مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۱، شماره ۱، بهار ۱۳۹۶، صفحه ۳۷-۲۷

کنترل یک گروه ناهمگن خودرو در حضور تاخیر زمانی ارتباطی و عملگری با ساختار ارتباطی زمان متغیر: استراتژی فاصله ثابت و زمان پیشرفت ثابت

حسین چهاردولی[۱]، محمدرضا همایی‌نژاد[۲]

[۱] دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، گروه جامدات، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، hchehardoli@gmail.com

[۲] استادیار، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، گروه جامدات، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، mrhomaeinezhad@kntu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۱۲/۵، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۶/۲/۲۱)

چکیده: در این مقاله به کنترل یک گروه خودرو ناهمگن پرداخته می‌شود. از آنجایی که معمولا ارسال داده در سیستم‌های چندعاملی با تاخیر زمانی همراه است لذا تاخیر زمانی اندازه‌گیری در طراحی کنترلر لحاظ می‌شود. همچنین وقفه موتور نیز در مدل‌سازی دینامیکی هر خودرو لحاظ می‌گردد. برای هر خودرو یک کنترلگر خطی بر اساس فاصله نسبی و سرعت نسبی بین خودرویی، طراحی می‌شود. نشان داده می‌شود که دینامیک حلقه بسته گروه خودرو، یک دینامیک کلیدزنی خطی تاخیر زمانی خواهد بود. دو قضیه جدید برای بررسی پایداری سیستم کلیدزنی مزبور بر اساس قضیه لیاپانوف-رازومیخین ارائه می‌گردد و نشان داده می‌شود که گروه ناهمگن خودرو تحت هر سوئیچ دلخواه و نیز با لحاظ تاخیر زمانی ارتباطی و عملگری پایدار مجانبی خواهد بود. برای اثبات پایداری رشته‌ای گروه ناهمگن خودرو تحت عمل سوئیچ و تاخیر زمانی، قضیه‌ای جدید ارائه خواهد شد که قیودی بر ضرایب کنترلی سیستم اعمال می‌کند. کیفیت روش‌های ارائه شده توسط مثال‌های شبیه‌سازی بررسی خواهد شد.

کلمات کلیدی: گروه ناهمگن خودرو، تاخیر زمانی ارتباطی، وقفه عملگری، لیاپانوف رازومیخین، پایداری رشته‌ای.

Control of a Heterogeneous Platoon of Vehicles with Actuator Lag, Communication Delay and Switched Interaction Topology: Constant Spacing and Constant Time Headway Policies

Hossein Chehardoli, Mohammadreza Homaeinezhad

Abstract: This paper investigates the control problem of a heterogonous vehicular platoon with time-varying interaction topology, communication delay and actuator's lag. For each vehicle, a neighbor based linear control law using relative position and relative velocity between vehicles is considered. Two new approaches based on Lyapunov-Razumikhin theorem are presented to perform the internal stability analysis of the resultant switched linear time delay system. It is shown that the closed-loop dynamic is globally asymptotically stable under arbitrary switching. It means that the heterogeneous platoon of vehicles is internal stable under switching action. In continuance of paper, a new theorem is presented to obtain conditions on controller gains satisfying the string stability of heterogeneous platoon. Simulation results are provided to show the effectiveness of the proposed approaches.

Keywords: Heterogeneous platoon, Communication delay, Actuator lag, Lyapunov-Razumikhin, String stability.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.1.6.3]

۱- مقدمه

در دهه‌های اخیر بحث سیستم‌های حمل و نقل هوشمند (ITS)[1] مورد توجه بسیاری قرار گرفته است [۱و۲]. ایده ITS حلی مفید و سودمند برای کاهش اثرات منفی تراکم ترافیکی در بزرگراه‌ها می‌باشد [۳]. پیاده‌سازی ITS دارای مزایای متعددی همچون افزایش ایمنی، کاهش مصرف سوخت، افزایش ظرفیت ترافیکی بزرگراه و کاهش آلودگی می‌باشد [۳]. ایده اصلی ITS کنترل گروهی خودرو با فاصله-های کم به منظور افزایش ظرفیت ترافیکی می‌باشد [۴و۵].

کنترل گروهی خودروها به عنوان پیاده‌سازی عملی سیستم ITS در دهه‌های اخیر مورد توجه روزافزونی بوده است. به طوری‌که روش-های متعددی برای کنترل حرکت یک بعدی آن‌ها ارائه شده است [۶-۱۰]. ایده اصلی این امر، کنترل گروهی خودروها به منظور رسیدن به فاصله نسبی مطلوب و سرعت یکسان می‌باشد [۱۱]. اهمیت کنترل گروهی خودروها در نظم دهی حرکتی در اتوبان‌های خودکار و افزایش ظرفیت ترافیکی می‌باشد. به طوری که اگر بتوان خودروها را تا حد ممکن نزدیک به یکدیگر کنترل نمود، آنگاه ظرفیت ترافیکی افزایش می‌یابد [۳]. در کنترل گروهی خودرو دو نوع تحلیل پایداری مورد توجه قرار می‌گیرد. پایداری داخلی[2] که معرف پایداری مجانبی سیستم می‌باشد و پایداری رشته‌ای[3] که متضمن عدم گسترش خطا در طول دسته می‌باشد [۱۲و۱۳].

در حالت کلی دو استراتژی فاصله‌بندی بین خودرویی استفاده می‌گردد: استراتژی زمان پیشرفت ثابت [۱۲-۱۴] و استراتژی فاصله ثابت [۱۵-۱۷]. در استراتژی فاصله ثابت، هدف ثابت نگه داشتن فاصله بین هر دو خودروی متوالی است در حالی‌که در استراتژی زمان پیشرفت ثابت فاصله بین خودرویی متغیر و بر حسب سرعت خودروها می‌باشد. استراتژی فاصله ثابت حجم ترافیکی را بیشتر کرده در حالی‌که پیاده-سازی عملی آن دشوارتر است [۱۳و۱۶].

در دهه‌های اخیر تحقیقات فراوانی در زمینه تحلیل پایداری و طراحی کنترلگر برای گروه‌های خودرو انجام شده است. در حالت کلی طراحی کنترلگر و تحلیل پایداری برای حرکت گروهی خودروها در فضای حالت [۱۷-۲۱] و یا در فضای فرکانس [۸،۹،۲۳] انجام می‌پذیرد. در [۱۶] یک کنترل مقاوم-تطبیقی برای تخمین نیروهای خارجی اعمالی بر خودرو ارائه شده است. یک کنترلگر خطی و مقاوم در برابر داده‌های از دست رفته در [۱۵] ارائه شده است که پایداری رشته‌ای و داخلی گروه را تضمین می‌کند. در [۱۴و۲۳] اثرات تاخیر زمانی بر پایداری داخلی و رشته‌ای درنظر گرفته شده است. یک کنترلگر غیر متمرکز برای تضمین پایداری رشته‌ای یک گروه همگن خودرو در حضور تاخیر عملگری در [۲۲] ارائه شده است که نتایج به صورت عملی اعتبارسنجی شده‌اند. اثرات اغتشاش خارجی اعمالی بر خودرو بر پایداری رشته‌ای در [۱۷] بررسی شده است. در [۳] روشی مبتنی بر مطالعه رفتار ریشه‌های معادله مشخصه سیستم حلقه بسته برای بررسی پایداری رشته‌ای ارائه شده است.

