

طراحی تحلیلی کنترل کننده بهینه‌ی غیرخطی مقید برای سیستم تعلیق فعال خودرو با در نظر گرفتن محدودیت دینامیک عملگر

بهمن عبدی^۱، مهدی میرزایی^۲، صدرا رفعت‌نیا^۳، احمد اکبری الوانق^۴

^۱ دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، گروه مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند تبریز، b_abdi@sut.ac.ir

^۲ دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، گروه مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند تبریز، mirzaei@sut.ac.ir

^۳ دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، گروه مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند تبریز، s_rafatnia@sut.ac.ir

^۴ استادیار، دانشکده مهندسی برق، گروه برق، دانشگاه صنعتی سهند تبریز، a.akbari@sut.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۵/۱۹، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۶/۳/۱۴)

چکیده: در این مقاله، یک قانون کنترل بهینه‌ی غیرخطی مقید برای سیستم تعلیق فعال خودرو با در نظر گرفتن محدودیت دینامیک عملگر هیدرولیکی به صورت تحلیلی توسعه داده می‌شود. در استخراج این قانون کنترلی جدید، اثرات غیرخطی در نیروهای فنر، میرایی و عملگر هیدرولیکی در نظر گرفته شده است. ورودی کنترلی سیستم، جابجایی قرقره شیر هیدرولیک است که در عمل محدود بوده و باید قید آن در استخراج قانون کنترلی لحاظ شود. در روش پیشنهادی، ابتدا مسئله‌ی کنترلی مذکور با استفاده از ایده‌ی پیش‌بین و با تشکیل شاخص عملکردی که ترکیب وزن‌داری از پاسخ‌های پیش‌بینی شده‌ی سیستم غیرخطی و ورودی کنترلی است به یک مسئله بهینه‌سازی غیرخطی مقید تبدیل می‌شود. سپس این مسئله بهینه‌سازی با استفاده از قضیه‌ی کن-تاکر بصورت تحلیلی حل شده و قانون کنترل بهینه‌ی مقید برای سیستم تعلیق بدست می‌آید. قانون بدست آمده به شکل بسته بوده و برای حل و پیاده‌سازی راحت می‌باشد. در نهایت، عملکرد کنترل کننده‌ی پیشنهادی با استفاده از شبیه‌سازی مدل خودرو روی یک جاده با ورودی تصادفی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. نتایج نشان‌دهنده کاهش چشمگیر شتاب بدنه و بهبود راحتی سفر با استفاده از ورودی کنترلی محدود شده می‌باشد. ضمن اینکه دیگر پاسخ‌های سیستم تعلیق اعم از جابجایی تعلیق و جابجایی تایر نیز در وضعیت مناسبی می‌باشند.

کلمات کلیدی: سیستم تعلیق فعال، کنترل بهینه مقید، دینامیک غیرخطی، عملگر هیدرولیکی.

Analytical Design of Constrained Nonlinear Optimal Controller for Vehicle Active Suspension System considering the Limitation of Hydraulic Actuator

Bahman Abdi, Medi Mirzaei, Sadra Rafatnia, Ahmad Akbari Alvanagh

Abstract: In this paper, a constrained nonlinear optimal control law is analytically developed for vehicle active suspension system considering the limitation of hydraulic actuator. In the design of the controller, the nonlinear characteristics of spring and damper forces and hydraulic actuator are considered. The control input is the displacement of the hydraulic valve spool which is bounded in practice and its constraint should be considered in the design process. In the proposed method, the control problem is firstly transformed to a constrained nonlinear optimization problem by performing a performance index defined as a weighted combination of predicted responses of nonlinear suspension system and control input. Then, this equivalent constrained optimization problem is solved using Kuhn-Tucker theorem to find the constrained optimal control law. The derived control law is in the closed form which is easy to solve and implementation. The controller performance is evaluated through computer simulation of the vehicle suspension model excited by a random road input. The obtained result indicate a remarkable decrease of the body acceleration

which leads to the ride comfort. Meanwhile, other suspension responses including suspension and tire deflections are in suitable ranges.

Keywords: active suspension system, constrained optimal control, nonlinear control, hydraulic actuator.

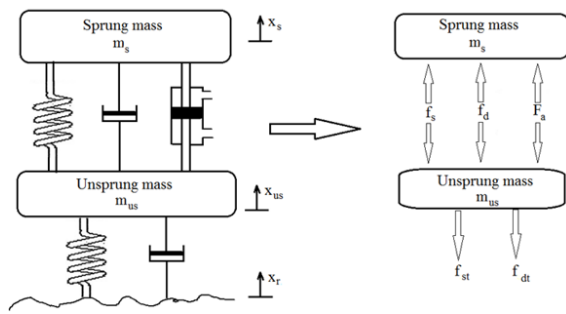
۱- مقدمه

اهداف اصلی سیستم تعلیق خودرو، جداسازی بدنه خودرو و مسافران از اغتشاشات جاده همزمان با حفظ تماس تایرها با جاده می باشد. جابجایی تعلیق نیز باید در حد مطلوب و در فضای کاری سیستم قرار گیرد. این اهداف متضاد نمی توانند در خودروهای معمولی بطور همزمان ارضاء شوند و طراحی یک سیستم تعلیق مناسب مستلزم ایجاد مصالحه بین اهداف متضاد می باشد [۱]. یک روش مناسب برای رسیدن به اهداف بالا در دامنه وسیعی از فرکانس های ورودی جاده استفاده از سیستم تعلیق فعال است. در سیستم تعلیق فعال یک عملگر برای ایجاد نیروی خارجی مابین جرم معلق و غیر معلق قرار می گیرد [۲]. یک نوع از سیستم های فعال جهت استفاده در سیستم های تعلیق خودرو از محرک های هیدرولیکی استفاده می کند. در این سیستم ها، نیرو به وسیله یک عملگر هیدرولیکی به همراه یک شیر چهارراه ایجاد می شود [۳، ۴]. در اکثر پژوهش های گذشته کنترل کننده ی سیستم تعلیق فعال با استفاده از تئوری های کنترل خطی طراحی و تحلیل شده اند. در میان آن ها کنترل بهینه پیش بین خطی برای بهبود راحتی سفر و فرمان پذیری استفاده شده است [۵، ۶]. در کارهای دیگر کنترل کننده های پس خورد حالت H_{∞} در قالب نامعادله های ماتریسی خطی طراحی شده اند [۷، ۸].

