \bar{\Phi}_{12} & \Phi_{13} & 0 & \bar{\Phi}_{15}\\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \tau T & \bar{\Phi}_{25}\\ * & * & \Phi_{33} & 0 & 0\\ * & * & * & -\tau R & 0\\ * & * & * & * & -2\tau(2P-R)\end{bmatrix}<0 \quad (۳۹)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{11}&=\begin{bmatrix}\tilde{A}^TP_S+P_S\tilde{A} & \Pi_C\\ * & Q+Q^T\end{bmatrix}+Q_1+Q_2+\tau S_{11}\\ &\quad+S_{14}+S_{14}^T\\ \bar{\Phi}_{12}&=\begin{bmatrix}\Pi_D\tilde{C} & 0\\ W\tilde{C} & 0\end{bmatrix}+\tau S_{12}+S_{24}^T+T^T\\ \bar{\Phi}_{15}&=2\tau\begin{bmatrix}\tilde{A}^TP_S & 0\\ \Pi_C^T & Q^T\end{bmatrix},\ \bar{\Phi}_{25}=2\tau\begin{bmatrix}\tilde{C}^T\Pi_D^T & \tilde{C}^TW^T\\ 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned} \quad (۴۰)$$

و بقیه درایه‌ها در (۲۳) بیان شده‌اند، دارای جواب باشند. ضرایب کنترل‌گر نامتمرکز نیز از از رابطه (۲۴) بدست می‌آیند.

اثبات: مطابق روند اثبات در قضیه ۱ و تنها با در نظر گرفتن تفاوت‌های زیر، قضیه ۲ اثبات می‌شود.

$$\begin{aligned} PA_{clp}&=\begin{bmatrix}P_S & 0\\ 0 & P_C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{A} & \tilde{L}_C\bar{B}C_C\\ 0 & A_C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_S\tilde{A} & P_S\tilde{L}_C\bar{B}C_C\\ 0 & P_CA_C\end{bmatrix}\\ PB_{clp}&=\begin{bmatrix}P_S & 0\\ 0 & P_C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{L}_C\bar{B}D_C\tilde{C} & 0\\ P_CB_C\tilde{C} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_S\tilde{L}_C\bar{B}D_C\tilde{C} & 0\\ P_CB_C\tilde{C} & 0\end{bmatrix}\end{aligned} \quad (۴۱)$$

توجه ۱: با صفر در نظر گرفتن مرتبه‌ی کنترل‌گر خروجی پویا یعنی $n_c=0$، کنترل‌گر بازخورد خروجی پویای ارائه شده در قضیه ۱ و قضیه ۲ به کنترل‌گر بازخورد خروجی ایستا تقلیل می‌یابد. علاوه بر این، اگر $C=I$ در نظر گرفته شود، آنگاه مسئله‌ی طراحی کنترل‌گر خروجی پویا، به یک مسئله‌ی طراحی کنترل‌گر بازخورد حالت تغییر می‌یابد.

توجه ۲: باید توجه داشت که مشابه با نتیجه فرعی ۱، برای قضیه ۲ نیز نتیجه‌ای فرعی قابل استنتاج است که به جهت اختصار بیان نگردیده است.

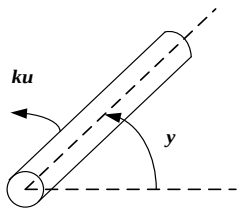
۵- مثال عددی

تحلیل و کنترل رفتارهای هماهنگ در سامانه‌های چندعاملی رباتیکی، از موضوعات مورد علاقه‌ی پژوهشگران در سال‌های اخیر به شمار می‌رود. کنترل ربات‌های همکار به عنوان نمونه‌ای از سامانه‌های چندعاملی از مباحث چالش برانگیز در رباتیک است. عملیات پیچیده و سختی را که ممکن است با یک ربات بزرگ، گران، درجه آزادی بالا و طراحی پیچیده صورت پذیرد می‌توان با همکاری گروهی از ربات‌های کوچک و مشابه انجام داد. عملیات مونتاژ قطعاتی که هندسه‌ی پیچیده‌ای

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.3.5.2]

دارند، از مواردی است که اهمیت همکاری در ربات‌ها را نشان می‌دهد. گستره‌ی کاربرد بازوی‌های مکانیکی در عملیات مختلف، به صورتی روزافزون رو به افزایش است و وسعت تحقیقات و پژوهش‌های انجام شده در این زمینه به خوبی نمایان‌گر این واقعیت می‌باشد. از جمله‌ی این عملیات می‌توان به مونتاژ، جوشکاری، برشکاری، رنگرزی، بازوهای جرثقیلی، میکروسکوپ اتمی و صنایع دفاعی و امنیتی اشاره کرد [۲۳].