در تمامی تحقیقات گذشته، ساختار شبکه ارتباطی گروه خودرو، ثابت درنظر گرفته شده است. در یک گروه خودرو دینامیک حلقه بسته تابعی از ساختار ارتباطی خودروها است. به نحوی‌که با تغییر ساختار ارتباطی خودروها، دینامیک حلقه بسته سیستم نیز دچار تغییر می‌گردد. مطابق تئوری سیستم‌های کلیدزنی [۲۴و۲۵] تغییر دینامیک حلقه بسته می‌تواند باعث ناپایداری کل سیستم گردد. همچنین این امر می‌تواند پایداری رشته‌ای سیستم را نیز با مخاطره روبرو نماید. در این مقاله به کنترل یک دسته ناهمگن خودرو در حضور تاخیر زمانی ارتباطی و عملگری و با ساختار ارتباطی زمان متغیر پرداخته می‌شود. به طور خلاصه مهمترین نوآوری این مقاله به شرح زیر است:

۱- ناهمگن درنظر گرفتن گروه خودرو

۲- ارائه قضایایی نو مبتنی بر قضیه لیاپانوف-رازومیخین برای تحلیل پایداری سیستم‌های کلیدزنی خطی تاخیر زمانی

۳-تحلیل پایداری رشته‌ای گروه خودرو در حضور تاخیر زمانی ارتباطی، عملگری و ساختار ارتباطی زمان متغیر

ادامه مقاله به شرح زیر سازماندهی شده است. در قسمت ۲ مقدمات ریاضی مسئله ارائه می‌گردد. در قسمت ۳ به معرفی سیستم مورد نظر و طراحی کنترلگر به منظور پایداری داخلی سیستم پرداخته می‌شود و دو قضیه جدید در این راستا ارائه می‌گردد. در قسمت ۴ پایداری رشته‌ای سیستم مورد بحث قرار خواهد گرفت و قضیه‌ای در این مورد ارائه خواهد شد. در قسمت ۵ شبیه‌سازی‌های متعدد برای بررسی کیفیت قضایای بیان شده ارائه می‌گردد. در نهایت مقاله در قسمت ۶ جمع‌بندی می‌گردد.

۲- مقدمات ریاضی مسئله

فرض کنید $G=(V,\varepsilon,\mathbf{W})$ معرف یک گراف جهت‌دار از مرتبه N باشد که درآن $V=\{1,2,...,N\}$ معرف رئوس گراف، $\varepsilon\subseteq V\times V$ مجموعه یال‌ها و $\mathbf{W}=[w_{ij}]_{N\times N}$، $w_{ij}>0, w_{ii}=0$ ماتریس مجاورت گراف G می‌باشد. اگر یک مسیر از راس i به راس j وجود داشته باشد، راس j از راس i دسترس‌پذیر خواهد بود. گراف بدون جهت G متصل[4] است اگر بین هر دو راس متفاوت حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. راس i در دسترس سراسری خوانده می‌شود اگر در دسترس هر راس دیگری باشد. ماتریس لاپلاسین[5] گراف G به صورت $\mathbf{L}=[l_{ij}], l_{ii}=\sum_{j=1,\neq i}^{N} w_{ij}$، $l_{ij}=-w_{ij}, i\neq j$ تعریف می‌شود. در یک گروه خودرو رهبر به خودرویی اطلاق می‌گردد که اطلاعاتی از سایر خودروها دریافت نکند.

[1] Intelligent transportation system (ITS)
[2] Internal stability
[3] String stability
[4] Connected
[5] Laplacian

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.1.6.3]

برای مطالعه مسئله رهبر-پیرو[1] گراف دیگری به صورت $\bar{G}$ تعریف می‌شود که شامل $N+1$ راس می‌گردد که راس راهنما با شماره 0 نشان داده می‌شود. ماتریس Z به عنوان ماتریس مجاورت راس صفر درنظر گرفته می‌شود. در گراف $\bar{G}$ راس صفر قابل دسترس سراسری خوانده می‌شود اگر برای تمام رئوس دیگر در دسترس باشد. برای گراف $\bar{G}$ ماتریس $\mathbf{H}=\mathbf{L}+\mathbf{Z}$ تعریف می‌گردد که در تحلیل پایداری داخلی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

لم ۱: $\mathbf{H}\succ\mathbf{0}$ اگر راس صفر قابل دسترس سراسری باشد [۲۶].

لم ۲: ماتریس متقارن $\bar{\mathbf{S}}=\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{S}}_{11} & \bar{\mathbf{S}}_{12}\\ \bar{\mathbf{S}}_{12}^T & \bar{\mathbf{S}}_{22}\end{pmatrix}$ مثبت معین است اگر $\bar{\mathbf{S}}_{11}\succ\mathbf{0}, \bar{\mathbf{S}}_{22}-\bar{\mathbf{S}}_{12}\bar{\mathbf{S}}_{11}^{-1}\bar{\mathbf{S}}_{12}\succ\mathbf{0}$ [۲۷].

لم ۳. (نامساوی یانگ): برای هر دو بردار دلخواه $\mathbf{a},\mathbf{b}$ ونیز ماتریس $\boldsymbol{\varsigma}\succ\mathbf{0}$، نامساوی $2\mathbf{a}^T\mathbf{b}\le\mathbf{a}^T\boldsymbol{\varsigma}\mathbf{a}+\mathbf{b}^T\boldsymbol{\varsigma}^{-1}\mathbf{b}$ برقرار است [۲۸].

قضیه ۱. (لیاپانوف رازومیخین): سیستم تاخیردار زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}=f(\mathbf{x}_t)\\ \mathbf{x}(\theta)=\phi(\theta),\ \theta\in[-\beta,0]\end{cases}\qquad(۱)$$
$$\mathbf{x}_t(\theta)=\mathbf{x}(t+\theta),\ \forall\theta\in[-\beta,0],\ f(0)=0$$

توابع پیوسته، غیرمنفی و غیرکاهشی $\varphi_3,\varphi_2,\varphi_1$ را درنظر بگیرید به نحوی که: $\forall s>0:\ \phi_1(s)>0,\phi_2(s)>0,\phi_3(s)>0$، همچنین داشته باشیم: $\phi_1(0)=\phi_2(0)=0$. برای سیستم (۲۷)، فرض کنید تابع پیوسته و مشتق‌پذیر $f:C([-\beta,0],\Re^n)\to\Re^n$ مجموعه محدود $C([-\beta,0],\Re^n)$ را به یک مجموعه محدود در $\Re^n$ می نگارد. اگر یک تابع پیوسته $V(\mathbf{x},t)$ وجود داشته باشد به نحوی که

$$\phi_1(\|\mathbf{x}\|)\le V(t,\mathbf{x})\le\phi_2(\|\mathbf{x}\|),\ t\in\Re,\mathbf{x}\in\Re^n\qquad(۲)$$

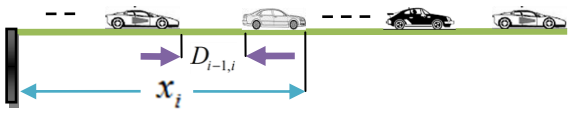
و در ادامه اگر یک تابع غیرکاهشی $\phi(s),\ \phi(s)>s$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$\dot{V}(t,x)\le-\varphi_3(\|x\|),\quad if\ V(t+\theta,x(t+\theta))<\varphi(V(t,x(t))),\ \theta\in[-\beta,0]\qquad(۳)$$

آنگاه مبدا یک نقطه پایدار مجانبی برای سیستم (۱) خواهد بود [۲۹].

۳- معرفی سیستم

در این قسمت، کنترل حرکت یک گروه خودرو ناهمگن شامل یک خودرو راهنما و N خودرو پیرو مورد بررسی قرار می‌گیرد. حرکت گروه، به صورت یک‌بعدی درنظر گرفته می‌شود. شکل (۱) به صورت شماتیک گروه ناهمگن خودرو در حرکت یک‌بعدی را نشان می‌دهد.



