مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۱، شماره ۱، بهار ۱۳۹۶، صفحه ۱۸-۱۱

طراحی کنترل‌کننده چند متغیره غیرخطی و بهینه برای ردیابی مسیر ربات‌های متحرک غیرهولونومیک

حسین میرزائی‌نژاد[۱]، علی محمد شافعی[۲]

[۱] استادیار، دانشکدهٔ فنی و مهندسی، بخش مکانیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان، h_mirzaeinejad@uk.ac.ir

[۲] استادیار، دانشکدهٔ فنی و مهندسی، بخش مکانیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان، shafei@uk.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۶/۱۱/۱۳، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۶/۲/۴)

چکیده: در این مقاله یک کنترل‌کننده غیرخطی چند متغیره با استفاده از روش کنترل پیش‌بین برای ردیابی مسیر ربات‌های متحرک غیرهولونومیک طراحی شده است. اساس این روش، پیش‌بینی پاسخ‌های مدل غیرخطی ربات در بازه زمان پیش‌بین با استفاده از بسط سری تیلور می‌باشد. قوانین کنترلی بهینه بر اساس کمینه کردن اختلاف بین پاسخ‌های مطلوب و پیش‌بینی شده خروجی‌های سیستم به صورت تحلیلی توسعه داده می‌شوند. قوانین کنترلی استخراج شده منجر به خطی‌سازی فیدبک خواهند شد. در اینجا از مدل سینماتیکی غیرخطی ربات برای طراحی کنترل‌کننده و شبیه‌سازی‌ها استفاده شده است. در ادامه، تحلیل و ارزیابی سیستم کنترلی طراحی شده همراه با نتایج شبیه‌سازی شده با استفاده از چندین مانور در شرایط مختلف، عملکرد بالای کنترل‌کننده در ردیابی مسیر مرجع هر مانور را نشان می‌دهند.

کلمات کلیدی: ربات متحرک غیرهولونومیک، کنترل غیرخطی، پیش‌بینی، ردیابی مسیر.

A Nonlinear Optimal Multivariable Controller Design for Trajectory Tracking of Non-Holonomic Mobile Robots

Hossein Mirzaeinejad, Ali Mohammad Shafei

Abstract: In this paper, a predictive approach is applied to design a nonlinear multivariable controller to generate trajectory tracking control commands of non-holonomic robots. In this method, the nonlinear responses of the mobile robot are predicted using Taylor series. The optimal control laws are analytically developed by minimizing the difference between the predicted and the desired responses of the system outputs. The obtained control laws lead to the feedback linearization. Here, the nonlinear kinematics model of mobile robot is used for design of the controller and simulations. The performed analyses along with the simulation results indicate that the designed controller can successfully track the reference trajectories with high performance in different maneuver conditions.

Keywords: Nonholonomic mobile robot, Nonlinear control, Prediction, Trajectory tracking

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.1.2.9]

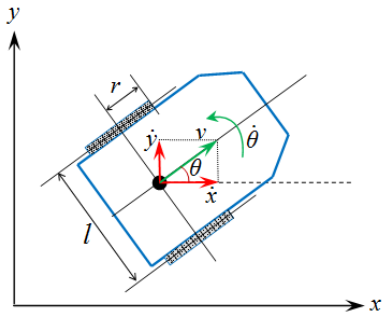
۱- مقدمه

کنترل سیستم‌های با قیود غیرهولونومیک یکی از موضوعاتی است که توجه محققین زیادی را به خود جلب کرده است. در بین این سیستم‌ها، ربات‌های متحرک چرخدار با توجه به کاربرد گسترده‌ای که در صنعت دارند از جایگاه ویژه‌ای برخوردار می‌باشند. از اینرو، مطالعات زیادی در زمینه مدل‌سازی و کنترل این سیستم‌ها انجام شده است [۵-۱]. با توجه به ساختار این ربات‌ها، چرخ‌ها دارای غلتش بدون لغزش بوده و ربات در امتداد محور دوران چرخ‌ها دارای سرعت نمی‌باشد. قید مذکور به عنوان قید غیرهولونومیک شناخته می‌شود. از دیدگاه ریاضی، قیود غیرهولونومیک قیودی هستند که انتگرال‌پذیر نیستند. با توجه به اینکه اینگونه قیود از درجات آزادی سیستم نمی‌کاهند و به عبارتی این قیدها در کنار معادلات سیستم در نظرگرفته می‌شوند، لذا وجود این قیود موجب افزایش پیچیدگی در مدل‌سازی دینامیکی و کنترل این ربات‌ها می‌شود. در واقع، چالش اصلی در سیستم‌های غیر هولونومیک این است که تعداد درجات آزادی کنترل‌پذیر از تعداد کل درجات آزادی سیستم کمتر می‌باشد. بنابراین، پیدا نمودن ورودی‌های کنترلی مناسب برای تضمین پایداری تمام متغیرهای حالت مورد نظر می‌باشد. در این بین، مسئله ردیابی مسیرهای زمانی با دقت بالا در ربات‌های متحرک چرخدار، با توجه به کاربردهای گوناگون آن از اهمیت بالایی برخوردار است. از این جهت، مطالعات زیادی با روش‌های مختلف در این زمینه با اهداف ردیابی و پایدارسازی انجام گرفته است که می‌توان از طراحی کنترل‌کننده مبتنی بر روش لیاپانوف [۶]، استفاده از روش کنترل تطبیقی [۸،۷]، روش مد لغزشی [۱۲-۹]، روش خطی‌سازی فیدبک [۱۳]، کنترل مقاوم [۱۴]، روش فازی [۱۵]، روش برگشت به عقب [۱۶،۱۷]، ترکیبی از روش‌های فازی شبکه‌های عصبی [۱۸] و... نام برد. در مرجع [۱۹]، یک کنترل‌کننده تناسبی-مشتقی بهینه مبتنی بر خطی‌سازی فیدبک برای ردیابی مسیر توسط ربات چرخدار طراحی شده است. در تحقیقی دیگر روش کنترلی رویتگر فعال مبتنی بر فیلتر کالمن برای کنترل دینامیکی ربات‌های متحرک پیشنهاد شده است [۲۰]. همچنین، از نمونه مطالعاتی که از روش‌های بهینه استفاده نموده‌اند می‌توان مرجع [۲۱] را نام برد که در آن کنترل‌کننده‌ای بهینه به روش افق زمانی پیش رو یا روش کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل ارائه شده است. البته باید یادآوری کرد که استفاده از روش‌های محاسبات عددی برای حل مسئله بهینه سازی آسان نبوده و پیاده سازی آنها نیز مشکل بوده و با تاخیر زمانی زیاد همراه می‌باشد.