در [۱۶] با معرفی مدل خطی یک بازوی مکانیکی مرتبه اول، توافق جمعی در یک سامانه چندعاملی متشکل از سه عدد بازوی مرتبه اول نشان داده شده در شکل ۱ با استفاده از کنترل‌گر بازخورد خروجی پویای نامتمرکز مورد بررسی قرار گرفته و شرط توافق جمعی به صورت نامساوی ماتریسی دوسویه بیان شده است، لذا استخراج پارامترهای کنترل‌گر در این فرم، پیچیده و بدون استفاده از روش‌های تکراری و تقریبی ناممکن است.



شکل ۱: بازوی مکانیکی و جهت حرکت و نیرو [۱۶].

مدل مفروض برای این بازو، با توجه به قوانین نیوتون به فرم خطی زیر به دست می‌آید:

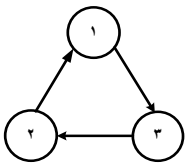
$$J\ddot{y}_i + \dot{y}_i = k_i u_i, \quad i = 1,2,3 \tag{۴۲}$$

با توجه به (۴۲)، مدل فضای حالت، به فرم زیر قابل بازنویسی است:

$$\dot{x}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -B/J \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 0 \\ k_i/J \end{bmatrix} u, \qquad y_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_i \tag{۴۳}$$

که در آن $x_i = [y_i \;\; \dot{y}_i]^T$، J اینرسی بازو، B ضریب اصطکاک و k_i ضریب گشتاور موتور هستند [۱۶].

این سه بازو به عنوان سه عامل با توپولوژی مثلثی نشان داده شده در با یک‌دیگر ارتباط دارند:



شکل ۲: توپولوژی شبکه‌ی سامانه‌ای با سه عامل.

با توجه به شکل ۲ ماتریس لاپلاسی این سامانه به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۴۴}$$

با فرض $J = 0.03 kgm^2$ ، $B = 0.1 kgm^2/s$ ، $k_1 = 0.1\,\mathrm{Nm/V}$، $k_2 = 0.5\,\mathrm{Nm/V}$ و $k_3 = 1\,\mathrm{Nm/V}$ برای مدل (۴۳)، توافق جمعی با استفاده از کنترل‌گر بازخورد خروجی پویای نامتمرکز طراحی شده در [۱۶] محقق شده و موقعیت بازوهای مکانیکی از شرایط اولیه‌ی مختلف به نقطه‌ای غیر از صفر همگرا می‌شود.

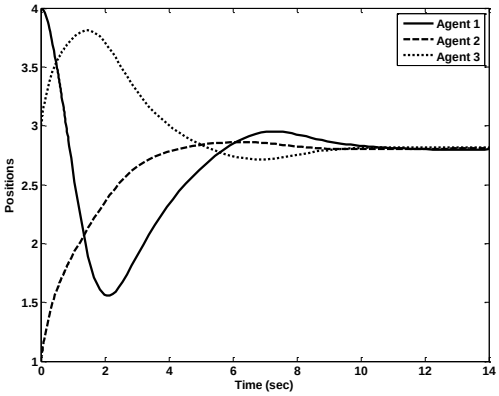
به منظور مقایسه و بهبود عملکرد الگوریتم [۱۶]، با افزودن تأخیر زمانی به ورودی کنترلی و توپولوژی ارتباطی مدل (۴۳) و اعمال قضیه ۱ و قضیه ۲ در شرایط اولیه و دینامیکی کاملاً مشابه با [۱۶]، نتایج زیر با کمک جعبه‌ابزار YALMIP در نرم‌افزار MATLAB حاصل می‌شود.

