مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۹، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۴، صفحه ۳۹-۲۷

ردیابی زمان-محدود سرتاسری کلاس جامعی از سیستم‌های غیرخطی با استفاده از کنترل تطبیقی-لغزشی ترمینال غیرتکین

علی ابوئی[۱]، مسعود مروج خراسانی[۲]، محمد حائری[۳]

[۱]استادیار، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه یزد، Aliabooee@yazd.ac.ir

[۲]فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شریف، M.Moravej.kh@gmail.com

[۳]استاد، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شریف، Haeri@sina.sharif.edu

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۴/۷/۳۰، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۴/۱۰/۱۳)

چکیده: در این مقاله، ردیابی زمان-محدود سرتاسری برای کلاس جامعی از سیستم‌های غیرخطی در حضور اغتشاش و عدم‌قطعیت مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرم در نظر گرفته شده برای سیستم‌های غیرخطی به صورت زنجیره‌ای از زیرسیستم‌های دو انتگرال‌گیره دارای اندرکنش می‌باشد که قابلیت توصیف دسته‌ی وسیعی از سیستم‌های عملی و فیزیکی را دارا است. در این راستا، از ترکیب روش کنترل تطبیقی با کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین استفاده شده است که روش کنترل تطبیقی برای تعیین قوانین به‌روزرسانی ضرایب نامعلوم کران بالای نامحدود اغتشاش و عدم‌قطعیت به کار می‌رود. نتایج تحلیلی نشان می‌دهند که روش کنترلی ترکیبی پیشنهادی قادر است ورودی‌های کنترلی را چنان تعیین کند که متغیرهای حالت سیستم غیرخطی، مسیرهای دلخواه را پس از گذشت مدت زمان محدود به طور کامل و با خطای صفر ردیابی کنند. رابطه‌ای نیز برای تعیین زمان محدود اشاره شده ارائه می‌شود که با وجود پارامترهای دلخواه موجود در آن، می‌توان سرعت همگرایی مسئله ردیابی را افزایش داد. در انتها، نتایج حاصله بر روی دو سیستم فیزیکی واقعی شامل سیستم یاتاقان مغناطیسی رانشی و سیستم ربات دو لینکه مورد شبیه‌سازی قرار می‌گیرند تا درستی عملکرد روش کنترلی پیشنهادی آشکار گردد.

کلمات کلیدی: پایداری زمان-محدود سرتاسری، ردیابی زمان-محدود، کنترل تطبیقی-لغزشی ترمینال غیرتکین، زمان‌های نشست و رسیدن محدود.

Global Finite Time Tracking for a General Class of Nonlinear Systems Using Nonsingular Adaptive-Terminal Sliding Mode Control

Ali Abooee, Masoud Moravej Khorasani, Mohammad Haeri

Abstract: In this paper, the global finite time tracking problem of desired trajectories for a wide group of nonlinear systems subjected to unbounded disturbances and uncertainties is addressed. The considered class for nonlinear systems, containing a chain of interacting double integrator subsystems, can describe and model variety of practical systems. To tackle the mentioned problem, the adaptive control approach is incorporated with a nonsingular terminal sliding mode control and a new control method is suggested. Finite time adaptation laws are designed to estimate unknown constant coefficients of upper bound of uncertainties and disturbances within a finite time. Analytical studies demonstrate that by applying the proposed control scheme, tracking errors will converge to zero exactly after a tunable finite time. Also, a relation is presented for calculating an upper bound for the mentioned time which depends on initial conditions of the states and some arbitrary parameters. The convergence rate of the tracking errors could be tuned by proper choice of these parameters. Finally, analytical results are simulated on two practical systems including thrust active magnetic bearing (TAMB) and two-link robot manipulator to demonstrate the effectiveness of the suggested control technique.

Keywords: Global finite time stability, Finite time tracking, Nonsingular adaptive-terminal sliding mode control, Finite settling and reaching time.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.4.5.4]

۱- مقدمه

در بحث پایدارسازی مجانبی سیستم‌های غیرخطی، برای همگرائی متغیرهای حالت سیستم به سمت نقطه تعادل، مدت زمان بی‌نهایت لازم است. اما در بسیاری از کاربردهای عملی باید بعد از زمان محدودی که از قبل قابل‌تنظیم و پیش‌بینی است، متغیرهای حالت سیستم دقیقاً به سمت نقطه تعادل همگرا شود. این زمان با عنوان زمان نشست محدود[1] در [1-3] شناخته می‌شود و یکی از معیارهای طراحی کنترل‌کننده برای سیستم‌های غیرخطی است که ارتباط مستقیمی با نرخ و سرعت همگرایی متغیرهای حالت دارد. با توجه به این انگیزش، اصطلاح و مفهوم پایداری زمان-محدود سرتاسری[2] توسط باهات[3] برای سیستم‌های غیرخطی تدوین و ارائه شده است [1, 2]. لازم به ذکر است که پایداری زمان-محدود سرتاسری مفهومی قوی‌تر و جامع‌تر از پایداری مجانبی سرتاسری است زیرا شرط لازم برای پایداری زمان-محدود، پایداری مجانبی می‌باشد. در ادامه مقاله، چنانچه ذکر و اشاره‌ای صورت نگیرد، منظور از پایداری زمان-محدود، همان نوع سرتاسری آن است و نوع محلی آن اصلاً مد نظر نیست.

از آنجایی که طراحی ورودی‌های کنترلی به منظور پایدارسازی زمان-محدود سیستم‌های غیرخطی بر اساس تعریف اولیه پایداری زمان-محدود، کاری سخت و دشوار می‌باشد، اخیراً یک لم کاربردی ارائه شده است که این لم، شرایط کافی را برای پایداری زمان-محدود پیشنهاد می‌دهد و به عنوان لم شبه لیاپانوف[4] شناخته می‌شود. لازم به ذکر است که لم مذکور، رابطه‌ای را برای تعیین زمان نشست محدود همگرائی ارائه می‌دهد که به شرایط اولیه سیستم و پارامترهای اختیاری در ورودی‌های کنترلی بستگی دارد [2, 3]. امروزه از این لم برای طراحی کنترل‌کننده‌های پایدارساز زمان-محدود سیستم‌های غیرخطی استفاده می‌شود. این لم در بخش بعدی مقاله ارائه و در جاهای مختلف آن مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرد.

در دهه اخیر پایدارسازی زمان-محدود در بسیاری از کاربردهای عملی جایگزین پایدارسازی مجانبی شده و پاسخ گذاری سریعتر و دقت بالاتری را فراهم می‌سازد. به عنوان نمونه می‌توان به مواردی همچون اجماع و شکل‌گیری زمان-محدود سیستم‌های چند عاملی[5] [4, 5]، ردیابی زمان-محدود انواع ربات‌ها [6-8]، پایدارسازی زمان-محدود سفینه فضایی صلب [9]، ردیابی زمان-محدود سیستم یاتاقان مغناطیسی فعال رانشی[6] [10]، هدایت زمان-محدود خلبان خودکار موشک[7] [11]، سنکرون‌سازی زمان-محدود سیستم‌های آشوبناک [12]، ردیابی زمان-محدود وسایل پرنده بدون سرنشین[8] [13]، پایدارسازی زمان-محدود سیستم‌های هایبرید [14]، پایدارسازی زمان-محدود سیستم‌های با ابعاد وسیع [15]، ردیابی زمان-محدود ژیروسکوپ‌های MEMS[9] [16]، سنکرون‌سازی زمان-محدود شبکه‌های عصبی بازگشتی[10] [17]، رویتگرهای غیرخطی زمان-محدود [18, 19] و ... اشاره کرد.

اخیراً بسیاری از مراجع به طراحی کنترل‌کننده‌های پایدارساز زمان-محدود برای سیستم‌های غیرخطی نامتغیر با زمان پرداخته‌اند که اغلب دارای کاستی‌های مشترکی می‌باشند. این طراحی‌ها معمولاً برای فرم‌های خاص و محدودکننده‌ای مانند سیستم‌های غیرخطی دو انتگرال‌گیر تک ورودی[11] [1, 3, 20-26]، سیستم‌های غیرخطی مرتبه کانونی تک ورودی[12] [2, 11, 26-29] و سیستم‌های غیرخطی هموژن [30][13] پیشنهاد شده‌اند. در کارهای انجام شده کمتر به اغتشاش و عدم‌قطعیت در سیستم‌ها توجه شده است [1-3, 21, 22, 27-31]. همچنین رابطه صریحی برای تعیین زمان محدود همگرایی و ارتباط آن با پارامترهای کنترل‌کننده ارائه نمی‌شود [1, 4, 10, 16, 17, 29, 30, 32, 33]. بنابراین برای کاهش این زمان، کاربر مجبور خواهد بود به صورت سعی و خطا پارامترهای کنترل‌کننده را تنظیم کند.

با مرور کلی مراجع [1-17, 20-25, 27-40] به این نکته می‌رسیم که سه رهیافت و روش کلی برای طراحی کنترل‌کننده به منظور پایدارسازی زمان-محدود انواع سیستم‌های غیرخطی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. رهیافت اول، استفاده از روش مستقیم و صریح لیاپانوف است که در مقابل عدم‌قطعیت و اغتشاش مقاوم نبوده و هیچ روندی برای پیدا کردن تابع لیاپانوف در اختیار کاربر قرار داده نمی‌شود [1, 3, 20-26]. در راستای تسهیل استفاده از این روش، تاکنون چندین لم کاربردی ارایه شده است که در بخش بعدی مقاله به طور خلاصه به آن‌ها اشاره خواهد شد. رهیافت دوم، استفاده از قضیه‌ای است که باهات در ارتباط با پایداری زمان-محدود سرتاسری سیستم‌های غیرخطی هموژن با درجه هموژنی منفی ارائه داده است [30, 32]. در واقع باهات نشان داده است که برای سیستم‌های غیرخطی هموژن با درجه منفی، پایداری مجانبی سرتاسری شرط کافی برای تضمین پایداری زمان-محدود سرتاسری است. بنابراین این رهیافت، برای پایدارسازی زمان-محدود دسته خاصی از سیستم‌های غیرخطی هموژن قابل استفاده می‌باشد. لازم به ذکر است که این رهیافت تنها پایداری زمان-محدود را به اثبات می‌رساند و هیچ رابطه‌ای را برای تعیین این زمان ارایه نمی‌دهد. رهیافت سوم، استفاده از روش کنترل مد لغزشی ترمینال[14] می‌باشد که یکی از مهمترین ویژگی‌های آن مقاوم بودن در برابر عدم‌قطعیت‌های سیستم، اغتشاش و تغییرات پارامترهای سیستم است [4, 6-10, 12, 15, 23, 34-47]. یکی از نقاط قوت روش سوم آن است که رابطه‌ای (البته محافظه‌کارانه) را برای

[1] Finite settling time
[2] Global finite time stability
[3] Bhat
[4] Lyapunov-like lemma
[5] Finite time consensus and formation of multi-agent systems
[6] Thrust Active Magnetic Bearing (TAMB)
[7] Finite time guidance of missile's autopilot
[8] Unmanned aerial vehicles
[9] MEMS gyroscope
[10] Recursive neural network
[11] Single input-double integrator nonlinear system
[12] Single input-canonical nonlinear system
[13] Homogenous nonlinear system
[14] Terminal sliding mode control

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.4.5.4]

تخمین زمان پایدارسازی مشخص می‌سازد.

روش کنترل مد لغزشی ترمینال بر اساس اصول کنترل مد لغزشی معمولی پایه‌گذاری شده است که در آن سطوح لغزشی خطی با سطوح لغزشی غیرخطی جایگزین شده‌اند تا امکان پایدارسازی زمان-محدود فراهم گردد [47-41 ,10-6]. در این روش کنترلی، ورودی‌ها به گونه‌ای طراحی می‌شوند تا بتوانند متغیرهای حالت سیستم غیرخطی را در زمان محدودی به دینامیک مد لغزشی برسانند که خود این دینامیک با توجه به سطوح لغزشی غیرخطی تعریف شده دارای پایداری زمان-محدود است. از آنجایی که در روش کنترل مد لغزشی ترمینال، از ترم‌های غیرخطی با توان‌های کسری منفی در ورودی‌های کنترلی و تعریف سطوح لغزشی استفاده می‌شود، پدیده‌ای به نام تکینه‌گی[15] ظاهر می‌شود که یکی از معایب اصلی این روش بوده و باعث می‌گردد که با نزدیک شدن متغیرهای حالت سیستم غیرخطی به نقطه تعادل، دامنه ورودی‌های کنترلی افزایش شدید داشته باشند. برای غلبه بر این عیب، روش کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین[16] [43-41] ارائه شده است که مشابه با اغلب روش‌های کنترل لغزشی از پدیده نامطلوب چترینگ (وزوز) رنج می‌برد. در راستای حل این مشکل، محققین این روش را با کنترل لغزشی مرتبه دوم[17] [10, 15, 45, 46] ترکیب کرده و کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین مرتبه دوم[18] [10, 46] را پیشنهاد داده‌اند.