در این مقاله، یک روش بهینه جدید برای طراحی کنترل‌کننده غیرخطی چندمتغیره برای ردیابی مسیر ربات متحرک چرخدار توسعه داده شده و سپس تحلیل می‌گردد. این روش قبلاً توسط نویسندگان در طراحی کنترل‌کننده سیستم ترمز ضدقفل برای سیستم‌های تک ورودی-تک خروجی و چند ورودی-چند خروجی برای ردیابی لغزش چرخ‌ها بکار گرفته شده است [۲۵-۲۲]. وجه تمایز این روش با روش کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل مورد استفاده در کارهای گذشته در این است که در حالت کلی روش کنترل پیش‌بین متداول در هر مرحله کنترلی نیاز به حل مسئله بهینه‌سازی به صورت همزمان و عددی دارد و به همین دلیل با ایجاد تأخیر همراه بوده و بنابراین برای پیاده سازی مناسب نمی‌باشد. اما روش کنترلی ارائه شده در این مقاله منجر به رسیدن به قوانین کنترلی تحلیلی می‌شود که مشکلات ذکرشده را ندارد. اساس این روش، پیش‌بینی پاسخ مدل غیرخطی ربات است. به این ترتیب که ابتدا پاسخ غیرخطی ربات توسط بسط سری تیلور پیش‌بینی شده و سپس قانون کنترلی از طریق حداقل کردن اختلاف پاسخ‌های مطلوب و پیش‌بینی شده بدست می‌آید. از طرفی با توجه به چالش اصلی در سیستم‌های غیر هولونومیک که ذکر شد، قابلیت این روش را می‌توان در پیدا نمودن ورودی‌های کنترلی مناسب برای تضمین پایداری تمام متغیرهای حالت مطلوب نام برد. پس از طراحی کنترل‌کننده، تحلیل خطای ردیابی به صورت تحلیلی بررسی می‌گردد و اثر پارامتر زمان پیش‌بین که به عنوان یک پارامتر آزاد کنترلی می‌باشد مورد ارزیابی قرار گرفته و نشان داده خواهد شدکه قوانین کنترلی منجر به خطی‌سازی فیدبک خواهند شد. در ادامه به منظور نشان دادن کارایی سیستم کنترلی طراحی شده، شبیه‌سازی‌های لازم بر روی مدل ربات با سه درجه‌آزادی در مانورهای مختلف انجام شده است. نتایج تحلیل‌ها و شبیه‌سازی‌ها، نشان از عملکرد مناسب سیستم کنترلی پیشنهادی در رسیدن به اهداف مورد نظر می‌باشد.

۲- بیان مسئله

ساختار کلی یک ربات متحرک چرخدار متشکل از دو چرخ محرک که روی یک محور قرار گرفته‌اند در شکل ۱ نشان داده شده است. چرخ‌ها دارای شعاع یکسان r بوده و به فاصله l از یکدیگر قرار گرفته‌اند. هر دو چرخ به منظور حرکت و جهت‌دهی ربات به صورت مستقل توسط دو فعال‌کننده (دو موتور DC) به حرکت در می‌آیند. مطابق با شکل ۱، ربات در صفحه دو بعدی متشکل از سه درجه آزادی شامل دو حرکت انتقالی و یک حرکت دورانی است. به طوری که (x, y) موقعیت مرکز محور که چرخ‌ها روی آن قرار گرفته‌اند و θ نشان‌دهنده زاویه قرار گرفتن ربات می‌باشد.



شکل ۱: پیکربندی ربات متحرک چرخدار

با توجه به اینکه ربات در امتداد محور دوران چرخ‌ها دارای سرعت نمی‌باشد، در نتیجه داریم:

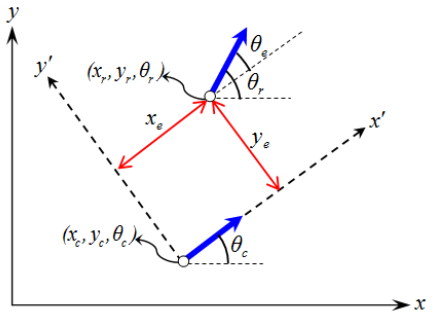
[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.1.2.9]

$$\begin{bmatrix}-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}=0 \qquad (۱)$$

معادله قیدی فوق انتگرال‌پذیر نبوده و لذا به عنوان قید غیرهولونومیک شناخته می‌شود. همچنین، معادلات حاکم بر اساس مدل سینماتیکی مرتبه اول ربات عبارتند از:

$$\dot{q}=\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0\\ \sin\theta & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\ \omega\end{bmatrix} \qquad (۲)$$

بطوری که $q^T=[x\ y\ \theta]$ بردار مختصات تعمیم یافته بوده، v سرعت انتقالی و ω سرعت زاویه‌ای ربات می‌باشند. در سیستم کنترلی از دو موقعیت $q_c^T=[x_c\ y_c\ \theta_c]$ و $q_r^T=[x_r\ y_r\ \theta_r]$ استفاده خواهد شد که اولی مربوط به موقعیت جاری ربات و دومی مربوط به موقعیت یا مسیر مرجع ربات است که باید توسط کنترل‌کننده ردیابی شود.