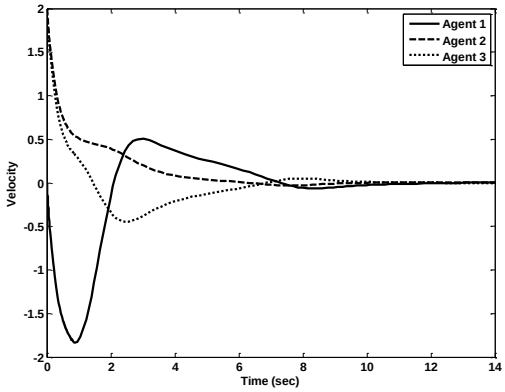
نتایج حاصل از قضیه ۱: با اعمال تأخیر متغیر با زمان $0.5 + 0.5\cos(t)$ به ورودی کنترلی عامل‌ها در (۴۳) و با توجه به این‌که در قضیه ۱ امکان انتخاب مرتبه‌ی کنترل‌گر قبل از طراحی وجود دارد ولی الگوریتم [۱۶] تنها از کنترل‌گر مرتبه‌ی دو بهره می‌برد، لازم است نتایج خروجی و تلاش کنترلی برای مرتبه‌های مختلف کنترل‌گر علاوه بر مرتبه‌ی دو مورد بررسی قرار گیرد تا مزیت استفاده از کنترل‌گر مرتبه ثابت در مقایسه با سایر کنترل‌گرها به بحث گذاشته شود. در ادامه به جهت اختصار، پارامترهای کنترل‌گر، نحوه‌ی توافق جمعی بین عامل‌ها و تلاش کنترلی برای کنترل‌گر مرتبه‌ی دو آورده شده است.

جدول۱: پارامترهای کنترل‌گر مرتبه دو استخراج شده از قضیه ۱.

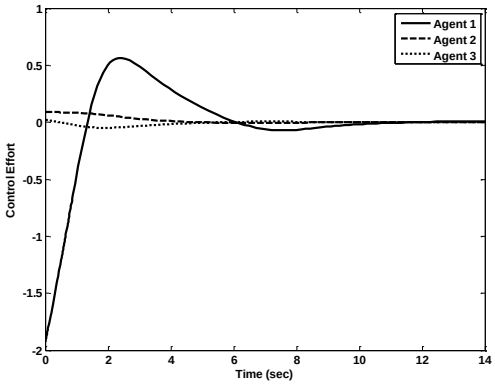
پارامتر	عامل اول	عامل دوم	عامل سوم
A_C	$\begin{bmatrix} -0.2745 & -0.0096 \\ -0.0095 & -0.2708 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.2757 & -0.0065 \\ -0.0060 & -0.2760 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.2718 & -0.0013 \\ -0.0015 & -0.2703 \end{bmatrix}$
B_C	$\begin{bmatrix} 0.0006 \\ 0.0006 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0007 \\ 0.0007 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0004 \\ 0.0004 \end{bmatrix}$
C_C	$\begin{bmatrix} -0.5472 & -0.5180 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0536 & -0.0507 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0265 & -0.0290 \end{bmatrix}$
D_C	$\begin{bmatrix} -0.4288 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0356 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0137 \end{bmatrix}$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.3.5.2]





شکل ۳: تحقق توافق جمعی با کنترل‌گر مرتبه دو حاصل از قضیه ۱.



شکل ۴: تلاش کنترلی با کنترل‌گر مرتبه دو حاصل از قضیه ۱.

به منظور مقایسه‌ی مناسب‌تر کنترل‌گرها با مرتبه‌های مختلف با یکدیگر و با کنترل‌گر بدست آمده در [۱۶]، شاخص‌های عملکرد کنترلی *ISU*، *IAU*، *ITSU* و *ITAU* ([۲۴]) را برای مجموع تغییرات تلاش کنترل‌گرها در هر سه عامل مطابق روابط زیر تعریف می‌کنیم:

$$ISU = \int_0^\infty u^2(t)dt \ , \ IAU = \int_0^\infty |u(t)|dt$$
$$ITSU = \int_0^\infty t\,u^2(t)dt \ , \ ITAU = \int_0^\infty t|u(t)|dt \qquad (۴۵)$$

با این تعاریف به جهت اختصار برای کنترل‌گرهای مرتبه‌ی صفر تا شش، نتایج مربوط به تغییرات کنترل‌گر به صورت عددی در جدول ۲ جمع‌آوری شده‌اند تا دید بهتری از چگونگی عملکرد کنترل‌گرهای طراحی شده با مرتبه‌های مختلف در قضیه ۱ به دست آید.

جدول۲: شاخص‌های عملکرد کنترلی برای روش ارائه شده در قضیه ۱.