در مقاله حاضر، ردیابی زمان-محدود مسیرهای دلخواه برای فرم جامعی از سیستم‌های غیرخطی در حضور اغتشاش و عدم‌قطعیت نامحدود مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرم انتخابی برای سیستم‌های غیرخطی، زنجیره‌ای از سیستم‌های دو انتگرال‌گیر است که با هم اندرکنش دارند. عدم‌قطعیت و اغتشاش سیستم به صورت جمعی در نظر گرفته می‌شوند که علاوه بر نامحدود بودن، همواره از یک تابع مثبت نامحدود کوچکتر می‌باشند. این تابع مثبت، ترکیبی از نرم‌های اقلیدسی بردار متغیرهای حالت با توان‌های مثبت مختلف است که ضرایب این ترکیب، ثابت و نامعلوم فرض می‌شوند. برای برآورده ساختن هدف ردیابی زمان-محدود، از روش پیشنهادی کنترل تطبیقی-لغزشی ترمینال غیرتکین استفاده می‌شود که قوانین به‌روزرسانی را نیز برای تخمین زمان-محدود ضرایب ثابت نامعلوم تابع مثبت ذکر شده، ارائه می‌دهد. روش کنترلی پیشنهادی، زمان محدود کلی‌ای را برای صفر شدن خطاهای ردیابی مسیرهای مورد نظر ارائه می‌دهد که خود مجموع دو زمان محدود است و هر کدام از این زمان‌ها به شرایط اولیه سیستم و پارامترهای اختیاری موجود در ورودی‌های کنترلی و سطوح لغزشی بستگی دارند. در انتها می‌توان نوآوری‌های این مقاله را به صورت فهرست‌وار به شرح زیر بیان کرد.

- ✓ در روش کنترل تطبیقی-لغزشی ترمینال غیرتکین پیشنهادی، سطوح لغزشی غیرخطی تعریف شده و سیگنال‌های کنترلی طراحی شده جز نکات ابتکاری مقاله می‌باشد.
- ✓ کلاس سیستم‌های غیرخطی مورد بررسی، قابلیت توصیف دسته وسیعی از سیستم‌های عملی را دارا است و پایدارسازی زمان-محدود سرتاسری این سیستم‌ها با فرض‌های در نظرگرفته شده، تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است.
- ✓ روش کنترل تطبیقی-لغزشی ترمینال غیرتکین پیشنهادی رابطه‌ای را برای زمان محدود ارائه می‌دهد که بعد از این زمان، متغیرهای حالت سیستم دقیقاً به سمت صفر (نقطه تعادل) همگرا می‌شوند. زمان اشاره شده به پارامترهای اختیاری در سیگنال‌های کنترلی و سطوح لغزشی بستگی دارد و می‌تواند توسط طراح تنظیم گردد.
- ✓ فرم اغتشاش و عدم قطعیت‌های بررسی شده می‌تواند انواع اغتشاش‌ها و عدم‌قطعیت‌های کران‌دار و غیرکران‌دار را پوشش می‌دهد.
- ✓ قوانین به‌روزرسانی برای تخمین زمان-محدود ضرایب نامعلوم کران بالای اغتشاش ارائه شده که پایدارسازی زمان-محدود سیستم در نظرگرفته شده را برآورده می‌سازد.

ساختار مقاله به شرح زیر است. تعاریف اولیه ریاضی، توصیف سیستم غیرخطی همراه با فرض‌های مرتبط و بیان مسئله ردیابی زمان-محدود در بخش دوم آورده و در دو زیربخش جداگانه ساماندهی می‌شوند. بخش سوم به معرفی و توضیح روابط تئوریک روش کنترلی پیشنهادی یعنی کنترل تطبیقی-لغزشی ترمینال غیرتکین به عنوان راه‌حلی برای مسئله ردیابی زمان-محدود اختصاص می‌یابد. نتایج اصلی مقاله در همین بخش سوم آورده می‌شوند که از دو زیربخش شامل معرفی سطوح لغزشی غیرخطی و طراحی ورودی‌های کنترلی تشکیل می‌شوند. نتایج شبیه‌سازی روش کنترلی ترکیبی پیشنهادی بر روی دو سیستم فیزیکی واقعی در بخش چهارم ارائه می‌شوند. بخش پنجم نیز شامل جمع‌بندی مطالب و نتیجه‌گیری کلی از مقاله می‌باشد.

۲- مقدمات اولیه ریاضی و بیان مسئله

این بخش از مقاله، از دو زیربخش تشکیل شده است که زیربخش اول به تعاریف و مقدمات اولیه ریاضی اختصاص یافته است و زیربخش دوم به توصیف مسئله ردیابی زمان-محدود همراه با فرض‌ها و محدودیت‌های در نظر گرفته شده، می‌پردازد.

۲-۱ تعاریف و بیان لم‌های کاربردی

در این بخش، تعریف پایداری زمان-محدود سرتاسری و سه لم کاربردی ارائه می‌شود. که لم‌های اول و دوم، رهیافت‌هایی را برای اثبات پایداری زمان-محدود بیان می‌کنند و لم سوم، شامل دو نامساوی متداول است که در ادامه مقاله، از آن‌ها مکرراً استفاده خواهد شد.

تعریف ۱. سیستم غیرخطی نامتغیر با زمان (۱) را در نظر بگیرید که $f:\Gamma\to\Re^n$ تابع برداری پیوسته و $\Gamma\subseteq\Re^n$ همسایگی باز از نقطه تعادل $x=0$ است. فرض کنید که سیستم برای شرط اولیه دلخواه x_0، دارای پاسخ یکتای $x(t,x_0)$ است.

[15] Singularity
[16] Nonsingular terminal sliding mode control
[17] Second order sliding mode control
[18] Second order nonsingular terminal sliding mode control

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.4.5.4]

$$\dot{x} = f(x), f(0) = 0, x \in \Gamma \subseteq \Re^n, x(0) = x_0 \quad (۱)$$

آنگاه نقطه تعادل $x = 0$ پایدار زمان-محدود محلی است اگر الف) نقطه تعادل باید در ناحیه $\hat{\Gamma}$، پایدار مجانبی محلی باشد که $\hat{\Gamma} \subseteq \Gamma$ یک همسایگی باز حول نقطه تعادل است و ب) برای هر شرط اولیه x_0، زمان محدود همگرایی $T(x_0): \hat{\Gamma} \setminus \{0\} \to [0, \infty)$ وجود داشته باشد طوری که $\lim_{t \to T(x_0)} x(t, x_0) \to 0$ برقرار و برای $t \geq T(x_0)$، $x(t, x_0) \equiv 0$ صادق باشد. در صورتی که $\Gamma = \Re^n$ باشد، آنگاه نقطه تعادل $x = 0$ پایدار زمان-محدود سرتاسری است [1, 2].

لم ۱. سیستم غیرخطی (۱) را با نقطه تعادل $x = 0$ و شرط اولیه x_0 در نظر بگیرید. نقطه تعادل $x = 0$ پایدار زمان-محدود محلی است اگر تابع مثبت پیوسته مشتق‌پذیر $V(x): \Gamma \subseteq \Re^n \to \Re$ چنان وجود داشته باشد که یکی از دو نامساوی (۲) یا (۳) را برای هر پاسخ یکتای $x(t, x_0)$، برآورده سازد. زمان‌های محدود همگرایی $T(x_0)$ مرتبط با هر کدام از نامساوی‌ها نیز در رابطه‌های (۲) و (۳) آورده شده‌اند. لازم به ذکر است که $\Gamma \subseteq \Re^n$ یک همسایگی باز حول نقطه تعادل $x = 0$ بوده و شرایط $\rho_1 > 0$، $0 < \rho_2 < 1$ و $\rho_3 > 0$ برای ضرایب برقرار است [2, 3].

$$\dot{V}(x) + \rho_1 V^{\rho_2}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Gamma \backslash \{0\},$$
$$T(x_0) \leq \left(\rho_1 (1 - \rho_2)\right)^{-1} V^{1-\rho_2}(x_0), \quad (۲)$$

$$\dot{V}(x) + \rho_1 V^{\rho_2}(x) + \rho_3 V(x) \leq 0, \forall x \in \Gamma \backslash \{0\},$$
$$T(x_0) \leq \left(\rho_3 (1 - \rho_2)\right)^{-1} \left(\ln\left(\rho_3 V^{1-\rho_2}(x_0) + \rho_1\right) - \ln \rho_1\right) \quad (۳)$$

لم ۲. سیستم غیرخطی اسکالر (۴) را در نظر بگیرید که α و β دو ضریب اختیاری مثبت هستند و اعداد فرد مثبت $\hbar$، $\eth$، ℓ و $\mho$، دو شرط $\hbar > \eth > 0$ و $0 < \ell < \mho$ را برآورده می‌سازند. آنگاه نقطه $x = 0$، پایدار زمان-محدود سرتاسری است.

$$\dot{x} = -\alpha x^{\frac{\hbar}{\eth}} - \beta x^{\frac{\ell}{\mho}}, \; x \in \Re, \; x(0) = x_0 \quad (۴)$$

علاوه بر این، زمان محدود همگرایی $T(x_0)$، از نامساوی زیر تبعیت می‌کند.

$$T(x_0) < \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\eth}{\hbar - \eth}\right) + \frac{1}{\beta}\left(\frac{\mho}{\mho - \ell}\right) \quad (۵)$$

چنانچه $\mathcal{E} \triangleq \frac{\mho(\hbar - \eth)}{\eth(\mho - \ell)} \leq 1$، باشد تخمین دقیق‌تری از زمان محدود همگرایی $T(x_0)$ (که دارای محافظه‌کاری کمتری است)، به فرم نامساوی زیر قابل بیان است [20, 23].

$$T(x_0) < \left(\frac{\mho}{\mho - \ell}\right)\left(\frac{1}{\alpha\varepsilon} + \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \arctan\left(\sqrt{\alpha/\beta}\right)\right). \quad (۶)$$

لم ۳. فرض کنید که $a_j, j = 1, \ldots, n$ و $0 < \varpi < 1$ اعداد حقیقی باشند. آنگاه دو نامساوی زیر همواره برقرار هستند.

$$\sum_{j=1}^{n} \sqrt{|a_j|} \geq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |a_j|}, \quad \sum_{j=1}^{n} |a_j|^{1+\varpi} \geq \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\right)^{1+\varpi}} \quad (۷)$$

۲-۲ توصیف سیستم غیرخطی، فرض‌ها و بیان مسئله ردیابی زمان-محدود

سیستم غیرخطی نامتغیر با زمان مستوی[19] (۸) را در نظر بگیرید که $x = [x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n]^T$ و $v = [v_1 \;\; v_2 \;\; \ldots \;\; v_n]^T$ بردار متغیرهای حالت سیستم هستند. $f(x, v) \in \Re^n$ برداری از توابع غیرخطی معلوم و هموار[20] $f_j(x, v), j = 1, \ldots, n$ و $u = [u_1 \;\; u_2 \;\; \ldots \;\; u_n]^T$ بردار ورودی‌های کنترلی است. در این رابطه، $g(x, v) \in \Re^{n \times n}$ ماتریسی قطری است که درایه‌های قطر اصلی آن توابع غیرخطی مشخص و هموار $g_j(x, v)$ با شرط $g_j(x, v) \neq 0$ می‌باشند. با دقت در رابطه (۸)، می‌توان فهمید این سیستم غیرخطی، زنجیره‌ای از n زیرسیستم دو انتگرال‌گیر است که با هم اندرکنش دارند.

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x, v) + g(x, v)u + D(t, x, v) \end{cases} \quad (۸)$$

عدم‌قطعیت‌ها و اغتشاش‌های سیستم به صورت جمعی با ترم برداری $D(t, x, v) = [d_1 \;\; \cdots \;\; d_n] \in \Re^n$ بیان می‌شوند.

یادآوری ۱. از آنجایی که $u \in \Re^n$ و $g(x, v) \in \Re^{n \times n}$ می‌باشند، سیستم غیرخطی توصیف شده در (۸)، به طور کامل تحریک‌شده[21] است.

یادآوری ۲. سیستم غیرخطی (۸)، توانایی توصیف و مدل‌سازی تعداد زیادی از سیستم‌های فیزیکی و عملی واقعی همچون ربات‌ها [6, 8]، ژیروسکوپ‌های MEMS [16, 46]، سیستم وندرپل[22]، سیستم یاتاقان مغناطیسی رانشی [10]، ژیروسکوپ‌های آشوبناک [12]، مبدل‌های باک[23] DC به DC [34]، مسئله رهگیری میان موشک و هدف [31]، فرآیند فرود یک کاوشگر بر روی سطح جسم فضایی [36] و ...، را دارد.

در ادامه، فرض‌هایی که برای سیستم غیرخطی (۸) وجود دارد را بیان می‌کنیم.

فرض ۱. بردار اغتشاش و عدم‌قطعیت $D(t, x, v)$، نامساوی (۹) را برآورده می‌سازد که ضرایب $c_m, m = 1, 2, \ldots, r$ و $b_k, k = 0, 1, \ldots, r$ ثابت و نامعلوم هستند. همچنین پارامتر r می‌تواند توسط کاربر انتخاب شود که با انتخاب مناسب این پارامتر، اغلب اغتشاش‌ها و عدم‌قطعیت‌های موجود، قابل توصیف هستند.

$$\|D\| \leq \sum_{k=0}^{r} b_k \|x\|^k + \sum_{m=1}^{r} c_m \|v\|^m \quad (۹)$$

فرض ۲. همه متغیرهای حالت سیستم (۸) مشاهده‌پذیر هستند و برای طراحی ورودی‌های کنترلی در دسترس می‌باشند.