شکل۲: خطای موقعیت ربات

با توجه به شکل۲ و در نظرگرفتن دستگاه مختصات مرجع $x-y$ و دستگاه مختصات نسبی $x'-y'$ به مرکز (x_c-y_c) و در جهت θ_c، خطای موقعیت $e^T=[e_x\ \ e_y\ \ e_\theta]$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{bmatrix}e_x\\ e_y\\ e_\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta_c & \sin\theta_c & 0\\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}(q_r-q_c) \qquad (۳)$$

با استفاده از رابطه (۲) داریم:

$$\dot{x}_r\sin\theta_r=\dot{y}_r\cos\theta_r \qquad (۴)$$

حال با مشتق‌گیری از معادلات (۳)، استفاده از رابطه (۴) و برخی محاسبات ریاضی، می‌توان مدل خطا را به صورت زیر بدست آورد [۲۶]:

$$\begin{bmatrix}\dot{e}_x\\ \dot{e}_y\\ \dot{e}_\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos e_\theta & 0\\ \sin e_\theta & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_r\\ \omega_r\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & e_y\\ 0 & -e_x\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\ \omega\end{bmatrix} \qquad (۵)$$

توجه شود که در کلیه روابط اندیس r مربوط به مدل مرجع می‌باشد.

۳- طراحی سیستم کنترلی

با نوشتن معادلات (۵) به فرم فضای حالت زیر داریم:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=v_r\cos x_3-u_1+x_2u_2\\ \dot{x}_2=v_r\sin x_3-x_1u_2\\ \dot{x}_3=\omega_r-u_2\end{cases} \qquad (۶)$$

که در آن $\mathbf{x}^T=[x_1\ x_2\ x_3]=[e_x\ e_y\ e_\theta]$ بردار متغیرهای حالت و $\mathbf{u}^T=[u_1\ u_2]=[v\ \omega]$ بردار ورودی‌های کنترلی می‌باشند. حال هدف، طراحی یک کنترل‌کننده با دو ورودی برای سیستم با معادلات (۶) است که با ردیابی مسیر مرجع، خطای ردیابی $\mathbf{e}^T=[e_x\ e_y\ e_\theta]$ صفر شده و به عبارتی دیگر، پایداری سیستم مذکور تضمین شود. بدین منظور، در اینجا از روش کنترل غیرخطی پیش‌بین مبتنی بر بهینه‌سازی استفاده خواهد شد. به طور کلی در این روش، ابتدا خروجی‌های سیستم موردنظر توسط بسط سری تیلور پیش‌بینی شده و سپس با کمینه کردن تابع عملکرد که براساس خطاهای پیش‌بینی شده تعریف می‌شود، قوانین کنترلی به صورت بهینه و تحلیلی بدست می‌آیند. علاوه بر مزیت‌های مذکور در این روش، می‌توان از قابلیت آن برای پایدارسازی یک سیستم غیرخطی با انتخاب خروجی‌های مناسب نیز نام برد. با انتخاب خروجی‌های زیر داریم:

$$\begin{cases}y_1=x_1-x_2\,\mathrm{sgn}(\omega_r)\\ y_2=x_3\end{cases} \qquad (۷)$$

که در آن sgn(.) تابع علامت می‌باشد. در بخش تحلیل و ارزیابی قوانین کنترلی نشان داده خواهد شد که انتخاب خروجی‌های فوق منجر به خطی‌سازی فیدبک ورودی-خروجی سیستم و پایدارسازی آن می‌شود. حال برای توسعه قوانین کنترل غیرخطی، یک شاخص عملکرد به نحوی که خطاهای ردیابی در لحظه بعدی را جریمه کند به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$J(u_1,u_2)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}e_i^{\,2}(t+h)\qquad i=1,2 \qquad (۸)$$

که h زمان پیش‌بین بوده و یک عدد حقیقی مثبت است و e_i هاخطاهای ردیابی می‌باشند:

$$e_i(t+h)=y_i(t+h)-y_{di}(t+h)\qquad i=1,2 \qquad (۹)$$

از آنجایی که فرض شده است که هیچ محدودیتی روی ورودی کنترلی برای رسیدن به ردیابی کامل نداریم، شاخص عملکرد (۸)، شامل وزن روی ورودی کنترلی نبوده و به عبارتی، طراحی بر اساس کنترل ارزان است. از طرفی اهمیت خطاهای ردیابی یکسان فرض شده و بنابراین روی خطاها وزن یکسان در نظر گرفته شده است. حال به منظور توسعه شاخص عملکرد (۸) به عنوان تابعی از ورودی کنترلی، لازم است که خروجی‌های سیستم برای بازه زمان بعدی با استفاده از بسط سری تیلور

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.1.2.9]

پیش‌بینی شوند. در ابتدا $y_i(t+h)$ به وسیله سری تیلور مرتبه qام در زمان t به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$y_i(t+h) = y_i(t) + h\dot{y}_i(t) + \frac{h^2}{2!}\ddot{y}_i(t) + \cdots + \frac{h^q}{q!}y_i^{(q)}(t) \quad i=1,2 \tag{۱۰}$$