مرتبه کنترل‌گر	ISU	IAU	ITSU	ITAU
الگوریتم [۱۶]	6.7685	3.6550	2.9549	3.3815
صفر	2.8834	3.6777	3.1575	8.4815
یک	2.2270	3.1968	2.1679	7.4104
دو	2.2611	3.2250	2.2148	7.4836
سه	2.5607	3.4534	2.6486	8.0133
چهار	2.6046	3.4808	2.7011	8.0634
پنج	2.5844	3.4729	2.6835	8.0729
شش	2.6686	3.5307	2.8119	8.1903

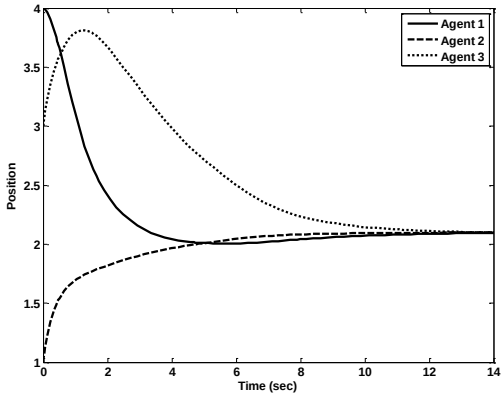
سرعت همگرایی کنترل‌گرهای استخراج شده از قضیه ۱ نسبت به الگوریتم [۱۶] کمتر و نوسان بیشتر است. همچنین کنترل‌گرهای مرتبه ثابت پیشنهاد شده با جبران‌سازی تأخیر زمانی، عامل‌های دارای تأخیر ثابت و متغیر با زمان در ورودی کنترلی را به توافق جمعی می‌رسانند و با اعمال مرتبه‌های کم و حتی صفر به کنترل‌گر، پاسخی مناسب برای سامانه‌ی چندعاملی تأخیردار حاصل می‌گردد و این بدین معنی است که می‌توان با توجه به امکانات و شرایط موجود، حداقل مرتبه را برای کنترل‌گرهای مرتبه ثابت انتخاب نمود تا علاوه بر نائل آمدن به یک پاسخ مطلوب، هزینه‌های کنترلی نیز کاهش یابد. با افزایش مرتبه‌ی کنترل‌گر از صفر به یک، فراجهش و میرایی حالات عامل‌ها و تلاش کنترل‌گرها کاهش یافته و توافق جمعی نیز سریعتر محقق می‌گردد و در این مورد افزایش مرتبه‌ی کنترل‌گر پاسخ بهتری را نتیجه می‌دهد، ولی با افزایش مرتبه‌ی کنترل‌گر از یک به مرتبه‌های بالاتر، طراح می‌تواند با توجه به تلاش کنترلی مرتبه‌های مختلف در جدول ۲ و نحوه‌ی همگرایی حالات عامل‌ها به مقدار مورد توافق، مرتبه‌ی دلخواه را انتخاب نماید.

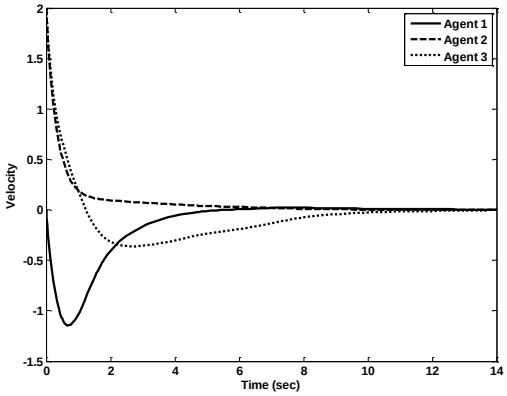
نتایج حاصل از قضیه ۲: برای سامانه (۴۳) با در نظر گرفتن تأخیر متغیر با زمان $0.5\cos(t)$ در همه‌ی کانال‌های ارتباطی شکل ۲، نتایج حاصل از قضیه ۲ برای کنترل‌گر مرتبه‌ی دو مانند قضیه ۱ در ادامه آمده است.

جدول۳: پارامترهای کنترل‌گر مرتبه دو استخراج شده از قضیه ۲.