باید توجه کرد که در یک سیستم تعلیق واقعی، مشخصات نیروهای فتر و میراکننده غیرخطی می باشند [۹]. دینامیک یک شیر هیدرولیکی نیز کاملاً غیرخطی است [۳، ۴]. از این رو در برخی تحقیقات برای سیستم های تعلیق فعال، قوانین کنترلی غیر خطی مورد استفاده قرار گرفته اند. در [۱۰] کنترل کننده غیرخطی با رویکرد تطبیقی برای سیستم تعلیق فعال استفاده شده است. در [۱۱] طراحی کنترل کننده با روش خطی سازی پس خورد برای سیستم های چند ورودی - چند خروجی جهت ردیابی و جدا کردن اغتشاشات جاده استفاده شده است. در [۴] کنترل کننده ی مد لغزشی با استفاده از یک انتگرال گیر برای سیستم تعلیق فعال با در نظر گرفتن دینامیک عملگر طراحی شده است. در [۳] کنترل کننده مد لغزشی با پس خورد خروجی برای سیستم تعلیق فعال به همراه دینامیک عملگر طراحی شده است. روش های مهم غیرخطی دیگری نیز برای سیستم تعلیق فعال استفاده شده اند که می توان به خطی سازی پس خورد با شبکه عصبی پیش خورد چند لایه [۱۲]، کنترل امپدانس [۱۳] و کنترل مد - لغزشی فازی [۱۴] اشاره کرد. در همه روش های غیرخطی اشاره شده در بالا، اولاً مشخصه های غیرخطی بطور همزمان در المان های سیستم تعلیق و دینامیک عملگر در نظر گرفته نشده است و ثانیاً بهینه سازی به عنوان روش اصلی برای پیدا کردن قانون کنترلی استفاده نشده است. در [۱۵]

مسئله کنترل بهینه برای سیستم تعلیق نیمه- فعال و با بکارگیری اصل حداقل پونتریاگین و با حل عددی توسعه داده شده است. در حالت کلی بکارگیری تئوری های کلاسیک کنترل بهینه برای سیستم های غیرخطی نیازمند حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی می باشد که پیدا کردن حل تحلیلی برای این مسائل ناممکن و یا بسیار مشکل می باشد. علاوه بکارگیری روش های محاسباتی عددی نیازمند بهینه سازی دینامیکی در هر لحظه بوده که حل و پیاده سازی آن ها را از نظر زمانی مشکل می کند [۱۶-۱۹]. بنابراین بعضی از روش های تقریبی باید برای حل مسئله بکار برده شوند. در این راستا استفاده از توابع تکه ای برای تقریب ورودی کنترلی مورد استفاده قرار گرفته است [۲۰]. در [۲۱] روش تقریبی توابع هیبرید برای حل مسائل کنترل بهینه مقید پیشنهاد شد. در [۲۲] یک کنترل کننده ی بهینه غیرخطی بصورت تحلیلی برای یک سیستم تعلیق فعال اما در حالت نامقید و بدون در نظر گرفتن دینامیک عملگر ارائه شده است. این روش براساس پیش بین پاسخهای دینامیک غیرخطی سیستم تعلیق با المانهای غیرخطی توسعه داده شده است و قانون کنترل بهینه به شکل تحلیلی بدون در نظر گرفتن دینامیک عملگر و محدودیت های آن ارائه شده است. در [۲۳] یک کنترل کننده مقاوم و تطبیقی مقید برای پوشش دادن به مشکلات اشباع شدن عملگر و قیدهای عملکرد سیستم تعلیق بدون در نظر گرفتن دینامیک عملگر توسعه داده شده است.

هدف اصلی از طراحی یک سیستم تعلیق فعال با عملگر هیدرولیکی، یافتن قانون کنترلی برای محاسبه مقدار مناسب جابجایی قرقره شیر هیدرولیک به عنوان ورودی کنترلی می باشد که این مقدار ضمن بهینه بودن باید بتواند بین اهداف متضاد نیز مصالحه ایجاد نماید. اما ذکر این مسئله نیز لازم است که در عمل جابجایی قرقره شیر هیدرولیکی محدود می باشد و بنابراین ورودی کنترلی باید مقید گردد. در این پژوهش، یک روش تحلیلی جدید براساس کنترل بهینه مبتنی بر پیش بین برای دینامیک غیرخطی سیستم تعلیق فعال با قید روی ورودی ارائه می شود. روش پیشنهادی در سه مرحله خلاصه می شود: تعریف شاخص عملکرد در بازه زمانی پیش بینی، پیش بینی حالت های سیستم با استفاده از بسط سری تیلور و بهینه سازی با یک روش بهینه مقید و تحلیلی. در اینجا مسئله ی بهینه سازی معادل با استفاده از تئوری کن- تاکر بصورت تحلیلی حل شده و قانون کنترلی بهینه مقید غیرخطی بدست خواهد آمد. کنترل کننده پیشنهادی به شکل بسته بوده و برای پیاده سازی و حل مناسب می باشد. این در حالی است که روش های کنترل پیش بین غیرخطی متداول دارای زمان حل طولانی بوده و برای سیستم های مکانیکی که دینامیک سریع دارند مناسب نمی باشند. در انتهای مقاله، کارآیی و عملکرد کنترل



شکل ۱: مدل یک چهارم و دیگران آزاد سیستم تعلیق فعال

نحوه مدل سازی فنر و میراگر در تحلیل و طراحی سیستم تعلیق بسیار مهم است. در مدل خطی، نیروهای فنر و میراگر مابین جرم های معلق و غیرمعلق به ترتیب بصورت توابع خطی از جابجایی و سرعت تعلیق در نظر گرفته می شوند، در حالیکه نیروهای فنر f_s و میراگر f_d در حالت واقعی دارای رفتار غیرخطی می باشند. نتایج تجربی نشان می دهد که این نیروها به صورت توابع چند جمله ای بیان می شوند، بطوریکه نیروی فنر بصورت یک چندجمله ای مرتبه سوم از جابجایی تعلیق و نیروهای میراگر نیز یک چندجمله ای درجه دوم از سرعت نسبی بین جرم معلق و غیرمعلق در نظر گرفته می شوند [۹]:

$$f_s = k_1 \Delta x + k_2 \Delta x^2 + k_3 \Delta x^3 \quad (3)$$

$$f_d = c_1 \dot{\Delta x} + c_2 \dot{\Delta x}^2 \quad (4)$$

در رابطه فوق Δx و $\dot{\Delta x}$ به ترتیب جابجایی و سرعت جرم معلق می باشند.

نیروهای فنر و میرایی تاثیر نیز بصورت زیر فرض می شوند:

$$f_{st} = k_{us}(x_{us} - x_r) \quad (5)$$

$$f_{dt} = c_{us}(\dot{x}_{us} - \dot{x}_r) \quad (6)$$

در روابط فوق k_{us} و c_{us} به ترتیب ضریب فنر و میرایی دمپر تایر و ورودی جاده می باشند که بصورت اغتشاش به سیستم اعمال می شود.

با توجه به معادلات غیر خطی (۱) و (۲)، معادلات فضای حالت مربوط به حرکت سیستم تعلیق بصورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_4 \quad (7)$$

$$\dot{x}_2 = f_1 + F_a/m_s \quad (8)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 - \dot{x}_r \quad (9)$$

$$\dot{x}_4 = f_2 - F_a/m_{us} \quad (10)$$

که $x_4 = \dot{x}_{us}$ و $x_3 = x_{us} - x_r$ ، $x_2 = \dot{x}_s$ ، $x_1 = x_s - x_{us}$ که حالت سیستم بوده و با این انتخاب x_1 جابجایی تعلیق، x_2 سرعت مطلق

کننده ی پیشنهادی با استفاده از شبیه سازی های کامپیوتری در روی یک جاده با ورودی تصادفی بررسی شده و نتایج بدست آمده با نتایج حالت کنترل بهینه نامقید که محدودیت های عملکرد را در نظر نمی گیرد و نتایج آن قبلاً توسط نویسندگان در مرجع [۲۲] ارائه شده مقایسه خواهند شد. همچنین یکی از استراتژی های متداول بکار رفته در کارهای قبلی که از روش کنترل مد لغزشی برای طراحی سیستم تعلیق فعال استفاده نموده است پیاده سازی شده و نتایج حاصل با روش پیشنهادی در این مقاله مقایسه می گردد.