هدف کنترلی این مقاله آن است که با در نظرگرفتن فرض‌ها و محدودیت‌های ذکر شده، بردار ورودی‌های کنترلی $u \in \Re^n$ به گونه‌ای طراحی و تنظیم شود که متغیرهای حالت $x = [x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n]^T$ از سیستم غیرخطی (۸)، مسیرهای دلخواه $x_d = [x_{d_1} \; x_{d_2} \; \cdots \; x_{d_n}]^T$ را به صورت زمان-محدود ردیابی کند. باید به این موضوع توجه داشت که همراه با طراحی ورودی‌های کنترلی، باید وجود زمان محدود قابل تنظیمی به اثبات برسد که مطمئناً بعد از گذشت این زمان، تمامی خطاهای میان متغیرهای حالت و مسیرهای دلخواه مورد نظر دقیقاً صفر شده باشند. زمان محدود ذکر شده باید شامل پارامترهای قابل تنظیمی

[19] Affine nonlinear system

[20] Smooth
[21] Fully actuated system
[22] Van der Pol system
[23] Buck converter

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.4.5.4]

باشد که کاربر بتواند این زمان را به دلخواه کم یا زیاد کند. با توجه به محدودیت‌ها و فرض‌های ذکر شده، از ترکیب دو روش کنترل لغزشی ترمینال غیرتکین و تطبیقی به گونه‌ای استفاده می‌شود که خواسته کنترلی ذکر شده برآورده شود. باید توجه داشت که بردار $v_d \in \Re^n$ به صورت $v_d = [v_{d_1}\ v_{d_2}\ \cdots\ v_{d_n}]^T$ می‌باشد که تساوی $\dot{x}_{d_j} = v_{d_j}, j = 1, \dots, n$ همواره برقرار است. لازم به ذکر است که کنترل تطبیقی به علت نامعلوم بودن ضرایب b_k و c_m (که در فرض ۱ وجود دارند) استفاده می‌شود و باید دقت داشت که استفاده از روش کنترل تطبیقی نباید زمان-محدود بودن روش ترکیبی پیشنهادی را زیر سوال ببرد.

فرض ۳. مسیرهای مورد نظر $x_{d_j},\ j = 1, \dots, n$ که توسط کاربر انتخاب می‌شوند، تا دو بار مشتق‌پذیر هستند یا به عبارتی دیگر این مسیرها عضو توابع کلاس $C^2[0, \infty)$ می‌باشند.

در ادامه، با تعریف خطاهای ردیابی به صورت $e_{x_j} = x_j - x_{d_j}$ و $e_{v_j} = v_j - v_{d_j}$ دینامیک خطای ردیابی برای سیستم غیرخطی (۸) به صورت (۱۰) نتیجه می‌شود. دو بردار $e_x = [e_{x_1}\ e_{x_2}\ \cdots\ e_{x_n}]^T$ و $e_v = [e_{v_1}\ e_{v_2}\ \cdots\ e_{v_n}]^T$ همان بردارهای خطاهای ردیابی سیستم هستند.

$$\begin{cases} \dot{e}_x = e_v \\ \dot{e}_v = f(x,v) + g(x,v)u + D(t,x,v) - \dot{v}_d \end{cases} \quad (۱۰)$$

با توجه به فرض ۳ بردار $\dot{v}_d = [\dot{v}_{d_1}\ \dot{v}_{d_2}\ \cdots\ \dot{v}_{d_n}]^T$ وجود خواهد داشت. برای برآورده ساختن خواسته کنترلی توضیح داده شده، بردارهای کنترلی باید به گونه‌ای طراحی شوند که پایداری زمان-محدود سرتاسری سیستم خطای ردیابی (۱۰) برآورده شود.

۳- طراحی روش کنترلی تطبیقی-لغزشی ترمینال غیرتکین

همان‌طوری که در بخش قبلی ذکر شد، روش کنترل تطبیقی به منظور تخمین ضرایب ثابت نامعلوم b_k و c_m استفاده می‌شود و روش کنترل لغزشی ترمینال غیرتکین برای تضمین ردیابی زمان-محدود به کار برده می‌شود. در این مقاله، برای طراحی روش کنترل لغزشی ترمینال غیرتکین از تعمیم مفاهیم پایه و اولیه کنترل لغزشی استفاده می‌شود که شامل دو مرحله ۱- تعریف سطوح لغزشی مناسب با هدف پایداری دینامیک مد لغزشی و ۲- طراحی ورودی‌های کنترلی به منظور هدایت و رساندن سیستم غیرخطی به دینامیک مد لغزشی (تضمین وجود مد لغزشی) می‌باشد. در روش پیشنهادی، بردار سطوح لغزشی غیرخطی چنان تعریف شده‌اند که دینامیک مد لغزشی سیستم خطای ردیابی (۱۰) نه تنها به صورت مجانبی پایدار باشد بلکه دارای پایداری زمان-محدود همراه با زمان نشست محدود قابل تنظیم T_s باشد. سیگنال‌های کنترلی روش پیشنهادی نیز به صورتی طراحی شده‌اند تا قادر باشند که همه خطاهای ردیابی را در زمان محدود T_r بر روی سطوح لغزشی غیرخطی قرار دهند یا به عبارت دیگر ورودی‌های کنترلی باید بتواند در زمان محدود T_r، وجود دینامیک مد لغزشی تعریف شده برای سیستم (۱۰) را تضمین کنند. بنابراین می‌توان انتظار داشت که بعد از زمان محدود کلی T_t که مجموع دو زمان ذکر شده است، هدف ردیابی زمان-محدود برای سیستم غیرخطی (۸) تضمین شود.

غیرتکین بودن روش ارائه شده بدان معنی است که در حین فرآیند طراحی و تنظیم ورودی‌های کنترلی، باید این نکته را لحاظ کرد که همه سیگنال‌های کنترلی در تمامی زمان‌ها، محدود و کراندار باشند به ویژه در لحظاتی که خطاهای ردیابی به همسایگی صفر می‌رسند تا به عملگرها آسیبی نرسد. در واقع مطابق با غیرتکین بودن، انرژی سیگنال‌های کنترلی محدود بوده و پیاده‌سازی عملی و فیزیکی آن‌ها ممکن می‌گردد. با توجه به مطالب ذکر شده، دو بخش ۳-۱ و ۳-۲ به ترتیب به تعریف سطوح لغزشی غیرخطی و طراحی ورودی‌های کنترلی اختصاص یافته‌اند.

۳-۱ تعریف سطوح لغزشی غیرخطی

بردار سطوح لغزشی غیرخطی به فرم $s = [s_1\ \cdots\ s_n]^T$ در نظر گرفته می‌شود که هر درایه $s_j,\ j = 1, \cdots, n$ با رابطه زیر تعریف می‌گردد و $\ell_j, \mho_j$ اعداد فرد مثبت اختیاری با شرایط $\ell_j < \mho_j < 2\ell_j$ می‌باشند.

$$s_j = e_{x_j} + \left(e_{v_j}\mathcal{L}(e_{x_j})\right)^{\frac{\mho_j}{\ell_j}},\quad j = 1, \cdots, n \quad (۱۱)$$

در این رابطه، تابع اسکالر و همواره مثبت $\mathcal{L}(.) \in \Re^+$، به صورت $\mathcal{L}(e_{x_j}) = \left(\beta_j + \alpha_j e_{x_j}^{(\hbar_j/\eth_j - \ell_j/\mho_j)}\right)^{-1}$ تعریف شده است که $\hbar_j, \eth_j$ اعداد فرد مثبت دلخواه با شرایط $\hbar_j > \eth_j$ و $\frac{\hbar_j}{\eth_j} - \frac{\ell_j}{\mho_j} > 1$ و ضرایب β_j, α_j اعداد مثبت اختیاری می‌باشند. لازم به ذکر است که شرایط $\ell_j < \mho_j < 2\ell_j$، $\hbar_j > \eth_j$ و $\frac{\hbar_j}{\eth_j} - \frac{\ell_j}{\mho_j} > 1$ برای ممانعت از رخ دادن پدیده تکینگی لازم می‌باشند و کاربر در هنگام تنظیم پارامترها باید به این شرایط توجه داشته باشد.

در قضیه ۱ اثبات می‌شود دینامیک مد لغزشی سیستم خطای (۱۰) که از تساوی برداری $s = 0$ حاصل می‌گردد، دارای پایداری زمان-محدود سرتاسری است.

قضیه ۱. سیستم خطای ردیابی (۱۰) را با سطوح لغزشی (۱۱) در نظر بگیرید. دینامیک مد لغزشی سیستم خطای ردیابی که از رابطه برداری $s = 0$ حاصل می‌گردد، دارای پایداری زمان-محدود سرتاسری است و تمامی خطاهای ردیابی e_{x_j} و e_{v_j} (قرار گرفته بر روی دینامیک مد لغزشی $s = 0$) در زمان‌هایی کمتر از زمان نشست محدود T_s به صفر همگرا می‌شوند و زمان نشست ذکر شده از نامساوی زیر تبعیت می‌کند.

$$T_s \le \max_j \left\{\frac{1}{\alpha_j}\left(\frac{\eth_j}{\hbar_j - \eth_j}\right) + \frac{1}{\beta_j}\left(\frac{\mho_j}{\mho_j - \ell_j}\right)\right\} \quad \blacksquare(۱۲)$$

اثبات. فرض کنید که ورودی‌های کنترلی که در ادامه طراحی و معرفی خواهند شد، وجود دینامیک مد لغزشی $s = 0$ را تضمین می‌کنند. بنابراین با توجه به $s = 0$، دینامیک مد لغزشی به صورت n زیرسیستم پایین نتیجه می‌گردند که این زیرسیستم‌ها با هم اندرکنشی ندارند.

$$\dot{e}_{x_j} = e_{v_j},\ \ \dot{e}_{x_j} = -\alpha_j e_{x_j}^{\frac{\hbar_j}{\eth_j}} - \beta_j e_{x_j}^{\frac{\ell_j}{\mho_j}},\ \ j = 1, \dots, n \quad (۱۳)$$

بنابراین برای هر j امین زیرسیستم، با استناد به لم ۲ این نتیجه حاصل

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.4.5.4]

می‌گردد که خطاهای ردیابی e_{x_j} و e_{v_j} در مدت زمان نشست محدود ${}_jT_s$ به سمت صفر همگرا می‌شوند. نامساوی (۱۴) کران بالای زمان نشست ${}_jT_s$ را بیان می‌کند.

$$ {}_jT_s \le \frac{1}{\alpha_j}\left(\frac{\eth_j}{\hbar_j-\eth_j}\right)+\frac{1}{\beta_j}\left(\frac{\mho_j}{\mho_j-\ell_j}\right) \qquad (۱۴)$$

بنابراین واضح است که برای لحظات بزرگتر از زمان نشست T_s ارائه شده در (۱۲)، همگی خطاهای ردیابی به سمت صفر همگرا شده‌اند و فلذا اثبات پایان می‌پذیرد. ■

یادآوری ۳. نامساوی (۱۲) نشان می‌دهد زمان نشست T_s به پارامترهای $\alpha_j,\beta_j,\mho_j,\hbar_j,\eth_j,\ell_j$ وابستگی دارد که در تعریف سطوح لغزشی (۱۱) مورد استفاده قرار گرفته‌اند. انتخاب و تنظیم مناسب این پارامترها می‌تواند زمان نشست T_s را کاهش دهد و باعث افزایش سرعت همگرایی بر روی دینامیک مد لغزشی شود.

یادآوری ۴. اگر پارامترهای $\mho_j,\hbar_j,\eth_j,\ell_j$ چنان انتخاب شوند که $\mathcal{E}_j \triangleq \frac{\mho_j(\hbar_j-\eth_j)}{\eth_j(\mho_j-\ell_j)} \le 1$ برای $j=1,\dots,n$ همواره برقرار باشد، می‌توان تخمین بهتری (با محافظه‌کاری کمتر) برای زمان نشست محدود T_s مطابق با نامساوی (۱۵) ارائه داد. اثبات این ادعا، کاملاً مشابه با روند اثبات قضیه ۱ بوده و با استفاده از نامساوی (۶) از لم ۲ امکان‌پذیر است.

$$ T_s \le \max_j\left\{\left(\frac{\mho_j}{\mho_j-\ell_j}\right)\left(\frac{1}{\alpha_j\mathcal{E}_j}+\frac{1}{\sqrt{\alpha_j\beta_j}}\arctan\left(\sqrt{\alpha_j/\beta_j}\right)\right)\right\} \qquad (۱۵)$$

۳-۲ طراحی ورودی‌های کنترلی و قوانین تخمین زمان-محدود پارامترهای نامعلوم

ورودی‌های کنترلی به صورت (۱۶) طراحی و تعیین شده‌اند تا با وجود عدم‌قطعیت‌ها و اغتشاش‌ها، خطاهای ردیابی را در مدت زمان محدود به دینامیک مد لغزشی $s=0$ (رابطه (۱۳)) برسانند.

$$ u_j = g_j^{-1}\left(-f_j(x,v)+\dot{v}_{d_j}+u_{r_j}+u_{m_j}\right) \qquad (۱۶)$$

ترم‌های u_{m_j} و u_{r_j} در رابطه‌های زیر تعریف شده‌اند.

$$ u_{m_j} = -\frac{\ell_j}{\mho_j}\left((e_{v_j})^{2-\frac{\mho_j}{\ell_j}}(\mathcal{L}(e_{x_j}))^{-\frac{\mho_j}{\ell_j}}\right) +\alpha_j(e_{v_j})^2\left(\frac{\hbar_j}{\eth_j}-\frac{\ell_j}{\mho_j}\right)(e_{x_j})^{\frac{\hbar_j}{\eth_j}-\frac{\ell_j}{\mho_j}-1}\mathcal{L}(e_{x_j}) \qquad (۱۷)$$