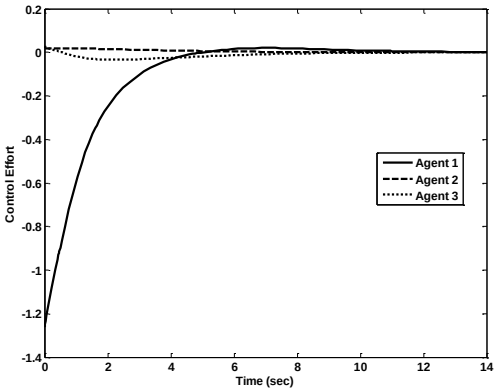
پارامتر	عامل اول	عامل دوم	عامل سوم
A_C	$\begin{bmatrix} -0.7238 & 0.0012 \\ 0.0013 & -0.7225 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.7232 & 0.0015 \\ 0.0016 & -0.7239 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.7223 & 0.0034 \\ 0.0035 & -0.7224 \end{bmatrix}$
B_C	$\begin{bmatrix} 0.0148 \\ 0.0137 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0181 \\ 0.0202 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0203 \\ -0.0185 \end{bmatrix}$
C_C	$[0.0043 \quad -0.0093]$	$[0.0001 \quad 0.0002]$	$[-0.0003 \quad 0.0008]$
D_C	$[-0.4356]$	$[-0.0118]$	$[-0.0270]$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.3.5.2]





شکل ۵: تحقق توافق جمعی با کنترل‌گر مرتبه دو حاصل از قضیه ۲.



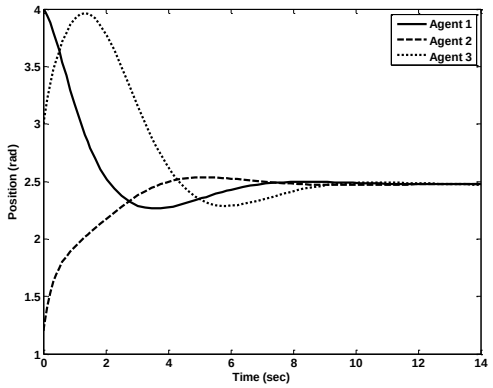
شکل ۶: تلاش کنترلی با کنترل‌گر مرتبه دو حاصل از قضیه ۲.

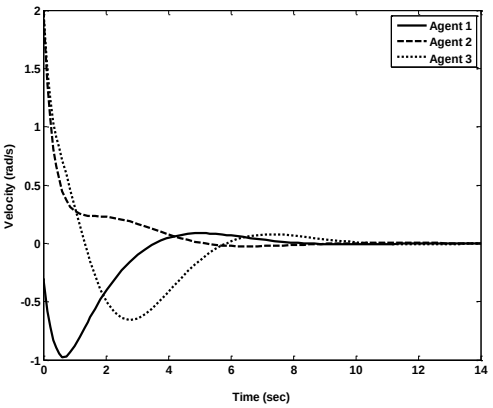
جدول۴: شاخص‌های عملکرد کنترلی برای روش ارائه شده در قضیه ۲.

مرتبه کنترل‌گر	ISU	IAU	ITSU	ITAU
الگوریتم [۱۶]	6.7685	3.6550	2.9549	3.3815
صفر	1.1550	1.9117	0.7175	3.3273
یک	1.1279	1.9149	0.7380	3.3217
دو	1.1111	1.9132	0.7231	3.4369
سه	1.0630	1.9050	0.7050	3.5359
چهار	1.0442	1.9204	0.7018	3.7873
پنج	1.0153	1.9180	0.6858	3.8952
شش	0.9932	1.9270	0.6801	4.0871

در شکل ۵ مشاهده می‌شود که کنترل‌گر استخراجی از قضیه ۲ ضمن کاهش محافظه‌کاری و جبران‌سازی تأخیر متغیر با زمان اجتناب ناپذیر در کانال‌های ارتباطی عامل‌ها، توافق جمعی را با نوسانات و زمان همگرایی بیشتر و تلاش کنترلی کمتر نسبت به الگوریتم [۱۰] محقق می‌سازد. کنترل‌گر مرتبه‌ی یک دارای پاسخی با مشخصه‌های عملکردی تقریبا یکسان در تحقق توافق جمعی نسبت به مرتبه‌های بالاتر می‌باشد، لذا کنترل‌گر مرتبه‌ی یک نسبت به کنترل‌گرهای مرتبه‌ی بالاتر ضعف محسوسی ندارد و مناسب‌ترین مرتبه برای انتخاب کنترل‌گر پویای مرتبه ثابت است. مزیت اصلی روش فعلی پایین بودن مرتبه‌ی کنترل‌گر است که به تبع آن پیاده‌سازی و مصرف انرژی و همچنین تعمیر و نگهداری آسان‌تر و کم‌هزینه‌تری را به دنبال دارد.