در ادامه، مسئله اصلی انتخاب مرتبه بسط q برای خروجی‌های سیستم می‌باشد به طوری که با اهداف طراحی کنترل‌کننده بر اساس پیش‌بینی متناسب باشد. معمولاً مرتبه بسط که مشخص‌کننده بالاترین مرتبه مشتق خروجی استفاده شده در پیش‌بینی است، به جمع درجه نسبی سیستم غیرخطی و مرتبه کنترلی انتخاب شده محدود می‌گردد [۲۷]. همچنین، درجه نسبی از معادلات دینامیکی سیستم غیرخطی قابل حصول بوده و برابر با پایین‌ترین مرتبه مشتق خروجی است که در آن ورودی کنترلی برای اولین بار به طور صریح در معادلات ظاهر می‌شود [۲۸]. با توجه به معادلات سیستم (۶)، هر دو خروجی سیستم نسبت به هر دو ورودی دارای درجه نسبی یک، $q=1$، می‌باشند. از طرف دیگر برای رسیدن به یک انرژی کنترلی پایین و جلوگیری از پیچیدگی قانون کنترلی، مرتبه کنترلی در اینجا به حداقل ممکن یعنی صفر محدود می‌شود. این انتخاب، یعنی مرتبه کنترلی صفر، باعث می‌شود که انرژی کنترلی در یک بازه زمان پیش‌بینی ثابت مانده و مشتقات ورودی کنترلی در پیش‌بینی خروجی ظاهر نشود.

$$\frac{d}{d\tau}u(t+\tau) = 0 \quad for \;\; \tau \in [0,h] \tag{۱۱}$$

انتخاب مرتبه کنترلی صفر برای سیستم‌های غیرخطی با درجات نسبی پایین مناسب می‌باشد [۲۷]. به طور معمول، مرتبه کنترل به عنوان یک پارامتر آزاد بوده و متناسب با مشخصات سیستم کنترلی و محدودیت‌های انرژی کنترلی توسط طراح تعیین می‌گردد.

بدین ترتیب با توجه به دلایل فوق، سری مرتبه اول متناسب با درجه نسبی سیستم برای بسط خروجی‌های سیستم کافی می‌باشد.

$$y_i(t+h) = y_i(t) + h\dot{y}_i(t) \quad i=1,2 \tag{۱۲}$$

با جایگذاری معادلات (۶) در (۱۲) و استفاده از خروجی‌های انتخاب شده داریم:

$$\begin{aligned} y_1(t+h) &= y_1 + h(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ &= x_1 - x_2\,\mathrm{sgn}(\omega_r) + h(x_2u_2 - u_1 + v_r\cos x_3 + x_1u_2 - v_r\sin x_3) \\ y_2(t+h) &= y_2 + h\dot{x}_3 \\ &= x_3 + h(\omega_r - u_2) \end{aligned} \tag{۱۳}$$

حال با جایگذاری معادلات (۱۳) در (۸) و با توجه به اینکه مقادیر مطلوب خروجی‌ها صفر می‌باشد، شاخص عملکرد بسط داده شده به عنوان تابعی از ورودی‌های کنترلی بدست می‌آید. با اعمال شرط بهینگی داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial u_1} = 0 \Rightarrow \quad & A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + B_1 = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial u_2} = 0 \Rightarrow \quad & A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + B_2 = 0 \end{aligned} \tag{۱۴}$$

بدین ترتیب قوانین کنترلی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$u_1 = -\frac{1}{A_{11}}(A_{12}u_2 + B_1) \tag{۱۵}$$

$$u_2 = \frac{B_2A_{11} - B_1A_{12}}{A_{12}^{\,2} - A_{11}A_{22}} \tag{۱۶}$$

بطوری که

$$\begin{aligned} &A_{11} = -h, \quad A_{12} = h(x_1 + x_2\,\mathrm{sgn}(\omega_r)), \\ &B_1 = x_1 - x_2\,\mathrm{sgn}(\dot{\phi}_r) + hv_r(\cos x_3 - \sin x_3\,\mathrm{sgn}(\omega_r)), \\ &A_{21} = -h(x_1 + x_2\,\mathrm{sgn}(\omega_r)), \\ &A_{22} = h(1 + (x_1 + x_2\,\mathrm{sgn}(\omega_r))^2), \\ &B_2 = -(x_3 + h\omega_r) + (x_2 + x_1\,\mathrm{sgn}(\omega_r))(x_1 - x_2\,\mathrm{sgn}(\omega_r) \\ &\quad + hv_r(\cos x_3 - \sin x_3\,\mathrm{sgn}(\omega_r))) \end{aligned} \tag{۱۷}$$

شکل بسط داده شده قوانین کنترلی با جایگذاری روابط (۱۷) در (۱۵) و (۱۶) همراه با برخی ساده‌سازی‌ها به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشند:

$$u_1 = \frac{1}{h}(x_1 - x_2\,\mathrm{sgn}(\omega_r) + (x_2 + x_1\,\mathrm{sgn}(\omega_r))(x_3 + h\omega_r) + hv_r(\cos x_3 - \sin\, x_3\,\mathrm{sgn}(\omega_r))), \tag{۱۸}$$

$$u_2 = \frac{1}{h}(x_3 + h\omega_r) \tag{۱۹}$$

قوانین کنترلی فیدبک فوق که شکل بسته دارند تابع عملکرد (۸) را کمینه می‌کنند. در اینجا ورودی‌های کنترلی سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای محاسبه شده‌اند که در واقع باید با استفاده از مدل دینامیکی ربات، گشتاورهای اعمالی لازم به چرخ‌ها برای تولید ورودی‌های مذکور محاسبه شوند. در بخش بعدی قوانین کنترلی بدست آمده مورد تحلیل و ارزیابی قرار خواهند گرفت.