و

$$ u_{r_j} = -\frac{\ell_j}{\mho_j}\left((e_{v_j})^{2-\frac{\mho_j}{\ell_j}}(\mathcal{L}(e_{x_j}))^{-\frac{\mho_j}{\ell_j}}\right)\omega_j\mathrm{sgn}(s_je_{v_j}) -\left(\sum_{k=0}^{r}\hat{b}_k\|x\|^k+\sum_{m=1}^{r}\hat{c}_m\|v\|^m\right)\mathrm{sgn}(s_j) \qquad (۱۸)$$

در رابطه (۱۸)، $\mathrm{sgn}(s_je_{v_j})$ بیانگر تابع شناخته شده علامت با ورودی اسکالر $s_je_{v_j}$ است. انتخاب پارامترهای مثبت $\omega_j>0, j=1,\dots,n$ در اختیار کاربر قرار دارد. $\hat{b}_k$ و $\hat{c}_m$ تخمین پارامترهای ثابت نامعلوم c_m و b_k هستند که رابطه‌های (۱۹) و (۲۰) قوانین به‌روزرسانی آن‌ها را نشان می‌دهد. در این قوانین، ضرایب دلخواه ξ_k و λ_m توسط طراح و با شرایط $\xi_k>1$ و $\lambda_m>1$ انتخاب می‌شوند.

$$ \dot{\hat{b}}_k = \xi_k\|x\|^k\max_j\left(\frac{\mho_j}{\ell_j}(e_{v_j})^{\frac{\mho_j}{\ell_j}-1}(\mathcal{L}(e_{x_j}))^{\frac{\mho_j}{\ell_j}}\right)\sum_{j=1}^{n}|s_j|, \quad k=0,1,\dots,r \text{ with } \hat{b}_k(0)>0, \qquad (۱۹)$$

و

$$ \dot{\hat{c}}_m = \lambda_m\|v\|^m\max_j\left(\frac{\mho_j}{\ell_j}(e_{v_j})^{\frac{\mho_j}{\ell_j}-1}(\mathcal{L}(e_{x_j}))^{\frac{\mho_j}{\ell_j}}\right)\sum_{j=1}^{n}|s_j|, \quad m=1,2,\dots,r \text{ with } \hat{c}_m(0)>0, \qquad (۲۰)$$

یادآوری ۵. از آنجایی که از توان‌های کسری مثبت در تعریف سطوح لغزشی (۱۱) استفاده شده است و توان‌های کسری منفی در طراحی ورودی‌های کنترلی (۱۶) الی (۲۰) وجود ندارند، روش کنترل پیشنهادی غیرتکین خواهد بود.

در ادامه، قضیه ۲ این ادعا را بیان می‌کند که کران‌های بالایی برای $\hat{b}_k$ و $\hat{c}_m$ وجود دارند.

قضیه ۲. سیستم خطای ردیابی (۱۰)، سطوح لغزشی (۱۱)، ورودی‌های کنترلی (۱۶) تا (۱۸) و قوانین به‌روزرسانی (۱۹) و (۲۰) را در نظر بگیرید. آنگاه، تخمین‌های $\hat{b}_k$ و $\hat{c}_m$ دارای کران‌های بالا هستند بدان معنی که مقادیر ثابت مثبت b_k^* و c_m^* چنان وجود دارند که نامساوی‌های $0<\hat{b}_k<b_k^*$ و $0<\hat{c}_m<c_m^*$ برای تمام لحظات برقرار هستند. ■

اثبات. مرجع [47] حالت کلی‌تر این قضیه را به اثبات رسانده است و برای پرهیز از تکرار و خلاصه‌نویسی از آوردن آن خودداری می‌کنیم. ■

فرض ۴. بدون از دست دادن کلیت، می‌توان مقادیر ثابت b_k^* و c_m^* را به فرم $b_k^*=b_{k_{\mathrm{nom}}}+\eta_k$ و $c_m^*=c_{m_{\mathrm{nom}}}+\gamma_m$ در نظر گرفت که $\eta_k\ge 0$ و $\gamma_m\ge 0$ پارامترهای دلخواه و آزاد می‌باشند. $b_{k_{\mathrm{nom}}}$ و $c_{m_{\mathrm{nom}}}$ مقادیر واقعی و اسمی تخمین‌های $\hat{b}_k$ و $\hat{c}_m$ هستند.

در ادامه، قضیه ۳ این ادعا را مطرح و به اثبات خواهد رساند که قوانین کنترلی پیشنهادی (۱۶) تا (۲۰) می‌توانند وجود دینامیک مد لغزشی $s=0$ (رابطه (۱۳)) را در مدت زمان محدودی تضمین کنند به طوری که برای لحظات بزرگتر از این زمان، دینامیک مد لغزشی همواره برقرار باشد.

قضیه ۳. سیستم خطای ردیابی (۱۰) را همراه با فرض‌های ۱ تا ۴ و سطوح لغزشی (۱۱) در نظر بگیرید. با اعمال ورودی‌های کنترلی (۱۶) تا (۱۸) و قوانین به‌روزرسانی (۱۹) و (۲۰) به سیستم غیرخطی (۸)، همه خطاهای ردیابی در مدت زمان محدود T_r به دینامیک مد لغزشی $s=0$ می‌رسند و برای لحظات $t\ge T_r$ وجود دینامیک مد لغزشی (رابطه (۱۳)) تضمین می‌گردد. زمان T_r از نامساوی زیر پیروی می‌کند.

$$ T_r \le \frac{\sqrt{\|s(0)\|^2+\sum_{m=1}^{r}|\hat{c}_m(0)-c_m^*|^2+\sum_{k=0}^{r}|\hat{b}_k(0)-b_k^*|^2}}{\min\{\Upsilon_{\min},\Omega,\Theta\}} \qquad (۲۱)$$

$$ \Upsilon_{\min} \triangleq \min_j\left(|e_{v_j}|\omega_j\right), $$

$$ \Omega \triangleq \left(\max_j\left(\frac{\mho_j}{\ell_j}(e_{v_j})^{\frac{\mho_j}{\ell_j}-1}(\mathcal{L}(e_{x_j}))^{\frac{\mho_j}{\ell_j}}\right)\right)\left(\min_k(\xi_k-1)\|x\|^k\right)\sum_{j=1}^{n}|s_j|, $$

$$ \Theta \triangleq \left(\max_j\left(\frac{\mho_j}{\ell_j}(e_{v_j})^{\frac{\mho_j}{\ell_j}-1}(\mathcal{L}(e_{x_j}))^{\frac{\mho_j}{\ell_j}}\right)\right)\left(\min_m(\lambda_m-1)\|v\|^m\right)\sum_{j=1}^{n}|s_j|. $$ ■

اثبات. کاندیدای لیاپانوف را به صورت $V(s,\tilde{b}_k,\tilde{c}_m)=0.5\left(\sum_{j=1}^{n}|s_j|^2+\sum_{m=1}^{r}|\tilde{c}_m|^2+\sum_{k=0}^{r}|\tilde{b}_k|^2\right)$ انتخاب می‌کنیم که

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.4.5.4]

متغیرهای $\tilde{b}_k$ و $\tilde{c}_m$ به صورت $\tilde{b}_k = \hat{b}_k - b_k^*$ و $\tilde{c}_m = \hat{c}_m - c_m^*$ تعریف شده‌اند. با مشتق‌گیری از سطوح لغزشی (۱۱) و جایگذاری $\dot{e}_{v_j}$ و u_j از (۱۰) و (۱۶)، مشتق درایه‌های بردار سطوح لغزشی s_j به صورت (۲۲) نتیجه می‌شود که در ادامه فرآیند اثبات از آن استفاده خواهیم کرد.

$$\dot{s}_j = \left(\frac{\upsilon_j}{\ell_j}(e_{v_j})^{\frac{\upsilon_j}{\ell_j}-1}(\mathcal{L}(e_{x_j}))^{\frac{\upsilon_j}{\ell_j}}\right)\Big(d_j - \Big(\big(\sum_{k=0}^{r}\hat{b}_k\|x\|^k + \sum_{m=1}^{r}\hat{c}_m\|v\|^m\big)\mathrm{sgn}(s_j)\Big)\Big) - e_{v_j}\omega_j\mathrm{sgn}(s_j e_{v_j}) \quad (۲۲)$$

مشتق کاندیدای لیاپانوف معرفی شده به صورت زیر قابل بیان است.

$$\dot{V}(s,\tilde{b}_k,\tilde{c}_m) = \sum_{j=1}^{n} s_j\dot{s}_j + \sum_{k=0}^{r}\tilde{b}_k\dot{\hat{b}}_k + \sum_{m=1}^{r}\tilde{c}_m\dot{\hat{c}}_m \quad (۲۳)$$

با جایگذاری $\dot{s}_j$، $\dot{\hat{b}}_k$ و $\dot{\hat{c}}_m$ در (۲۳)، تساوی زیر حاصل می‌شود.

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\upsilon_j}{\ell_j}(e_{v_j})^{\frac{\upsilon_j}{\ell_j}-1}(\mathcal{L}(e_{x_j}))^{\frac{\upsilon_j}{\ell_j}}\Big(s_j d_j - \big(\sum_{k=0}^{r}\hat{b}_k\|x\|^k + \sum_{m=1}^{r}\hat{c}_m\|v\|^m\big)|s_j|\Big)\right) - \sum_{j=1}^{n}\omega_j|e_{v_j}||s_j|,$$
$$+\max_j\left(\frac{\upsilon_j}{\ell_j}(e_{v_j})^{\frac{\upsilon_j}{\ell_j}-1}(\mathcal{L}(e_{x_j}))^{\frac{\upsilon_j}{\ell_j}}\right)\sum_{j=1}^{n}|s_j|\Big(\sum_{k=0}^{r}\tilde{b}_k\xi_k\|x\|^k + \sum_{m=1}^{r}\tilde{c}_m\lambda_m\|v\|^m\Big) \quad (۲۴)$$

با توجه به همواره مثبت بودن ترم $\frac{\upsilon_j}{\ell_j}e_{v_j}^{(\upsilon_j/\ell_j-1)}\mathcal{L}(e_{x_j})^{(\upsilon_j/\ell_j)}$ و در نظر گرفتن تعریف $\Upsilon_{\min}$، نامساوی زیر استخراج می‌شود.

$$\dot{V} \le -\Upsilon_{\min}\sum_{j=1}^{n}|s_j| + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\upsilon_j}{\ell_j}(e_{v_j})^{\frac{\upsilon_j}{\ell_j}-1}(\mathcal{L}(e_{x_j}))^{\frac{\upsilon_j}{\ell_j}}|s_j|\Big(|d_j| - \big(\sum_{k=0}^{r}\hat{b}_k\|x\|^k + \sum_{m=1}^{r}\hat{c}_m\|v\|^m\big)\Big)\right) +$$
$$+\max_j\left(\frac{\upsilon_j}{\ell_j}(e_{v_j})^{\frac{\upsilon_j}{\ell_j}-1}(\mathcal{L}(e_{x_j}))^{\frac{\upsilon_j}{\ell_j}}\right)\sum_{j=1}^{n}|s_j|\Big(\sum_{k=0}^{r}\tilde{b}_k\xi_k\|x\|^k + \sum_{m=1}^{r}\tilde{c}_m\lambda_m\|v\|^m\Big) \quad (۲۵)$$

با در نظر گرفتن همزمان فرض‌های ۱ و ۴، می‌توان نامساوی $|d_j| \le \|D\| \le \sum_{k=0}^{r} b_k^*\|x\|^k + \sum_{m=1}^{r} c_m^*\|v\|^m$ را نتیجه گرفت. با اعمال این نامساوی به (۲۵) و در نظر گرفتن تعاریف ذکر شده $\tilde{b}_k = \hat{b}_k - b_k^*$ و $\tilde{c}_m = \hat{c}_m - c_m^*$ نامساوی (۲۶) بدست می‌آید. باید به این موضوع توجه داشت که با استناد به قضیه ۲، ترم‌های $\tilde{b}_k$ و $\tilde{c}_m$ همواره منفی هستند.

$$\dot{V} \le -\Upsilon_{\min}\sum_{j=1}^{n}|s_j| - \max_j\left(\frac{\upsilon_j}{\ell_j}(e_{v_j})^{\frac{\upsilon_j}{\ell_j}-1}(\mathcal{L}(e_{x_j}))^{\frac{\upsilon_j}{\ell_j}}\right)\Big(\sum_{k=0}^{r}\tilde{b}_k\|x\|^k + \sum_{m=1}^{r}\tilde{c}_m\|v\|^m\Big)\sum_{j=1}^{n}|s_j| +$$
$$+\max_j\left(\frac{\upsilon_j}{\ell_j}(e_{v_j})^{\frac{\upsilon_j}{\ell_j}-1}(\mathcal{L}(e_{x_j}))^{\frac{\upsilon_j}{\ell_j}}\right)\sum_{j=1}^{n}|s_j|\Big(\sum_{k=0}^{r}\tilde{b}_k\xi_k\|x\|^k + \sum_{m=1}^{r}\tilde{c}_m\lambda_m\|v\|^m\Big) \quad (۲۶)$$

در ادامه، با استناد به منفی بودن ترم‌های $\tilde{b}_k$ و $\tilde{c}_m$، رابطه (۲۶) به راحتی به نامساوی زیر قابل تبدیل است.