همچنین با در نظر گرفتن تأخیر ثابت ۰٫۵ ثانیه در ورودی کنترلی (۴۲)، نحوه‌ی توافق جمعی بین عامل‌ها حاصل از اعمال نتیجه فرعی ۱ در شکل ۷ آمده است.





شکل ۷: تحقق توافق جمعی با کنترل‌گر مرتبه دو حاصل از نتیجه فرعی ۱.

لازم به ذکر است که کنترل‌گر بازخورد خروجی پویای نامتمرکز در [۱۶]، وجود تأخیرات اجتناب‌ناپذیر در مدل سامانه را که می‌تواند منجر به تضعیف عملکرد و حتی ناپایداری شود در نظر نمی‌گیرد و از روش‌های تکراری و کم دقت برای بدست آوردن ضرایب مجهول کنترل‌گر استفاده می‌کند ولی کنترل‌گرهای استخراج شده از قضیه ۱ و ۲ با بهبود کنترل‌گر [۱۶]، ضمن کاهش محافظه‌کاری، توافق جمعی را در حضور

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.3.5.2]

تأخیر ثابت و متغیر با زمان در ورودی یا توپولوژی ارتباطی و نیز در بعضی مرتبه‌های کنترل‌گر با تلاش کنترلی کمتری با ابزار نامساوی ماتریسی خطی تحقق می‌بخشند.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش نوین به منظور طراحی کنترل‌گر بازخورد خروجی پویای نامتمرکز با مرتبه‌ی دلخواه ثابت جهت تحقق توافق جمعی در سامانه‌های چندعاملی دارای تأخیر زمانی در ورودی کنترلی و توپولوژی ارتباطی با رویکرد نامساوی‌های ماتریسی خطی ارائه شده است. با اعمال تبدیلات مناسب، مسئله‌ی توافق جمعی به مسئله‌ی پایدارسازی یک سامانه‌ی حلقه بسته‌ی واحد تأخیردار تقلیل یافته و با انتخاب تابع لیاپانوف-کراسوفسکی مناسب، علاوه بر تضمین پایداری، ضرایب مجهول کنترل‌گر و شروط توافق جمعی به صورت وابسته به تأخیر بدست آمده است. بر خلاف کارهای مشابه پیشین، اتخاذ فرم قطری برای ماتریس‌های موجود در تابع لیاپانوف-کراسوفسکی، مشکل حل نامساوی‌های ماتریسی دو سویه را مرتفع نموده و قید نهایی به فرم نامساوی‌های ماتریسی خطی نمایان شده است. از مهم‌ترین ویژگی‌های روش طراحی پیشنهادی، دلخواه بودن مرتبه‌ی کنترل‌گر و انتخاب آن با توجه به محدودیت‌های پیاده‌سازی و اهداف کنترلی مدنظر طراح است که برای عامل‌های مرتبه‌ی بالا، امکان دست‌یابی به توافق جمعی با کنترل‌گرهای نامتمرکز مرتبه پایین را محقق می‌سازد. نتایج شبیه‌سازی برای بازوی مکانیکی، کارایی روش ارائه شده را به خوبی نشان داده است. در تمام طول پژوهش فرض بر این است که شبکه‌ی ارتباطی عامل‌ها ثابت و نامتغیر بوده و در نتیجه ماتریسی لاپلاسی شبکه‌ی ارتباطی عامل‌ها ثابت است. این در حالی است که توپولوژی شبکه در عمل و در سامانه‌هایی با عامل‌های زیاد متغیر و دارای عدم قطعیت است. بنابراین تعمیم رویکرد پیشنهادی به سامانه‌های چندعاملی با توپولوژی ارتباطی متغیر با زمان و غیرقطعی جهت کاهش محافظه‌کاری می‌تواند ادامه منطقی پژوهش باشد.

مراجع

[1] D. J. Hill, “Multi-Agent Systems with Dynamical Topologies: Consensus and Applications,” *IEEE Circuits Syst. Mag.*, vol. 13, no. 3, pp. 21–34, 2013.

[2] L. Padgham and M. Winikoff, *Developing intelligent agent systems: A practical guide*, vol. 13. John Wiley & Sons, 2005.