در بخش های بعد ابتدا به مدل سازی دینامیکی سیستم با در نظر گرفتن دینامیک عملکرد خواهیم پرداخت. سپس روش کنترلی تشریح شده و قانون کنترلی استخراج می شود. در ادامه شبیه سازی و نتایج حاصل مورد بحث و بررسی قرار خواهند گرفت.

۲- مدل سازی سیستم تعلیق

اولین گام در فرآیند طراحی یک سیستم کنترلی، مدل سازی دینامیکی آن است. مدل دینامیکی، توصیف کننده رفتار سیستم و در برگیرنده ویژگی های اساسی سیستم واقعی است. در این پژوهش، با توجه به اینکه هدف طراحی، راحتی سرنشین و ایمنی سفر با استفاده از نیروی عملکرد محدود می باشد، مدل یک چهارم غیرخطی با دو درجه آزادی برای سیستم تعلیق خودرو در نظر گرفته می شود، بطوریکه عملکرد هیدرولیکی به موازات عناصر تعلیق غیرفعال به سیستم افزوده می شود. دینامیک سیستم تعلیق فعال را دو بخش شامل دینامیک سیستم تعلیق و دینامیک عملکرد بصورت زیر بررسی می کنیم.

۲-۱- دینامیک سیستم تعلیق

در این قسمت، معادلات حرکت برای مدل یک چهارم غیرخطی سیستم تعلیق نوشته می شود. در این مدل فنر و میراگر بصورت غیرخطی و مبتنی بر رفتار واقعی در نظر گرفته شده اند. در شکل ۱ دیگران آزاد سیستم تعلیق فعال با دو درجه آزادی نمایش داده شده است. با توجه به این شکل و استفاده از قانون دوم نیوتن برای جرم معلق و غیر معلق داریم:

$$m_s \ddot{x}_s = -f_s - f_d + F_a \quad (1)$$

$$m_{us} \ddot{x}_{us} = f_s + f_d - f_{st} - f_{dt} - F_a \quad (2)$$

در روابط فوق، m_s جرم معلق، m_{us} جرم غیرمعلق، x_s جابجایی جرم معلق، x_{us} جابجایی جرم غیر معلق، f_s نیروی فنر، f_d نیروی میراگر، f_{st} و f_{dt} به ترتیب نیروهای فنر و میرایی تایر و در نهایت F_a نیروی خارجی ایجاد شده توسط عملکرد هیدرولیکی می باشد.

جرم معلق، x_3 جابجایی تایلر و x_4 سرعت مطلق جرم غیر معلق می باشد. برای دستیابی به شکل ساده ای از معادلات حالت، همه نیروهای الاستیک و میرایی در f_1 و f_2 جمع شده اند:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_4 \quad (17)$$

$$\dot{x}_2 = f_1 + Ax_5/m_s \quad (18)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 - \dot{x}_r \quad (19)$$

$$\dot{x}_4 = f_2 - Ax_5/m_{us} \quad (20)$$

$$\dot{x}_5 = f_3 + \gamma w_a u \quad (21)$$

که در این معادلات x_5 و u نیز بترتیب اختلاف فشار و جابجایی قرقره شیر می باشد. همچنین $w_a = f_3 - \beta x_5 - \alpha A(x_2 - x_4)$ و $f_3 = -\beta x_5 - \alpha A(x_2 - x_4)$ می باشد. در حالت کلی متغیرهای حالت سیستم با در نظر گرفتن این متغیر حالت جدید به همراه متغیرهای حالت سیستم تعلیق به شکل زیر خواهند شد:

$$X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T \\ = [x_s - x_{us} \ \dot{x}_s \ x_{us} - x_r \ \dot{x}_{us} \ P_L]^T \quad (22)$$

۳- طراحی کنترل کننده

هدف اصلی از کنترل سیستم تعلیق خودرو کاهش شتاب بدنه $\ddot{x}_2$ جابجایی تعلیق x_1 و جابجایی تایلر x_3 تحت اغتشاشات جاده ای با استفاده از نیروی عملگر محدود می باشد. برای دستیابی به این اهداف از رویکرد بهینه مقید برای محاسبه ورودی کنترلی استفاده خواهد شد. البته لازم بذکر است که با استفاده از ورودی کنترلی محدود حذف کامل و صفر کردن همه خروجی های سیستم در حضور اغتشاشات جاده ای امکان پذیر نمی باشد، هرچند که با بکارگیری قانون کنترلی قابل تنظیم می توان ما بین خروجی های متضاد مصالحه ایجاد نمود.

۳-۱- توسعه قانون کنترلی

در این بخش، برای دستیابی به پاسخ های مطلوب سیستم تعلیق، یک قانون کنترلی بهینه غیرخطی با در نظر گرفتن دینامیک عملگر و قید روی ورودی آن محاسبه خواهد شد. در ابتدا شاخص عملکرد بصورت ترکیب وزنداری از پاسخ های پیش بینی شده و ورودی کنترلی بدست خواهد آمد. سپس برای بدست آوردن قانون کنترلی بهینه به شکل تحلیلی، شرایط لازم برای بهینه کردن تابع هزینه بکار برده می شود. کنترل کننده پیشنهادی را برای دو حالت بسط داده و بررسی می شوند. در حالت کنترل کننده نامقید، برای پیدا کردن قانون کنترلی قید روی ورودی در نظر گرفته نمی شود و برای کنترل کننده مقید، با کمینه کردن تابع هزینه تحت ورودی کنترلی محدود و با استفاده از شرایط کن تاکر قانون کنترلی محاسبه خواهد شد.

$$f_1 = \left(-\frac{1}{m_s}\right)[f_s + f_d] \quad (11)$$

$$f_2 = \left(\frac{1}{m_{us}}\right)[f_s + f_d - f_{st} - f_{dt}] \quad (12)$$

۲-۲- دینامیک عملگر

در این پژوهش، نیروی فعال F_a بوسیله یک عملگر هیدرولیکی جاسازی شده مابین جرم های معلق و غیرمعلق تولید می شود. این عملگر بصورت موازی با فنر و دمپر در محل فوق قرار می گیرد. عملگر هیدرولیکی شامل یک شیر هیدرولیکی چهار راهه می باشد و دینامیک آن به شدت غیر خطی است. نیروی فعال F_a تولید شده توسط عملگر با استفاده از رابطه زیر بیان می گردد:

$$F_a = AP_L \quad (13)$$

که A سطح مقطع پیستون و P_L اختلاف فشار در دو طرف پیستون می باشد. نسبت تغییرات P_L بصورت زیر بیان می گردد [۳]:

$$\frac{V_t}{4\beta_e} \dot{P}_L = Q_L - C_t P_L - A(\dot{x}_s - \dot{x}_{us}) \quad (14)$$

