مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۴، شماره ۱، بهار ۱۳۹۹، صفحه ۲۴-۱۱

بررسی تحلیلی پیاده‌سازی روش رویداد-تحریک در کنترل مبتنی بر مدل پیش‌بین

فرزاد زارعی[۱]، محمد حسین شفیعی[۲*]، اکبر رهیده[۳]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شیراز، farzadzarei@gmail.com
[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و الکترونیک، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شیراز، shafiei@sutech.ac.ir
[۳] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و الکترونیک، گروه قدرت، دانشگاه صنعتی شیراز، rahide@sutech.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۵/۰۶/۱۶ ویرایش اول: ۱۳۹۶/۰۹/۲۲ ویرایش دوم: ۱۳۹۷/۰۴/۱۴ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۸/۱۴

چکیده: در این مقاله، پیاده‌سازی روش کنترل مبتنی بر مدل پیش‌بین با افق محدود به صورتی که فیدبک حالت با روش رویداد-تحریک[۱] به‌روزرسانی شود، در مورد سیستمهای خطی بررسی می‌شود. در این روش تمام متغیرهای حالت و بردار کنترل محاسبه شده در افق پیش‌بین، در تعیین زمان به‌روز رسانی موثر هستند، به صورتی که پایداری و کارایی سیستم کنترل حفظ گردد. از این رو، این روش به‌روزرسانی نسبت به روش مرسوم مبتنی بر تابع لیاپانوف ورودی به حالت، که تنها از آخرین مقادیر نمونه برداری شده در تعیین زمان به‌روزرسانی استفاده می‌کند، کارآمدتر است. همچنین در این روش با تغییر سرعت همگرایی متغیرهای حالت سیستم به نقطه تعادل، می‌توان فاصله زمانی بین دو به‌روزرسانی متوالی را افزایش داد. برای این مهم یک پارامتر عملکرد قابل تنظیم، در جهت مصالحه بین کارایی و افزایش فاصله زمانی نمونه برداریها در پیاده‌سازی قانون رویداد-تحریک معرفی می شود. تعیین بازه موثر و قابل تنظیم پارامتر عملکرد نه تنها کاربرد عملی روش رویداد-تحریک را میسر می‌سازد، بلکه محافظه کاری در پردازشگر سیستم کنترل را نیز کاهش خواهد داد. در این مقاله یک حد بالای موثر برای این پارامتر عملکرد بر اساس طول افق پیش‌بین و تابع هدف محاسبه می شود. شبیه سازی انجام شده برای یک سیستم کنترل خطی، نشان دهنده کارایی روش تحریک-رویداد مبتنی بر مدل پیش‌بین و همچنین تطابق محاسبات انجام شده با نتایج شبیه سازی است.

کلمات کلیدی: روش رویداد-تحریک، کنترل مبتنی بر مدل پیش‌بین، زیر بهینگی، پایداری ورودی به حالت.

Analysis of Applying Event-Triggered Strategy on the Model Predictive Control

Farzad Zarei, Mohammad Hossein Shafiei, Akbar Rahideh

Abstract: In this paper, the event-triggered strategy in the case of finite-horizon model predictive control (MPC) is studied and its advantages over the input to state stability (ISS) Lyapunov based triggering rule is discussed. In the MPC triggering rule, all the state trajectories in the receding horizon are considered to obtain the triggering rule. Clearly, the finite horizon MPC is sub-optimal with respect to the infinite-horizon case. This sub-optimality is considered as a coefficient to implement the MPC triggering rule and to increase the inter-execution time. However, to design a proper processing board to control this coefficient suitably, it is necessary to specify lower and upper bounds for it. The contribution of this paper is to determine an effective upper bound for this coefficient. By incorporating the sub-optimal lower bound instead of being 1, the conservatism decreases. This coefficient can be used as a tunable parameter in integrated or network control systems to compromise between the performance and inter-execution time. Simulation results depict the applicability of the proposed method and validate the theoretical results.

Keywords: event-triggered; model predictive control; sub-optimality; input-to-state-stability.

[۱] Event-Triggered

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.1.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.11]

۱- مقدمه

کاربرد سیستم‌های کنترل دیجیتال پیشرفته، با پردازنده چند منظوره درحال گسترش است. در کنترل کننده‌های دیجیتال با فیدبک حالت، سیگنال کنترلی با پروسسورهای جاسازی شده در مسیر فیدبک محاسبه می‌شوند که قابلیت انجام چندین وظیفه را در کنار وظیفه کنترلی، به صورت همزمان دارند. این قابلیت پروسسورها، هزینه پیاده سازی سخت افزاری سیستم‌های کنترلی پیچیده را کاهش می‌دهد [۱]. از طرف دیگر کاهش تعداد به‌روزرسانی های سیگنال کنترلی، منجر به زیاد شدن فاصله زمانی نمونه برداری و در نتیجه آزاد شدن منابع محاسباتی پردازشگر برای انجام سایر وظایف می‌شود. همچنین در سیستمهای کنترل گسترده، پهنای باند شبکه بین سیستمهای کنترلی و غیر کنترلی به اشتراک گذاشته شده است. در این حالت کاهش تعداد نمونه برداری و در نتیجه کاهش تعداد انتقال داده سنسورها از طریق شبکه، به معنای کاهش پهنای باند اشغال شده توسط حلقه کنترل است؛ از این‌رو پهنای باند کلی شبکه افزایش خواهد یافت [۲-۵]. در واقع در فاصله زمانی بین نمونه برداریها، سیستم به صورت حلقه باز کنترل می گردد و سیگنال کنترلی ورودی توسط مدار نگهدارنده مرتبه صفر ثابت مانده تا اینکه قانون رویداد-تحریک دستور به‌روز کردن دوباره سیگنال کنترل را صادر کند. در کنترل کننده‌های دیجیتال مرسوم، از روش نمونه برداری پریودیک با فاصله زمانی ثابت[۱] استفاده می‌شود، که فاصله زمانی از پیش معین بوده و برای بدترین شرایط کنترلی طراحی می-شود. در نتیجه محافظه کاری در فیدبک حالت با زمانبندی پریودیک برای تمام فضای حالت، بسیار زیاد است. بنابراین در نسل بعدی کنترل کننده‌های فیدبکی، روش تحریک غیر پریودیک ظهور نمود. روش رویداد-تحریک یکی از این روشهای غیر پریودیک است که عمدتاً در حالتی بکار می‌رود که سنسورها و پروسسور تنظیم کننده زمان نمونه برداری در کنار هم قرار دارند. در روش رویداد-تحریک، به‌روزرسانی سیگنال کنترل به صورتی زمانبندی می‌شود که پایداری و کارایی سیستم حلقه بسته تضمین گردد [۶].

در پیاده سازی روش رویداد-تحریک در سیستم‌های کنترلی دو رویکرد کلی وجود دارد. در رویکرد اول طراحی همزمان قانون کنترلی و قانون به‌روزرسانی انجام می‌شود. در این رویکرد تاثیر پیاده‌سازی روش رویداد-تحریک به عنوانی بخشی از معادلات سیستم لحاظ می‌شود و قانون کنترلی را برای معادلات این سیستم جدید محاسبه می‌شود. در صورتی که سیستم پیوسته باشد، معادلات سیستم به فرم گسسته تبدیل تبدیل نموده و محاسبه قانون کنترلی و سایر تحلیل‌ها باید در فضای گسسته انجام گردد [۷]. در این حالت محاسبات قانون کنترلی و تحلیل پایداری سیستم دشوارتر خواهد بود. حتی در صورتی که سیستم گسسته باشد نیز به دلیل ریاضیات پیچیده در بیان تاثیر روش رویداد-تحریک، همچنان محاسبات پیچیده خواهد بود. در رویکرد متداول دوم که در این مقاله نیز مد نظر است، مشابه روش تقلید[۲] می‌باشد، ابتدا طراحی قانون کنترلی بدون در نظر گرفتن روش به‌روزرسانی انجام شده و سپس قانون به‌روزرسانی برای تضمین پایداری سیستم حلقه بسته طراحی می‌شود [۴-۶].

ساختار کنترل مبتنی بر مدل پیش‌بین MPC[۳]، برای سیستمهای خطی و غیرخطی و به خصوص برای سیستم‌های با قید ورودی، خروجی و متغیرهای حالت، کارآمد است [۸]. قانون کنترل توسط محاسبه‌گر بهینه کنترل مدل پیش‌بین محاسبه می‌شود، که معمولاً سیگنال کنترلی حاصل، به شکل صریحی از متغیرهای حالت نخواهد بود [۹،۱۰]. در محاسبه سیگنال کنترلی بهینه بار محاسباتی زیادی توسط محاسبه‌گر به پردازشگر تحمیل می‌گردد. با ترکیب مدل پیش‌بین با روش رویداد-تحریک از نرخ محاسبات پردازشگر سیستم که محاسبات مربوط به حلقه کنترلی را نیز انجام می‌دهد، کاسته می‌شود. هرچند در این حالت حجم محاسبات مربوط به سیگنال کنترل مدل پیش‌بین یکسان است، ولی تعداد محاسبات در مسیر کلی حرکت سیستم به سمت نقطه تعادل کاهش خواهد یافت. در زمانبندی فیدبک حالت با روش رویداد-تحریک مبتنی بر تابع لیاپانوف ورودی به حالت، تنها آخرین نسبت خطای اندازه‌گیری به نمونه برداری نقش دارد [۱ و ۵]؛ ولی در روش رویداد-تحریک مبتنی بر مدل پیش‌بین، تمام بردار حالت و بردار کنترل تخمین زده شده در افق پیش‌بینی، در تعیین زمان نمونه برداری نقش دارند [۱۱]. روش رویداد-تحریک مبتنی بر کنترل مدل پیش-بین در کنترل سیستم‌های با مدل پیوسته زمان [۱۲] و گسسته زمان [۱۰] قابل کاربرد است. حتی امروزه این راهکار به روش خود-تحریک[۴] نیز توسعه داده شده است [۱۳،۱۴].