شکل ۱: یک گروه خودروی ناهمگن در حرکت یک‌بعدی

معادله دینامیکی هر خودرو به صورت زیر است:

$$M_i\ddot{x}_i=u_i^\sigma\rightarrow\begin{cases}\dot{x}_i=v_i\\ \dot{v}_i=\dfrac{1}{M_i}u_i^\sigma=\bar{u}_i^\sigma\end{cases}\qquad(۴)$$

که در آن u_i,v_i,x_i,M_i به ترتیب جرم، موقعیت، سرعت و ورودی کنترلی خودرو iام است و σ سیگنال کلیدزنی است که ناشی از تغییر ساختار قانون کنترلی است. برای هر دو استراتژی زمان پیشرفت ثابت و فاصله ثابت قانون کنترلی به صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$\bar{u}_i^\sigma=K\sum_{j=1}^{N_i^\sigma}w_{ij}^\sigma[x_j(t-\tau)-x_i(t-\tau)-d_{ji}]+\qquad(۵)$$
$$+K[x_0(t-\tau)-x_i(t-\tau)-d_{0i}]+D(v_0-v_i)$$

که در آن: x_0,v_0 به ترتیب موقعیت و سرعت خودروی راهنما هستند. τ تاخیر زمانی ارتباطی، K و D ضرایب کنترلی و N_i^σ تعداد خودروهای همسایه خودروی i می‌باشد. برای هر خودرو موقعیت مطلوب به صورت $x_i^d=x_0-\sum_{j=1}^{i}(D_{j-1,j}+L_{j-1})$ تعریف می‌شود که در آن $D_{j-1,j}$ فاصله مطلوب بین دو خودروی متوالی و L_{j-1} طول خودرو $j-1$ ام است. برای استراتژی فاصله ثابت $D_{j-1,j}$ مقداری ثابت و برای استراتژی زمان پیشرفت ثابت $D_{j-1,j}=h_jv_0+D_{\min}$ درنظر گرفته می‌شود که در آن $D_{\min}$ حداقل فاصله بین دوخودروی متوالی و h_j زمان پیشرفت ثابت می‌باشد. خطای تعقیب برای هر خودرو به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_i=x_i-x_i^d\Rightarrow\dot{e}_i=\dot{x}_i-v_0\Rightarrow\ddot{e}_i=\dot{x}_i\qquad(۶)$$

بنابراین قانون کنترلی برحسب دینامیک خطا به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{u}_i^\sigma=K\sum_{j=1}^{N_i^\sigma}w_{ij}^\sigma[e_j(t-\tau)-e_i(t-\tau)]-\qquad(۷)$$
$$-Ke_i(t-\tau)-D\dot{e}_i$$

تاخیر زمانی ارتباطی از خصوصیات اجتناب‌ناپذیر در سیستم‌های چندعاملی است. همچنین موتور هر خودرو دارای تاخیر عملگری است که با لحاظ هر دو نوع تاخیر قانون کنترلی فوق به صورت زیر درخواهد آمد:

$$\bar{u}_i^\sigma=K\sum_{j=1}^{N_i^\sigma}w_{ij}^\sigma[e_j(t-\tau_i)-e_i(t-\tau_i)]-\qquad(۸)$$
$$-Ke_i(t-\tau_i)-D\dot{e}_i(t-\Delta_i)$$

که در آن $\tau_i=\tau+\Delta_i$ و Δ_i وقفه موتور خودرو iام می‌باشد. با جایگذاری (۸) در (۴) دینامیک حلقه بسته هر خودرو به صورت زیر درخواهد آمد:

[1] Leader-follower

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.1.6.3]

$$\ddot{e}_i = K\sum_{i=1}^{N_i^\sigma} w_{ij}^\sigma [e_j(t-\tau_i) - e_i(t-\tau_i)] - \\ -Ke_i(t-\tau_i) - D\dot{e}_i(t-\Delta_i) \quad (۹)$$

با تعریف $\mathbf{e} = [e_1,...,e_N,\dot{e}_1,...,\dot{e}_N]$ دینامیک حلقه بسته کل گروه به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_\sigma \mathbf{e} + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{B}_{i,\sigma}\mathbf{e}(t-\tau_i) + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{C}_{i,\sigma}\mathbf{e}(t-\Delta_i) \quad (۱۰)$$

که در آن: $\sigma(t): t \in [0,\infty) \to k \in \{1,2,...,n_\sigma\}$ و

$$\mathbf{A}_\sigma = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \sum_{i=1}^{m}\mathbf{B}_{i,\sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -K\mathbf{H}_\sigma & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\sum_{i=1}^{m}\mathbf{C}_{i,\sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -D\mathbf{I}_N \end{pmatrix}$$

قضیه ۲: اگر شرایط زیر برقرار باشند سیستم کلیدزنی خطی تاخیر زمانی (۱۰) تحت هر سوئیچ دلخواه پایدار مجانبی فراگیر خواهد بود.

۱- خودروی راهنما برای کل دسته در دسترس سراسری باشد.

۲- ماتریس مثبت معین $\mathbf{P} \in \Re^{2N\times 2N}$ وجود داشته باشد به نحوی که:

$$\mathbf{P}\mathbf{E}_k + \mathbf{E}_k^T\mathbf{P} \prec -\mathbf{Q} \prec \mathbf{0}, \\ \mathbf{E}_k = \mathbf{A}_k + \sum_{i=1}^{m}\mathbf{B}_{i,k} + \sum_{i=1}^{m}\mathbf{C}_{i,k},\ k \in \{1,2,...,n_s\} \quad (۱۱)$$

۳- $\dfrac{D}{\sqrt{K}} > \max\limits_{k=1,2,...,n_s}\left\{\max\limits_{i=1,2,...,N}\dfrac{|\mathrm{Im}(\lambda_{i,k})|}{\sqrt{\mathrm{Re}(\lambda_{i,k})}}\right\}$ که در آن: $\lambda_{i,k}$ مقدار ویژه kام ماتریس $\mathbf{H}_k$ می‌باشد.

قضیه ۳: اگر شرایط زیر برقرار باشند، سیستم کلیدزنی خطی تاخیر زمانی (۱۰) تحت هر سوئیچ دلخواه پایدار مجانبی فراگیر خواهد بود.

۱- خودروی راهنما برای هر سیگنال کلیدزنی قابل دسترس سراسری باشد.

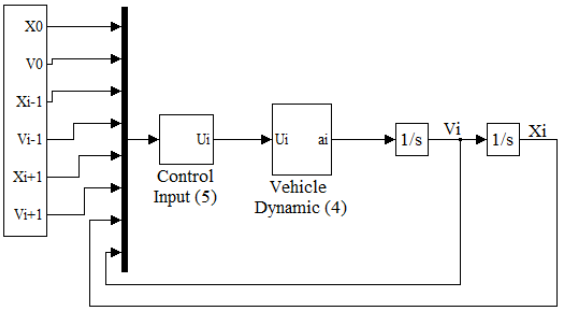
۲- ماتریس مثبت معین $\bar{\mathbf{P}} \in \Re^{N\times N}$ وجود داشته باشد که نامعادله زیر را ارضا نماید:

$$\bar{\mathbf{P}}\mathbf{H}_\sigma + \mathbf{H}_\sigma^T\bar{\mathbf{P}} \succ \mathbf{0} \quad (۱۲)$$

۳- $D > 1,\ K < \dfrac{2(D-1)\mu}{\lambda},\ \mu = \min(eig(\bar{\mathbf{P}})),\ a$

$$\lambda = \max\left\{eig\left[\bar{\mathbf{P}}\mathbf{H}_\sigma\left(\bar{\mathbf{P}}\mathbf{H}_\sigma + \mathbf{H}_\sigma^T\bar{\mathbf{P}}\right)^{-1}\mathbf{H}_\sigma^T\bar{\mathbf{P}}\right]\right\}$$

شکل (۲) دیاگرام کنترلی یک خودرو با معادلات دینامیکی (۴) و تحت قانون کنترلی (۵) را به صورت شماتیک نشان می‌دهد.



شکل ۲: دیاگرام کنترلی یک خودرو گروه

۴- پایداری رشته‌ای

برای بررسی پایداری رشته‌ای باید ساختار ارتباطی گروه مشخص باشد. در این مقاله فرض بر آن است که هر خودرو می‌تواند به اطلاعات موقعیت نسبی با خودروی جلو، عقب و راهنما و همچنین سرعت نسبی با خودروی راهنما دسترسی داشته باشد. شکل زیر ساختار مورد نظر را



نشان می‌دهد.