در معادله فوق، V_t حجم کل سیلندر عملگر، β_e ضریب بالک مؤثر، C_t ضریب نشت کل پیستون و Q_L دبی جریان هیدرولیک می باشد. شدت جریان هیدرولیک عبوری از شیر چهارراهه با رابطه زیر بیان می گردد:

$$Q_L = C_d \omega x_v \operatorname{sgn}(P_s) \sqrt{\frac{1}{\rho} |P_s - P_L \operatorname{sgn}(x_v)|} \quad (15)$$

در رابطه فوق x_v جابجایی قرقره شیر هیدرولیک، C_d ضریب تخلیه، ω شیب سطح قرقره شیر و ρ چگالی روغن هیدرولیک می باشد. معادلات (۱۴) و (۱۵) می توانند به شکل زیر نوشته شوند:

$$\dot{P}_L = -\beta P_L - \alpha A(\dot{x}_s - \dot{x}_{us}) + \gamma x_v \operatorname{sgn}(P_s) - P_L \operatorname{sgn}(x_v) \sqrt{|P_s - P_L \operatorname{sgn}(x_v)|} \quad (16)$$

که در معادله فوق α ، β و γ بصورت زیر بیان می گردند:

$$\alpha = \frac{4\beta_e}{V_t} \quad \beta = \alpha C_t \quad \gamma = \alpha C_d \omega \sqrt{\frac{1}{\rho}}$$

در این مقاله، جابجایی قرقره شیر هیدرولیک بعنوان ورودی کنترلی در نظر گرفته می شود ($u = x_v$).

سیستم می‌باشد. بدین ترتیب و با فرض برابری مرتبه بسط تیلور برای هر خروجی با درجه نسبی آن خروجی، مقادیر خروجی‌ها در بازه زمانی بعدی به صورت زیر پیش‌بینی می‌شوند:

$$y_1(t+h) = y_1 + h\dot{y}_1 + 0.5h^2\ddot{y}_1 + \frac{h^3}{6}\left(\dot{f}_1 - \dot{f}_2 + A_a\left(\frac{1}{m_s} + \frac{1}{m_{us}}\right)(f_3 + \gamma w_a u)\right) = G_1 + c_1 w_a u \quad (27)$$

$$y_2(t+h) = y_2 + h\left(\dot{f}_1 + \frac{A_a}{m_s}(f_3 + \gamma w_a u)\right) = G_2 + c_2 w_a u \quad (28)$$

$$y_3(t+h) = y_3 + h\dot{y}_3 + \frac{h^2}{2}\ddot{y}_3 + \frac{h^3}{6}\left(\dot{f}_2 - \frac{A_a}{m_{us}}(f_3 + \gamma w_a u)\right) = G_3 + c_3 w_a u \quad (29)$$

که مقادیر c_1 تا c_3 به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$c_1 = \frac{A_a h^3 \gamma}{6} \left(\frac{1}{m_s} + \frac{1}{m_{us}} \right) \quad c_2 = \frac{A_a h \gamma}{m_s} \quad c_3 = -\frac{A_a h^3 \gamma}{6 m_{us}} \quad (30)$$

و جملات G_i ($i=1,2,3$) که شامل خروجی و متغیرهای حالت فعلی می‌باشند با مقایسه طرف‌های چپ و راست معادلات فوق پراحتی بدست می‌آیند.

$$G_1 = y_1 + h\dot{y}_1 + 0.5h^2\ddot{y}_1 + \frac{h^3}{6}\left(\dot{f}_1 - \dot{f}_2 + A_a\left(\frac{1}{m_s} + \frac{1}{m_{us}}\right)f_3\right) \quad (31)$$

$$G_2 = y_2 + h\left(\dot{f}_1 + \frac{A_a}{m_s}f_3\right) \quad G_3 = y_3 + h\dot{y}_3 + \frac{h^2}{2}\ddot{y}_3 + \frac{h^3}{6}\left(\dot{f}_2 - \frac{A_a}{m_{us}}f_3\right)$$

با جاگذاری معادلات (۲۷) الی (۲۹) در معادله (۲۴) می‌توان شاخص عملکرد را بشکل زیر بسط داد:

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \rho_i (G_i + c_i w_a u)^2 + \frac{1}{2} \rho_4 u^2(t) \quad (32)$$

حال قانون کنترل بهینه برای $u(t)$ با کمینه کردن شاخص عملکرد (۳۲) قابل محاسبه می‌باشد. در این مرحله می‌توان دو حالت را در نظر گرفت. در حالت کنترل کننده نامقید شرایط لازم برای بهینه‌سازی معادله (۳۲) بدون در نظر گرفتن قید اعمال می‌شود و در حالت کنترل کننده مقید

با توجه به اینکه هدف از طراحی کنترل کننده برای سیستم تعلیق فعال، ایجاد مصالحه بین راحتی سرنشین و جاده‌پذیری در کنار جابجایی تعلیق محدود با استفاده از ورودی کنترلی محدود می‌باشد، در نتیجه سه متغیر کنترلی x_1 ، $\dot{x}_2$ و x_3 به عنوان خروجی‌های سیستم در نظر گرفته می‌شوند:

$$y_1 = x_1; y_2 = \dot{x}_2; y_3 = x_3 \quad (23)$$

اکنون قانون کنترلی غیرخطی مبتنی بر پیش‌بین و بر پایه بهینه‌سازی برای طراحی کنترل کننده‌ای که بین خروجی‌های فوق و با استفاده از ورودی کنترلی محدود مصالحه ایجاد کند، ارائه می‌شود. در این روش، ابتدا پاسخ های غیرخطی خروجی‌ها $y_i(t+h)$ ($i=1,2,3$) برای بازه زمانی بعدی $y_i(t+h)$ با استفاده از بسط تیلور پیش‌بینی می‌شود و سپس ورودی کنترلی فعلی $u(t)$ براساس کمینه کردن شاخص عملکرد با در نظر گرفتن قید روی ورودی تعیین می‌شود. زمان پیش‌بینی h نیز یک عدد حقیقی مثبت می‌باشد. شاخص عملکرد زیر به صورت شبیه‌نقطه‌ای، خروجی‌های پیش‌بینی شده آتی و ورودی کنترلی فعلی را جریمه می‌کند:

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \rho_i y_i^2(t+h) + \frac{1}{2} \rho_4 u^2(t) \quad (24)$$

که در آن $\rho_i > 0$ و $\rho_4 \geq 0$ ضرایب وزنی هستند که اهمیت نسبی جملات را مشخص می‌کنند. هر کدام از خروجی‌ها توسط سری تیلور بصورت زیر بسط داده می‌شود:

$$y_i(t+h) = y_i(t) + h\dot{y}_i(t) + \frac{h^2}{2!}\ddot{y}_i(t) + \dots + \frac{h^{k_n}}{k_n!} y_i^{(k_n)}(t) \quad (25)$$