۳-۱- تحلیل و ارزیابی قوانین کنترلی

در این قسمت ویژگی‌های اصلی قوانین کنترلی (۱۸) و (۱۹) و همچنین اهمیت پارامتر آزاد زمان پیش‌بینی h در قوانین کنترلی بررسی خواهد شد. با مشتق‌گیری از خروجی اول رابطه (۷) با فرض $\omega_r \neq 0$ و جایگذاری معادلات سیستم (۶) در آن، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_2\,\mathrm{sgn}(\omega_r) \\ &= -u_1 + u_2(x_2 + x_1\,\mathrm{sgn}(\omega_r)) + v_r(\cos x_3 - \sin x_3\,\mathrm{sgn}(\omega_r)) \end{aligned} \tag{۲۰}$$

قراردان قوانین کنترلی (۱۸) و (۱۹) در رابطه (۲۰) منجر می‌شود به:

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.1.2.9]

$$\dot{y}_1 + \frac{1}{h} y_1 = 0 \qquad (۲۱)$$

به همین ترتیب برای خروجی دوم خواهیم داشت:

$$\dot{y}_2 + \frac{1}{h} y_2 = 0 \qquad (۲۲)$$

واضح است که دینامیک خطاهای (۲۱) و (۲۲) خطی و مستقل از زمان می‌باشند. مشاهده می‌شود که قوانین کنترلی منجر به حالت خاصی از خطی‌سازی ورودی–خروجی می‌شوند. بدین ترتیب، سیستم حلقه بسته خطی و به ازای هر $h>0$ پایدار نمایی است و با کمتر کردن زمان پیش‌بین h می‌توان سرعت پاسخ‌دهی را افزایش داد. در این حالت داریم:

$$if\ t \to \infty, \quad \Rightarrow \begin{cases} y_1 \to 0 \Rightarrow x_1 \to x_2 \operatorname{sgn}(\omega_r) \\ y_2 \to 0 \Rightarrow x_3 \to 0. \end{cases} \qquad (۲۳)$$

هم اکنون با قرار دادن روابط (۲۳) و قوانین کنترلی (۱۸) و (۱۹) در دو معادله اول از معادلات (۶) خواهیم داشت:

$$\dot{x}_1 + \omega_r \operatorname{sgn}(\omega_r) x_1 = 0 \qquad (۲۴)$$

$$\dot{x}_2 + \omega_r \operatorname{sgn}(\omega_r) x_2 = 0 \qquad (۲۵)$$

با توجه به اینکه $\omega_r \neq 0$ معادلات (۲۴) و (۲۵) پایدار نمایی بوده و به عبارتی خواهیم داشت:

$$if \quad t \to \infty \Rightarrow \begin{cases} x_1 \to 0 \\ x_2 \to 0 \end{cases} \qquad (۲۶)$$

بنابراین با توجه به معادلات (۲۲)، (۲۴) و (۲۵) می‌توان نتیجه گرفت که سیستم کنترلی پیشنهادی با قوانین کنترلی (۱۸) و (۱۹) خطای ردیابی $\boldsymbol{e}^T = [e_x \ e_y \ e_\theta]$ را صفر می‌کند. در بخش بعدی به منظور نشان دادن عملکرد سیستم کنترلی طراحی شده در مواجه‌شدن با مانورهای مختلف، نتایج شبیه‌سازی‌های انجام گرفته مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

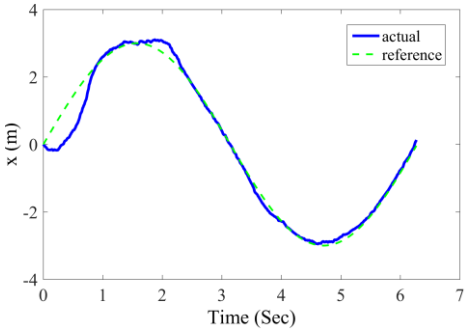
۴- نتایج شبیه‌سازی

برای نشان دادن عملکرد سیستم کنترلی، شبیه‌سازی‌های لازم بر روی مدل سینماتیکی ربات متحرک چرخدار با سه درجه‌آزادی انجام شده است. به منظور بررسی عملکرد کنترل‌کننده در شرایط واقعی، به متغیرهای حالت سیستم نویز سفید اعمال شده است. در مانور اول، هدف ردیابی مدل مرجع با معادلات زیر می‌باشد:

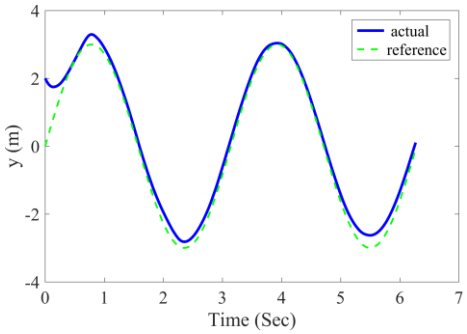
$$\begin{aligned} x_r &= 3\sin t \\ y_r &= 3\sin(2t) \end{aligned} \qquad (۲۷)$$

با توجه به رابطه (۲۷) موقعیت اولیه مسیر مرجع $\mathbf{x_r}(0) = (0,0,1.1071)^T$ می‌باشد. همچنین موقعیت اولیه واقعی ربات $\mathbf{x}(0) = (0,2,\pi/4)^T$ در نظر گرفته شده است. در شکل ۳ تغییر زمانی متغیرهای موقعیت ربات (x, y) نمایش داده شده است.

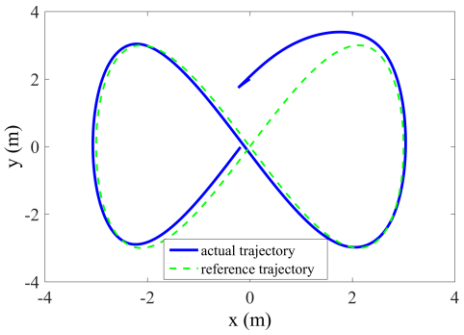
همان‌گونه که در این شکل دیده می‌شود، پاسخ‌های زمانی موقعیت ربات به سرعت توانسته‌اند به پاسخ‌های مدل مرجع برسند. همچنین از مقایسه مسیر ربات با مسیر مرجع در شکل ۴ نیز می‌توان به توانایی کنترل‌کننده طراحی شده در ردیابی مسیر مورد نظر با دقت بالا پی برد.