شکل ۳: ساختار ارتباطی گروه ناهمگن خودرو

با توجه به ساختار ارتباطی فوق، دینامیک حلقه بسته خودرو iام به صورت زیر خواهد بود:

$$\ddot{e}_i = K_{i,i-1}^\sigma[e_{i-1}(t-\tau_i) - e_i(t-\tau_i)] + \\ + K_{i,i+1}^\sigma[e_{i+1}(t-\tau_i) - e_i(t-\tau_i)] - \\ - Ke_i(t-\tau_i) - D\dot{e}_i(t-\Delta_i) \quad (۱۳)$$

که در آن: $K_{i,i-1}^\sigma = Kw_{i,i-1}^\sigma,\ K_{i,i+1}^\sigma = Kw_{i,i+1}^\sigma$. تبدیل لاپلاس طرفین عبارت فوق منجر به رابطه زیر می‌گردد:

$$E_i = G_{i-1}E_{i-1} + G_{i+1}E_{i+1}$$

$$G_{i-1} = \frac{K_{i,i-1}^\sigma e^{-\tau_i s}}{s^2 + sDe^{-\Delta_i s} + (K_{i,i-1}^\sigma + K_{i,i+1}^\sigma + K)e^{-\tau_i s}}, \quad (۱۴)$$

$$G_{i+1} = \frac{K_{i,i+1}^\sigma e^{-\tau_i s}}{s^2 + sDe^{-\Delta_i s} + (K_{i,i-1}^\sigma + K_{i,i+1}^\sigma + K)e^{-\tau_i s}}$$

با انجام محاسبات ساده داریم:

$$\frac{E_i}{E_{i+1}} = \frac{G_{i-1}}{1 - G_{i+1}\dfrac{E_{i+1}}{E_i}} \quad (۱۵)$$

قضیه ۵: اگر شرط زیر برقرار باشد گروه ناهمگن خودرو تحت عمل سوئیچ پایدار رشته‌ای خواهد بود:

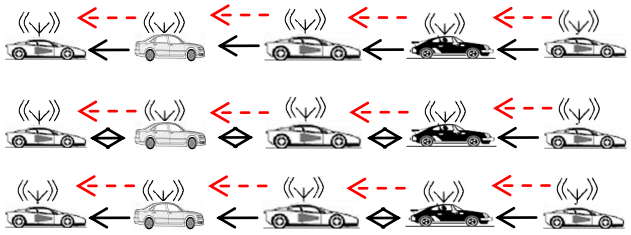
$$(K_{i,i-1}^\sigma + K_{i,i+1}^\sigma + K)(\tau_i + \Delta_i + \\ \sqrt{(\tau_i + \Delta_i)^2 + \frac{2}{K_{i,i-1}^\sigma + K_{i,i+1}^\sigma + K}}) \le D \le \frac{1}{2\Delta_i} \quad (۱۶)$$

$$K_{N,N+1}^\sigma = 0$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.1.6.3]

۵- نتایج شبیه‌سازی

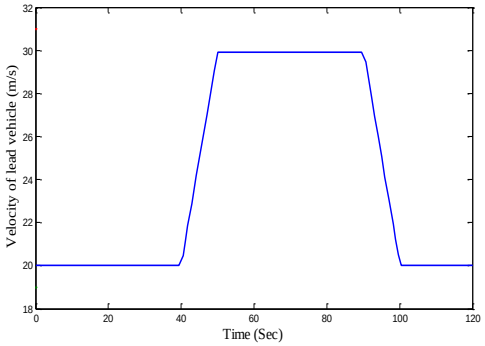
یک گروه ناهمگن شامل ۵ خودرو را مطابق شکل (۴) درنظر بگیرید. برای کلیه سناریوها، سه ساختار ارتباطی متفاوت به صورت زیر



درنظر گرفته شده‌اند.

شکل ۴: ساختار ارتباطی زمان متغیر گروه ناهمگن خودرو

در سناریوهای ۱ و۲ سرعت خودروی راهنما به صورت شکل (۵) درنظر گرفته می‌شود. خطای فاصله برای استراتژی فاصله ثابت به صورت $\delta_i = x_{i-1} - x_i - L_{i-1}$ و برای استراتژی زمان پیشرفت ثابت به صورت $\delta_i = x_{i-1} - x_i - h_i v_0 - D_{\min}$ تعریف می‌گردد.



شکل ۵: سرعت خودروی راهنما در سناریو ۱ و۲

سناریو ۱: در این سناریو تمامی خودروهای گروه یکسان درنظر گرفته می‌شوند. جدول (۱) پارامترهای کنترلی و ثابت‌های سیستم را نشان می‌دهد. جدول (۲) مقایسه‌ای بین کران بالای تاخیر زمانی محاسبه شده توسط قضایای ۲ و ۳ را نشان می‌دهد. طبق این جدول قضیه ۲ محافظه‌کاری کمتری نسبت به قضیه ۳ داشته و کران بالای بیشتری برای تاخیر زمانی ارتباطی پیشنهاد می‌دهد. به منظور مقایسه این دو قضیه، مقادیر تاخیر موتور ثابت فرض شده است و کران بالای تاخیر زمانی با توجه به آن محاسبه شده است.

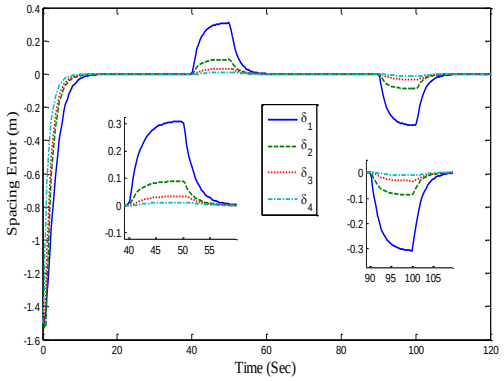
جدول ۱: ضرایب کنترلی و ثابت‌های سیستم برای سناریو ۱

کمیت	توصیف	مقدار
$M(Kg)$	جرم خودرو	1500
K	ضریب کنترلی	1.1
D	ضریب کنترلی	3.9
$\tau(\sec)$	تاخیر زمانی	$0.07\lvert\sin(t)\rvert$
$\Delta(\sec)$	وقفه موتور	0.1
$L(m)$	طول خودرو	4
h_i	زمان پیشرفت ثابت	0.02
$D_{i-1,i}$	فاصله مطلوب بین خودرویی	2
$D_{\min}$	حداقل فاصله بین خودرویی	0.1

جدول۲: مقایسه کران بالای تاخیر زمانی محاسبه شده توسط قضایای ۲و۳

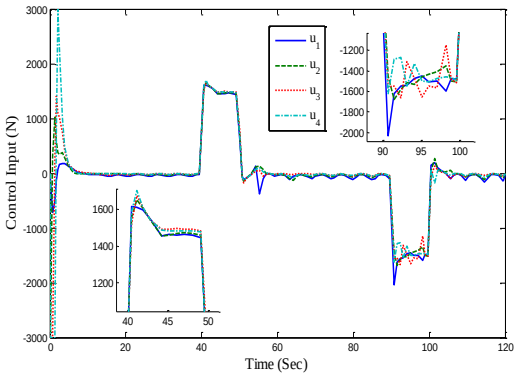
قضیه	وقفه موتور $\Delta(\sec)$	تاخیر زمانی $\tau(\sec)$
قضیه ۲	0.05	0.38
قضیه ۳	0.05	0.29
قضیه ۲	0.1	0.27
قضیه ۳	0.1	0.21
قضیه ۲	0.25	0.17
قضیه ۳	0.25	0.12

شکل (۶) خطای تعقیب گروه خودرو را نشان می‌دهد. طبق این شکل دامنه خطا در طول دسته روندی کاهشی دارد که نشان دهنده پایداری رشته‌ای گروه می‌باشد. شکل (۷) منحنی ورودی‌های کنترلی گروه خودرو را نشان می‌دهد. با توجه به آنکه جرم هر خودرو در این استراتژی مقدار $M = 1500Kg$ درنظر گرفته شده است، بنابراین ورودی‌های مزبور مقادیری قابل قبول دارند. همچنین شکل‌های (۸) و (۹) خطای تعقیب و ورودی کنترلی را برای استراتژی زمان پیشرفت ثابت در سناریو ۱ را نشان می‌دهند.