در زمینه روش به‌روزرسانی رویداد-تحریک در کنترل مبتنی بر مدل پیش‌بین مقالات محدودی منتشر شده است؛ در [۱۰] یک روش رویداد-تحریک مبتنی بر کنترل مدل پیش‌بین ارائه شده است که در آن خطای اندازه گیری به عنوان اغتشاش جمع شونده در کانال ورودی در نظر گرفته می‌شود. همچنین از ویژگی پایداری ورودی به حالت تابع هزینه مدل پیش-بین در تعیین زمان نمونه برداری استفاده نموده است. البته چون تنها از نسبت نرم خطا به نرم متغیر حالت در آخرین نمونه برداری استفاده شده است، تخمین آینده سیستم در تعیین زمان نمونه برداری تاثیر بسزایی ندارد. در [۱۵] پیاده سازی روش رویداد-تحریک در کنترل مبتنی بر مدل پیش بین ارائه گردیده است. در این مرجع از اختلاف مقدار واقعی حرکت سیستم و تخمین سیستم در افق پیش‌بین به عنوان رویداد درخواست سیگنال کنترلی جدید استفاده شده است. همچنین در [۱۱] از پارامتر زیر بهینگی تابع هزینه که در ازای کاهش به‌روز رسانی‌ها به وجود می‌آید، به عنوان پارامتر عملکرد استفاده نموده و یک راهکار را برای تعیین زمان بعدی به‌روزرسانی پیشنهاد کرده است. ولی کارایی این روش و همچنین مقایسه کارایی آن با روش قبلی نشان داده نشده است. در تحقیق مذکور، این پارامتر مقداری بزرگتر یا مساوی ۱ فرض شده است و مقدار حد بالای آن مشخص نشده

[۱] Time-triggered
[۲] Emulation
[۳] Model Predictive Control
[۴] Self-Triggered

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.1.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.11]

است. حد پایین این پارامتر در [۱۶] از حیث پایداری سیستم مورد بحث قرار گرفته است و نتایج آن در اینجا برای مشخص کردن باند پایین پارامتر زیربهنیگی مورد استفاده در [۱۱] مورد بهره برداری قرار می‌گیرد.

در این مقاله، پیاده‌سازی روش رویداد-تحریک، مبتنی بر کنترل مدل پیش‌بین با افق محدود، برای زمانبندی در به‌روزرسانی سیگنال کنترل مورد مطالعه قرار می‌گیرد. پیاده سازی روش رویداد-تحریک مبتنی بر کنترل مدل پیش‌بین نه تنها امکان به کارگیری در سیستم‌های مقید را دارد، بلکه نشان داده می‌شود که حتی در حالت بدون قید نیز فاصله زمانی بین نمونه برداری در این روش بیشتر از روش رویداد-تحریک مبتنی بر تابع لیاپانوف ورودی به حالت است. همچنین با تغییر سرعت همگرایی متغیرهای حالت سیستم به نقطه تعادل، می‌توان فاصله زمانی بین دو به‌روزرسانی متوالی را افزایش داد. برای این مهم یک پارامتر عملکرد قابل تنظیم، در جهت مصالحه بین کارایی و افزایش فاصله زمانی نمونه برداریها در پیاده سازی قانون رویداد-تحریک معرفی می شود. تعیین بازه موثر و قابل تنظیم پارامتر عملکرد نه تنها کاربرد عملی روش رویداد-تحریک را میسر می‌سازد، بلکه محافظه کاری در پردازشگر سیستم کنترل را نیز کاهش می‌دهد. در این مقاله یک حد بالای موثر برای پارامتر عملکرد بر اساس طول افق پیش‌بین و تابع هدف محاسبه می شود. همان گونه که نتایج شبیه سازیها نشان می-دهد با بیشتر شدن مقدار این پارامتر از مقدار محاسبه شده، دیگر فاصله نمونه برداریها افزایش نمی‌یابد. بنابراین برای طراحی یک الگوریتم جهت تنظیم این پارامتر، نیاز است که حد بالا و پایین آن محاسبه گردد. یکی از نوع آوریهای این مقاله محاسبه این حدود است. در نهایت در نتایج شبیه سازی، کارایی رویکرد پیشنهادی و همچنین تطابق حد بالای محاسبه شده برای پارامتر عملکرد در تئوری و شبیه سازی نشان داده می‌شود.

سازماندهی این مقاله بدین شرح است: در بخش ۲، تعاریف اولیه کنترل مبتنی بر مدل پیش‌بین با افق محدود ارائه می‌گردد. در بخش ۳، اقتباس حد پایین پارامتر عملکرد از ضریب زیر بهینگی در افق محدود، استراتژی رویداد-تحریک در مدل با افق محدود و همچنین حد بالای پارمتر عملکرد در سیستم محاسبه می‌شود. دربخش ۴، محاسبه سیگنال کنترل در افق محدود و بی‌نهایت ارزیابی می شود. در بخش ۵ پیاده سازی روش رویداد-تحریک را بر اساس تابع لیاپانوف ورودی به حالت بیان خواهد شد. در بخش ۶، روش رویداد-تحریک مبتنی بر کنترل مدل پیش-بین برای یک سیستم ناپایدار شبیه سازی شده است. در نهایت بخش ۷ یک نتیجه گیری از این مقاله ارائه داده می‌شود.

۲- اصول اولیه

در این مقاله، R نشان دهنده مجموعه اعداد حقیقی است و نرم اقلیدسی بردارها توسط نماد $|.|$ مشخص می‌گردند. همچنین از همین نماد برای نشان دادن نرم ۲ القایی ماتریس استفاده شده است. $\lambda_{min}(.)$ و $\lambda_{max}(.)$ به ترتیب مقدار ویژه حداقل و حداکثر یک ماتریس را نشان می‌دهند.

۲-۱ کنترل مبتنی بر مدل پیش‌بین

سیستم خطی گسسته زمان زیر را در نظر بگیرید،

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k),\quad x(k)\in R^n,\ u(k)\in R^m \tag{۱}$$

در اینجا $x(k)$ و $u(k)$ به ترتیب بردار حالت و بردار ورودی سیستم و جفت (A,B) کنترل پذیر در نظر گرفته می‌شوند. بردار کنترل ورودی درافق کنترل N_C در هر یک از گامهای $k,k+1,\ldots,k+N_c$ به صورت بهینه توسط محاسبه‌گر مدل پیش‌بین در افق پیش‌بینی N_P محاسبه می‌شود. اما، از بردار کنترل محاسبه شده تنها اولین ردیف به محرک اعمال می‌شود، ولی کل بردار ورودی کنترلی در قانون به‌روزرسانی برای محاسبه زمان بعدی به‌روزرسانی سیگنال کنترلی نقش خواهد داشت. تخمین متغیرهای حالت نیز در طول افق پیش‌بینی N_P، از مدل زیر به دست می‌آید.

$$\hat{x}(k+i+1|k)=A\hat{x}(k+i|k)+B\hat{u}(k+i|k),\quad i=0,1,\ldots,N_P \text{ for} \tag{۲}$$

در اینجا $\hat{x}(k+i|k)$ و $\hat{u}(k+i|k)$ به ترتیب تخمین $(k+i)$ام از متغیرهای حالت و سیگنال کنترل در زمان نمونه برداری kام هستند. در اینجا برای سادگی در بیان ریاضی فرض می‌شود، $N_C=N_P$، بنابراین قانون کنترل از بهینه سازی تابع هزینه مقید زیر در طول افق پیش‌بین محاسبه می‌گردد:

$$\begin{cases} J_{N_p}(x(k))=\sum_{i=0}^{N_P-1}\vartheta(\hat{x}((k+i)|k),\hat{u}((k+i)|k)+ \\ \qquad F(\hat{x}(N_p)) \\ s.t\begin{cases} u_{j\min}<\hat{u}_j(k+i|k)<u_{j\max} & j=1,2,\ldots,m \\ x_{l\min}<\hat{x}_l(k+i|k)<x_{l\max} & l=1,2,\ldots,n \end{cases} \end{cases} \tag{۳}$$

در اینجا $\vartheta(.,.)$ و $F(.)$ توابع مثبت معین از متغیرهای حالت و سیگنال کنترلی تخمین زده شده در افق پیش‌بین هستند. با انتخاب مناسب اندازه افق پیش‌بین (N_P)، پایداری سیستم حفظ می‌شود. فرض کنید که تابع J_{N_R} تابع هزینه با فرض افق پیش‌بین N_R است که در هر گام با اعمال سیگنال کنترلی محاسبه شده، با ضریب ρ_{N_R} کاهش می‌یابد، در این صورت قضیه ۱ یک تخمین تقریبی از حداقل طول افق پیش‌بین را ارائه می‌کند.

قضیه ۱ [۱۶]- اگر S_R ناحیه کاری سیستم و N_R کوچکترین عدد صحیحی باشد که به ازای آن نامعادله زیر برآورده شود:

$$J_{N_R}(x(k+1))\le\rho_{N_R}J_{N_R}(x(k)),\quad x(k)\in S_R,\ \rho_{N_R}<1 \tag{۴}$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.1.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.11]

آنگاه با انتخاب افق پیش‌بین با اندازه $N_P \geq N_R$ ، کنترل کننده مبتنی بر مدل پیش‌بین می‌تواند سیگنال کنترل ورودی پایدارساز را در ناحیه S_R فراهم کند.

اثبات: به مرجع [۱۶] مراجعه شود.

نکته ۱: با انتخاب N_P بر اساس قضیه ۱، تابع هزینه J_{N_P} می‌تواند به عنوان یک تابع لیاپانوف برای تحلیل پایداری سیستم حلقه بسته نیز به کار گرفته شود.

۳- روش رویداد-تحریک در کنترل مبتنی بر مدل پیش‌بین با افق محدود

حالت ایده‌آل آن است که با وجود استفاده از تابع هزینه با افق محدود (۳)، کارایی سیگنال کنترلی محاسبه شده با آن، معادل با تابع هزینه استاندارد با افق بی‌نهایت باشد. از طرف دیگر در پیاده سازی مدل پیش‌بین با افق بی نهایت می‌توان اثبات نمود که یک همسایگی اطراف نقطه تعادل وجود دارد که در آن می‌توان ترم نهایی تابع هزینه ($F(.)$) را بدون تاثیر بر پایداری مجانبی حذف نمود [۱۷]. بنابراین برای تابع هزینه با افق نامحدود داریم:

$$J_\infty\left(k\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\vartheta\left[\hat{x}\left(\left(k+i\right)|k\right),\hat{u}\left(\left(k+i\right)|k\right)\right] \qquad (۵)$$

در واقع هدف این است که کنترل محاسبه شده سیستم حلقه بسته دارای ویژگی‌های زیر باشد،

الف. در محدوده کاری S_R ، سیستم به صورت مجانبی پایدار باشد،

ب. قیود مربوط به سیستم را رعایت نماید،

ج. دارای شاخص عملکرد مناسب باشد،

اگر برای یک تابع هزینه مربعی با ترمهای $\vartheta(.,.)=\left(\hat{x}^T Q\ \hat{x}+\hat{u}^T R\ u\right)$ و با افق بی‌نهایت، تابع لیاپانوف به صورت $V(x)=\frac{1}{2}x^T\ P\ x$ انتخاب شود، در این صورت ماتریس P می‌تواند به صورتی تعیین گردد که نرخ کاهش تابع لیاپانوف V حداقل برابر $-\left(x^T Qx+u^T Ru\right)$ باشد. برای این منظور باید ماتریس P از جواب معادله جبری ریکاتی گسسته زمان محاسبه شود (اثبات محاسبه P در ضمیمه ۱ آورده شده است). با فرض این نرخ نزول برای تابع لیاپانوف، داریم:

$$\begin{aligned}&V\left(x\left(k+i+1|k\right)\right)-V\left(x\left(k+i|k\right)\right)\leq\\&-\Big(x\left(k+i+1|k\right)^T\ Q\,x\left(k+i+1|k\right)+\ldots\\&\quad u\left(k+i+1|k\right)^T\ R\,u\left(k+i+1|k\right)\Big)\end{aligned} \qquad (۶)$$