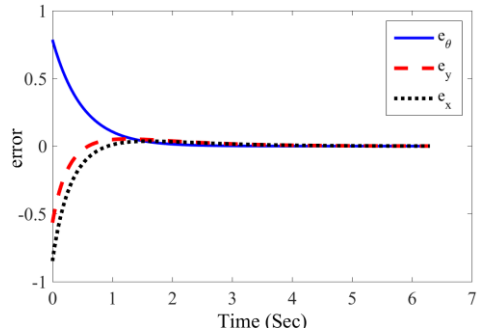
شکل ۳- الف: مقایسه مسیر ربات با مسیر مرجع (۲۷) (تغییرات زمانی x)



شکل ۳- ب: مقایسه مسیر ربات با مسیر مرجع (۲۷) (تغییرات زمانی y)



شکل ۴: مقایسه مسیر ربات در صفحه $x-y$ با مسیر مرجع (۲۷)

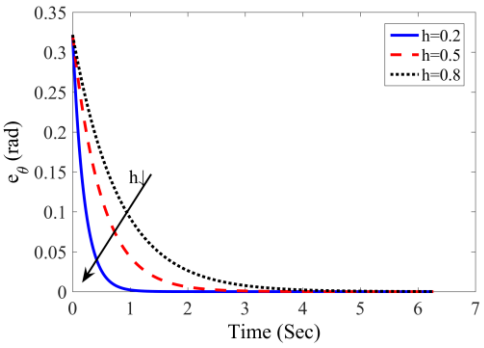


شکل ۵: خطاهای ردیابی مربوط به موقعیت انتقالی و موقعیت زاویه‌ای ربات (ردیابی مدل مرجع (۲۷))

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.1.2.9]

به‌علاوه، در شکل ۵ خطاهای ردیابی موقعیت طولی ربات (e_x, e_y) و خطای ردیابی موقعیت زاویه‌ای ربات e_θ، نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که در هر مورد، خطای اولیه به سرعت به صفر رسیده است.

در ادامه به منظور نشان دادن اثر پارامتر کنترلی h روی عملکرد سیستم کنترلی، شکل ۶ به ازای مقادیر مختلفی از زمان پیش‌بین برای خطای ردیابی موقعیت زاویه‌ای روبات شبیه‌سازی شده است. مشاهده می‌شود که با کاهش مقدار زمان پیش‌بین h، خطای ردیابی کمتر می‌شود و سرعت پاسخ‌دهی افزایش می‌یابد. البته باید توجه داشت که کاهش زمان پیش‌بین باعث افزایش انرژی کنترلی در ابتدای مانور می‌شود. زیرا انرژی کنترلی با زمان پیش‌بین مطابق با قوانین کنترلی (۱۸) و (۱۹) رابطه معکوس دارد. بنابراین می‌توان با تنظیم پارامتر کنترلی h مصالحه‌ای بین خطای ردیابی و انرژی کنترلی انجام داد.

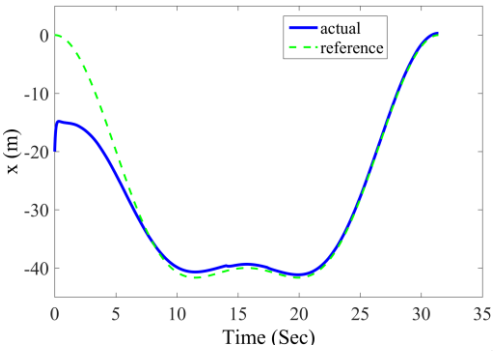


شکل ۶: اثر زمان پیش‌بین h روی عملکرد سیستم کنترلی (خطای ردیابی موقعیت زاویه‌ای مرجع(۲۷))

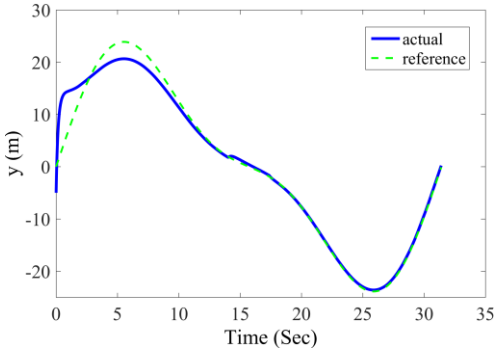
در مانور دوم، هدف ردیابی مدل مرجع با معادلات زیر می‌باشد:

$$x_r = (20 + 15\cos(0.2t))\cos(0.2t) - 35)$$
$$y_r = (20 + 15\cos(0.2t)\sin(0.2t)) \qquad (۲۸)$$

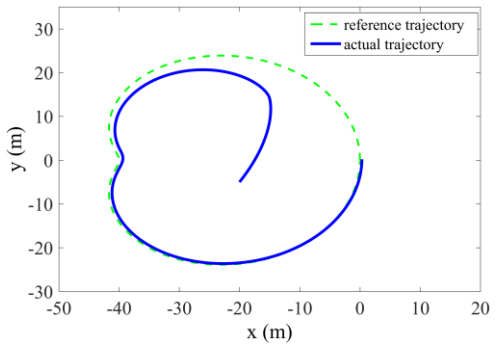
با توجه به رابطه (۲۸) موقعیت اولیه مسیر مرجع $\mathbf{x}_r(0) = (0,0,\pi/2)^T$ می‌باشد. همچنین موقعیت اولیه واقعی ربات $\mathbf{x}(0) = (-20,-5,\pi/3)^T$ در نظر گرفته شده است. جهت رعایت اختصار، در این مانور تنها چند نمودار انتخاب و رسم شده است. شکل‌های ۷ و ۸ به ترتیب مقایسه پاسخ‌های زمانی موقعیت ربات و میسر ربات در صفحه $x-y$ را با پاسخ‌های مرجع نشان می‌دهند.