گام بعدی تعیین مرتبه بسط k_n می‌باشد که برابر با درجه نسبی سیستم بعلاوه مرتبه کنترلی است [۱۶، ۱۷]. درجه نسبی هر خروجی عبارت است از کمترین مرتبه مشتق آن خروجی به گونه‌ای که به ازای آن ورودی u برای اولین بار بصورت صریح ظاهر شود. اما مرتبه کنترلی درجه تغییرات ورودی کنترلی u ، در بازه زمانی پیش‌بینی می‌باشد. برای سیستم‌های با درجه نسبی پائین مثلاً "درجات نسبی کمتر از چهار که سیستم‌های خوش تعریف نامیده می‌شوند، مرتبه کنترلی صفر نتایج خوبی بدست می‌دهد زیرا باعث می‌شود مشتق ورودی کنترلی در پیش‌بینی هر خروجی صفر شود و عملکرد نسبتاً مناسبی برای سیستم‌های غیرخطی با درجات نسبی پایین حاصل شود [۱۶، ۱۷].

$$\frac{d}{d\tau} u(t+\tau) = 0 \quad \text{for } \tau \in [0, h] \quad (26)$$

با استفاده از مطالب فوق و با توجه به معادلات (۱۷) تا (۲۱)، درجه نسبی سیستم نسبت به هر دو خروجی y_1 و y_3 برابر $r = 3$ و نسبت به y_2 برابر $r = 1$ می‌باشد که نشان دهنده‌ی خوش تعریف بودن دینامیک

نیز معادله (۳۲) با در نظر گرفتن قید روی ورودی حل می شود. در زیر هر دو کنترل کننده به ترتیب توسعه داده می شوند.

۳-۱-۱- کنترل کننده بهینه نامقید

برای محاسبه ی قانون کنترلی بهینه برای حالت نامقید، شرط لازم برای بهینه سازی شاخص عملکرد (۳۲) که یک عبارت درجه دو می باشد بصورت زیر اعمال می گردد:

$$\frac{\partial J}{\partial u} = 0 \quad (33)$$

با جاگذاری تابع عملکرد (۳۲)، معادله فوق بصورت زیر حاصل می شود:

$$\sum_{i=1}^3 \rho_i (G_i + c_i w_a u) c_i w_a + \rho_4 u = 0 \quad (34)$$

حل معادله ی فوق قانون کنترلی بهینه نامقید را به شکل زیر خواهد داد:

$$u = - \left\{ \sum_{i=1}^3 \rho_i c_i^2 w_a^2 + \rho_4 \right\}^{-1} \times \sum_{i=1}^3 \rho_i G_i c_i w_a \quad (35)$$

کنترل کننده (۳۵) در یک شکل بسته ارائه شده که اجرای آن نیز آسان می باشد. پاسخ های سیستم تعلیق می توانند بوسیله تنظیم کردن ضرایب وزنی $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ تنظیم شوند. بعنوان مثال با انتخاب $\rho_1 = \rho_3 = 0$ و $\rho_2 \neq 0$ فقط شتاب جرم معلق برای راحتی سفر و بدون توجه به ایمنی سفر و جابجایی تعلیق کاهش می یابد. لازم بذکر است که اگر ضریب وزنی مربوط به ورودی کنترلی، صفر در نظر گرفته شود ($\rho_4 = 0$) هیچ محدودیتی بر روی ورودی کنترلی نخواهیم داشت که به آن کنترل ارزان می گوئیم.

به منظور بررسی کافی بودن تعداد جملات انتخابی از بسط تیلور برای پیش بینی پاسخ هر خروجی در سیستم تعلیق، دینامیک خطای کنترل کننده نامقید (۳۵) در حالت ارزان و برای حالتی که فقط شتاب جرم معلق را کنترل می کند، با در نظر گرفتن ضرایب وزنی $\rho_1 = \rho_3 = \rho_4 = 0$ به شکل زیر نوشته می شود:

$$u = -(c_2 w_a)^{-1} G_2 \quad (36)$$

با جاگذاری این ورودی کنترلی در معادلات (۱۷) تا (۲۱) و انجام برخی عملیات ریاضی، دینامیک حلقه بسته برای خروجی دوم به شکل زیر قابل محاسبه می باشد.

$$\dot{y}_2 + \frac{1}{h} y_2 = 0 \quad (37)$$

که در آن $\dot{y}_2 = \dot{x}_2 = \dot{x}_s$ شتاب جرم معلق می باشد. معادله ی (۳۷) نشان می دهد که سیستم حلقه بسته برای شتاب جرم معلق خطی شده و به ازای $h > 0$ به صورت نمایی پایدار می شود. ملاحظه می گردد که روش کنترلی پیشنهادی در حالت خاص منجر به خطی سازی فیدبک می شود که از روشهای متداول غیرخطی است. با توجه به معادله ی (۳۷) همچنین معلوم می شود که انتخاب تعداد جملات از بسط تیلور برای پیش بینی پاسخ سیستم تعلیق متناسب با درجه ی نسبی هر خروجی، دقت کافی داشته و خطای قطع تاثیری در خطای ردیابی سیستم ندارد، چرا که به ازای هر مقدار اولیه برای شتاب در معادله ی (۳۷)، مقدار شتاب برای بقیه زمانها رو به کاهش بوده و در نهایت به صفر میل می کند. با کاهش زمان پیش بین h هم سرعت پاسخ دهی سیستم بیشتر شده و مقاومت آن در مقابل نامعینی ها افزایش می یابد.

۳-۱-۲- کنترل کننده مقید

باتوجه به اینکه در این پژوهش برای سیستم تعلیق فعال ورودی کنترلی جابجایی قرقره شیر هیدرولیک در نظر گرفته شده است و مقدار این جابجایی در عمل محدود می باشد، لذا لازم است در طراحی کنترلی کننده، مسئله بهینه سازی به شکل مقید و با در نظر گرفتن قید روی ورودی حل گردد. اگر قید روی ورودی بشکل زیر بیان گردد:

$$|u| \leq u_{max} \quad (38)$$

مسئله بهینه مقید برای تابع (۳۲) به شکل زیر بیان می گردد:

$$\text{Min } J(u) \quad (39)$$

$$\text{subject to: } |u| \leq u_{max}$$

در یک حالت استاندارد، قید ناساوی (۳۸) به دو قید به صورت زیر تبدیل می شود:

$$g_1(x, u) = u - u_{max} \leq 0 \quad (40)$$

$$g_2(x, u) = -u_{max} - u \leq 0$$

برای محاسبه ی پاسخ مینیمم مسئله ی بهینه سازی (۴۰) که یک مسئله ی بهینه سازی غیرخطی مقید می باشد، از قضیه ی کن تا کر استفاده می کنیم که در آن شرایط لازم برای بهینه بودن به شکل زیر بیان می شوند [۲۵]:

$$\frac{\partial J}{\partial u} + \sum_{i=1}^2 \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial u} = 0 \quad (41)$$

$$\lambda_i g_i = 0 \quad (42)$$

حالت اول: قید اول فعال باشد و قید دوم غیر فعال

در این حالت $\lambda_2 = 0$ و معادله $g_1(x, u) = 0$ منجر به $u = u_{max}$ می شود.

حالت دوم: قید دوم فعال باشد و قید اول غیر فعال

در این حالت $\lambda_1 = 0$ و معادله $g_2(x, u) = 0$ منجر به $u = -u_{max}$ می شود.