$$\dot{V} \le -\Upsilon_{\min}\sum_{j=1}^{n}|s_j| - \max_j\left(\frac{\upsilon_j}{\ell_j}(e_{v_j})^{\frac{\upsilon_j}{\ell_j}-1}(\mathcal{L}(e_{x_j}))^{\frac{\upsilon_j}{\ell_j}}\right)\sum_{j=1}^{n}|s_j|\Big(\sum_{k=0}^{r}|\tilde{b}_k|\big(\xi_k - 1\big)\|x\|^k + \sum_{m=1}^{r}|\tilde{c}_m|(\lambda_m - 1)\|v\|^m\Big) \quad (۲۷)$$

با در نظر گرفتن دو تعریف Ω و Θ، نامساوی (۲۷) به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\dot{V} \le -\Upsilon_{\min}\|s\| - \Omega\sum_{k=0}^{r}|\tilde{b}_k| - \Theta\sum_{m=1}^{r}|\tilde{c}_m| \quad (۲۸)$$

به سادگی می‌توان (۲۸) را به نامساوی (۲۹) تبدیل کرد.

$$\dot{V} \le -\sqrt{2}\big(\min\{\Upsilon_{\min},\Omega,\Theta\}\big)\times \Big(\frac{\|s\|}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{r}|\tilde{b}_k| + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m=1}^{r}|\tilde{b}_k|\Big) \quad (۲۹)$$

با استفاده از لم ۳ و تعریف $\delta \triangleq \min\{\Upsilon_{\min},\Omega,\Theta\}$، نامساوی نهایی $\dot{V} \le -\sqrt{2}\delta V^{0.5}$ حاصل می‌گردد. حال در انتها با استناد به لم ۱ و انتخاب $\rho_2 = 0.5$ و $\rho_1 = \sqrt{2}\delta$، می‌توان نتیجه گرفت که در زمان محدود T_r (که توسط (۲۱) معرفی شده است) بردار s به سمت صفر همگرا شده و وجود دینامیک مد لغزشی $s = 0$ برای $t \ge T_r$ تضمین می‌شود و اثبات در اینجا پایان می‌پذیرد. ■

یادآوری ۶. ورودی‌های کنترلی پیشنهادی (۱۶) الی (۲۰) و زمان رسیدن محدود T_r، به پارامترهای مثبت دلخواه ω_j، ξ_k و λ_m بستگی دارند که تنظیم مناسب این ضرایب می‌تواند مقادیر معقولی را برای انرژی ورودی کنترلی و زمان T_r تامین کند.

یادآوری ۷. روش کنترلی پیشنهادی این مقاله می‌تواند هدف کنترلی توصیف شده (که همان ردیابی زمان-محدود است) را در مدت زمان محدود $T_t = T_r + T_s$ برآورده سازد که زمان‌های محدود T_r و T_s توسط روابط (۲۱) و (۱۲) یا (۱۵) تعیین می‌شوند.

یادآوری ۸. چنانچه پارامترهای b_k و c_m در رابطه (۹) معلوم و در دسترس کاربر باشند، برای اصلاح روش کنترلی پیشنهادی، فقط باید ورودی‌های کنترلی u_{r_j} را به صورت رابطه زیر

$$u_{r_j} = -\frac{\ell_j}{\upsilon_j}\left((e_{v_j})^{2-\frac{\upsilon_j}{\ell_j}}(\mathcal{L}(e_{x_j}))^{-\frac{\upsilon_j}{\ell_j}}\right)\Big(\omega_j\mathrm{sgn}(s_j e_{v_j})\Big) - \Big(\big(\sum_{k=0}^{r}b_k\|x\|^k + \sum_{m=1}^{r}c_m\|v\|^m\big)\mathrm{sgn}(s_j)\Big) \quad (۳۰)$$

اصلاح کرد که شامل هیچ قانون به‌روزرسانی برای پارامترها نیست و ورودی‌های کنترلی u_{m_j} بدون تغییر باقی می‌مانند. در این وضعیت، قضیه ۱ و اثبات آن هم‌چنان صادق است و قضیه ۲ به طور کامل حذف می‌گردد. در فرآیند اثبات قضیه ۳، کاندیدای پیشنهادی لیاپانوف به صورت $V = 0.5\sum_{j=1}^{n}|s_j|^2$ انتخاب می‌شود و با روالی مشابه، به همان نتایج قبلی خواهیم رسید. در این حالت زمان نشست محدود T_s از نامساوی‌های (۱۲) یا (۱۵) تخمین‌زده می‌شود و نامساوی مرتبط با زمان رسیدن محدود T_r به صورت $T_r \le \Upsilon_{\min}^{-1}\|s(0)\|$ اصلاح می‌گردد.

یادآوری ۹. به جای سطوح لغزشی تعریف شده در (۱۱)، می‌توان سطوح لغزشی غیرخطی دیگری را مطابق با

$$s = e_v + \int_0^t \mathrm{sig}^{\varrho_x}(e_v(\tau))d\tau + \int_0^t \mathrm{sig}^{\varrho_v}(\phi(e_x(\tau),e_v(\tau)))d\tau \quad (۳۱)$$

به کار برد که دو بردار $\varrho_x \in \Re^n$ و $\varrho_v \in \Re^n$ به صورت $\varrho_x = [\varrho_{x_1}\cdots\varrho_{x_n}]^T$ و $\varrho_v = [\varrho_{v_1}\cdots\varrho_{v_n}]^T$ در نظر گرفته شده‌اند. پارامترهای اختیاری $0 < \varrho_{x_j} < 1, j = 1,\dots,n$ در بازه قرار دارند و پارامترهای ϱ_{v_j} از تساوی $\varrho_{v_j} = \varrho_{x_j}(2-\varrho_{x_j})^{-1}$ مشخص می‌گردند. دو بردار $\mathrm{sig}^{\varrho_x}(e_v) \in \Re^n$ و $\mathrm{sig}^{\varrho_v}(\phi(e_x,e_v))$ به صورت زیر

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.4.5.4]

تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}&\mathrm{sig}^{\varrho_x}(e_v)=\\&[|e_{v_1}|^{\varrho_{x_1}}\mathrm{sgn}(e_{v_1})\quad |e_{v_2}|^{\varrho_{x_2}}\mathrm{sgn}(e_{v_2})\quad \dots\quad |e_{v_n}|^{\varrho_{x_n}}\mathrm{sgn}(e_{v_n})]^T,\\&\mathrm{sig}^{\varrho_v}\big(\phi(e_x,e_v)\big)=\\&[|\phi_1|^{\varrho_{v_1}}\mathrm{sgn}(\phi_1)\quad |\phi_2|^{\varrho_{v_2}}\mathrm{sgn}(\phi_2)\quad \dots\quad |\phi_n|^{\varrho_{v_n}}\mathrm{sgn}(\phi_n)]^T,\\&\phi_j(e_{x_j},e_{v_j})=e_{x_j}+(2-\varrho_{x_j})^{-1}|e_{v_j}|^{2-\varrho_{x_j}}\mathrm{sgn}(e_{v_j})\end{aligned}\qquad(۳۲)$$

در این حالت، دینامیک مد لغزشی $s=\dot{s}=0$ دارای پایداری زمان محدود سرتاسری بوده و زمان نشست محدود T_s توسط نامساوی (۳۳) تعیین می‌گردد. اثبات این نکته در [36] وجود دارد.

$$T_s\le \max_j\left\{\left(o_j(1-\varrho_{x_j})\right)^{-1}(3-\varrho_{x_j})\left(V_j(e_{x_j}(0),e_{v_j}(0))\right)^{\frac{1-\varrho_{x_j}}{3-\varrho_{x_j}}}\right\}\qquad(۳۳)$$

$V_j(e_{x_j},e_{v_j})$ و o_j به صورت رابطه زیر تعریف می‌شوند که $\varkappa_j$ و $\wp_j$ دو پارامتر اختیاری با شرایط $0<\varkappa_j<1$ و $1<\wp_j$ هستند.

$$\begin{aligned}V_j(e_{x_j},e_{v_j})=&\frac{2-\varrho_{x_j}}{3-\varrho_{x_j}}\left|\phi_j(e_{x_j},e_{v_j})\right|^{\frac{3-\varrho_{x_j}}{2-\varrho_{x_j}}}+\varkappa_j e_{v_j}\phi_j(e_{x_j},e_{v_j})+\\&+\frac{\wp_j}{3-\varrho_{x_j}}|e_{v_j}|^{3-\varrho_{x_j}}\end{aligned}\qquad(۳۴)$$

$$o_j=-\max_{(e_{x_j},e_{v_j})\in\{(e_{x_j},e_{v_j}):V_j(e_{x_j},e_{v_j})=1\}}\left\{\dot{V}_j(e_{x_j},e_{v_j})\right\},$$

ورودی‌های کنترلی $u\in\Re^n$ در رابطه زیر ارائه می‌گردد که ω_jها، پارامترهای دلخواه مثبت می‌باشند.

$$\begin{aligned}u=g^{-1}(&-f(x,v)-\mathrm{sig}^{\varrho_x}(e_v)-\mathrm{sig}^{\varrho_v}(\phi(e_x,e_v))+\dot{v}_d+\\&+u_r)\end{aligned}\qquad(۳۵)$$

$$\begin{aligned}&u_r=-\omega\mathrm{sgn}(s)-\left(\textstyle\sum_{k=0}^{r}\hat{b}_k\|x\|^k+\sum_{m=1}^{r}\hat{c}_m\|v\|^m\right)\mathrm{sgn}(s),\\&\omega\mathrm{sgn}(s)=\left[\omega_1\mathrm{sgn}(s_1)\quad \omega_2\mathrm{sgn}(s_2)\quad \dots\quad \omega_n\mathrm{sgn}(s_n)\right]^T,\\&\mathrm{sgn}(s)=[\mathrm{sgn}(s_1)\quad \mathrm{sgn}(s_2)\quad \dots\quad \mathrm{sgn}(s_n)]^T,\end{aligned}$$

$\hat{b}_k$ و $\hat{c}_m$ تخمین پارامترهای ثابت نامعلوم c_m و b_k هستند که رابطه (۳۶) قوانین به‌روزرسانی آن‌ها را نشان می‌دهد. در این قوانین، ضرایب دلخواه ξ_k و λ_m توسط طراح و با شرایط $\xi_k>1$ و $\lambda_m>1$ انتخاب می‌شوند.

$$\begin{aligned}&\dot{\hat{b}}_k=\xi_k\|s\|\|x\|^k, k=0,1,\dots,r\ \text{ with }\ \hat{b}_k(0)>0,\\&\dot{\hat{c}}_m=\lambda_m\|s\|\|v\|^m, m=1,2,\dots,r\ \text{ with }\ \hat{c}_m(0)>0\end{aligned}\qquad(۳۶)$$

در این حالت زمان رسیدن محدود T_r توسط نامساوی (۳۷) قابل تخمین‌زدن می‌باشد که مقادیر ثابت مثبت b_k^* و c_m^* کران‌های بالای مقادیر تخمین زده شده $\hat{b}_k$ و $\hat{c}_m$ هستند. اثبات این مطلب کاملاً مشابه با قضیه‌های ۲ و ۳ همین مقاله می‌باشد.

$$T_r\le\left\{\frac{\sqrt{\|s(0)\|^2+\sum_{m=1}^{r}|\hat{c}_m(0)-c_m^*|^2+\sum_{k=0}^{r}|\hat{b}_k(0)-b_k^*|^2}}{\min\left\{\left(\min_j(\omega_j)\right),\left(\min_k(\|s\|(\xi_k-1)\|x\|^k)\right),\left(\min_m(\|s\|(\lambda_m-1)\|v\|^m)\right)\right\}}\right\}\qquad(۳۷)$$

یادآوری ۱۰. برای روش کنترلی ارائه شده، می‌توان سطوح لغزشی دیگری را به صورت زیر تعریف کرد که در آن، μ_{x_j} و μ_{v_j} پارامترهای آزاد با شرایط $\mu_{x_j}>\mu_{v_j}>0$ و $j=1,\dots,n$ هستند.

$$s=e_v+\int_0^t\mu_x\mathrm{sgn}(e_x(\tau))d\tau+\int_0^t\mu_v sgn(e_v(\tau))d\tau\qquad(۳۸)$$

$$\begin{aligned}&\mu_x\mathrm{sgn}(e_x)=\left[\mu_{x_1}\mathrm{sgn}(e_{x_1})\quad \mu_{x_2}\mathrm{sgn}(e_{x_2})\quad \dots\quad \mu_{x_n}\mathrm{sgn}(e_{x_n})\right]^T,\\&\mu_v\mathrm{sgn}(e_v)=\left[\mu_{v_1}\mathrm{sgn}(e_{v_1})\quad \mu_{v_2}\mathrm{sgn}(e_{v_2})\quad \dots\quad \mu_{v_n}\mathrm{sgn}(e_{v_n})\right]^T,\end{aligned}$$

می‌توان نشان داد که دینامیک مد لغزشی $s=\dot{s}=0$ دارای پایداری زمان-محدود است و بعد از گذشت زمان محدود T_s که توسط (۳۹) بیان می‌شود، تمامی خطاهای e_{x_j} و e_{v_j} که روی دینامیک مد لغزشی $s=\dot{s}=0$ قرار گرفته‌اند به سمت صفر همگرا می‌شوند. لازم به ذکر است که اثبات این موضوع در [35] آورده شده است.

$$T_s\le\max_j\left(2(\theta_j^*)^{-1}\sqrt{V_j\left(e_{x_j}(t=T_r),e_{v_j}(t=T_r)\right)}\right)\qquad(۳۹)$$

در این رابطه، تابع لیاپانوف V_j، به صورت زیر تعریف شده است و زمان محدود T_r توسط رابطه (۳۷) قابل بیان است.