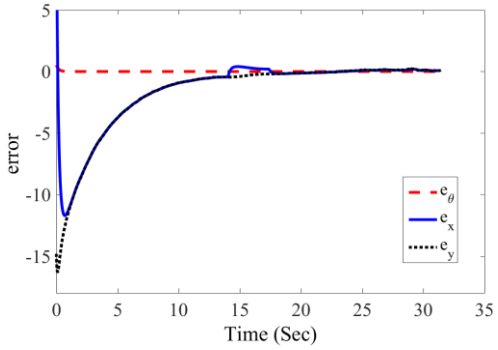
شکل ۷- الف: مقایسه مسیر ربات با مسیر مرجع (۲۸) (تغییرات زمانی x)



شکل ۷- ب: مقایسه مسیر ربات با مسیر مرجع (۲۸) (تغییرات زمانی y)



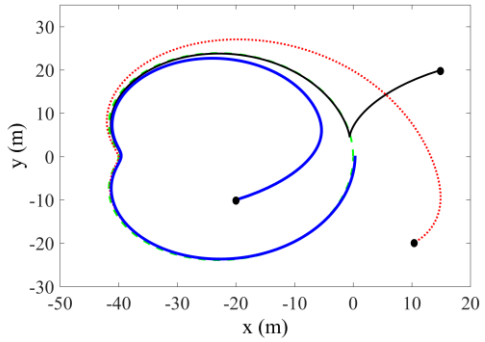
شکل ۸: مقایسه مسیر ربات در صفحه $x-y$ با مسیر مرجع (۲۸)



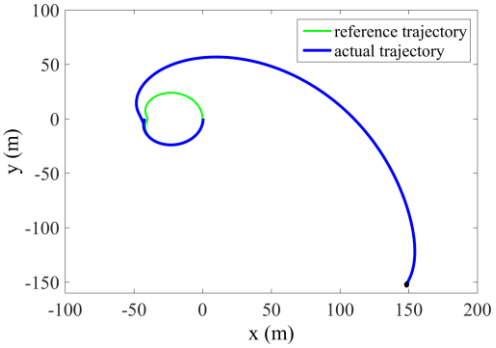
شکل ۹: خطاهای ردیابی مربوط به موقعیت انتقالی و موقعیت زاویه‌ای ربات (ردیابی مدل مرجع (۲۸))

در شکل ۹ نیز، خطاهای ردیابی موقعیت طولی ربات (e_x, e_y) و خطای ردیابی موقعیت زاویه‌ای ربات e_θ، نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که در این مانور هم پاسخ‌ها انطباق بسیار خوبی با پاسخ‌های مرجع دارند. در پایان، به منظور نشان دادن عملکرد سیستم کنترلی در شرایط اولیه مختلف، شکل ۱۰ شبیه‌سازی شده است. در شکل ۱۰-الف مشاهده می‌شود که به ازای شرایط اولیه مختلف، ربات توانسته به خوبی مسیر مرجع مورد نظر را ردیابی نماید. برای نشان دادن عملکرد سیستم کنترلی برای شرایط اولیه دور از مسیر مرجع شکل ۱۰-ب شبیه‌سازی شده است. مشاهده می‌شود که شرایط اولیه خیلی دور از مسیر مرجع، زمان و کیفیت رسیدن به مسیر مرجع را تحت تاثیر خواهد گذاشت، اما با دقت قابل قبولی مسیر مرجع ردیابی می‌شود.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.1.2.9]



شکل ۱۰-الف: مسیرهای ربات در ردیابی مدل مرجع (۲۸) به ازای شرایط اولیه مختلف



شکل ۱۰-ب: مسیر ربات در ردیابی مدل مرجع (۲۸) به ازای شرایط اولیه دور از مسیر مرجع

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش کنترل پیش‌بین برای طراحی کنترل‌کننده غیرخطی چند ورودی-چندخروجی به شکل تحلیلی و بهینه به منظور ردیابی مسیر مرجع توسط ربات متحرک چرخدار با قید هولونومیک توسعه داده شد. در ادامه با انتخاب خروجی‌های مناسب، ورودی‌های کنترلی مناسب برای پایدارسازی سیستم استخراج گردید. در بخش تحلیل و ارزیابی، دینامیک خطای ردیابی کنترل‌کننده پیشنهادی استخراج شده و پایداری تمامی حالت‌های سیستم مورد بررسی قرار گرفت. در پایان نتایج شبیه‌سازی‌ها در مانورهای مختلف، عملکرد مناسب سیستم کنترلی پیشنهادی در رسیدن به اهداف مورد نظر را نشان داد.

مراجع

[1] C.Wang, Z. Liang and Q. Jia, “Dynamic feedback robust stabilization of nonholonomic mobile robots based on visual servoing,” Journal of Control Theory Application., vol. 8, pp. 139-144, 2010.

[2] S. Blažič, “A novel trajectory-tracking control law for wheeled mobile robots,” Mechatronics Robotics and Autonomous Systems., vol. 59, pp. 1001-1007, 2011.

[3] A. Keymasi, B. M. Rahimi and S. Ali. A. Moosavian, “Non-Model-Based Control for a Wheeled Mobile Robot Towing two Trailers,” Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics, vol. 229, pp. 97 – 108, 2014.