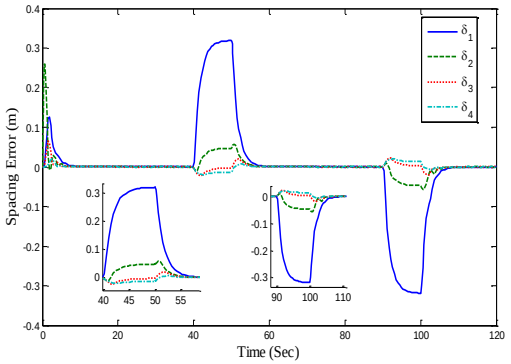


شکل ۶: خطای تعقیب برای سناریو۱، استراتژی فاصله ثابت

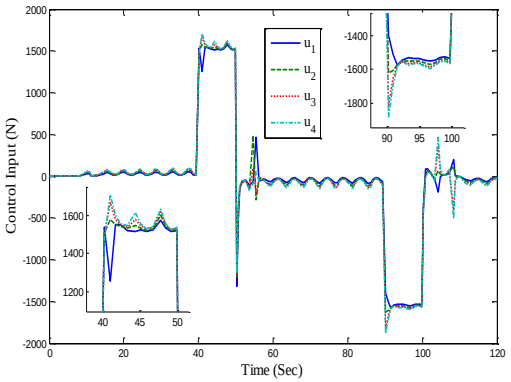
[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.1.6.3]



شکل ۷: ورودی کنترلی در سناریو۱، استراتژی فاصله ثابت



شکل ۸: خطای تعقیب برای سناریو۱، استراتژی زمان پیشرفت ثابت

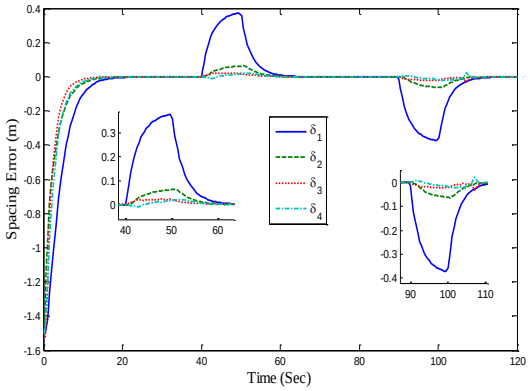


شکل ۹: ورودی کنترلی در سناریو۱، استراتژی زمان پیشرفت ثابت

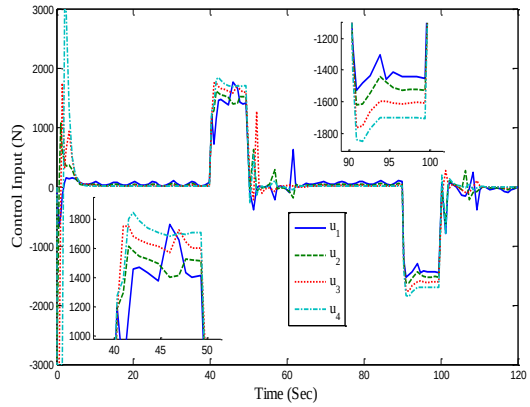
سناریو ۲: در این سناریو گروه خودرو ناهمگن در نظر گرفته می‌شود (جدول ۳). ضرایب کنترلی مشابه قبل درنظر گرفته شده‌اند. شکل (۱۰) و (۱۱) خطای تعقیب و ورودی کنترلی را برای استراتژی فاصله ثابت نشان می‌دهند. همچنین شکل‌های (۱۲) و (۱۳) خطای تعقیب و ورودی کنترلی را برای استراتژی زمان پیشرفت ثابت نشان می‌دهند.

جدول۳: ثابت‌های گروه ناهمگن خودرو (M_i, Δ_i, L_i)

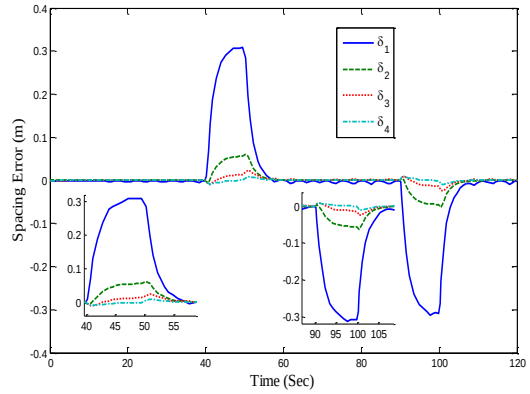
4	3	2	1
1700,0.11, 3.9	1500, 0.07, 4.1	1600, 0.1, 4	1400, 0.08, 3.8



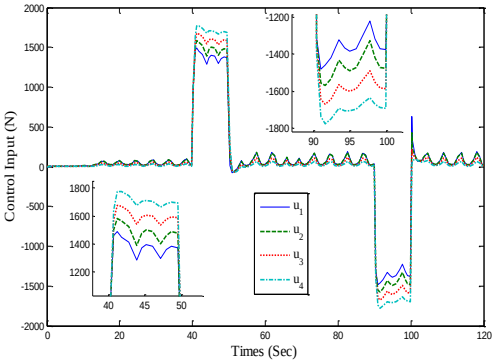
شکل ۱۰: خطای تعقیب برای سناریو۲، استراتژی فاصله ثابت



شکل ۱۱: ورودی کنترلی برای سناریو۲، استراتژی فاصله ثابت



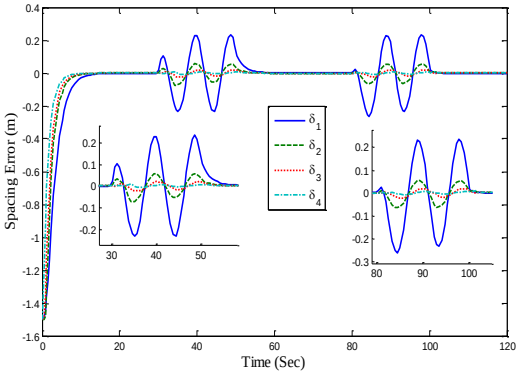
شکل ۱۲: خطای تعقیب در سناریو۲، استراتژی زمان پیشرفت ثابت



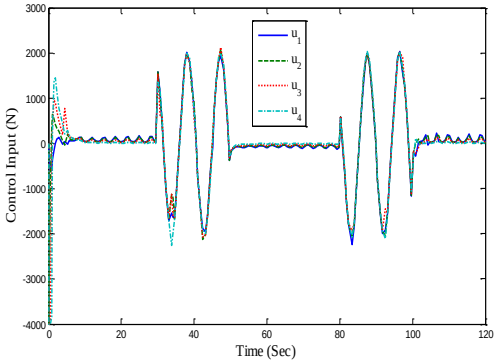
شکل ۱۳: ورودی کنترلی برای سناریو۲، استراتژی زمان پیشرفت ثابت

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.1.6.3]

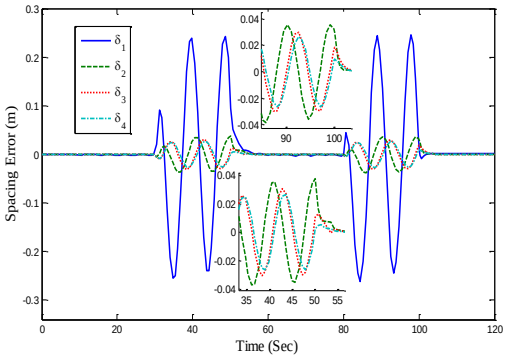
سناریو۳: در این سناریو پایداری رشته‌ای سیستم در حضور اغتشاش اعمالی بر خودرو راهنما مورد بررسی قرار می‌گیرد. به این منظور سیگنال اغتشاش به خودرو $a=\begin{cases}1.2\sin(0.7t), & t>30, t\le 50\\ -1.2\sin(0.7t), & t>80, t\le 100\\ 0, & otherwise\end{cases}$ راهنما اعمال می‌گردد. شکل‌های (۱۴) و (۱۵) خطای تعقیب و ورودی کنترلی برای استراتژی فاصله ثابت را نشان می‌دهند. همچنین شکل‌های (۱۶) و (۱۷) خطای تعقیب و ورودی کنترلی برای استراتژی زمان پیشرفت ثابت را نشان می‌دهد.