با توجه به اینکه قرار است در انتها متغیرهای حالت به نقطه تعادل همگرا شوند، باید داشته باشیم، $x(\infty|k)=0$ و در نتیجه خواهیم داشت: $V\left(x(\infty|k)\right)=0$. با جمع معادله (۶) برای $i=0$ تا $i=\infty$ خواهیم داشت:

$$J_\infty\left(k\right)\leq V\left(x\left(k|k\right)\right) \qquad (۷)$$

برای داشتن چنین شاخص عملکردی نیاز است که در هر گام از حرکت سیستم، سیگنال کنترل محاسبه گردد. ولی چون در این مقاله از روش رویداد-تحریک استفاده می‌شود و هدف این روش کاهش تعداد محاسبه و به‌روزرسانی های سیگنال کنترلی است، یک زیر بهینگی به دلیل کاهش تعداد به‌روز رسانی‌ها به وجود خواهد آمد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$J_\infty\left(k\right)\leq\Lambda V\left(x\left(k|k\right)\right),\quad \Lambda\geq 1 \qquad (۸)$$

در اینجا مقدار پارامتر Λ بیانگر کاهش عملکرد سیستم است که در نتیجه کاهش محاسبات به وجود آمده است. طبیعتاً اگر این پارامتر به یک نزدیک شود، سیستم کنترلی مجبور است در هر نمونه برداری سیگنال کنترل را به‌روزرسانی کند. از طرف دیگر به منظور کاهش تعداد به‌روزرسانی در سیگنال کنترل این پارامتر باید افزایش یابد.

۳-۱ اقتباس حد پایین پارامتر Λ از ضریب زیر بهینگی افق محدود

یکی از مزایای کنترل مدل پیش‌بین با افق محدود $\left(N_p<\infty\right)$ قابلیت محاسبه برخط[۱] آن است. برای کاهش حجم محاسبات تمایل داریم که اندازه افق پیش‌بین را کاهش دهیم که این نیز باعث ایجاد زیربهینگی بیشتر در (۸) خواهد شد. از این رو پارمتر Λ افزایش خواهد یافت، اندازه این زیر بهینگی در محاسبه قانون تحریک نقش خواهد داشت. میزان زیر بهینگی ناشی از افق محدود، وابسته به اندازه طول افق پیش‌بین N_P ، و همچنین تابع هدف J_{N_P} است که یک مقدار تقریبی آن در قضیه ۲ نشان داده شده است.

قضیه ۲ [۱۶]- پارامتر N_P را طول افق پیش‌بین و ρ_{N_P} را نرخ نزول تابع هزینه لیاپانوف در معادله (۴) درنظر بگیرید. حد پایین پارامتر زیر بهینگی Ψ توسط نامعادله زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned}&J_\infty\left(k\right)\leq\Psi\ J_{N_p}\left(x\left(k|k\right)\right),\ \text{where}\\&\Psi_{\min}=\left(1+\left(\frac{\varphi_{N_p-1}-1}{\varphi_{N_p-1}}\right)\frac{\rho_{N_p}}{1-\rho_{N_p}}\right)\geq 1\\&\varphi_{N_p}=min\left(\{\varphi\,|\varphi J_{N_p}\geq J_{N_p+1}\}\right)\ \ \forall\, x\left(k\right)\in S_R\end{aligned} \qquad (۹)$$

که در اینجا مقدار پارامتر $\varphi>1$ بیان کننده مقدار کاهش تابع هزینه J_{N_p} نسبت به J_{N_p+1} (به ازای سیگنال کنترلی بهینه محاسبه شده با افق N_p)

[۱] On Line

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.1.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.11]

در ناحیه کار S_R است و برابر با حداقل مقداری است که به ازای آن $\varphi J_{N_p} \geq J_{N_p+1}$ برقرار باشد.

اثبات: همان مرجع را ببینید.

باید توجه داشت که در (۹) مقدار تابع هزینه $J_\infty(k)$ به ازای سیگنال کنترلی $u_N(k|k)$ که از بهینه سازی تابع هزنیه با افق محدود J_N بدست آمده، محاسبه می‌شود. در واقع پارامتر Ψ بیان کننده افزایش تابع هزینه (۵) با سیگنال کنترل زیربهینه محاسبه شده با افق محدود، نسبت به تابع هزینه استاندارد بهینه با افق بی‌نهایت است.

۳-۲ استراتژی رویداد-تحریک در کنترل مبتنی بر مدل پیش‌بین

اگر برای طول افق پیش‌بین داشته باشیم: $N_P > N_R$ ، آنگاه بر اساس نکته ۱، تابع هزینه J_{N_p} می‌تواند به عنوان یک تابع لیاپانوف استفاده شود.

$$V\left(x(k)\right) := J_{N_p}\left(x(k|k)\right) = \min_{\boldsymbol{U}_{mpc}} \sum_{i=0}^{N_p-1} \vartheta\left(\hat{x}\left((k+i)|k\right), \hat{u}\left((k+i)|k\right)\right) + F\left(\hat{x}\left(k+N_p\right)\right) \quad (۱۰)$$

حال بر اساس قضیه ۲ داریم:

$$J_\infty \leq \Lambda V\left(x(k)\right) \quad (۱۱)$$

که در اینجا مقدار Λ زیربهینگی ناشی از کاربرد روش رویداد-تحریک و طول افق پیش‌بین محدود است. اکنون باید سیگنال کنترلی $u(k+i)=u(k)$ به نحوی انتخاب شود که سرعت نزول تابع لیاپانوف به شکل زیر باشد (نامعادله زیر برآورده شود):

$$\Lambda\left(V\left(x(k+1)\right) - V\left(x(k)\right)\right) \leq -\vartheta\left(x(k|k), u(k|k)\right) \quad (۱۲)$$

در رابطه (۱۲) فرض شده است که مقدار $u(k|k)$ به صورت بهینه در گام kام توسط محاسبه‌گر MPC محاسبه شده است. بنابراین، نامعادله (۱۲) به ازای $u(k)=u(k|k)$ برقرار است. در اینجا بر اساس مفهوم روش رویداد-تحریک، فرض شده است که تا زمان $k+\zeta$ با همان ورودی محاسبه شده قبلی ($u(k)$) نامعادله (۱۲) برقرار باشد و نیازی به به‌روزرسانی کنترل کننده نیست (در غیر این صورت سیگنال کنترلی باید دوباره محاسبه شده و همین مراحل به ازای k جدید تکرار شود). بنابراین، نامعادله (۱۲) در زمانهای k الی $k+\zeta$ به ازای مقادیر حالت در این لحظات، اما به ازای همان ورودی کنترلی $u(k)$ برقرار خواهد بود. از نوشتن نامعادلات مذکور، به ازای گامهای سیستم، عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\Lambda\left(V\left(x(k)\right) - V\left(x(k+1)\right)\right) \geq \vartheta\left(x(k), u(k)\right)\\
&\Lambda\left(V\left(x(k+1)\right) - V\left(x(k+2)\right)\right) \geq \vartheta\left(x(k+1), u(k)\right)\\
&\cdots\\
&\Lambda\left(V\left(x(k+\zeta-1)\right) - V\left(x(k+\zeta)\right)\right) \geq \vartheta\left(x(k+\zeta), u(k)\right)\\
&-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!- \textit{By adding all above inequalities} -\!-\!-\!-\!-\!-\!-\!-\\
&\Lambda\left(V\left(x(k)\right) - V\left(x(k+\zeta)\right)\right) \geq \sum_{i=0}^{\zeta-1} \vartheta\left(x(k+i), u(k)\right)
\end{aligned} \quad (۱۳)$$

در عبارات بالا توجه به این نکته ضروری است که سیگنال کنترلی در بازه k تا $k+\zeta$ ثابت فرض می‌شود (در حقیقت در این بازه فرض می‌شود که شرط تحریک برآورده نشده و بنابراین سیگنال کنترلی $\boldsymbol{U}_{mpc}$، که در نمونه برداری kام محاسبه شده، به وسیله مدار نگهدارنده مرتبه صفر ثابت می‌ماند). بعلاوه باید ذکر کرد که در بازه k تا $k+\zeta$ در محاسبه هر یک از توابع $V(.)$ باید از $\boldsymbol{U}_{mpc}$ محاسبه شده در نمونه برداری kام استفاده کرد، که این موضوع در بازنویسی این نامعادله به صورت زیر تصریح شده است:

$$\Lambda\left(V\left(x(k), U_{mpc}\right) - V\left(x(k+\zeta), U_{mpc}\right)\right) \geq \sum_{i=0}^{\zeta-1} \vartheta\left(x(k+i), u(k)\right) \geq 0 \quad (۱۴)$$

در این صورت اگر سیستم در نمونه برداری kام قرار داشته باشد و اولین المان بردار $\boldsymbol{U}_{mpc}$ یعنی $u(k|k)$ به عنوان ورودی به سیستم اعمال شود، تا زمانی که نامعادله حاصل (۱۴) به ازای آخرین مقدار $u(k|k)$ محاسبه شده برقرار باشد، نیازی به به‌روزرسانی سیگنال کنترل نیست. اگر با این ورودی کنترلی در گام $k+\zeta$ معادله (۱۴) برقرار نباشد به معنای ناپایداری سیستم با اعمال این ورودی کنترلی است، بنابراین باید ورودی کنترلی دوباره محاسبه گردد که این همان مفهوم روش رویداد-تحریک است.

با اعمال سیگنال کنترلی تا زمانی که نامعادله (۱۴) برقرار باشد، تابع هزینه و همچنین تابع لیاپانوف معادل آن نزولی باقی مانده و پایداری سیستم حفظ خواهد شد. با افزایش پارامتر عملکرد Λ ، در ازای کاهش عملکرد سیستم، تعداد به روزرسانی کمتر می شود، که به معنای کاهش فرکانس ارسال اطلاعات توسط سیستم کنترل در شبکه و یا در مسیر فیدبک است. به محض نقض شدن (۱۴) باید سیگنال کنترلی به‌روزرسانی گردد. نامعادله (۱۴) در واقع می‌تواند به عنوان قانون رویداد-تحریک[۱] در نظر گرفته شود. با توجه به اینکه در هر گام از محاسبه این نامعادله از بردار کنترلی قبلی در محاسبه $V(.)$ استفاده می‌شود و به سیگمای سمت راست نیز تنها یک عبارت ساده اضافه می‌گردد، بنابراین بار پردازشی اندکی به پردازشگر تحمیل خواهد شد.