$$V_j=\frac{1}{4}\begin{cases}\theta_j^2\left(\gamma_j^{-1}e_{v_j}\mathrm{sgn}(e_{x_j})+p_j\sqrt{|e_{x_j}|+0.5\gamma_j^{-1}e_{v_j}^2}\right)^2 & \text{if } e_{x_j}e_{v_j}\neq 0\\(\bar{\theta}_j)^2e_{v_j}^2 & \text{if } e_{x_j}=0\\|e_{x_j}| & \text{if } e_{v_j}=0\end{cases}\qquad(۴۰)$$

ثابت‌های γ_j، θ_j، p_j، $\bar{\theta}_j$ و θ_j^* با استفاده از تساوی‌ها و نامساوی زیر تعیین و انتخاب می‌گردند.

$$\begin{aligned}&\gamma_j=\mu_{x_j}+\mu_{v_j}\mathrm{sgn}(e_{x_j}e_{v_j}),\\&p_j=\sqrt{2\gamma_j^{-1}}\left(\sqrt{2\gamma_j}\bar{\theta}_j-1\right)^{-1}\mathrm{sgn}(e_{x_j}e_{v_j}),\\&\theta_j^*=\min_j(\theta_j),\quad \theta_j=\sqrt{0.5\gamma_j}\left|\sqrt{2\gamma_j}\bar{\theta}_j-1\right|,\\&\left(\sqrt{2(\mu_{x_j}+\mu_{v_j})}\right)^{-1}<\bar{\theta}_j<\left(\sqrt{2(\mu_{x_j}-\mu_{v_j})}\right)^{-1}\end{aligned}\qquad(۴۱)$$

ورودی‌های کنترلی $u\in\Re^n$ به صورت (۴۲) ارائه می‌شود تا وجود دینامیک مد لغزشی $s=\dot{s}=0$ بعد از زمان محدود T_r که توسط رابطه (۳۷) داده شده تضمین شود. لازم به ذکر است که بردار u_r به کار رفته در (۴۲)، همان بردار u_r ذکر شده در (۳۵) است.

$$u=g^{-1}\left(-f(x,v)-\mu_x\mathrm{sgn}(e_x)-\mu_v\mathrm{sgn}(e_v)+\dot{v}_d+u_r\right)\qquad(۴۲)$$

یادآوری ۱۱. برای روش کنترلی ارائه شده، می‌توان سطوح لغزشی دیگری را نیز به صورت (۴۳) تعریف کرد که در این رابطه، $\ell_j<\mho_j$ و $\hbar_j>\eth_j$ و $\mho_j$ و $\hbar_j,\eth_j,\ell_j$ برای $j=1,\dots,n$ می‌باشند. همچنین، α_j و β_j اعداد مثبت دلخواه هستند. همه پارامترهای دلخواه ذکر شده، توسط طراح تنظیم می‌گردند.

$$s=e_v+\alpha(e_x)^{\Xi}+\beta(e_x)^{\Pi}\qquad(۴۳)$$

$$\begin{aligned}&\alpha(e_x)^{\Xi}=\left[\alpha_1e_{x_1}^{\frac{\hbar_1}{\eth_1}}\quad \dots\quad \alpha_ne_{x_n}^{\frac{\hbar_n}{\eth_n}}\right]^T,\\&\beta(e_x(\tau))^{\Pi}=\left[\beta_1e_{x_1}^{\frac{\ell_1}{\mho_1}}\quad \dots\quad \beta_ne_{x_n}^{\frac{\ell_n}{\mho_n}}\right]^T.\end{aligned}$$

مشابه با قضیه ۱ می‌توان نشان داد دینامیک مد لغزشی مرتبط با (۴۳) که از تساوی برداری $s=0$ حاصل می‌گردد، دارای پایداری زمان-محدود سرتاسری است و خطاهای e_{x_j} و e_{v_j} قرار گرفته روی مد لغزشی $s=0$، بعد از گذشت زمان نشست T_s که با رابطه (۱۲) یا (۱۵) قابل تخمین است، دقیقاً به سمت صفر همگرا می‌شوند.

ورودی‌های کنترلی به صورت (۴۴) تعیین شده‌اند تا خطاهای ردیابی را در مدت زمان محدود به دینامیک مد لغزشی $s=0$ برسانند. بردارهای $\mathrm{sgn}(s)$، $\omega\mathrm{sgn}(s)$ و u_r در (۳۵) معرفی شده‌اند که انتخاب و تنظیم پارامترهای مثبت $\omega_j>0, j=1,\dots,n$ در اختیار کاربر قرار دارد.

$$u=g^{-1}\left(-f(x,v)-\frac{d}{dt}(\alpha(e_x)^{\Xi})-\frac{d}{dt}(\beta(e_x)^{\Pi})+\dot{v}_d+u_r\right)\qquad(۴۴)$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\alpha(e_x)^{\Xi})=\left[\frac{\hbar_1}{\eth_1}\alpha_1e_{v_1}e_{x_1}^{\frac{\hbar_1}{\eth_1}-1}\quad \dots\quad \frac{\hbar_n}{\eth_n}\alpha_ne_{v_n}e_{x_n}^{\frac{\hbar_n}{\eth_n}-1}\right]^T,\\&\frac{d}{dt}(\beta(e_x)^{\Pi})=\left[\frac{\ell_1}{\mho_1}\beta_1e_{v_1}e_{x_1}^{\frac{\ell_1}{\mho_1}-1}\quad \dots\quad \frac{\ell_n}{\mho_n}\beta_ne_{v_n}e_{x_n}^{\frac{\ell_n}{\mho_n}-1}\right]^T.\end{aligned}$$

مشابه با قضیه ۳ می‌توان ثابت کرد با اعمال ورودی کنترلی (۴۴) به سیستم خطای ردیابی (۱۰)، خطاهای ردیابی e_{x_j} و e_{v_j} در مدت زمان

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.4.5.4]

محدود T_r به دینامیک مد لغزشی $s=0$ می‌رسند و بر روی این مد لغزشی باقی می‌مانند. زمان T_r نیز از نامساوی (۳۷) قابل حساب است. باید به این موضوع توجه داشت از آنجایی که توان‌های منفی $\frac{\ell_j}{\upsilon_j}-1<0$ در ورودی‌های کنترلی (۴۴) مورد استفاده قرار گرفته است، پدیده تکینگی (سینگولاریتی) رخ خواهد داد.

یادآوری ۱۲. چنانچه شرط $g_j(x,v)\neq 0$ که در ابتدای مقاله به آن اشاره شد، برقرار نباشد آنگاه نمی‌توان از $g_j^{-1}(x,v)$ برای طراحی ورودی‌های کنترلی استفاده کرد. برای غلبه بر این مشکل، ورودی‌های کنترلی u_j (۱۶) به صورت (۴۵) تغییر می‌کنند که $\kappa_j>0, j=1,\dots,n$ پارامترهای دلخواه بوده و پیشنهاد می‌گردد تا حد ممکن کوچک انتخاب شوند. لازم به ذکر است که u_{m_j} و u_{r_j} قبلاً در (۱۷) و (۱۸) مشخص شده‌اند. در این وضعیت، اثبات قضیه‌های ۱ و ۲ بدون تغییر باقی خواهند ماند. در اثبات قضیه ۳ از رابطه $g_j^2(g_j^2+\kappa_j)^{-1}=1-\kappa_j(g_j^2+\kappa_j)^{-1}$ استفاده خواهد شد.

$$u_j=g_j^2\left(g_j^2+\kappa_j\right)^{-1}u_{\zeta_j},\ u_{\zeta_j}=-f_j(x,v)+\dot{v}_{d_j}+u_{r_j}-\kappa_j(g_j^2+\kappa_j)^{-1}|u_{\zeta_j}|\mathrm{sgn}(s_j)+u_{m_j} \quad (۴۵)$$

یادآوری ۱۳. با توجه به جزئیات اثبات تئوری ۳، شرایط اولیه برای تخمین پارامترهای نامعلوم $\hat{b}_k$ و $\hat{c}_m$ باید اعداد بزرگتر از صفر ($\hat{b}_k(0)>0$ و $\hat{c}_m(0)>0$) انتخاب گردند. کاربر برای انتخاب شرایط اولیه ($\hat{b}_k(0)$ و $\hat{c}_m(0)$)، باید به این نکته توجه داشته باشد که اگر مقادیر اولیه فاصله بسیار زیادی با مقادیر نامی پارامترهای نامعلوم داشته باشند، زمان رسیدن (T_r ذکر شده در (۲۱)) بسیار بزرگ شده و عملاً پایدارسازی زمان-محدود به پایدارسازی مجانبی تبدیل می‌گردد.

۴- شبیه‌سازی روش کنترلی پیشنهادی بر روی دو سیستم عملی

در این بخش، نتایج تحلیلی مقاله را بر روی دو سیستم واقعی مورد شبیه‌سازی قرار می‌دهیم تا درستی و صحت عملکرد ورودی‌های کنترلی طراحی شده به منظور ردیابی زمان-محدود مشخص گردد. برای شبیه‌سازی اول از سیستم یاتاقان مغناطیسی فعال رانشی [10] استفاده شده و نتایج حاصل از شبیه‌سازی در بخش ۴- ۱ ارائه می‌شوند. برای شبیه‌سازی دوم، سیستم ربات دو لینک [7] مورد استفاده قرار می‌گیرد و نتایج حاصل از شبیه‌سازی در بخش ۴-۲ آورده می‌شوند.

۴-۱ نتایج شبیه‌سازی سیستم TABM

یک شماتیکی کلی از اجزای تشکیل‌دهنده سیستم TABM در [10] وجود دارد. در این سیستم، یک دیسک رانشی محوری[24] به روتور متصل شده است که موقعیت روتور را در جهت محور z کنترل می‌کند. در این سیستم، فاصله هوایی میان دیسک رانشی محوری و یاتاقان مغناطیسی، موقعیت روتور نامیده شده و با z_{TD} نشان داده می‌شود. فاصله هوایی ذکر شده در حالت نامی برابر $z_o=0.5$ میلیمتر است. این سیستم از دو سیم‌پیچ تشکیل شده است که بر روی استاتور بسته شده‌اند تا در هنگام عبور جریان مستقیم از آن‌ها، دو نیروی الکترومغناطیسی تولید شوند. در واقع با تغییر جریان مستقیم ذکر شده، نیروی‌های الکترومغناطیسی تولیدی تغییر کرده و روتور می‌تواند در فاصله هوایی حرکت کرده تا در موقعیت مناسب قرار گیرد. ولتاژ الکتریکی بایاس $E_o=1.4$ ولت به هر دو یاتاقان مغناطیسی، اعمال می‌شود تا نیروی جاذبه الکترومغناطیسی یکسانی بر هر دو طرف دیسک رانشی محوری وارد گردد و دیسک در موقعیت مبنای خود یعنی همان $z_o=0.5$ میلیمتر قرار گیرد. ولتاژ الکتریکی E_z (که همان ورودی کنترلی است) با ولتاژ بایاس اعمالی به یاتاقان بالایی جمع شده و از ولتاژ بایاس اعمالی به یاتاقان پایینی کم می‌شود. سیستم TABM دارای دو تقویت‌کننده توان در مسیر اعمال ولتاژ به دو سیم‌پیچ بالایی و پایینی است. تقویت‌کننده توان بالایی متناسب با ولتاژ اعمالی E_o+E_z جریان i_o+i_z و تقویت‌کننده توان پایینی متناسب با ولتاژ اعمالی E_o-E_z جریان i_o-i_z را تولید می‌کنند. i_o و i_z به ترتیب جریان بایاس و جریان ورودی کنترلی متناسب با ولتاژ بایاس $E_o=1.4$ ولت و ولتاژ ورودی کنترلی E_z هستند. برای هر دو تقویت‌کننده، نسبت میان جریان خروجی و ولتاژ ورودی، 0.5 آمپر بر ولت است. با استفاده از قوانین نیوتن، معادله دینامیکی حاکم بر سیستم TABM به صورت (۴۶) قابل بیان است که در آن، $M=2.565$ کیلوگرم جرم روتور و $C_f=0.001$ ثابت اصطکاک می‌باشند. در این رابطه، ترم $D(t,z_{TD},\dot{z}_{TD})$ بیانگر مجموع اغتشاش‌های بیرونی و عدم‌قطعیت‌های موجود در سیستم می‌باشد. هم‌چنین برآیند نیروی الکترومغناطیسی تولیدی توسط دو سیم‌پیچ بالایی و پایینی با نماد $F_{E_z,z_{TD}}$ نشان داده شده است که این نیروی برآیندی از رابطه $F_{E_z,z_{TD}}=h_E E_z+h_z z_{TD}$ محاسبه می‌شود و ثابت‌ها برابر با $h_E=20$ نیوتن بر ولت و $h_z=25.2$ نیوتن بر میلیمتر هستند [10].