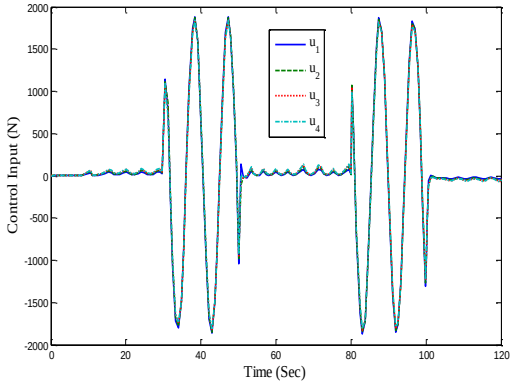
شکل ۱۴: پایداری رشته‌ای در سناریو۳، استراتژی فاصله ثابت



شکل ۱۵: ورودی کنترلی درسناریو ۳ برای استراتژی فاصله ثابت



شکل ۱۶: پایداری رشته‌ای برای سناریو ۳، استراتژی زمان پیشرفت ثابت



شکل ۱۷: ورودی کنترلی برای سناریو۳، استراتژی زمان پیشرفت ثابت

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله تحلیل پایداری داخلی و رشته‌ای یک گروه ناهمگن خودرو در حضور تاخیر زمانی ارتباطی و عملگری بررسی گردید. ساختار شبکه ارتباطی، متغیر با زمان درنظر گرفته شد. برای اولین بار قضیه لیاپانوف-رازومیخین برای تحلیل سیستم‌های کلیدزنی خطی تاخیر زمانی مورد بررسی قرار گرفت و دو قضیه جدید برای تحلیل پایداری مجانبی این سیستم‌ها ارائه گردید. در نتایج شبیه‌سازی نشان داده شد که قضیه اول محافظه‌کاری کمتری نسبت به قضیه دوم داشته و کران بالاتری برای تاخیر زمانی ارتباطی پیشنهاد می‌دهد. در ادامه، به تحلیل پایداری رشته‌ای گروه ناهمگن خودرو در حضور تاخیر زمانی ارتباطی و عملگری و نیز ساختار زمان متغیر شبکه پرداخته شد و قضیه‌ای نو برای تحلیل پایداری رشته‌ای گروه خودرو ارائه گردید. در پایان با طرح سناریوهای متعدد به تحلیل کیفیت روش‌های ارائه شده پرداخته شد.

۷- پیوست

اثبات قضیه ۲: شرط لازم برای وجود ماتریس $\mathbf{P}$ برای معادله (۱۱) آن است که $\mathbf{E}_k \prec \mathbf{0}$. مطابق [۳۰] معادله مشخصه $\mathbf{E}_k$ به صورت حاصلضرب N فاکتور به صورت زیر قابل بیان است:

$$\det(p\mathbf{I}-\mathbf{E}_k)=\det\begin{pmatrix}p\mathbf{I} & -\mathbf{I}\\ K\mathbf{H}_k & (p+D)\mathbf{I}\end{pmatrix}= \\ =\det(p^2\mathbf{I}+pD\mathbf{I}+K\mathbf{H}_k)=\prod_{i=1}^{N}(p^2+pD+K\lambda_{i,k}) \quad (۱۷)$$

مطابق لم ۱ اگر خودروی راهنما به ازای هر سیگنال کلیدزنی در کل دسته قابل دسترس سراسری باشد آنگاه $\lambda_{i,k}>0$. چند جمله‌ای $p^2+pD+K\lambda_{i,k}$ پایدار است اگر [۳۰]

$$D>\max_{k=1,2,\ldots,n_s}\left\{\max_{i=1,2,\ldots,N}\frac{\left|\mathrm{Im}(K\lambda_{i,k})\right|}{\sqrt{\mathrm{Re}(K\lambda_{i,k})}}\right\}\Rightarrow \\ \frac{D}{\sqrt{K}}>\max_{k=1,2,\ldots,n_s}\left\{\max_{i=1,2,\ldots,N}\frac{\left|\mathrm{Im}(\lambda_{i,k})\right|}{\sqrt{\mathrm{Re}(\lambda_{i,k})}}\right\} \quad (۱۸)$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.1.6.3]

در ادامه اثبات، تابع لیاپانوف مشترک $V=\mathbf{e}^T\mathbf{P}\mathbf{e}$ را درنظر بگیرید که مشتق آن در راستای (۱۰) به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{V}=2\mathbf{e}^T\mathbf{P}\left\{\mathbf{A}_{\sigma(t)}\mathbf{e}+\sum_{i=1}^{m}\mathbf{B}_{i,\sigma(t)}\mathbf{e}(t-\tau_i)+\sum_{i=1}^{m}\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}\mathbf{e}(t-\Delta_i)\right\} \quad (۱۹)$$

با استفاده از رابطه نیوتن-لایبنیتز[1]

$$\mathbf{e}(t-\tau_i)=\mathbf{e}(t)-\int_{t-\tau_i}^{t}\dot{\mathbf{e}}(s)ds,\ \mathbf{e}(t-\Delta_i)=\mathbf{e}(t)-\int_{t-\Delta_i}^{t}\dot{\mathbf{e}}(s)ds \quad (۲۰)$$

رابطه (۱۹) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\dot{V}=2\mathbf{e}^T\mathbf{P}\Bigg\{&\mathbf{A}_{\sigma(t)}\mathbf{e}+\sum_{i=1}^{m}\mathbf{B}_{i,\sigma(t)}\left[\mathbf{e}(t)-\int_{t-\tau_i}^{t}\dot{\mathbf{e}}(s)ds\right]+\\&+\sum_{i=1}^{m}\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}\left[\mathbf{e}(t)-\int_{t-\Delta_i}^{t}\dot{\mathbf{e}}(s)ds\right]\Bigg\}\end{aligned} \quad (۲۱)$$

با ساده‌سازی عبارت فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\dot{V}=&\mathbf{e}^T\left\{\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_{\sigma(t)}+\sum_{i=1}^{m}\mathbf{B}_{i,\sigma(t)}+\sum_{i=1}^{m}\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}\right)+\right.\\&\left.+\left(\mathbf{A}_{\sigma(t)}+\sum_{i=1}^{m}\mathbf{B}_{i,\sigma(t)}+\sum_{i=1}^{m}\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}\right)^T\mathbf{P}\right\}\mathbf{e}+\\&+\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\tau_i}^{t}-2\mathbf{e}^T\mathbf{P}\mathbf{B}_{i,\sigma(t)}\left\{\mathbf{A}_{\sigma(s)}\mathbf{e}(s)+\right.\\&\left.+\sum_{j=1}^{m}\mathbf{B}_{j,\sigma(s)}\mathbf{e}(s-\tau_j)+\sum_{j=1}^{m}\mathbf{C}_{j,\sigma(s)}\mathbf{e}(s-\Delta_j)\right\}ds\\&+\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\Delta_i}^{t}-2\mathbf{e}^T\mathbf{P}\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}\left\{\mathbf{A}_{\sigma(s)}\mathbf{e}(s)+\right.\\&\left.+\sum_{j=1}^{m}\mathbf{B}_{j,\sigma(s)}\mathbf{e}(s-\tau_j)+\sum_{j=1}^{m}\mathbf{C}_{j,\sigma(s)}\mathbf{e}(s-\Delta_j)\right\}ds\end{aligned} \quad (۲۲)$$

با توجه به اینکه $\mathbf{B}_{i,\sigma(t)}\mathbf{B}_{i,\sigma(s)}=\mathbf{B}_{i,\sigma(t)}\mathbf{C}_{i,\sigma(s)}=\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}\mathbf{A}_{\sigma(s)}=\mathbf{0}$ و نیز با استفاده از نامساوی یانگ (لم۳) به فرم زیر:

$$\begin{aligned}&-2\mathbf{e}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{B}_{i,\sigma(t)}\mathbf{A}_{\sigma(s)}\mathbf{e}(s):\\&\mathbf{a}^T=-\mathbf{e}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{B}_{i,\sigma(t)}\mathbf{A}_{\sigma(s)};\ \mathbf{b}=\mathbf{e}(s);\ \varsigma=\mathbf{P}^{-1}\\&-2\mathbf{e}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}\mathbf{B}_{j,\sigma(s)}\mathbf{e}(s-\tau_i):\\&\mathbf{a}^T=-\mathbf{e}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}\mathbf{B}_{j,\sigma(s)};\ \mathbf{b}=\mathbf{e}(s-\tau_i);\ \varsigma=\mathbf{P}^{-1}\\&-2\mathbf{e}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}\mathbf{C}_{j,\sigma(s)}\mathbf{e}(s-\Delta_i):\\&\mathbf{a}^T=-\mathbf{e}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}\mathbf{C}_{j,\sigma(s)};\ \mathbf{b}=\mathbf{e}(s-\Delta_i);\ \varsigma=\mathbf{P}^{-1}\end{aligned} \quad (۲۳)$$