[۱] Triggering-rule

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.1.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.11]

نکته ۲: اگر طول افق پیش‌بین محدود و سیستم دارای ورودی و سیگنال کنترلی مقید باشد، برای استفاده از روش رویداد-تحریک می‌توان یک محدوده در اطراف نقطه تعادل مشخص نمود که با وارد شدن سیستم به این محدوده، قیود سیستم نقض نگردد. در نتیجه می توان از قیود سیستم به نفع کاهش محاسبات صرف نظر نمود. در این حالت روش رویداد-تحریک تنها در داخل این ناحیه اجرا می‌شود [۱۹].

۳-۳ بدست آوردن یک حد بالا برای پارامتر عملکرد

پارامتر عملکرد Λ یک عامل کلیدی در افزایش فاصله زمانی به‌روز رسانی‌ها در سیستم کنترلی است. در صورتی که حد بالای موثر برای این پارامتر تعیین نگردد، مدار تنظیم کننده Λ باید یک فاصله بی‌نهایت را جستجو کند. در آنچه که در ادامه خواهد آمد، یک حد بالا برای این پارامتر بدست می‌آید. فرض کنید، عبارات تابع هدف را بتوان به صورت یک تابع مربعی $\vartheta(.,.)=\left(\hat{x}^T Q\ \hat{x}+\hat{u}^T R\hat{u}\right)$ نوشت و $u=K_{first\ row}\ x$ اولین ردیف بردار (ستونی) کنترل محاسبه شده توسط کنترل کننده مبتنی بر مدل پیش‌بین با افق محدود باشد. همچنین P_{N_p} پاسخ معادله لیاپانوف گسسته زمان سیستم حلقه بسته است، در این صورت قضیه ۳ یک باند بالای موثر را برای این پارامتر مشخص می کند.

قضیه ۳- اگر P پاسخ معادله لیاپانوف گسسته زمان سیستم حلقه بسته و حداقل طول افق پیش‌بین پایدارساز آن بر اساس قضیه ۱، برابر N_R باشد، آنگاه برای افق پیش‌بین با طول $N_p \geq N_R$ ، حد بالای پارامتر Λ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Lambda \leq \Lambda_{max} = \frac{\lambda_{max}(Q)+\lambda_{min}\left(K^T R K\right)\left(\frac{\lambda_{min}(P)}{\lambda_{max}(P)}\right)}{\lambda_{min}\left(P_{N_p}\right)\left(1-\rho_{N_p}\right)} \qquad (۱۵)$$

در اینجا $K=K_{first\ row}$ اولین ردیف ماتریس ضریب کنترل محاسبه شده و ρ_{N_p} مقداری است که به ازای آن نامعادله (۴) در فضای کاری S_R برای افق N_p صدق می کند.

اثبات: فرض کنید که سیستم در گام kام سیگنال کنترلی را به‌روزرسانی نموده است. همچنین فرض می‌شود که نامعادله (۱۴)، تا گام $k+\beta$ ($\beta<\zeta$) برای این سیگنال کنترلی برقرار است. بنابراین

$$\Lambda\left(V\left(x,k,U_{mpc}\right)-V\left(x,k+\beta,U_{mpc}\right)\right)\geq \sum_{i=0}^{\beta-1}\vartheta\left(x(k+i),u(k)\right)\geq 0 \qquad (۱۶)$$

بنابراین، در گذر از نمونه $k+\beta$ به $k+\beta+1$ داریم:

$$\Lambda\left(V\left(x(k+\beta)\right)-V\left(x(k+\beta+1)\right)\right)\geq \vartheta\left(x(k+\beta),u(k)\right) \qquad (۱۷)$$

مطابق معادله (۱۷) تابع لیاپانوف تا زمان $k+\beta+1$ همچنان نزولی است، به این معنا که $V\left(x(k+\beta+1)\right)<V\left(x(k+\beta)\right)$. بنابراین یک ثابت $\rho'_{N_p}<1$ وجود دارد که عبارت $V\left(x(k+\beta+1)\right)=\rho'_{N_p}V\left(x(k+\beta)\right)$ را برقرار کند. با توجه به اینکه در قضیه ۱ فرض شده است که به‌روزرسانی در هر گام انجام می‌شود، بنابراین ضریب $\rho_{N_p}<1$ بیان کننده بیشترین نرخ نزول تابع هدف با به‌روزرسانی ورودی کنترلی در هر نمونه است.

در روش MPC، در هر گام k، ورودی کنترلی $U(k)$ از بهینه سازی تابع هزینه J بدست می‌آید. از این رو مقدار تابع هزینه، به ازای $U(k)$ محاسبه شده کمترین مقدار ممکن خواهد بود. حال فرض می‌کنیم، با اتخاذ روش رویداد-تحریک، به جای $U(k)$، مقدار سیگنال کنترلی $U(k-i)$ که در لحظه $k-i$ محاسبه شده به سیستم اعمال گردد، بنابراین خواهیم داشت:

$$U(k-i)=U(k)+error$$

با توجه به این که $U(k)$ باعث می‌شود که تابع هزینه J در مینیمم خود قرار گیرد، از این رو اعمال $U(k-i)$ (به ازای هر مقدار مثبت یا منفی $error$) تابع هزینه را از نقطه مینیمم خود خارج خواهد کرده و بنابراین باعث افزایش J خواهد شد. دور شدن از نقطه بهینه مسئله باعث کاهش کارایی سیستم شده و بر اساس آن رابطه زیر نتیجه گیری شده است:

$$\rho_{N_p}\leq\rho'_{N_p}<1$$

از اینرو برای روش رویداد-تحریک داریم:

$$-V\left(x(k+\beta+1)\right)=-\rho'_{N_p}V\left(x(k+\beta)\right) \qquad (۱۸)$$

بنابراین اگر تساوی (۱۸) را در (۱۷) جایگزین نموده و در صورتی که بجای ρ'_{N_p} از ρ_{N_p} استفاده کرده و تاثیر این کاهش کارایی را با Λ لحاظ کنیم خواهیم داشت:

$$\Lambda\left(V\left(x(k+\beta)\right)-\rho_{N_p}V\left(x(k+\beta)\right)\right)\geq \vartheta\left(x(k+\beta),u(k)\right) \qquad (۱۹)$$

بنابراین، در صورتی که بخواهیم در این گام سیستم با اضافه شدن (۱۷) به (۱۶)، جهت نامساوی تغییر نکند، باید داشته باشیم:

$$\Lambda V\left(x(k+\beta)\right)\left(1-\rho_{N_p}\right)\geq \vartheta\left(x(k+\beta),u(k)\right), \qquad (۲۰)$$

پس برای Λ_{max} باید داشته باشیم:

$$\Lambda_{max}\geq\frac{\vartheta\left(x(k+\beta),u(k)\right)}{V\left(x(k+\beta)\right)\left(1-\rho_{N_p}\right)}, \qquad (۲۱)$$

حال فرض کنید که تابع هزینه به صورت $\vartheta(.,.)=\left(\hat{x}^T Q\ \hat{x}+\hat{u}^T R\hat{u}\right)$ باشد، بنابراین برای این تابع هزینه مربعی خواهیم داشت:

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.1.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.11]

$$\Lambda_{max} \geq \frac{x^T(k+\beta)Qx(k+\beta)+u(k)^T Ru(k)}{\lambda_{min}\left(P_{N_P}\right)\left|x(k+\beta)\right|^2\left(1-\rho_{N_P}\right)}. \quad (۲۲)$$

در این رابطه فرض بر این است که رابطه (۱۴) همچنان برقرار است و سیستم تا گام β با همان $U_{mpc}(k)=K_{\text{first row}}\,x(k)$ کنترل می شود و نیازی به به‌روزرسانی سیگنال کنترلی نیست. با فرض تابع لیاپانوف به صورت $V(x)=x^TPx$، و همچنین با توجه به کاهشی بودن تابع لیاپانوف (بر اساس معادله (۱۴)) و مثبت بودن ماتریس P در تابع لیاپانوف خواهیم داشت:

$$\lambda_{min}(P)\left|x(k+1)\right|^2 \leq x^T(k+1)\,P\,x(k+1) \leq x^T(k)\,P\,x(k) \leq \lambda_{max}(P)\left|x(k)\right|^2$$

از این‌رو برای یک گام خواهیم داشت:

$$\left|x(k+1)\right|^2 \leq \frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}\left|x(k)\right|^2$$

اگر همین محاسبات را برای β گام ادامه دهیم،

$$\Rightarrow\left|x(k+\beta)\right|^2 \leq \left(\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}\right)^{\beta}\left|x(k)\right|^2$$

$$\Rightarrow \left|x(k)\right|^2 \geq \left(\frac{\lambda_{min}(P)}{\lambda_{max}(P)}\right)^{\beta}\left|x(k+\beta)\right|^2$$

از سوی دیگر در کل بازه k تا $k+\beta$ از آخرین سیگنال کنترلی محاسبه شده یعنی $u=Kx(k)$ استفاده می شود؛ بنابراین با توجه به مثبت بودن ماتریس R داریم:

$$u^T(k)\,R\,u(k)=x(k)^T\,K^TRK\,x(k) \geq \lambda_{min}\left(K^TRK\right)\left|x(k)\right|^2$$

با جایگزین کردن $x(k)$ از نامعادله قبل داریم:

$$u^T R\,u \geq \lambda_{min}\left(K^TRK\right)\left(\frac{\lambda_{min}(P)}{\lambda_{max}(P)}\right)^{\beta}\left|x(k+\beta)\right|^2$$

در نهایت با ترکیب این نامساوی با رابطه (۲۲) خواهیم داشت:

$$\Lambda_{max} \geq \frac{\lambda_{max}(Q)\left|x(k+\beta)\right|^2+\lambda_{min}\left(K^TRK\right)\left(\frac{\lambda_{min}(P)}{\lambda_{max}(P)}\right)^{\beta}\left|x(k+\beta)\right|^2}{\lambda_{min}\left(P_{N_P}\right)\left|x(k+\beta)\right|^2\left(1-\rho_{N_P}\right)} = \frac{\lambda_{max}(Q)+\lambda_{min}\left(K^TRK\right)\left(\frac{\lambda_{min}(P)}{\lambda_{max}(P)}\right)^{\beta}}{\lambda_{min}\left(P_{N_P}\right)\left(1-\rho_{N_P}\right)} \quad (۲۳)$$

با توجه به اینکه $\frac{\lambda_{min}(P)}{\lambda_{max}(P)}\leq 1$ بنابراین بزرگترین مقدار Λ_{max} در (۲۳) به ازای $\beta=1$ اتفاق می‌افتد. به این ترتیب نامعادله (۱۵) اثبات می شود. ■

به طور کلی در روش MPC، استفاده از تابع هدف با افق محدود، قابلیت اجرای برخط کنترلر را در پی دارد؛ اما در عوض باعث ایجاد یک زیر بهینگی می شود که میزان آن با Ψ_{min} مشخص می‌شود. بعلاوه استفاده از روش رویداد-تحریک در MPC با افق محدود، به دلیل کاهش تعداد به‌روز رسانی‌ها، به این زیربهینگی می‌افزاید که با پارامتر عملکرد Λ نشان داده می‌شود. بنابراین در بهترین حالت (از نظر بهینگی) پارامتر عملکرد با Ψ_{min} برابر شده ($\Lambda=\Psi_{min}$)، که در این حالت در هر گام از حرکت سیستم قانون کنترل به‌روز می‌شود (بیشترین تعداد و فرکانس به‌روز رسانی). حال هرچه مقدار پارامتر عملکرد Λ بیشتر انتخاب شود، این به معنای کاهش تعداد به‌روز رسانی‌ها و دور شدن از نقطه بهینه خواهد بود. درنهایت، با تنظیم پارامتر عملکرد برابر با $\Lambda=\Lambda_{max}$ (که از رابطه (۲۳) محاسبه می شود)، تعداد به‌روز رسانی‌ها با حفظ شرط پایداری ولی با کاهش عملکرد سیستم به حداقل خواهد رسید. بنابراین، در هر حالت پارامتر عملکرد همواره بزرگتر یا مساوی مقدار Ψ_{min} خواهد بود ($\Psi_{min}\leq\Lambda\leq\Lambda_{max}$).