هدف کنترلی برای این سیستم آن است که ورودی کنترلی E_z باید چنان طراحی گردد که موقعیت روتور یعنی z_{TD}، مسیر مورد نظر کاربر که با z_d نشان داده می‌شود را دنبال کرده و خطای ردیابی در مدت زمان محدودی به صفر برسد. ترم اغتشاش $D(t,z_{TD},\dot{z}_{TD})$، نامساوی $\|D(t,z_{TD},\dot{z}_{TD})\|\le b_0+b_1\|z_{TD}\|+c_1\|\dot{z}_{TD}\|$ را برآورده می‌سازد که ضرایب b_0، b_1 و c_1 ثابت و نامعلوم هستند.

$$\ddot{z}_{TD}=-\frac{C_f}{M}\dot{z}_{TD}+\frac{1}{M}F_{E_z,z_{TD}}+D(t,z_{TD},\dot{z}_{TD}) \quad (۴۶)$$

با انتخاب متغیرهای حالت سیستم به صورت $x=z_{TD}$، $v=\dot{z}_{TD}$ و ورودی کنترلی $u=E_z$ نمایش فضای حالت سیستم TABM به صورت (۴۷) استخراج می‌شود که در کلاس سیستم غیرخطی (۸) قرار دارد. با مقایسه (۴۷) و (۸)، $f(x,v)=M^{-1}(-C_f v+h_z x)$، $g(x,v)=M^{-1}h_E$ و $D(t,x,v)=D(t,z_{TD},\dot{z}_{TD})$ نتیجه می‌شوند.

$$\begin{cases}\dot{x}=v\\ \dot{v}=-M^{-1}C_f v+M^{-1}h_z x+M^{-1}h_E u+D(t,x,v)\end{cases} \quad (۴۷)$$

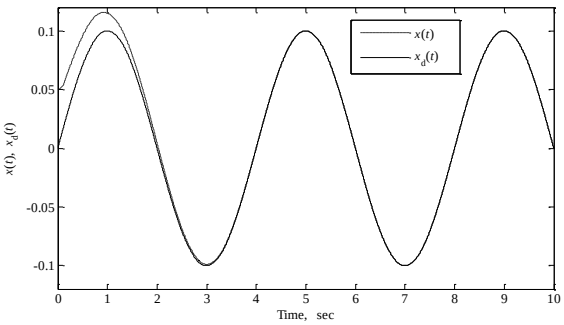
با تعریف خطاهای ردیابی e_x و e_v به صورت $e_x=z_{TD}-z_d=x-x_d$ و $e_v=\dot{z}_{TD}-\dot{z}_d=v-v_d$، ورودی کنترلی u با استناد به

[24] Thrust disk

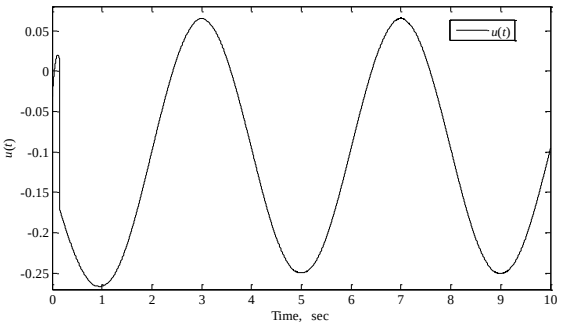
[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.4.5.4]

(۱۱) و (۱۶) الی (۲۰) به راحتی بدست می‌آید. برای انجام شبیه‌سازی، مسیر دلخواه روتور و ترم اغتشاش به صورت $z_d = x_d = 0.1\sin(0.5\pi t)$ میلیمتر و $D(t,x,v) = 0.5 + 0.1x + 0.1v$ انتخاب شده‌اند. ترم اغتشاش، رابطه $\|D(t,x,v)\| \le b_0 + b_1\|x\| + c_1\|v\|$ را ارضا می‌کند. ضرایب اختیاری α، β، $\hbar$، $\eth$، ℓ، $\mho$ و ω که به ترتیب در تعریف سطح لغزشی و ورودی کنترلی ظاهر می‌شوند به صورت $\alpha = 0.1$، $\beta = 0.5$، $\hbar = 13$، $\eth = 5$، $\ell = 9$، $\mho = 11$ و $\omega = 0.1$ مقداردهی شده‌اند. پارامترهای دلخواه ξ_1، ξ_2 و λ_1 که در قوانین به‌روزرسانی پارامترهای b_0، b_1 و c_1 وجود دارند به صورت $\xi_1 = 20$, $\xi_2 = 50$ و $\lambda_1 = 200$ منظور شده‌اند.

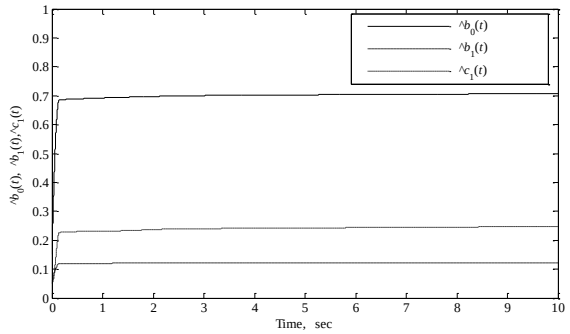
شکل‌های ۱ تا ۳ نتایج شبیه‌سازی سیستم TABM را برای مسیر مورد نظر $z_d = x_d = 0.1\sin(0.5\pi t)$ نشان می‌دهند که شرایط اولیه سیستم به صورت $z_{TD}(0) = 0.05$ و $\dot{z}_{TD}(0) = 0$ و شرایط اولیه تخمین پارامترهای نامعلوم به صورت $\hat{b}_0(0) = 0.25, \hat{b}_1(0) = \hat{c}_1(0) = 0.05$ انتخاب شده‌اند. شکل ۱ پاسخ‌های زمانی موقعیت روتور $x = z_{TD}(t)$ و مسیر دلخواه $z_d = x_d$ را نمایش می‌دهد. با دقت در این شکل، واضح است که هدف ردیابی زمان محدود برآورده شده است. شکل ۲ پاسخ زمانی ورودی کنترلی u و شکل ۳ پاسخ‌های زمانی تخمین‌های $\hat{b}_0(0)$، $\hat{b}_1(0)$ و $\hat{c}_1(0)$ را نشان می‌دهند.



شکل ۱. پاسخ‌های زمانی موقعیت روتور $z_{TD}(t) = x$ و مسیر دلخواه $z_d = x_d = 0.1\sin(0.5\pi t)$.



شکل ۲. پاسخ زمانی تلاش کنترلی $u(t) = E_z(t)$.



شکل ۳. پاسخ‌های زمانی تخمین‌های $\hat{b}_0(t)$، $\hat{b}_1(t)$ و $\hat{c}_1(t)$ برای سیستم TABM رابطه (۴۶).

۴-۲ نتایج شبیه‌سازی سیستم بازوی ربات دو لینکی

معادلات دینامیکی سیستم عملی بازوی ربات دو لینکی [7] را به صورت (۴۸) در نظر بگیرید که دارای دو درجه آزادی است و متغیرهای q_1 و q_2 بیانگر موقعیت‌های لینک‌های آن هستند. همچنین $\dot{q}_1$ و $\dot{q}_2$ سرعت‌ها و $\ddot{q}_1$ و $\ddot{q}_2$ شتاب‌های لینک‌های ربات را نشان می‌دهند. در (۴۸)، $\delta_1 = 3.1$، $\delta_2 = 9.5$، $\delta_3 = 0.24$ و $\delta_4 = 0.77$ مقادیر ثابت مرتبط با این ربات می‌باشند [7]. $\tau = [\tau_1 \ \tau_2]^T$ بردار گشتاورهای اعمالی به مفصل‌های لینک‌های ربات است و دو عملگر (موتورهای الکتریکی) متصل به مفصل‌ها، این گشتاورها را تولید می‌کنند.

$$A\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{bmatrix} + H\begin{bmatrix}\dot{q}_1^2\\ \dot{q}_2^2\end{bmatrix} + B(q_1,q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + G(q_1,q_2) = \begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix} \quad (۴۸)$$

$$A(q_1,q_2) = \begin{bmatrix}\delta_1 + 0.6\delta_4\cos(q_2) & \delta_3 + 0.3\delta_4\cos(q_2)\\ \delta_3 + 0.3\delta_4\cos(q_2) & \delta_3\end{bmatrix},$$

$$B(q_1,q_2) = \begin{bmatrix}-0.3\delta_4\cos(q_2)\\ 0\end{bmatrix},$$

$$H(q_1,q_2) = \begin{bmatrix}-0.3\delta_4\sin(q_2) & -0.3\delta_4\sin(q_2)\\ 0.3\delta_4\sin(q_2) & 0\end{bmatrix},$$

$$G(q_1,q_2) = \begin{bmatrix}9.8\delta_2\cos(q_1) + 9.8\delta_4\cos(q_1+q_2)\\ 9.8\delta_4\cos(q_1+q_2)\end{bmatrix}.$$

با انتخاب بردارهای متغیر حالت $x = [x_1 \ \ x_2]^T = [q_1 \ \ q_2]^T$، $v = \dot{q} = [v_1 \ \ v_2]^T = [\dot{q}_1 \ \ \dot{q}_2]^T$ و بردار گشتاورها $\tau = [\tau_1 \ \ \tau_2]^T$، معادلات فضای حالت ربات به صورت (۸) تبدیل می‌شوند که بردارهای $f(x,v)$، $g(x,v)$ و u به صورت زیر قابل بیان می‌باشند که در آن $I_{2\times2}$ ماتریس همانی است.

$$f(x,v) = -A^{-1}(x)\left(H(x)\begin{bmatrix}v_1^2\\ v_2^2\end{bmatrix} + B(x)v_1v_2 + G(x)\right),$$

$$g(x,v) = I_{2\times2}, u = A^{-1}(x)\tau \quad (۴۹)$$

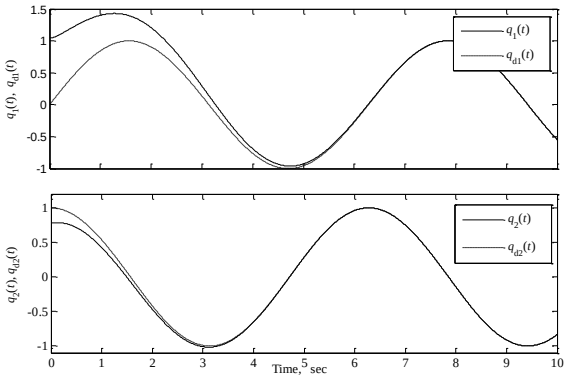
ترم برداری $D(t,x,v)$ نیز به عنوان اغتشاش‌های خارجی و عدم‌قطعیت‌های موجود به مدل ربات اضافه شده است. مسیرهای مورد نظر را به صورت $x_d = q_d = [x_{d_1} x_{d_2}]^T = [q_{d_1} \ q_{d_2}]^T = [\sin t \ \cos t]^T$ در نظر می‌گیریم که باید با طراحی مناسب گشتاورهای τ_1 و τ_2، وضعیت لینک‌های ربات $x_1 = q_1$ و $x_2 = q_2$ مسیرهای مورد نظر را در مدت زمان محدودی ردیابی کنند و پس از آن خطاهای ردیابی برای لینک‌ها به صفر همگرا شوند. در ادامه، بردار خطاهای ردیابی به صورت $e_x = [e_1 \ e_2]^T = x - x_d$ و $e_v = [e_{v_1} \ e_{v_2}]^T = v - v_d$ تعریف می‌شوند و $D(t,x,v) = [d_1(t) \ d_2(t)]^T = 0.3[1 \ \ 1]^T +$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.4.5.4]

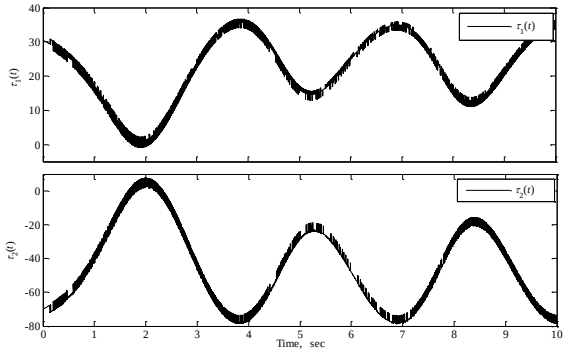
$\|D(t,x,v)\| \le b_0 + 0.15x + 0.1\,v$ بردار اغتشاش فرض می‌شود که $b_1\|x\| + c_1\|v\|$ را برآورده می‌سازد و پارامترهای b_0، b_1 و c_1 در اختیار نیستند. برای نیل به هدف ردیابی، بردار سطوح لغزشی $s \in \Re^2$، بردار ورودی‌های کنترلی $u \in \Re^2$ و تخمین پارامترهای نامعلوم $\hat{b}_0$، $\hat{b}_1$ و $\hat{c}_1$ به ترتیب با استفاده از (۱۱) و (۱۶) الی (۲۰) بدست می‌آیند. بردار گشتاورهای نهایی که باید به ربات اعمال شود از طریق تساوی $\tau = A(x)u$ حاصل می‌گردد.

ضرایب و ثابت‌های دلخواه سطوح لغزشی غیرخطی، ورودی‌های کنترلی پیشنهادی و قوانین به روزرسانی پارامترهای نامعلوم به صورت $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$، $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$، $\hbar_1 = \hbar_2 = 13$، $\eth_1 = \eth_2 = 5$، $\ell_1 = \ell_2 = 9$، $\mho_1 = \mho_2 = 11$، $\omega_1 = \omega_2 = 2$ و $\xi_1 = 2, \xi_2 =$ $\lambda_1 = 5$, 1.1 در نظرگرفته شده‌اند. برای شبیه‌سازی کامپیوتری، شرایط اولیه مرتبط با موقعیت‌ها (وضعیت‌ها) و سرعت‌های لینک‌های ربات به صورت $x(0) = q(0) = [\pi/3 \quad \pi/4]^T$ و $v(0) = \dot{q}(0) = [0 \quad 0]^T$ و شرایط اولیه پارامترهای نامعلوم به صورت $\hat{b}_0(0) = 0.15, \hat{b}_1(0) = 0.05,\ \hat{c}_1(0) = 0.02$ انتخاب شده‌اند.