می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\dot{V}\le&\mathbf{e}^T\left\{\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_{\sigma(t)}+\sum_{i=1}^{m}\mathbf{B}_{i,\sigma(t)}+\sum_{i=1}^{m}\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}\right)+\right.\\&\left.+\left(\mathbf{A}_{\sigma(t)}+\sum_{i=1}^{m}\mathbf{B}_{i,\sigma(t)}+\sum_{i=1}^{m}\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}\right)^T\mathbf{P}\right\}\mathbf{e}+\\&+\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\tau_i}^{t}\left\{\mathbf{e}^T(s)\mathbf{P}\mathbf{e}(s)+\right.\\&\left.+\mathbf{e}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{B}_{i,\sigma(t)}\mathbf{A}_{\sigma(s)}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_{\sigma(s)}^T\mathbf{B}_{i,\sigma(t)}^T\mathbf{P}\mathbf{e}(t)\right\}ds+\\&+\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\Delta_i}^{t}\left\{\sum_{j=1}^{m}\left[\mathbf{e}^T(s-\tau_j)\mathbf{P}\mathbf{e}(s-\tau_j)+\right.\right.\\&\left.+\mathbf{e}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}\mathbf{B}_{j,\sigma(s)}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_{j,\sigma(s)}^T\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}^T\mathbf{P}\mathbf{e}(t)\right]+\\&+\sum_{j=1}^{m}\left[\mathbf{e}^T(s-\Delta_j)\mathbf{P}\mathbf{e}(s-\Delta_j)+\right.\\&\left.\left.+\mathbf{e}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}\mathbf{C}_{j,\sigma(s)}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}_{j,\sigma(s)}^T\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}^T\mathbf{P}\mathbf{e}(t)\right]\right\}ds\end{aligned} \quad (۲۴)$$

با استفاده از قضیه رازومیخین $V(\mathbf{e}(t+\theta))<\eta V(\mathbf{e}(t)),$ $\theta\in[-\max(\Delta_i+\tau_i),0],\ \eta>1$ داریم:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\tau_i}^{t}\mathbf{e}^T(s)\mathbf{P}\mathbf{e}(s)ds\le\\&\mathbf{e}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{e}(t)\eta\sum_{i=1}^{m}\tau_i=\mathbf{e}^T(t)\left(\sum_{i=1}^{m}\eta\mathbf{P}\tau_i\right)\mathbf{e}(t)\end{aligned} \quad (۲۵)$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\Delta_i}^{t}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{e}^T(s-\tau_j)\mathbf{P}\mathbf{e}(s-\tau_j)ds\le\\&\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\Delta_i}^{t}m\eta\mathbf{e}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{e}(t)ds=\mathbf{e}^T(t)\left[\sum_{i=1}^{m}m\eta\mathbf{P}\Delta_i\right]\mathbf{e}(t)\end{aligned} \quad (۲۶)$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\Delta_i}^{t}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{e}^T(s-\Delta_j)\mathbf{P}\mathbf{e}(s-\Delta_j)ds\le\\&\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\Delta_i}^{t}m\eta\mathbf{e}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{e}(t)ds=\mathbf{e}^T(t)\left[\sum_{i=1}^{m}m\eta\mathbf{P}\Delta_i\right]\mathbf{e}(t)\end{aligned} \quad (۲۷)$$

در ادامه داریم:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\tau_i}^{t}\mathbf{e}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{B}_{i,\sigma(t)}\mathbf{A}_{\sigma(s)}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_{\sigma(s)}^T\mathbf{B}_{i,\sigma(t)}^T\mathbf{P}\mathbf{e}(t)ds=\\&=\mathbf{e}^T(t)\mathbf{P}\sum_{i=1}^{m}\mathbf{B}_{i,\sigma(t)}\left[\int_{t-\tau_i}^{t}\mathbf{A}_{\sigma(s)}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_{\sigma(s)}^Tds\right]\mathbf{B}_{i,\sigma(t)}^T\mathbf{P}\mathbf{e}(t)\end{aligned} \quad (۲۸)$$

[1] Newton-Leibnitz

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.1.6.3]

با فرض آنکه زیر سیستم j ام در بازه $[0,\tau_i]$به اندازه α_{ij}فعال باشد $\left(\sum_{j=1}^{n_s}\alpha_{ij}=1\right)$، سمت راست عبارت فوق به صورت زیر خواهد بود $(\sigma(t)=k)$:

$$\mathbf{e}^T\sum_{i=1}^{m}\tau_i\mathbf{P}\mathbf{B}_{i,k}\left\{\sum_{j=1}^{n_s}\alpha_{ij}\mathbf{A}_j\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_j^T\right\}\mathbf{B}_{i,k}^T\mathbf{P}\mathbf{e}\le \tau_{\max}\mathbf{e}^T\sum_{i=1}^{m}\mathbf{P}\mathbf{B}_{i,k}\left\{\sum_{j=1}^{n_s}\alpha_{ij}\mathbf{A}_j\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_j^T\right\}\mathbf{B}_{i,k}^T\mathbf{P}\mathbf{e} \quad (۲۹)$$

حال اگر زیر سیستم rام در بازه $[0,\Delta_i]$به اندازه β_{ir}فعال باشد $\left(\sum_{r=1}^{n_s}\beta_{ir}=1\right)$ می‌توان نوشت:

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\Delta_i}^{t}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{e}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}\mathbf{B}_{j,\sigma(s)}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_{j,\sigma(s)}^T\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}^T\mathbf{P}\mathbf{e}(t)ds=$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\mathbf{e}^T\mathbf{P}\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}\left(\sum_{j=1}^{m}\int_{t-\Delta_i}^{t}\mathbf{B}_{j,\sigma(s)}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_{j,\sigma(s)}^T ds\right)\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}^T\mathbf{P}\mathbf{e}=$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\Delta_i\mathbf{e}^T\mathbf{P}\mathbf{C}_{i,k}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{n_s}\beta_{ir}\mathbf{B}_{j,r}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_{j,r}^T\right)\mathbf{C}_{i,k}^T\mathbf{P}\mathbf{e}\le$$
$$\Delta_{\max}\mathbf{e}^T\left(\sum_{i=1}^{m}\mathbf{P}\mathbf{C}_{i,k}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{n_s}\beta_{ir}\mathbf{B}_{j,r}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_{j,r}^T\right)\mathbf{C}_{i,k}^T\mathbf{P}\right)\mathbf{e} \quad (۳۰)$$

به طور مشابه می‌توان نوشت:

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\Delta_i}^{t}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{e}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}\mathbf{C}_{j,\sigma(s)}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}_{j,\sigma(s)}^T\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}^T\mathbf{P}\mathbf{e}(t)ds=$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\mathbf{e}^T\mathbf{P}\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}\left(\sum_{j=1}^{m}\int_{t-\Delta_i}^{t}\mathbf{C}_{j,\sigma(s)}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}_{j,\sigma(s)}^T ds\right)\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}^T\mathbf{P}\mathbf{e}=$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\Delta_i\mathbf{e}^T\mathbf{P}\mathbf{C}_{i,k}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{n_s}\beta_{ir}\mathbf{C}_{j,r}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}_{j,r}^T\right)\mathbf{C}_{i,k}^T\mathbf{P}\mathbf{e}\le$$
$$\Delta_{\max}\mathbf{e}^T\left(\sum_{i=1}^{m}\mathbf{P}\mathbf{C}_{i,k}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{n_s}\beta_{ir}\mathbf{C}_{j,r}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}_{j,r}^T\right)\mathbf{C}_{i,k}^T\mathbf{P}\right)\mathbf{e} \quad (۳۱)$$