نکته ۳: محدوده موثر تغییرات این پارامتر را می‌توان قبل از پیاده سازی سیستم محاسبه نمود تا از بار پردازشی پردازشگر در زمان کنترل سیستم کاسته شود.

٤- محاسبه سیگنال کنترل بهینه

۴-۱ کنترل مدل پیش‌بین با افق پیش‌بین محدود بدون قید

برای آزمایش کارایی روش رویداد-تحریک مبتنی بر کنترل مدل پیش‌بین و بررسی پارامتر عملکرد، بردار کنترلی برای یک سیستم خطی ساده به فرم (۱) در طول افق پیش‌بین محاسبه می‌گردد. برای دینامیک سیستم کنترلی داریم:

$$\hat{x}(k+i+1|k)=A\hat{x}(k+i|k)+B\hat{u}(k+i|k), \quad i=0,1,2,\ldots,N_p-1 \quad (۲۴)$$

در اینجا، $\hat{x}\in R^n$ & $\hat{u}\in R^m$ به ترتیب تخمین مسیر حالت در افق پیش‌بین و تخمین قانون کنترل در افق کنترل هستند. در زمان نمونه برداری k داریم؛ $\hat{x}(k|k)=x(k)$، آنگاه:

$$\hat{x}(k+i+1|k)=A^i\,x(k)+\sum_{j=0}^{i-1}A^{i-1-j}\,B\,\hat{u}(k+j|k), \quad i=0,1,2,\ldots,N_p-1 \quad (۲۵)$$

در نتیجه، بردار متغیرهای حالت پیش‌بینی شده در افق پیش‌بین با طول N_P به صورت زیر بیان می گردد:

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.1.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.11]

$$\vec{X}(k)=\left[\hat{x}^T(k+1|k),\hat{x}^T(k+2|k),\ldots,\hat{x}^T(k+N_p|k)\right]^T,\quad \vec{X}\in R^{n\times N_P} \tag{۲۶}$$

کنترل کننده مدل پیش‌بین، بردار کنترل ورودی را در طول افق کنترل N_C به صورت بهینه محاسبه می‌کند، با فرض $N_C=N_p$ داریم:

$$\vec{U}(k)=\left[\hat{u}^T(k|k),\hat{u}^T(k+1|k),\ldots,\hat{u}^T(k+N_C-1|k)\right]^T,\quad \vec{U}(k)\in R^{m\times N_C} \tag{۲۷}$$

اگر ماتریس $\bar{A}$ متشکل از ماتریسهای سیستم در کل مسیر پیش‌بین به صورت زیر تعریف شود،

$$\bar{A}=\left[\left(A^1\right)^T\left(A^2\right)^T\ldots\left(A^{N_P}\right)^T\right]^T,\quad \bar{A}\in R^{nN_P\times n} \tag{۲۸}$$

همچنین اگر ماتریس $\bar{B}$، یک ماتریس پایین مثلثی متشکل از ماتریس کنترل به شکل $\bar{B}=\begin{bmatrix} B_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ B_{21} & B_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & B_{ij} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & A^{N_P-1-N_C}B \end{bmatrix}$ و با ابعاد $\bar{B}\in R^{nN_P\times mN_C}$ تعریف باشد و هر المانهای $B_{ij}\in R^{n\times m}$ با رابطه $B_{ij}=A^{i-1-j}B$ تعریف شده باشد، آنگاه معادله (۲۵) به شکل ذیل تبدیل می‌شود:

$$\vec{X}(k+1)=\bar{A}x(k)+\bar{B}\vec{U}(k) \tag{۲۹}$$

قانون کنترل با استفاده از تابع هزینه با افق پیش‌بین محدود به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned} J_{N_p} &= \sum_{i=0}^{N_p-1}\hat{x}(k+i+1|k)^T Q\,\hat{x}(k+i+1|k)+\hat{u}(k+i|k)^T R\hat{u}(k+i|k) \\ &= \vec{X}(k+1)^T\bar{Q}\vec{X}(k+1)+\vec{U}(k)^T\bar{R}\vec{U}(k) \\ &= \left(\bar{A}x(k)+\bar{B}\vec{U}(k)\right)^T\bar{Q}\left(\bar{A}x(k)+\bar{B}\vec{U}(k)\right) \\ &\quad +\vec{U}(k)^T\bar{R}\vec{U}(k) \end{aligned} \tag{۳۰}$$

ماتریسهای $\bar{Q}$ و $\bar{R}$ به ترتیب از ترکیب قطری ماتریسهای Q و R بدست می‌آید. برای بدست آوردن قانون کنترل که تابع هزینه J_{N_p} را مینیمم نماید، از مشتق تابع هزینه نسبت به بردار کنترل ورودی مشتق باید داشته باشیم،

$$\begin{aligned} &\frac{\partial J_{N_p}}{\partial\vec{U}}=0\rightarrow \\ &\bar{B}^T Q\left(\bar{A}\vec{X}(k)+\bar{B}\vec{U}(k)\right)+ \\ &\left(\bar{A}\vec{X}(k)+\bar{B}\vec{U}(k)\right)^T Q\,\bar{B}+R\vec{U}(k)+\vec{U}^T(k)R=0 \end{aligned} \tag{۳۱}$$

از این رو بردار ورودی به شکل زیر است:

$$\vec{U}(k)=-\left(\bar{B}^T Q\bar{B}+R\right)^{-1}\bar{B}^T Q\bar{A}\,x(k) \tag{۳۲}$$

چون سیستم بدون قید فرض شده، بردار کنترل ورودی را می‌توان بر حسب بردار متغیرهای حالت بیان نمود. سیگنال کنترل ورودی همان m المان اول $\vec{U}$ در معادله (۳۲) است. این سیگنال کنترلی محاسبه شده جهت استفاده در شبیه سازی‌ها به کار می‌رود، بدین صورت که اولین المان آن به سیستم اعمال می‌شود و سایر المان‌ها دور ریخته می‌شود و در مرحله بعد محاسبه‌گر مجدداً سیگنال کنترل ورودی را محاسبه می‌نماید.

۲-۴ کنترل مدل پیش‌بین با افق پیش‌بینی بی‌نهایت

در این بخش برای اطلاعات بیشتر خوانندگان نحوه پیاده سازی روش رویداد-تحریک در مدل پیش‌بین با افق بی‌نهایت توسعه داده می‌شود. برای محاسبه سیگنال کنترلی در کنترل مبتنی بر مدل پیش‌بین با افق بی‌نهایت و با تابع هزینه مربعی داریم،

$$J_\infty(x(k))=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\hat{x}^T(k+i|k)Q\,\hat{x}(k+i|k)+\ldots \right.$$
$$\left.\hat{u}^T(k+i|k)R\hat{u}(k+i|k)\right) \tag{۳۳}$$

در این حالت اگر سیستم نامقید باشد، می‌توان توسط معادلات جبری ریکاتی گسسته زمان، سیگنال کنترلی را به صورت تابعی از متغیرهای حالت بدست آورد. در این صورت قانون کنترل عبارت است از: $u=Kx(k)$.

اگر تابع لیاپانوف برابر با $V=x^T Px$ انتخاب گردد، در این صورت بر اساس لم زیر می‌توان مقدار ضریب K و مقدار ماتریس P را به دست آورد.

لم ۱: تابع هزینه مربعی (۳۳) و تابع لیاپانوف مربعی مربوط به آن را به صورت $V(x)=x^TPx$ را در نظر بگیرید. سیستم حلقه بسته (۱) با ورودی کنترل $u=Kx$ و با افق کنترلی نامحدود و با نرخ کاهش تابع هدف با اندازه $-\left(x(k)^TQ\,x(k)+u(k)^TRu(k)\right)$ پایدار خواهد ماند، اگر P و K از طریق معادله زیر محاسبه گردند:

$$\begin{cases} K=-\left[B^TPB+R\right]^{-1}B^TPA & (a) \\ P=A^TP\left(A+BK\right)+Q & (b) \end{cases} \tag{۳۴}$$

جهت محاسبه K ابتدا باید P از رابطه $P=A^TPA-\left(A^TPB\right)\left(B^TPB+R\right)^{-1}\left(B^TPA\right)+Q$ که از حذف عامل K در رابطه (۳۴) بدست آمده است، محاسبه شود.

اثبات: به ضمیمه ۱ مراجعه شود.

لم ۱ مربوط به گام طراحی قانون کنترلی است؛ در اینجا ماتریسهای P، K، جهت طراحی قانون کنترلی با فرض $u(k)=Kx(k)$ محاسبه می

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.1.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.11]

شوند. در این گام روش به‌روزرسانی رویداد-تحریک در نظر گرفته نمی-شود. بنابراین در اثبات این لم مقدار $u(k)=Kx(k)$ خواهد بود. در روش رویداد-تحریک تا زمانی که پایداری حفظ شود، سیگنال کنترل ثابت بوده و در صورت افزایش تابع لیاپانوف، به‌روزرسانی انجام می‌شود.

نکته ٤: در صورتی که کنترل مدل پیش‌بین با افق بی‌نهایت، دارای ورودی و متغیرهای حالت مقید باشد، ماتریسهای K و P می‌تواند توسط ابزار حل LMI[۱] محاسبه گردند [۱۸].

پس از محاسبه قانون کنترلی روش رویداد-تحریک به صورتی اعمال می-شود که پایداری و کارایی خواسته شده سیستم کنترلی حفظ گردد.