[3] R. Olfati-Saber, J. A. Fax, and R. M. Murray, “Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems,” *Proc. IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 215–233, Jan. 2007.

[4] G. Xiong and S. Kishore, “Discrete-time second-order distributed consensus time synchronization algorithm for wireless sensor networks,” *EURASIP J. Wirel. Commun. Netw.*, vol. 2009, p. 1, 2009.

[5] Y. Cao, W. Yu, W. Ren, and G. Chen, “An overview of recent progress in the study of distributed multi-agent coordination,” *Ind. Informatics, IEEE Trans.*, vol. 9, no. 1, pp. 427–438, 2013.

[6] J. A. Fax, “Optimal and cooperative control of vehicle formations,” California Institute of Technology, 2001.

[7] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, “Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays,” *Autom. Control. IEEE Trans.*, vol. 49, no. 9, pp. 1520–1533, 2004.

[8] X.-L. Feng, T.-Z. Huang, and J.-L. Shao, “Several consensus protocols with memory of multi-agent systems,” *Math. Comput. Model.*, vol. 58, no. 9, pp. 1625–1633, 2013.

[9] X. Zhang and X. Liu, “Further results on consensus of second-order multi-agent systems with exogenous disturbance,” *Circuits Syst. I Regul. Pap. IEEE Trans.*, vol. 60, no. 12, pp. 3215–3226, 2013.

[10] C. Song, J. Cao, and Y. Liu, “Robust consensus of fractional-order multi-agent systems with positive real uncertainty via second-order neighbors information,” *Neurocomputing*, 2015.

[11] X. Yang and J. Wang, “Distributed Robust Consensus Control of Multiagent Systems with Communication Errors Using Dynamic Output Feedback Protocol,” *Math. Probl. Eng.*, vol. 2013, 2013.

[12] Z. Li, W. Ren, X. Liu, and L. Xie, “Distributed consensus of linear multi-agent systems with adaptive dynamic protocols,” *Automatica*, vol. 49, no. 7, pp. 1986–1995, 2013.

[13] P.-P. Dai, C.-L. Liu, and F. Liu, “Consensus Problem of Heterogeneous Multi-agent Systems with Time Delay under Fixed and Switching Topologies.” *Automation and Computing*, vol. 11, no. 3, pp. 340–346, 2014.

[14] W. Yu, G. Chen, and M. Cao, “Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems,” *Automatica*, vol. 46, no. 6, pp. 1089–1095, 2010.

[15] J. Xu, L. Xie, T. Li, and K. Y. Lum, “Consensus of multi-agent systems with general linear dynamics via dynamic output feedback control,” *Control Theory Appl. IET*, vol. 7, no. 1, pp. 108–115, 2013.

[16] G. Zhai, S. Okuno, J. Imae, and T. Kobayashi, “A new consensus algorithm for multi-agent systems via decentralized dynamic output feedback,” *J. Intell. Robot. Syst.*, vol. 63, no. 2, pp. 309–322, 2011.

[17] M. Sojoodi and V. J. Majd, “A Fixed-Order Robust Decentralized Dynamic Output Feedback Controller Design for Large Scale Systems with Nonlinear Uncertainty,” *JOC*, vol. 4, no. 3, 2010.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.3.5.2]

[18] J. Wu and Y. Shi, "Consensus in multi-agent systems with random delays governed by a Markov chain," *Syst. Control Lett.*, vol. 60, no. 10, pp. 863–870, 2011.

[19] S. P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, vol. 15. SIAM, 1994.

[20] L. Li and Y. Jia, "Non-fragile dynamic output feedback control for linear systems with time-varying delay," *Control Theory Appl. IET*, vol. 3, no. 8, pp. 995–1005, 2009.

[21] G. Wen, Z. Duan, G. Chen, and W. Yu, "Consensus tracking of multi-agent systems with Lipschitz-type node dynamics and switching topologies," *Circuits Syst. I Regul. Pap. IEEE Trans.*, vol. 61, no. 2, pp. 499–511, 2014.

[22] J. Lofberg, "YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB," in *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No.04CH37508)*, pp. 284–289.

[23] D. Zhao, W. Ni, and Q. Zhu, "A framework of neural networks based consensus control for multiple robotic manipulators," *Neurocomputing*, vol. 140, pp. 8–18, 2014.

[24] S. M. Shinners, "Modern Control System Theory and Design." John Wiley & Sons, p. 748, May-1998.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.3.5.2]