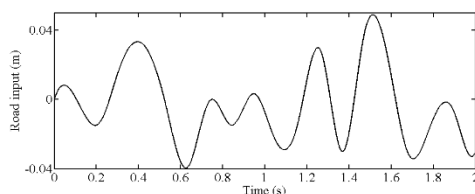
حالت سوم: هر دو قید فعال باشند.

در این حالت $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ و معادله (۳۹) منجر به $\frac{\partial J}{\partial u} = 0$ می شود. حل معادله فوق منجر به قانون کنترلی نامقید می شود که قبلا با معادله (۳۵) توصیف گردید.

۴- نتایج شبیه سازی

در این بخش، نتایج شبیه سازی برای تشریح عملکرد کنترل کننده پیشنهادی برای حالت های بدون قید و با قید تحت ورودی جاده اتفاقی با پروفیل نشان داده شده در شکل ۲ مورد بررسی قرار می گیرند. مدل یک-چهارم خودرو با پارامترهای مشخص شده در جدول شماره ۱ در این مقاله در نظر گرفته شده است. هدف اصلی از کنترل سیستم تعلیق، کاهش شتاب جرم معلق برای دست یابی به راحتی سفر می باشد. حفظ پایداری در کنار فرمان پذیری مناسب خودرو و جابجایی تعلیق محدود تحت ورودی های جاده از دیگر اهداف مهم سیستم تعلیق می باشد. با تنظیم ضرایب وزنی دست یابی به کمترین خطای تنظیم برای شتاب جرم معلق همزمان با مقادیر قابل قبول برای جابجایی تعلیق و جابجایی تایلر امکان پذیر می باشد. مقدار هر کدام از ضرایب وزنی در قانون کنترلی با توجه به اهمیت آن و با استفاده از آزمون سعی و خطا بدست می آید. برای کنترل ارزان، ضرایب وزنی در قانون کنترل بصورت زیر انتخاب می شوند:

$$\rho_1=100, \rho_2=1, \rho_3=1, \rho_4=0$$



شکل ۲: ورودی جاده اتفاقی

جدول ۱: مقادیر پارامترهای سیستم تعلیق

مقدار	متغیر	مقدار	متغیر
73696 N/m ²	k ₂	290 kg	m _s
3170400 N/m ³	k ₃	59 kg	m _{us}
1385 N/s	c ₁	190000 N/m	k _{us}
524 N / s ²	C ₂	70 N.s/m	C _{us}
0.003 m	u _{max}	12394 N/m	k ₁
1	β	4.15e13 N/m ⁵	A

$$\lambda_2 g_2 = 0 \quad (43)$$

$$g_1(x, u) \leq 0 \text{ and } g_2(x, u) \leq 0 \quad (44)$$

$$\lambda_1 \geq 0 \text{ and } \lambda_2 \geq 0 \quad (45)$$

که λ_1 و λ_2 ضرایب لاگرانژ می باشند. در حالت کلی شرایط کن-تاکر شرایط لازم برای داشتن مینیمم محلی برای مسئله ی (۳۹) می باشند. اما با توجه به محدب بودن مسئله و طبق قضیه زیر، با ارضای شرایط کن-تاکر یک جواب بهینه جامع برای مسئله تعلیق فعال قابل حصول می باشد.

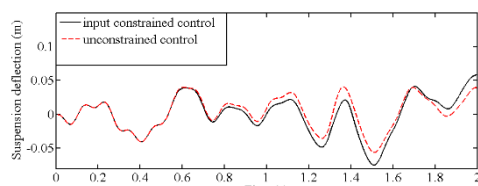
قضیه: اگر مسئله (۳۹) محدب باشد، عبارت دیگر تابع $J(u)$ و توابع $g_1(x)$ و $g_2(x)$ محدب باشند و فرض شود شرایط کن-تاکر با معادلات (۴۱) تا (۴۵) برای u^* ارضاء شوند، پس u^* حل بهینه و جامع برای مسئله می باشد.

اثبات: قضیه فوق برای مسئله محدب در حالت کلی در مراجع [۲۴، ۲۵] اثبات شده است.

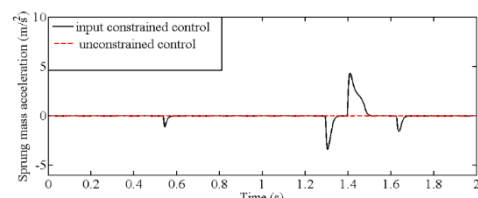
توجه: بدلیل اینکه شاخص عملکرد (۳۲) با ضرایب وزنی مثبت و به صورت تابع درجه دوم بوده و قیدها نیز بصورت خطی و با دامنه بالا و پایین می باشند لذا شاخص عملکرد با شکل بیضوی یک حل مینیمم خواهد داشت. این بدین معنی است که شرایط لازم برای بهینه بودن کافی نیز می باشند.

همانطور که ملاحظه می شود قضیه کن-تاکر شامل دو سری معادله و دو سری نامعادله می باشد که روش های مختلفی برای حل آن ها وجود دارد. در یک روش معمول، مسئله به حالت های مختلف بر اساس ضرایب لاگرانژ تقسیم می شود و در هر حالت معادلات به شرطی که نامعادلات برقرار شوند، حل می گردند تا جواب بهینه محاسبه شود. در این مقاله برای حل تحلیلی معادلات (۴۱) تا (۴۵)، معادلات به چهار حالت تقسیم می گردند و برای هر حالت جواب تحلیلی بدست می آید. در این چهار حالت به ترتیب قید اول فعال و قید دوم غیر فعال، قید اول غیر فعال و قید دوم غیر فعال، هر دو قید غیر فعال و نهایتا هر دو فعال می باشند. البته باید توجه داشت که حالت آخر با توجه به شکل قید امکان پذیر نیست و می توان بررسی نکرد. در نتیجه در این مسئله تعداد حالت های ممکن سه حالت می باشد. برای بدست آوردن پاسخ بهینه، معادلات با توجه به فرض های هر حالت حل شده و درستی نامعادلات بررسی می شود. اگر این نامعادلات نیز برقرار باشد جواب های بدست آمده، مقادیر بهینه است در غیر اینصورت حالت بعدی بررسی می شود تا اینکه تمامی حالت ها بررسی شوند. برای مسئله سیستم تعلیق مربوط به این مقاله براساس غیر فعال یا فعال بودن قیود سه حالت زیر را بررسی می کنیم:

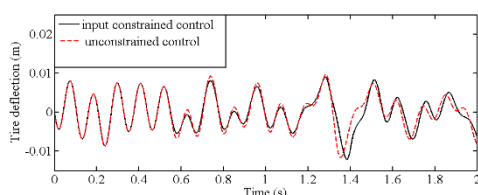
جرم معلق برای سه حالت غیرفعال، فعال با کنترل بهینه ارزان و فعال با کنترل بهینه مقید در جدول شماره ۲ ارائه شده‌اند. با توجه به مقادیر بدست آمده ملاحظه می‌شود که روش پیشنهادی در کاهش شتاب جرم معلق (راحتی سفر) موثر بوده در حالیکه اهداف دیگر نیز در حد مطلوب باقی می‌مانند.