نکته ٥ [۱۸]: به سادگی اثبات می‌گردد که برای یک تابع هزینه مربعی و با افق بی‌نهایت و با فرض تابع لیاپانوف برابر $V(x)=x^TPx$ داریم:

$$V\left(x\left(k|k\right)\right) > J_\infty \qquad (۳۵)$$

که در اینجا مقدار ماتریس P از لم ۱ محاسبه می‌شود.

٥- پیاده سازی روش رویداد-تحریک مبتنی بر مدل پیش‌بین با استفاده از تابع لیاپانوف ورودی به حالت

در این بخش روش متداول استنتاج قانون به‌روزرسانی با تابع لیاپانوف ورودی به حالت جهت مقایسه با روش مبتنی بر کنترل مدل پیش‌بین انجام می‌شود. سیستم حلقه بسته گسسته زمان زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &x\left(k+1\right)=Ax\left(k\right)+Bu\left(k\right), \qquad (۳۶)\\ &x\left(k\right)\in R^n \;\&\; u\left(k\right)\in R^m\\ &where,\; u\left(k\right)=K\,x\left(k\right)\end{aligned}$$

در اینجا K از روش مدل پیش‌بین و از طریق معادله (۳۲) محاسبه می-شود. درصورتی که از متغیر حالت در زمان k_i نمونه برداری شود، آنگاه در بازه $k\in[k_i,k_{i+1})$، بین مقدار واقعی و مقدار نمونه‌برداری شده خطایی به اندازه $e(k)=x(k_i)-x(k)$ بوجود می‌آید. در این صورت برای سیگنال کنترلی خواهیم داشت: $u(k)=Kx(k_i)=K[x(k)+e(k)]$؛ برای این سیستم تابع مسطح پیوسته $V(x):R^n\to R_0^+$ را تابع لیاپانوف پایدار ورودی به حالت، نسبت به خطای اندازه‌گیری گویند، اگر برای توابع کلاس K_∞ : $\bar{\alpha}, \underline{\alpha}, \alpha, \gamma$، نامعادله زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned} &\underline{\alpha}\left(|x|\right)\le V\left(x\right)\le\bar{\alpha}\left(|x|\right)\\ &V\left(Ax(k)+BK\left(x(k)+e(k)\right)\right)-V\left(x\right)\le-\alpha\left(|x|\right)+\gamma\left(|e|\right)\end{aligned} \qquad (۳۷)$$

در صورتی که داشته باشیم:

$$\gamma\left(|e|\right)\ge\sigma\alpha\left(|x|\right),\quad 0<\sigma<1. \qquad (۳۸)$$

آنگاه سیستم حلقه بسته (۳۶) با روش رویداد-تحریک پایدار خواهد ماند. در این حالت نامعادله دوم در (۳۷) تبدیل می‌شود به:

$$V\left(Ax(k)+BK\left(x(k)+e(k)\right)\right)-V\left(x\right)\le(\sigma-1)\alpha\left(|x|\right) \qquad (۳۹)$$

و تابع لیاپانوف نسبت به خطای اندازه گیری با قانون کنترلی زیر پایدار ورودی به حالت باقی می‌ماند. در حقیقت معادله (۳۸) قانون به‌روزرسانی رویداد-تحریک مبتنی بر تابع لیاپانوف با پایداری ورودی به حالت است و دیفرنس تابع لیاپانوف ΔV در (۳۴) را همواره منفی می‌کند. در واقع در فاصله بین دو نمونه برداری متوالی، سیگنال کنترل به وسیله یک مدار نگهدارنده مرتبه صفر ثابت می‌ماند. بنابراین سیستم در این فاصله به صورت مدار باز کنترل می‌شود. با اعمال قانون تحریک (۳۸)، سیستم همواره پایدار خواهد ماند. علاوه بر آن، فاصله زمانی بین نمونه برداریها تا جایی که پایداری سیستم نقض نگردد، افزایش خواهد یافت.

٦- نتایج شبیه سازی

در این بخش قانون تحریک پیشنهادی و قانون تحریک مبتنی بر تابع لیاپانوف با پایداری ورودی به حالت شبیه سازی و مقایسه شده‌اند. سیستم خطی پیوسته زمان یک Batch Reactor را در نظر بگیرد [۲۰]:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_C\,x(t)+B_C\,u(t)\\ y(t) &= C_C\,x(t)\end{aligned}$$

که در آن داریم،

$$A_C=\begin{bmatrix} 1.38 & -0.2077 & 6.715 & -5.676\\ -0.5814 & -4.29 & 0 & 0.675\\ 1.067 & 4.273 & -6.654 & 5.893\\ 0.048 & 4.273 & 1.343 & -2.104\end{bmatrix},$$

$$B_C=\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 5.679 & 0\\ 1.136 & -3.146\\ 1.136 & 0\end{bmatrix},\quad C_C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

در اینجا بردار متغیرهای حالت $x\in R^4$ و بردار کنترل ورودی $u\in R^2$ می-باشد. هدف، پایدار سازی این سیستم با روش مدل پیش‌بین با $N_P=N_C=15$ است. حداقل مقدار زمان به‌روزرسانی محاسبه شده برای کنترل در شبکه سیستم Batch Reactor در حالت زمان تحریک برابر با $T_s=0.01$ است، بنابراین معادل زمان گسسته آن برابر است با :

$$x(k+1)=A_d\,x(k)+B_d\,u(k),\qquad T_s=0.01$$

و ماتریس‌های مدل گسسته زمان سیستم عبارتند از:

[۱] Linear Matrix Inequalities

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.1.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.11]

$$A_D=\begin{bmatrix}1.0142 & -0.0018 & 0.0651 & -0.0546\\ -0.0057 & 0.9582 & -0.0001 & 0.0067\\ 0.0103 & 0.0417 & 0.9363 & 0.0563\\ 0.0004 & 0.0417 & 0.0129 & 0.9797\end{bmatrix},$$

$$B_D=\begin{bmatrix}0.0000 & -0.0010\\ 0.0556 & 0.0000\\ 0.0125 & -0.0304\\ 0.0125 & -0.0002\end{bmatrix},\ C_D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

سیگنال کنترل بهینه محاسبه شده توسط محاسبه‌گر کنترل مدل پیش‌بین (۳۲) برای این سیستم به شکل $u_0=K\,x(k)$ است. در اینجا K عبارت است از:

$$K=-\left\{\left(\bar{B}^T Q\,\bar{B}+R\right)^{-1}\bar{B}^T Q\,\bar{A}\right\}_{\text{first row}}$$

ماتریسهای کارایی $Q=I_4$ و $R=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ هستند. ماتریس P تابع لیاپانوف گسسته زمان عبارت است از

$$P=\begin{bmatrix}31.3840 & 3.7253 & 1.0023 & -23.0095\\ 3.7253 & 2.0308 & 0.1018 & -6.0791\\ 1.0023 & 0.1018 & 1.0391 & -0.6726\\ -23.0095 & -6.0791 & -0.6726 & 37.1216\end{bmatrix}>0$$

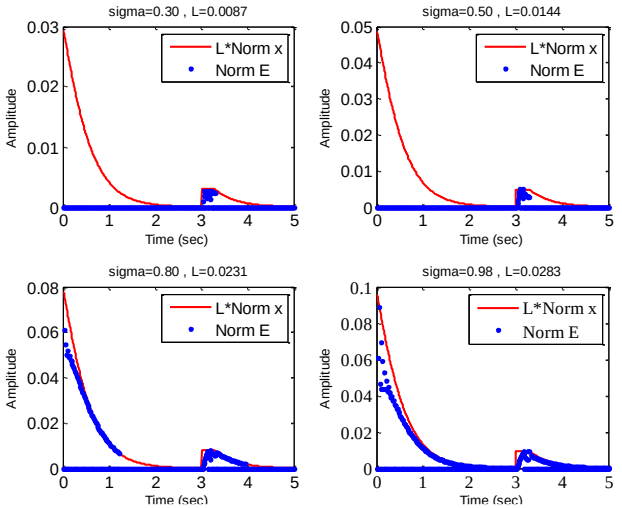
این سیستم برای ۵ ثانیه و با یک اغتشاش پالسی با طول ۰٫۳ ثانیه و با دامنه ۰٫۳ در ثانیه ۳ شبیه سازی شده است. طول افق پیش‌بین برابر $N_P=15$ و شرایط اولیه سیستم $x_0=[3,2,1,0]^T$ در نظر گرفته شده است.

۶-۱ قانون تحریک بر اساس تابع لیاپانوف با پایداری ورودی به حالت

در این مثال برای سیستم خطی داریم: $\gamma|e|\geq\sigma\alpha|x|$. با اعمال قانون تحریک (۳۸)، و تبدیل آن برای سیستم خطی به فرم ساده $|e|\geq L|x|$، پایداری سیستم به شرط $0<\sigma<1$، حفظ خواهد شد. از فرمول (۳۸) و (۳۹) واضح است که نرخ نزول تابع لیاپانوف برابر با $(\sigma-1)$ است. با افزایش مقدار پارامتر σ، تعداد به‌روز رسانی‌ها بر اساس جدول ۱ کاهش خواهد یافت. همچنین شکل ۱ نشان دهنده اجرای قانون به‌روزرسانی است. نرخ نمونه برداری ثابت $T_s=0.01$ فرض شده است و بنابراین در ۵ ثانیه ۵۰۰ نمونه برداری داریم.