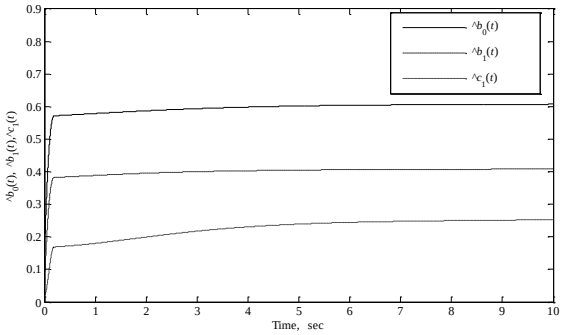
نتایج شبیه‌سازی مرتبط با مسئله ردیابی زمان-محدود ربات در شکل‌های ۴ تا ۶ آورده شده است. شکل ۴ پاسخ‌های زمانی $x_1 = q_1$ و $x_2 = q_2$ را همراه با مسیرهای مورد نظر $x_{d_1} = q_{d_1}$ و $x_{d_2} = q_{d_2}$ نشان می‌دهد که ردیابی زمان-محدود به خوبی برآورده شده است. پاسخ‌های زمانی گشتاورهای τ_1 و τ_2 و تخمین‌های $\hat{b}_0$، $\hat{b}_1$ و $\hat{c}_1$ به ترتیب در شکل‌های ۵ و ۶ به تصویر کشیده شده‌اند. همه نتایج شبیه‌سازی، عملکرد درست کنترل‌کننده‌های طراحی شده را تایید می‌کنند



شکل ۴. پاسخ‌های زمانی $x_1 = q_1$ و $x_2 = q_2$ همراه با مسیرهای مورد نظر $x_{d_1} = q_{d_1} = \sin t$ و $x_{d_2} = q_{d_2} = \cos t$.



شکل ۵. پاسخ‌های زمانی گشتاورهای τ_1 و τ_2.



شکل ۶. پاسخ‌های زمانی تخمین‌های $\hat{b}_0$، $\hat{b}_1$ و $\hat{c}_1$ برای مدل ربات رابطه (۴۸).

۵- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله، با ترکیب روش کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین و کنترل تطبیقی، روش ابتکاری ارائه شد تا هدف ردیابی زمان-محدود را برای گروه خاصی از سیستم‌های غیرخطی که زنجیره‌ای از زیرسیستم‌های دو انتگرال‌گیر غیرمستقل بودند، فراهم سازد. سیستم غیرخطی مورد مطالعه، تحت تاثیر اغتشاش و عدم‌قطعیت با کران بالای نامحدود و نامعلوم بود که قوانین به‌روزرسانی برای تخمین زمان-محدود ضرایب این کران ارائه شد. به عنوان یکی از نوآوری‌های مقاله، رابطه‌ای حاصل شد که زمان محدود مورد نیاز برای صفر شدن خطاهای ردیابی و رسیدن تخمین ضرایب کران بالای اغتشاش به مقادیر ثابت، را مشخص می‌کرد. رابطه مذکور، وابستگی این زمان محدود را به شرایط اولیه سیستم و تعدادی پارامتر آزاد نشان می‌دهد که تنظیم مناسب این پارامترها، می‌تواند به عنوان رهیافتی برای بهبود سرعت همگرایی مسئله ردیابی در مطالعات بعدی مورد بررسی قرار گیرد. روش کنترلی پیشنهادی بر روی دو سیستم واقعی مورد شبیه‌سازی قرار گرفت که نتایج حاصله، کارایی آن را نشان دادند. به عنوان یکی از معایب مقاله، شرط رویت‌پذیری کامل و در دسترس بودن همه متغیرهای حالت سیستم غیرخطی بود که شرطی محدودکننده است. در ادامه مطالعات خود به دنبال طراحی رویتگر زمان-محدود کاهش مرتبه هستیم تا نیمی از متغیرهای حالت سیستم غیرخطی را تخمین بزند و این حالت‌های تخمینی جایگزین حالت‌های اندازه‌گیری شده در ورودی‌های کنترلی شوند و پایداری زمان-محدود سیستم

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.4.5.4]

غیرخطی حلقه‌بسته مورد بازبینی و اثبات مجدد قرار گیرد.

مراجع

[1] S.P. Bhat and D.S. Bernstein, "Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 5, pp. 678-682, 1998.

[2] S.P. Bhat and D. S. Bernstein, "Finite-time stability of continuous autonomous systems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 38, no. 3, pp. 751-766, 2000.

[3] Y. Hong, J. Huang, and Y. Xu, "On an output feedback finite-time stabilization problem," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 2, pp. 305-309, 2001.

[4] S. Yu and X. Long, "Finite-time consensus for second-order multi-agent systems with disturbances by integral sliding mode," *Automatica*, vol. 54, no. 1, pp. 158-165, 2015.

[5] X. He, Q. Wang, and W. Yu, "Finite-time distributed cooperative attitude tracking control for multiple rigid spacecraft," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 256, no. 1, pp. 724-734, 2015.

[6] Y. Zhang, G. Liu, and B. Luo, "Finite-time cascaded tracking control approach for mobile robots," *Information Sciences*, vol. 284, no. 1, pp. 31-43, 2014.

[7] M. Galicki, "Finite-time control of robotic manipulators," *Automatica*, vol. 51, no. 1, pp. 49-54, 2015.

[8] S. Mondal and C. Mahanta, "Adaptive second order terminal sliding mode controller for robotic manipulators," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 351, no. 4, pp. 2356-2377, 2014.

[9] K. Lu and Y. Xia, "Adaptive attitude tracking control for rigid spacecraft with finite-time convergence," *Automatica*, vol. 49, no. 12, pp. 3591-3599, 2013.

[10] S.Y. Chen and F.J. Lin, "Robust nonsingular terminal sliding mode control for nonlinear magnetic bearing system," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 19, no. 3, pp. 636-643, 2011.

[11] S. Sun, D. Zhou, and W. Hou, "A guidance law with finite time convergence accounting for autopilot lag," Aerospace *Science and Technology*, vol. 25, no. 1, pp. 132-137, 2013.

[12] Y. Chen, Z. Shi, and C. Lin, "Some criteria for the global finite-time synchronization of two Lorenz-Stenflo systems coupled by a new controller," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 38, no. 15, pp. 4078-4085, 2014.

[13] M.R. Mokhtari and B. Cherki, "A new robust control for minirotorcraft unmanned aerial vehicles," *ISA Transactions*, vol. 56, no. 1, pp. 86-101, 2015.

[14] G. Chen, Y. Yang, and J. Li, "Finite time stability of a class of hybrid dynamical systems," *IET Control Theory and Applications*, vol. 6, no. 1, pp. 8-13, 2012.

[15] S. Liu and L.Q. Chen, "Second-order terminal sliding mode control for networks synchronization," *Nonlinear Dynamics*, vol. 79, no. 1, pp. 205-213, 2015.

[16] J. Fei and W. Yan, "Adaptive control of MEMS gyroscope using global fast terminal sliding mode control and fuzzy-neural-network," *Nonlinear Dynamics*, vol. 78, no. 1, pp. 103-116, 2014.

[17] M. Jiang, S. Wang, J. Mei, and Y. Shen, "Finite-time synchronization control of a class of memristor-based recurrent neural networks," *Neural Networks*, vol. 63, no. 1, pp. 133-140, 2015.

[18] Y. Li and R.G. Sanfelice, "A finite-time convergent observer with robustness to piecewise-constant measurement noise," *Automatica*, vol. 57, no. 1, pp. 222-230, 2015.

[19] T. Menard, E. Moulay, and W. Perruquetti, "A global high-gain finite-time observer," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, no. 6, pp. 1500-1506, 2010.

[20] Z. Zuo and L. Tie, "Distributed robust finite-time nonlinear consensus protocols for multi-agent systems," *International Journal of Systems Science*, doi: 10.1080/00207721.2014.925608, 2014.

[21] A. Polyakov, D. Efimov, and W. Perruquetti, "Finite-time and fixed-time stabilization: Implicit Lyapunov function approach," *Automatica*, vol. 51, no. 1, pp. 332-340, 2015.

[22] X.H. Zhang, K. Zhang, and X.J. Xie, "Finite-time output feedback stabilization of nonlinear high-order feedforward systems," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 26, no. 8, pp. 1794-1814, 2016.

[23] Z. Zuo, "Nonsingular fixed-time consensus tracking for second-order multi-agent networks," *Automatica*, vol. 54, pp. 305-309, 2015.

[24] H.B. Oza, Y.V. Orlov, and S.K. Spurgeon, "Finite time stabilization of a perturbed double integrator with unilateral constraints," *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 95, no. 1, pp. 200-212, 2014.

[25] Y. Su and C. Zheng, "Robust finite-time output feedback control of perturbed double integrator," *Automatica*, vol. 60, no. 1, pp. 86-91, 2015.

[26] H. Liu, T. Zhang, and X. Tian, "Continuous output-feedback finite-time control for a class of second-order nonlinear systems with disturbances," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 26, no. 2, pp. 218-234, 2016.

[27] J. Fu, R. Ma, and T. Chai, "Global finite-time stabilization of a class of switched nonlinear systems with the powers of positive odd rational numbers," *Automatica*, vol. 54, no. 1, pp. 360-373, 2015.

[28] Z.Y. Sun, L.R. Xue, and K. Zhang, "A new approach to finite-time adaptive stabilization of high-order uncertain nonlinear system," *Automatica*, vol. 58, no. 1, pp. 60-66, 2015.

[29] E. Moulay and W. Perruquetti, "Finite time stability conditions for non-autonomous continuous systems," *International Journal of Control*, vol. 81, no. 5, pp. 797-803, 2008.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.4.5.4]

[39] C.S. Chiu, "Derivative and integral terminal sliding mode control for a class of MIMO nonlinear systems," *Automatica*, vol. 48, no. 2, pp. 316-326, 2012.

[40] D. Zhao, S. Li, and F. Gao, "A new terminal sliding mode control for robotic manipulators," *International Journal of control*, vol. 82, no. 10, pp. 1804-1813, 2009.

[41] Y. Feng, X. Yu, and F. Han, "On nonsingular terminal sliding-mode control of nonlinear systems," *Automatica*, vol. 49, no. 6, 1715-1722, 2013.

[42] H. Bayramoglu and H. Komurcugil, "Nonsingular decoupled terminal sliding-mode control for a class of fourth-order nonlinear systems," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 18, no. 9, 2527-2539, 2013.

[43] J. Yang, S. Li, J. Su, and X. Yu, "Continuous nonsingular terminal sliding mode control for systems with mismatched disturbances," *Automatica*, vol. 49, no. 7, 2287-2291, 2013.

[44] A. Levant and A. Michael, "Adjustment of high-order sliding mode controllers," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 19, no. 15, pp. 1657-1672, 2009.

[45] Y. Feng, F. Han, and X. Yu, "Chattering free full-order sliding-mode control," *Automatica*, vol. 50, no. 4, pp. 1310–1314, 2014.

[46] S. Zhankui and K. Sun, "Nonlinear and chaos control of a micro-electro-mechanical system by using second-order fast terminal sliding mode control," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 18, no. 9, pp. 2540-2548, 2013.

[47] F. Plestan, Y. Shtessel, V. Brégeault, and A. Poznyak, "New methodologies for adaptive sliding mode control," *International Journal of Control*, vol. 83, no. 9, pp. 1907-1919, 2010.

[30] S.P. Bhat and D.S. Bernstein, "Geometric homogeneity with applications to finite-time stability," *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 17, no. 2, pp. 101-127, 2005.

[31] D. Zhou, S. Sun, and K.L. Teo, "Guidance laws with finite time convergence," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 32, no. 6, pp. 1838-1836, 2009.

[32] Q. Lan, S. Li, J. Yang, and L. Guo, "Finite-time control for soft landing on an asteroid based on line-of-sight angle," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 351, no. 1, pp. 383-398, 2014.

[33] E. Moulay and W. Perruquetti, "Finite time stability and stabilization of a class of continuous systems," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 323, no. 2, pp. 1430-1443, 2006.

[34] H. Komurcugil, "Adaptive terminal sliding-mode control strategy for DC–DC buck converters," *ISA Transactions*, vol. 51, no. 6, pp. 673-681, 2012.

[35] A. Abooee, M. Moravej Khorasani, and M. Haeri "Free-chattering robust finite time tracking for connected double integrator nonlinear systems," *4th International Conference on Control, Instrumentation, and Automation*, (ICCIA 2016), Qazvin Islamic Azad University, Qazvin, Iran, January 27-28, pp. 301-306, 2016.

[36] A. Abooee, M. Moravej Khorasani, and M. Haeri "Finite-time guidance laws for landing process of a spacecraft subjected to disturbances," *4th International Conference on Control, Instrumentation, and Automation*, (ICCIA 2016), Qazvin Islamic Azad University, Qazvin, Iran, January 27-28, pp. 296-300, 2016.

[37] X. Liu and Y. Han, "Finite time control for MIMO nonlinear system based on higher-order sliding mode," *ISA Transactions*, vol. 53, no. 6, pp. 1838-1846, 2014.

[38] M. Ghasemi, S.G. Nersesov, and G. Clayton, "Finite-time tracking using sliding mode control," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 351, no. 5, pp. 2966-2990, 2014.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1394.9.4.5.4]