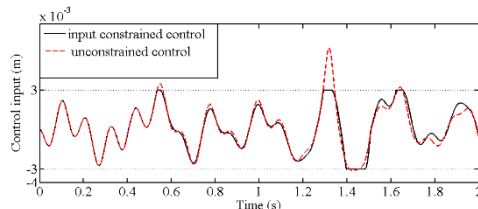
شکل ۷: جابه‌جایی تعلیق در سیستم تعلیق فعال نامقید و مقید



شکل ۸: شتاب جرم معلق در سیستم تعلیق فعال نامقید و مقید



شکل ۹: جابه‌جایی تایر در سیستم تعلیق فعال نامقید و مقید



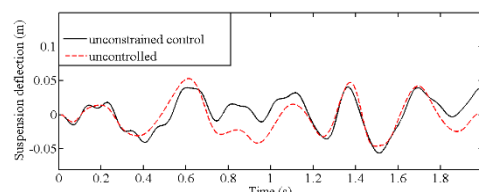
شکل ۱۰: ورودی کنترلی (جابه‌جایی قرقه شیر هیدرولیک) در سیستم تعلیق فعال نامقید و مقید

جدول ۲: مقادیر جذر متوسط مربع شتاب جرم معلق (RMS) برای ورودی جاده اتفاقی در سه حالت مختلف کنترلی

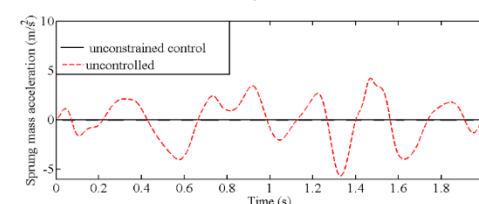
غیرفعال	بهینه نامقید	بهینه مقید	استراتژی کنترلی
2.190	0	0.653	RMS $= \sqrt{\frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \ddot{x}_s^2(t) dt}$

برای مقایسه‌ی عملکرد کنترل کننده‌ی بهینه‌ی غیرخطی ارائه شده در این مقاله با استراتژیهای قبلی، الگوریتم ارائه شده با استراتژی ارائه شده در مراجع [۹ و ۴] که از کنترل کننده‌ی مد لغزشی استفاده نموده‌اند مقایسه می‌شود. از آنجا که روش مد لغزشی استفاده شده، محدودیت‌های دینامیک عملگر رادر نظر نمی‌گیرد، لذا عملکرد آن با روش پیشنهادی در حالت

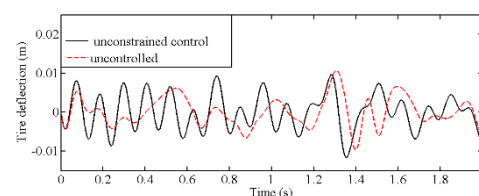
لازم بذکر است که در کنترل ارزان فرض شده که ورودی کنترلی هیچ محدودیتی ندارد. در این حالت بهترین نتایج برای سیستم تعلیق با توجه به شکل‌های ۳، ۴ و ۵ بدست می‌آید. بطوریکه مقدار شتاب جرم معلق با توجه به شکل ۴ نزدیک صفر بوده و مقادیر جابه‌جایی تعلیق و جابه‌جایی تایر نیز بترتیب و براساس شکل‌های ۳ و ۵ در حد مطلوب می‌باشند. در حالیکه مقدار جابه‌جایی قرقه شیر هیدرولیک در بعضی زمانها مطابق شکل ۶ از مقدار عملی خود که در جدول ۱ مشخص شده تجاوز می‌کند.



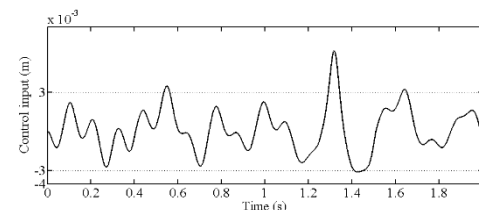
شکل ۱۱: مقایسه‌ی جابه‌جایی سیستم تعلیق فعال نامقید با حالت غیرفعال



شکل ۱۲: مقایسه‌ی شتاب جرم معلق در سیستم تعلیق فعال نامقید با حالت غیرفعال



شکل ۱۳: مقایسه‌ی جابه‌جایی تایر در سیستم تعلیق فعال نامقید با حالت غیرفعال



شکل ۱۴: ورودی کنترلی (جابه‌جایی قرقه شیر هیدرولیک) در سیستم تعلیق فعال نامقید

به عنوان یک روش موثر برای محدود کردن ورودی کنترلی از کنترل کننده پیشنهادی در حالت مقید استفاده می‌شود. بر اساس کنترل کننده‌ی مقید، شتاب جرم معلق، جابه‌جایی تعلیق و جابه‌جایی تایر بترتیب و براساس شکل‌های ۷، ۸ و ۹ در حد مطلوبی قرار دارند. ضمن اینکه همان گونه که در شکل ۱۰ ملاحظه می‌شود ورودی کنترلی براساس قیدها محدود شده و در حد مجاز تعیین شده است. لازم بذکر است که مقادیر ضرایب وزنی در نظر گرفته شده برای حالت مقید نیز همانند حالت نامقید ارزان می‌باشند. برای مقایسه بهتر نتایج، جذر متوسط مربع (RMS) شتاب

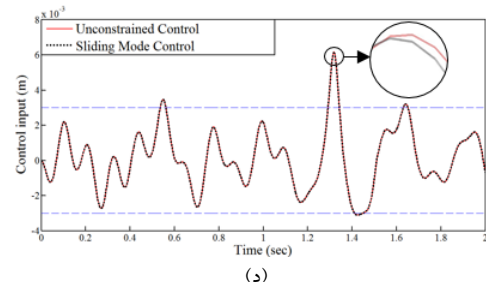
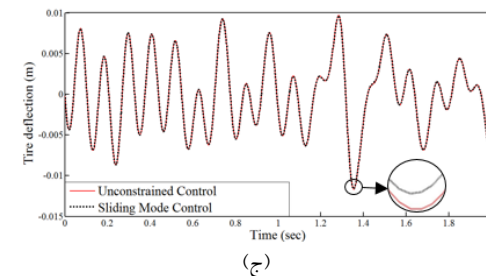
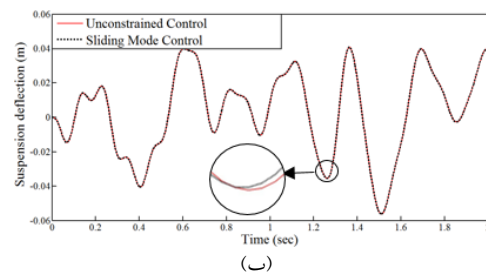
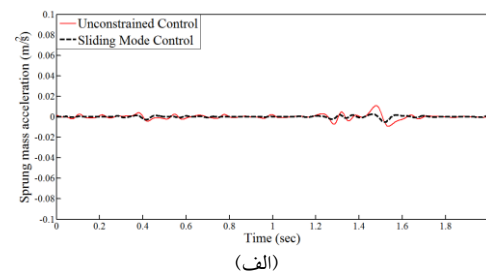
۵- نتیجه گیری