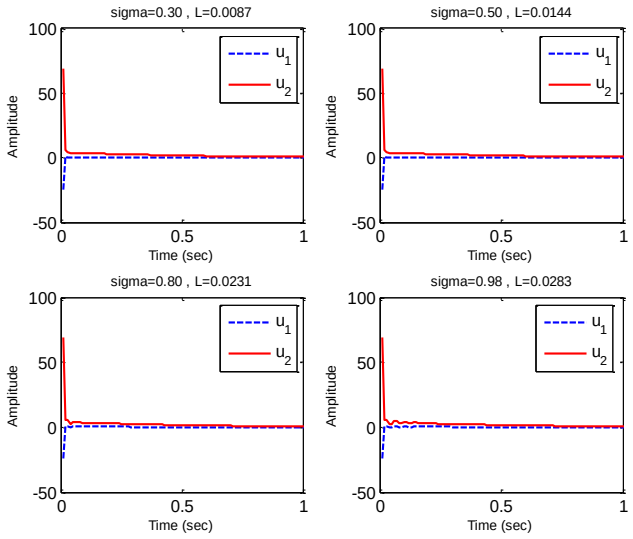
جدول ۱- تاثیر انتخاب σ بر تعداد نمونه برداری

Sigma	Trigger Coefficient	Number of updates per 500 steps
σ=0.30	L=0.0087	N=485
σ=0.50	L=0.0144	N=484
σ=0.80	L=0.0231	N=395
σ=0.98	L=0.0283	N=316



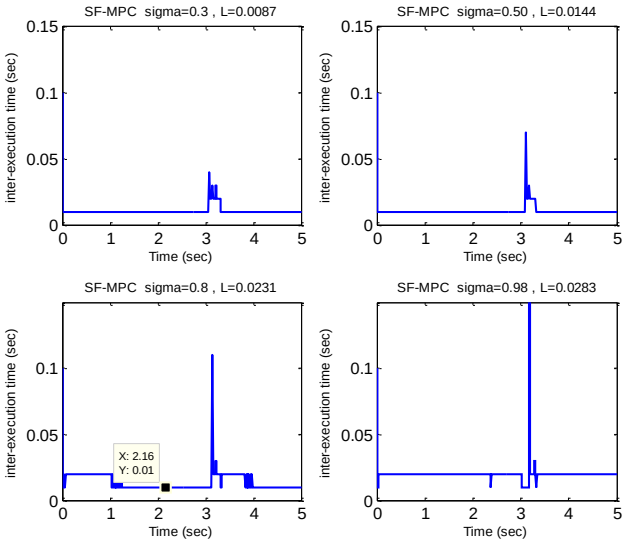
شکل ۱- قانون رویداد-تحریک مبتنی بر تابع لیاپانوف با پایداری ورودی به حالت برای افق پیش‌بین برابر $N_P=15$ و $|e|\geq L|x|$

زمانی که معادله (۳۸) نقض شود، قانون کنترل به روزرسانی خواهد شد. برای مقادیر کوچک σ، سیگنال کنترل مسطح‌تر است؛ زیرا قانون کنترل در هر گام زمانی به روزرسانی می‌شود؛ اما با اضافه کردن σ، فاصله زمانی به‌روزرسانی افزایش یافته و در نتیجه سیگنال کنترل نوسانات بیشتری را برای رساندن سیستم به وضعیت پایدار تجربه می‌کند (شکل ۲).



شکل ۲- سیگنال کنترل محاسبه شده توسط کنترل مدل پیش‌بین و با روش رویداد-تحریک مبتنی بر تابع لیاپانوف با پایداری ورودی به حالت

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.1.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.11]



شکل ۳- فاصله زمانی نمونه برداریها در کنترل مدل پیش‌بین مبتنی بر تابع لیاپانوف با پایداری ورودی به حالت

با قرار دادن σ=0.98، بیشترین فاصله نمونه برداری و یا کمترین تعداد نمونه برداری برابر با ۳۱۶ از ۵۰۰ گام زمانی رخ می‌دهد (شکل ۳ را ببینید).

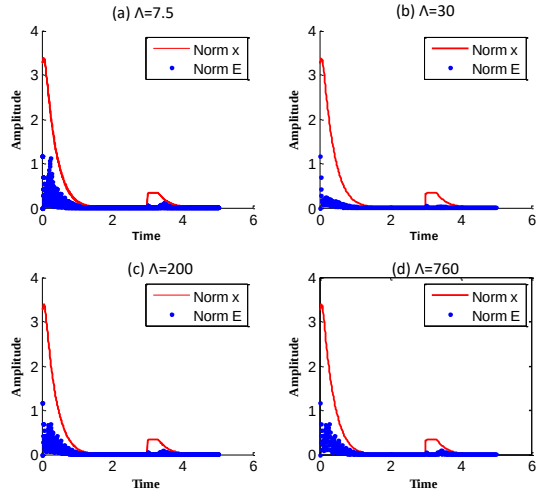
۲-۶ رویداد-تحریک مبتنی بر کنترل مدل پیش‌بین

در این روش از رویداد-تحریک باید حدود پارامتر Λ برای این سیستم محاسبه گردند. برای شرایط اولیه داده شده و قضیه ۲ و با پروسه شرح داده شده در [۱۶]، خواهیم داشت؛ φ_{N_P-1}=2.5 و ρ_{N_P}=0.91. بنابراین از معادله (۹) و (۱۵)، پارامتر Λ در بازه $7.5\leq\Lambda\leq630.21$ محاسبه می‌شود. جدول ۲ تعداد به‌روز رسانی‌ها را به ازای مقادیر مختلف Λ نشان می‌دهد.

جدول ۲- نسبت پارامتر Λ و تعداد به‌روز رسانی سیگنال کنترل در ۵۰۰ گام سیستم

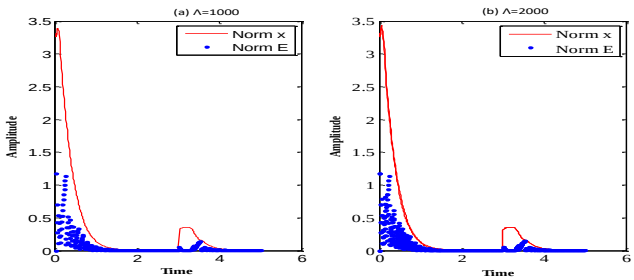
Λ	۵	۱۵	۱۰۰	۲۰۰	۵۰۰
تعداد به‌روز رسانی	۵۰۰	۲۷۱	۱۲۲	۱۱۶	۱۱۷
Λ	۶۳۰	۸۰۰	۱۰۰۰	۳۰۰۰	۳۵۰۰
تعداد به‌روز رسانی	۱۰۳	۱۰۳	۱۰۳	۱۰۳	۱۰۳

چنانکه دیده می‌شود، حد بالای محاسبه شده برای پارامتر Λ در تئوری، به خوبی با پاسخ شبیه سازی تطابق دارد. به عبارت دیگر حد بالای پارامتر Λ در رابطه (۱۵) مقدار ۶۳۰ است، که در شبیه سازی نیز همین عدد تایید می‌شود. از شکل ۴ مشخص است که با انتخاب Λ=7.5، حداکثر تعداد نمونه برداری را درخواست می‌گردد. تعداد به‌روزرسانی برابر با ۵۰۰ خواهد بود که به معنای این است که فاصله به‌روزرسانی سیگنال کنترلی حداقل و برابر با T_S (زمان نمونه برداری سنسور) است. با افزایش این پارامتر به Λ=30، تعداد به‌روز رسانی‌ها به تعداد ۱۵۷ از ۵۰۰ خواهد رسید، که به معنای زیاد شدن فاصله زمانی و یا کاهش بار شبکه است. به همین صورت اضافه کردن این پارامتر به Λ=200 و Λ=630 به ترتیب تعداد نمونه برداریها برابر با ۱۱۶ و ۱۰۳ از ۵۰۰ گام زمانی خواهد بود. (شکل ۴ را ببینید)



شکل ۴- نرم خطا و متغیر حالت در کنترل کننده با افق پیش‌بین N_P=15 (a) Λ=630 (d)، Λ=200 (c)، Λ=30 (b)، Λ = 7.5

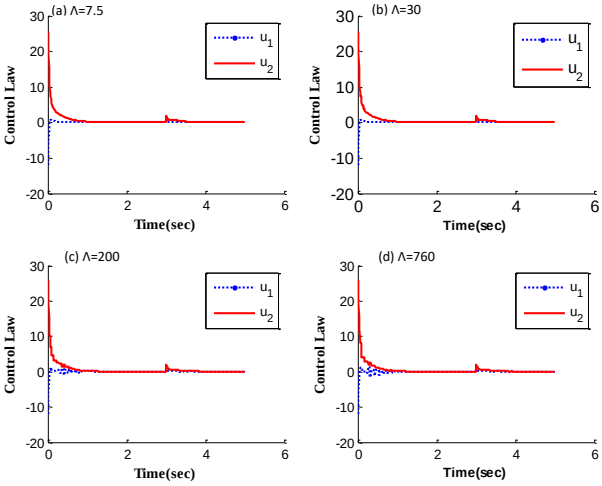
نرم E در شکل ۴ نشان دهنده نرم خطای اندازه گیری متغیرهای حالت در آخرین مقدار نمونه برداری شده است. با اضافه کردن Λ فاصله زمانی نمونه برداری بیشتر شده و به همین نسبت در هر گام خطای اندازه-گیری نیز افزایش می‌یابد. با تکرار این روند و افزایش پارامتر Λ نمودار خطا افزایش یافته تا اینکه به نمودار متغیر حالت برسد، در این حالت Λ به ماکزیمم مقدار خود رسیده است. از این به بعد افزایش پارامتر Λ تاثیری بر کاهش فاصله نمونه برداری ندارد. برای مثال انتخاب Λ=1000>630 و یا Λ=2000>630 همان تعداد نمونه برداری را در این فاصله زمانی نتیجه خواهد داد. برای مثال تعداد نمونه برابر با ۱۰۳ از ۵۰۰ خواهد بود (شکل ۵ را ببینید).



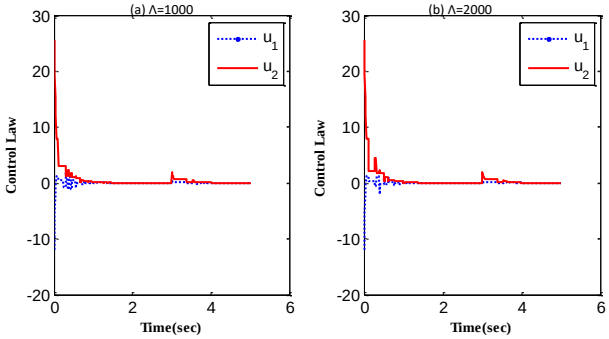
شکل ۵- نرم متغیرهای حالت و خطا در کنترل کننده‌های با افق پیش‌بین N_P=15 برای Λ=1000>630 (a)، Λ=2000>630 (b)

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.1.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.11]

همانگونه که از شکل ۶ مشخص است، کاهش به‌روزرسانی کنترل کننده، نوسانات در سیگنال کنترل را افزایش می‌دهد. سیگنال کنترل با افزایش شاخص عملکرد از مقدار ماکزیمم به Λ=1000 و یا 2000 تغییر نمی-نماید (شکل ۷).