[4] M. Asif and M. J. Khan, “Feedforward and Feedback Kinematic Controllers for Wheeled Mobile Robot Trajectory Tracking,” Journal of Automation and Control Engineering, vol. 83, pp. 178-182, 2015.

[5] K. J. Kalinski and M. Mazur, “Optimal control at energy performance index of the mobile robots following dynamically created trajectories,” Mechatronic, vol. 37, pp. 79-88, 2016.

[6] C. Samson,“Time-varying feedback stabilization of car like wheeled mobile robot,” International Journal of Robotics Research, vol. 12, pp. 55-64, 1993.

[7] F. Pourboghrat and M. P. Karlsson, “Adaptive control of dynamicmobile robotswith nonholonomic constraints,” Computers & Electrical Engineering, vol. 28, pp. 241-253, 2002.

[8] F. N. Matins, W. C. Celeste, R. Carelli, M. Sarcinelli-Filho and T. F. Bastosfilho, “An adaptive dynamic controller for autonomous mobile robot trajectory tracking,” Control Engineering Practice, vol. 16, pp. 1354-1363, 2008.

[9] J. X. Xu, Z. Q. Guo and T. H. Lee , “Design and Implementation of Integral Sliding-Mode Control on an Underactuated Two-Wheeled Mobile Robot,” IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 61, pp. 3672-3681, 2014.

[10] M. Asif, M. J. Khan and N. Cai, “Adaptive sliding mode dynamic controller with integrator in the loop for nonholonomic wheeled mobile robot trajectory tracking,” Int. J. Control, vol. 87, pp. 964-975, 2014.

[11] Kh. A. Keymasi and S. Ali A. Moosavian, “Adaptive Sliding Mode Control of a Wheeled Mobile Robot Towing a Trailer,” Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Jour of Sys and Control Eng, pp. 1 – 15, 2014.

[12] C. Y. Chen, T. H. S. Li, Y. C. Yeh and C. C. Chang, “Design and implementation of an adaptive sliding-mode dynamic controller for wheeled mobile robots,” Mechatronics, vol. 19, pp. 156-166, 2009.

[13] Kh. Shojaei, A. M. Shahri and A. Tarakameh, “Adaptive feedback linearizing control of nonholonomic wheeled mobile robots in presence of parametric and nonparametric uncertainties,” Robotics and Computer-

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.1.2.9]

[21] D. Gu and H. Hu, "Design Receding Horizon Tracking Control of Wheeled Mobile Robots," IEEE Transactions on Robotics, vol. 14, pp. 743 – 749, 2006.

[۲۲] م. میرزائی، ح. میرزائی‌نژاد، س. وحیدی، د. حیدریان، م. ج. خسروجردی،" کنترل و تخمین غیرخطی لغزش طولی تایر جهت استفاده در سیستم ترمز ضد قفل خودروهای سواری،" مجله کنترل، جلد ۵، ص ۵۱-۴۲، ۱۳۹۱.

[23] H. Mirzaeinejad and M. Mirzaei, "A novel method for non-linear control of wheel slip in anti-lock braking systems," Control Engineering Practice, vol. 18, pp. 918-926, 2010.

[24] H. Mirzaeinejad and M. Mirzaei, "A new approach for modelling and control of two-wheel anti-lock brake systems", Proc IMechE Part K: J Multi-body Dynamics, vol. 225, pp. 179-192, 2011.

[25] H. Mirzaeinejad, M. Mirzaei and R. Kazemi, "Enhancement of vehicle braking performance on split-k roads using optimal integrated control of steering and braking systems," Proc IMechE Part K: J Multi-body Dynamics, vol. 230, pp. 401-415, 2016.

[26] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyazaki and T. Noguchi, "A stable tracking control method for an autonomous mobile robot," International Conference on Robotics and Automation, USA, pp. 384-389, 1990.

[27] W. H. Chen, D. J. Balance and P. J. Gawthrop, "Optimal control of nonlinear systems: a predictive control approach," Automatica, vol. 39, pp. 633-641, 2003.

[28] J .J .E. Slotine and W. Li, "Applied Nonlinear Control," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1991.

Integrated Manufacturing, vol 27, pp.194–204, 2011.

[14] Kh. A. Keymasi and S. Ali A. Moosavian, "Robust Adaptive Controller for a Tractor-Trailer Mobile Robot," IEEE-ASME Transactions on Mechatronics, vol 19, pp 943 – 953, 2014.

[15] S.G.Tzafestas, K.M. Deliparaschos and G.P. Moustris, "Fuzzy logic path tracking control for autonomous non-holonomicmobile robots: design of system on a chip," Robotics and Autonomous Systems, vol. 58, pp. 1017-1027, 2010.

[16] Z. P. Jinag and H. Nijmeijer, "control of mobile robots: A case study in backstepping," Robotics and Autonomous Systems, vol. 33, pp. 1393-1399, 1997.

[17] R. Fierro and F. L. Lewis, "Control of a nonholonomic mobile robot: Backstepping kinematics into dynamics," In Proc. 34th IEEE CDC,New Orleans, LA, pp. 3805–3810, 1995.

[18] R. J. Wai and C. M. Liu, "Design of dynamic petri recurrent fuzzy neural network and its application to path-tracking control of nonholonomic mobile robot," Computers & Electrical Engineering, vol. 56, pp. 2667-2683, 2009.

[19] M. H. Khooban, "Design an intelligent proportional-derivative (PD) feedback linearization control for nonholonomic-wheeled mobile robot," Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, vol. 26, pp. 1833-1843, 2014.

[20] P. Coelho and U. Nunes, "Design Path-following control of mobile robots in presence of uncertainties," IEEE Transactions on Robotics, vol. 21, pp. 252 – 261, 2005.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.1.2.9]