در این پژوهش، یک قانون کنترلی بهینه مقید غیرخطی برای بهبود عملکرد سیستم تعلیق مدل یک چهارم خودرو پیشنهاد می شود. غیرخطی های واقعی فنر و میراگر به همراه شیر و عملگر هیدرولیکی در نظر گرفته می شوند. عملکرد کنترل کننده پیشنهادی با کنترل کننده بهینه نامقید و دیگر استراتژی ها با اعمال ورودی جاده اتفاقی مقایسه می شود. با مقایسه نتایج مشخص می شود که با بکارگیری کنترل کننده پیشنهادی همزمان با کاهش شتاب جرم معلق، ورودی کنترلی نیز در محدوده عملی باقی می ماند. در حالیکه اجرا و پیاده سازی کنترل کننده پیشنهادی نیز آسان می باشد. از مزیت های این روش کنترلی نسبت به سایر روش های متداول استفاده شده در زمینه سیستم تعلیق فعال امکان مقید کردن انرژی کنترلی با در نظر گرفتن محدودیت های موجود در عملگر می باشد. ضمن اینکه اثرات غیرخطی بطور همزمان در مدل سیستم تعلیق و دینامیک عملگر در نظر گرفته شده است. با توجه به تحلیلی بودن قانون کنترلی پیشنهادی، حالت های خاص آن با تنظیم ضرایب وزنی به راحتی بدست می آید.

مراجع

- [1] Mirzaei, M. and R. Hassannejad, (2007), "Application of genetic algorithms to optimum design of elasto-damping elements of a half-car model under random road excitations". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*. 221(4): p. 515-526.
- [2] Jalili, N. and E. Esmailzadeh, (2001), "Optimum active vehicle suspensions with actuator time delay". *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*. 123(1): p. 54-61.
- [3] Xiao, L. and Y. Zhu, (2015), "Sliding-mode output feedback control for active suspension with nonlinear actuator dynamics". *Journal of Vibration and Control*. 21(14): p. 2721-2738.
- [4] ع. کرمی ملائی، (۱۳۹۵)، "طراحی کنترل کننده حالت لغزشی دینامیکی برای سیستم تعلیق فعال". *مجله ی مهندسی مکانیک مدرس*، دوره ۱۶، شماره ۲، صص ۵۱-۵۸.
- [5] Marzbanrad, J., et al., (2004), "Stochastic optimal preview control of a vehicle suspension". *Journal of sound and vibration*. 275(3): p. 973-990.
- [6] Rao, L.G. and S. Narayanan, (2008), "Preview control of random response of a half-car vehicle model traversing rough road". *Journal of Sound and Vibration*. 310(1): p. 352-365.
- [7] Chen, H. and K.-H. Guo, (2005), "Constrained H_{∞} control of active suspensions: an LMI approach". *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 13(3): p. 412-421.

نامقید مقایسه می گردد. برای این مقایسه شرایط شبیه سازی های قبلی همراه با مقداری نامعینی در ضرایب غیرخطی نیروهای سیستم تعلیق در نظر گرفته می شود. شکل ۱۱ نشان دهنده رفتار بسیار نزدیک هر دو کنترل کننده می باشد. براساس شکل ۱۱ الف هر دو روش کنترلی دارای عملکرد قابل قبولی در کاهش شتاب بدنه در حضور نامعینی ها می باشد. اما کنترل کننده مدل لغزشی همراه با کنترل کننده نامقید، محدودیت های دینامیک عملگر را در نظر نمی گیرند و همانطور که از شکل ۱۱ د مشخص است ورودی کنترلی از مقدار مجاز تجاوز می کند. این در حالی است که روش پیشنهادی همانطور که در متن مقاله به آن پرداخته شده است می تواند برای حالت مقید تعمیم داده شده و منجر به جواب بهینه در حضور محدودیت ورودی باشد.



شکل ۱۱: مقایسه نتایج سیستم تعلیق فعال نامقید و مد لغزشی با وجود نامعینی (الف) شتاب جرم معلق (ب) جابه جایی تعلیق (ج) جابه جایی تایر (د) ورودی کنترلی (جابه جایی قورقه شیر هیدرولیک)

- [16] Mirzaei, M., et al., (2008), "An optimal approach to non-linear control of vehicle yaw dynamics". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*. 222(4): p. 217-229.
- [17] Mirzaeinejad, H. and M. Mirzaei, (2010), "A novel method for non-linear control of wheel slip in anti-lock braking systems". *Control Engineering Practice*. 18(8): p. 918-926.
- [18] Elijah, P., Optimization: Algorithms and consistent approximations. 1997, Springer Verlage Publications.
- [19] Naidu, D.S., Optimal control systems. 2002: CRC press.
- [20] Loxton, R., et al., (2009), "Optimal control problems with a continuous inequality constraint on the state and the control". *Automatica*. 45(10): p. 2250-2257.
- [21] Mashayekhi, S., Y. Ordokhani, and M. Razzaghi, (2012), "Hybrid functions approach for nonlinear constrained optimal control problems". *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 17(4): p. 1831-1843.
- [22] Malekshahi, A. and M. Mirzaei, (2012), "Designing a non-linear tracking controller for vehicle active suspension systems using an optimization process". *International Journal of Automotive Technology*. 13(2): p. 263-271.
- [23] Sun, W., H. Gao, and O. Kaynak, (2015), "Vibration isolation for active suspensions with performance constraints and actuator saturation". *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*. 20(2): p. 675-683
- [24] Rao, S.S. and S. Rao, Engineering optimization: theory and practice. 2009: John Wiley & Sons.
- [25] Patriksson, M., et al., Introduction to Continuous Optimization. 2013: Studentlitteratur.
- [8] Du, H., W. Li, and N. Zhang, (2012), "Integrated seat and suspension control for a quarter car with driver model. Vehicular Technology", *IEEE Transactions on*. 61(9): p. 3893-3908.
- [9] Kim, C. and P. Ro, (1998), "A sliding mode controller for vehicle active suspension systems with non-linearities". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*. 212(2): p. 79-92.
- [10] Alleyne, A. and J.K. Hedrick, (1995), "Nonlinear adaptive control of active suspensions. Control Systems Technology", *IEEE Transactions on*. 3(1): p. 94-101.
- [11] Chien, T., et al., (2009), "Almost disturbance decoupling and tracking control for multi-input multi-output non-linear uncertain systems: application to a half-car active suspension system". *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*. 223(2): p. 215-228.
- [12] Li, T.-H.S., C. Huang, and C. Chen, (2010), "Almost disturbance decoupling control of MIMO nonlinear system subject to feedback linearization and a feedforward neural network: application to half-car active suspension system". *International Journal of Automotive Technology*. 11(4): p. 581-592.
- [13] Fateh, M.M. and S.S. Alavi, (2009), "Impedance control of an active suspension system". *Mechatronics*. 19(1): p. 134-140.
- [14] Lin, J., et al., (2009), "Enhanced fuzzy sliding mode controller for active suspension systems". *Mechatronics*. 19(7): p. 1178-1190.
- [15] Gordon, T., (1995), "Non-linear optimal control of a semi-active vehicle suspension system". *Chaos, Solitons & Fractals*. 5(9): p. 1603-1617.