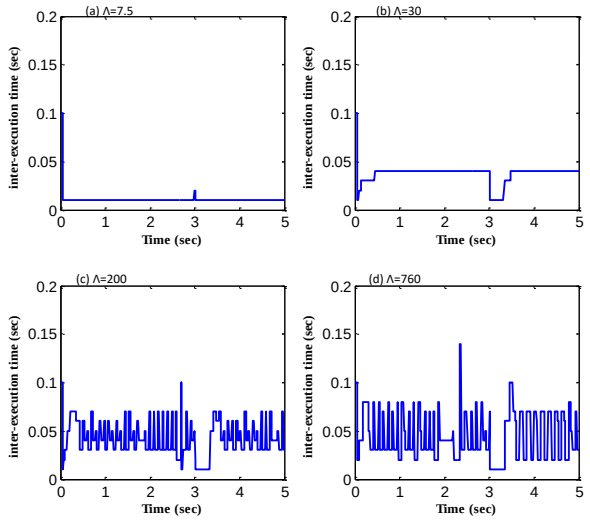


شکل ۶- سیگنال کنترل در رویداد-تحریک مبتنی بر کنترل مدل پیش‌بین با افق پیش‌بین N_P=15 (a) ،Λ=7.5 (b) ،Λ=30 (c) ،Λ=200 (d) ،Λ = 760

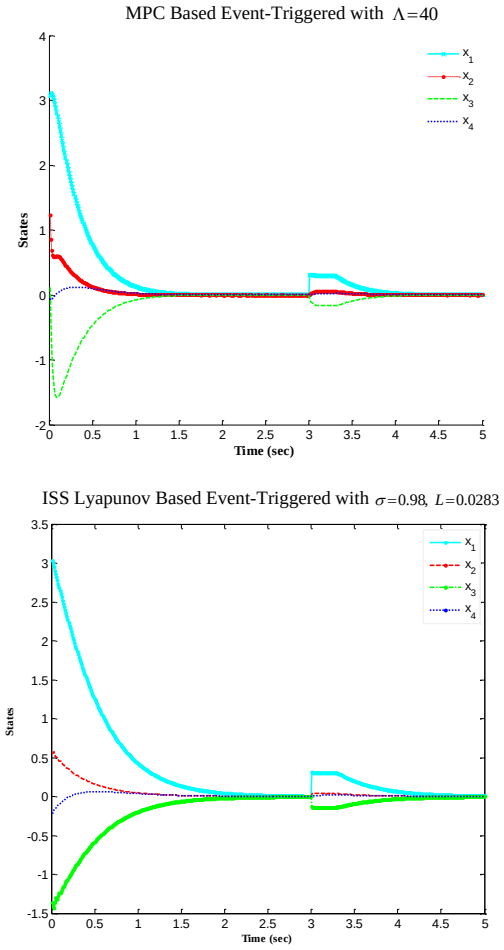


شکل ۷- سیگنال کنترل در رویداد-تحریک مبتنی بر کنترل مدل پیش‌بین با افق پیش‌بین N_P=15 برای (a) Λ=1000>630 ، (b) Λ=2000>630

فاصله زمانی به‌روزرسانی با افزایش شاخص عملکرد Λ از مقدار مینیمم به مقدار ماکزیمم همانطور که در شکل ۸ نشان داده شده افزایش خواهد یافت.



شکل ۸- فاصله به‌روزرسانی در روش رویداد-تحریک مبتنی بر کنترل مدل پیش‌بین با افق پیش‌بین N_P=15 (a) ،Λ=7.5 (b) ،Λ=30 (c) ،Λ=200 (d) ،Λ=630



شکل ۹- مقایسه عملکرد تحریک رویداد مبتنی بر کنترل مدل پیش‌بین و تابع لیاپانوف ورودی به حالت

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.1.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.11]

۷- نتیجه گیری

در این مقاله، روش رویداد-تحریک جهت افزایش فاصله زمانی به‌روزرسانی کنترل کننده مبتنی بر مدل پیش‌بین ارائه شد. همچنین نشان داده شد که در قانون به‌روزرسانی با استفاده از رویداد-تحریک مبتنی بر کنترل مدل پیش‌بین نسبت به نوع رویداد-تحریک مبتنی بر تابع لیاپانوف با پایداری ورودی به حالت، از لحاظ کارایی و کاهش فرکانس به‌روزرسانی دارای برتری است. رویداد-تحریک مبتنی بر کنترل مدل پیش‌بین از این لحاظ که کل تخمین انجام شده در مسیر پیش‌بین در محاسبه زمان به‌روزرسانی موثر است از لحاظ پایداری و کارایی دارای برتری است. در این مقاله نشان داده شد که پارامتر عملکرد Λ به قانون رویداد-تحریک مبتنی بر کنترل مدل پیش‌بین طبیعتی انعطاف پذیر داده است. زیرا به صورت برخط برای زیاد کردن فاصله زمانی نمونه برداری در ازای کاهش عملکرد سیستم، قابلیت تنظیم دارد. برای طراحی یک الگوریتم مناسب برای تنظیم این پارامتر، حد بالا و پایین آن به صورت آفلاین بر اساس آنچه که ارائه شده قابل محاسبه است. نتایج شبیه سازی نشان دهنده تاثیر تغییرات این پارامتر در فاصله زمانی نمونه برداری‌ها است. همچنین نشان داده شد که با افزایش این پارامتر به مقدار بالاتر از حد بالای تعیین شده برای آن، تاثیری در فاصله زمانی به‌روزرسانی ندارد.

ضمیمه:

اثبات لم ۱: با صرف نظر از آرگومان‌ها در تابع هزینه (۶)، اگر بخواهیم نرخ کاهش برابر $-\left(x^T Q x+u^T Ru\right)$ باشد، تابع لیاپانوف باید در نامعادله زیر صدق کند،

$$V\left(x\left(k+1\right)\right)-V\left(x\left(k\right)\right)=-\left(x^T Qx+u^T Ru\right) \quad (۴۰)$$

در اینجا $u=K\,x(k)$ و از جایگزینی $x(k+1)$ از معادله (۱) در $V\left(x(k+1)\right)$ و انتقال تمام عبارات به یک سمت خواهیم داشت:

$$x^T\left(\left(A+BK\right)^T P\left(A+BK\right)-P+K^T RK+Q\right)x=0 \quad (۴۱)$$

یکی از نکات کلیدی در استفاده از روش رویداد-تحریک آن است که در هنگام طراحی قانون کنترلی، نحوه به‌روزرسانی سیگنال کنترل در نظر گرفته نمی‌شود. زیرا در نظر گرفتن زمان به روزرسانی متغیر، پروسه طراحی را پیچیده می‌کند. بنابراین در هنگام طراحی، حالتی در نظر گرفته می شود که در همه زمانها قانون کنترلی به روز می‌شود؛ اما یک شرط حیاتی (مانند پایداری یا حداقل نرخ نزول) که با نقض آن اصل طراحی زیر سوال می رود، تعیین شده و به روزرسانی به نحوی انجام می شود که این شرط نقض نگردد.

معادله (۴۱) باید برای تمام مقادیر x برقرار باشد، بنابراین باید داشته باشیم:

$$\left(A+BK\right)^T P\left(A+BK\right)-P+K^T RK+Q=0 \quad (۴۲)$$

که نتیجه می‌دهد،

$$A^T PA+A^T PBK+K^T B^T PA+$$
$$K^T B^T PBK-P+K^T RK+Q=0 \quad (۴۳)$$

یک انتخاب برای برقراری معادله (۹) عبارت است از:

$$K^T B^T PA+K^T B^T PBK+K^T RK=0 \quad (۴۴)$$
$$A^T PA+A^T PBK-P+Q=0$$

به سادگی دیده می‌شود که اگر ماتریس P و K در معادلات (۴۴) صدق کنند، عبارت اول معادله (a.۳۴) و عبارت دوم معادله (b.۳۴) را نتیجه می-دهد.

مراجع

[1] P. Tabuada, "Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 52, no. 9, pp. 1680-1685, 2007.
[2] M. Mazo, A. Anta and P. Tabuada, "An ISS self-triggered implementation of linear controllers," Automatica, vol. 46, no. 8 pp. 1310-1314, 2010.
[3] H. Adloo, and M.H. Shafiei, "A robust adaptive event-triggered control scheme for dynamic output-feedback systems". Information Sciences, vol. 477, pp. 65-79, 2019.
[4] R. Postoyan, P. Tabuada, D. Nešić and A. Anta, "Event-triggered and self-triggered stabilization of distributed networked control systems," in 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC 2011), pp. 2565-2570, 2011.
[5] X. Wang and M.D. Lemmon, "Asymptotic stability in distributed event-triggered networked control systems with delays," in: American Control Conference (ACC 2010), pp. 1362-1367, 2010.
[6] F. Zarei, and M.H. Shafiei و "On event-triggered tracking for non-linear SISO systems via sliding mode control." IMA Journal of Mathematical Control and Information, doi:10.1093/imamci/dny041, 2018.
[7] M. B. G. Posthumus-Cloosterman, "Control over communication networks: modeling, analysis, and synthesis," Ph. D. dissertation, Eindhoven University of Technology, the Netherlands, doi: 10.6100/IR635444, 2008.
[8] A. Rahideh and M.Shaheed, "Constrained output feedback model predictive control for

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.1.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.11]

nonlinear systems," Control engineering practice, vol. 20, no. 4, pp. 431-443, 2012.

[9] D. Lehema, E. Henriksson and K. H. Johansson, "Event-Triggered Model predictive control of Discrete-Time Linear Systems Subject to Disturbance," In Control Conference (ECC), 2013 *EUREAPAN*, pp. 1156-1161, 2013.

[10] A. Eqtami , D.V. Dimarogonas and K.J. Kyriakopoulos, "Event-triggered control for discrete-time systems," in: American Control Conference (ACC 2010), pp. 4719-4724, 2010.

[11] J.B. Berglind, T. Gommans and W. Heemels, "Self-triggered MPC for constrained linear systems and quadratic costs," in: IFAC Nonlinear Model Predictive Control Conference, Noordwijkerhout, The Netherlands, pp. 342-348, 2012.

[12] A. Eqtami, D.V. Dimarogonas and K.J. Kyriakopoulos, "Novel event-triggered strategies for model predictive controllers," 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC 2011), pp. 3392-3397, 2011.

[13] E. Henriksson, et al. "Multiple-loop self-triggered model predictive control for network scheduling and control." IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 23, no. 6, pp. 2167-2181, 2015.

[14] Zhan, Jingyuan, and Xiang Li. "Self-triggered consensus of multi-agent systems via model predictive control." IFAC-PapersOnLine, vol. 49, no. 4, pp. 19-24, 2016.

[15] Zhang, Jing, Su Liu, and Jinfeng Liu. "Economic model predictive control with triggered evaluations: State and output feedback." Journal of Process Control, vol. 24, no. 8, pp. 1197-1206, 2014.

[16] J.A. Primbs and V. Nevistic, "Constrained finite receding horizon linear quadratic control," in: Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 3196-3201, 1997.

[17] A. Jadbabaie, J. Yu, and J. Hauser. "Unconstrained Receding-Horizon Control of Nonlinear Systems". IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 46, no. 5, pp. 776–783, 2001.

[18] M.V. Kothare, V. Balakrishnan and M. Morari, "Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities," Automatica, vol. 32, no. 10, pp. 1361-1379, 1996.

[19] D.Q. Mayne, and H. Michalska, "Receding horizon control of nonlinear systems" IEEE Transactions on automatic control, vol. 35, no. 7, pp. 814-824, 1990.

[20] D. Nesic and A. R. Teel, "Input–Output Stability Properties of Networked Control Systems," IEEE Transactions on automatic control, vol. 49, no. 10, pp. 1650-1667, 2004.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.1.9]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.11]