با جمع‌بندی روابط (۲۵) تا (۳۱)، رابطه (۲۴) به صورت زیر قابل بیان خواهد بود:

$$\dot V\le\mathbf{e}^T\left\{\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_{\sigma(t)}+\sum_{i=1}^{m}\mathbf{B}_{i,\sigma(t)}+\sum_{i=1}^{m}\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}\right)+\left(\mathbf{A}_{\sigma(t)}+\sum_{i=1}^{m}\mathbf{B}_{i,\sigma(t)}+\sum_{i=1}^{m}\mathbf{C}_{i,\sigma(t)}\right)^T\mathbf{P}\right\}\mathbf{e}+$$
$$+\tau_{\max}\mathbf{e}^T\left\{\sum_{i=1}^{m}\mathbf{P}\mathbf{B}_{i,k}\left\{\sum_{j=1}^{n_s}\alpha_{ij}\mathbf{A}_j\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_j^T\right\}\mathbf{B}_{i,k}^T\mathbf{P}+m\eta\mathbf{P}\right\}\mathbf{e}+$$
$$+\Delta_{\max}\mathbf{e}^T\left(\sum_{i=1}^{m}\mathbf{P}\mathbf{C}_{i,k}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{n_s}\beta_{ir}\left(\mathbf{B}_{j,r}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_{j,r}^T+\mathbf{C}_{j,r}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}_{j,r}^T\right)\right)\mathbf{C}_{i,k}^T\mathbf{P}+2m^2\eta\mathbf{P}\right)\mathbf{e} \quad (۳۲)$$

یا به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$\dot V\le-\mathbf{e}^T\mathbf{Q}\mathbf{e}+\tau_{\max}a_1\mathbf{e}^T\mathbf{e}+\Delta_{\max}a_2\mathbf{e}^T\mathbf{e} \quad (۳۳)$$

که در آن:

$$a_1=\max_{k=1,\dots,n_s}\left\{\max_{\substack{0\le\alpha_{ij}\le1\\ \alpha_{i1}+\alpha_{i2}+\dots+\alpha_{ins}=1}}\lambda_{\max}\left\{\sum_{i=1}^{m}\mathbf{P}\mathbf{B}_{i,k}\left\{\sum_{j=1}^{n_s}\alpha_{ij}\mathbf{A}_j\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_j^T\right\}\mathbf{B}_{i,k}^T\mathbf{P}+m\eta\mathbf{P}\right\}\right.$$

$$a_2=\max_{k=1,\dots,n_s}\left\{\max_{\substack{0\le\alpha_{ij}\le1\\ \alpha_{i1}+\alpha_{i2}+\dots+\alpha_{ins}=1}}\lambda_{\max}\left\{\sum_{i=1}^{m}\mathbf{P}\mathbf{C}_{i,k}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{n_s}\beta_{ir}\left(\mathbf{B}_{j,r}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_{j,r}^T+\mathbf{C}_{j,r}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}_{j,r}^T\right)\right)\mathbf{C}_{i,k}^T\mathbf{P}+2m^2\eta\mathbf{P}\right\}\right. \quad (۳۴)$$

حال اگر شرایط زیر ارضا گردند، خواهیم داشت: $\dot V\le0$

$$\tau_2<\lambda_{\min}(\mathbf{Q})/a_2,\quad \tau_1<\left(\lambda_{\min}(\mathbf{Q})-\tau_2\,a_2\right)/a_1 \quad (۳۵)$$

□

اثبات قضیه ۳: شرط لازم برای وجود ماتریس $\bar{\mathbf{P}}$ که نامساوی (۱۲) را ارضا کند آن است که $\mathbf{H}_\sigma\succ\mathbf{0}$. با توجه به لم ۱ اگر راس صفر در دسترس سراسری باشد آنگاه $\mathbf{H}_\sigma$مثبت معین خواهد بود. در ادامه اثبات، تابع لیاپانوف مشترک $V=\mathbf{e}^T\mathbf{P}\mathbf{e}$را درنظر بگیرید که در آن: $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}D\bar{\mathbf{P}} & \bar{\mathbf{P}}\\ \bar{\mathbf{P}} & \bar{\mathbf{P}}\end{pmatrix}$. با انجام روال قضیه قبل، مشتق تابع لیاپانوف به صورت زیر خواهد بود:

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.1.6.3]

$$\dot{V} \le -\mathbf{e}^T\bar{\mathbf{Q}}_\sigma\mathbf{e} + \tau_{\max}a_1\mathbf{e}^T\mathbf{e} + \Delta_{\max}a_2\mathbf{e}^T\mathbf{e},$$
$$\bar{\mathbf{Q}}_\sigma = \mathbf{E}_\sigma^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{E}_\sigma = \begin{pmatrix} K\left(\bar{\mathbf{P}}\mathbf{H}_\sigma + \mathbf{H}_\sigma^T\bar{\mathbf{P}}\right) & K\mathbf{H}_\sigma^T\bar{\mathbf{P}} \\ K\bar{\mathbf{P}}\mathbf{H}_\sigma & 2(D-1)\bar{\mathbf{P}} \end{pmatrix} \quad (۳۶)$$

طبق لم ۲، اگر $\bar{\mathbf{Q}}_\sigma \prec \mathbf{0}$ که $2(D-1)\bar{\mathbf{P}} - K\bar{\mathbf{P}}\mathbf{H}_\sigma\left(\bar{\mathbf{P}}\mathbf{H}_\sigma + \mathbf{H}_\sigma^T\bar{\mathbf{P}}\right)^{-1}\mathbf{H}_\sigma^T\bar{\mathbf{P}} \succ \mathbf{0}$

معادل شرط $K < \dfrac{2(D-1)\mu}{\lambda}$ می‌باشد. حال اگر شرایط زیر برقرار باشند آنگاه: $\dot{V} \le 0$

$$\tau_2 < \lambda_{\min}(\bar{\mathbf{Q}}_\sigma)/a_2, \quad \tau_1 < \left(\lambda_{\min}(\bar{\mathbf{Q}}_\sigma) - \tau_2 a_2\right)/a_1 \quad (۳۷)$$

□

اثبات قضیه ۴: با توجه به رابطه (۱۵) می‌توان دریافت که اگر روابط $|G_{i-1}|, |G_{i+1}| < 0.5$ و $|E_N/E_{N-1}| \le 1$ برقرار باشند آنگاه $|E_i/E_{i-1}| \le 1$. در نظر بگیرید $|G_{i-1}| = \sqrt{\dfrac{p_{i-1}}{q_{i-1}}} \le \dfrac{1}{2}$ که در آن: $\Rightarrow q_{i-1} - 4p_{i-1} \ge 0$

$$\begin{aligned} q_{i-1} &= \omega^4 + \omega^2D^2 + (K_{i,i-1}^\sigma + K_{i,i+1}^\sigma + K)^2 - \\ &- 2\omega^3D\sin\Delta_i\omega - 2(K_{i,i-1}^\sigma + K_{i,i+1}^\sigma + K)\omega^2\cos\tau_i\omega + \\ &+ 2(K_{i,i-1}^\sigma + K_{i,i+1}^\sigma + K)\omega D\sin(\tau_i + \Delta_i)\omega \\ p_{i-1} &= (K_{i,i-1}^\sigma)^2 \end{aligned} \quad (۳۸)$$

بنابراین عبارت $q_{i-1} - 4p_{i-1} \ge 0$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} &(K_{i,i-1}^\sigma + K_{i,i+1}^\sigma + K)^2 - 4(K_{i,i-1}^\sigma)^2 + \\ &+2(K_{i,i-1}^\sigma + K_{i,i+1}^\sigma + K)\omega D\sin(\tau_i + \Delta_i)\omega - \\ &-2(K_{i,i-1}^\sigma + K_{i,i+1}^\sigma + K)\omega^2\cos\tau_i\omega - \\ &-2\omega^3D\sin\Delta_i\omega + \omega^4 + \omega^2D^2 \ge 0 \end{aligned} \quad (۳۹)$$

با توجه به روابط:

$$\forall\bar{\alpha} \ge 0 : \sin\bar{\alpha} \le \bar{\alpha} \to -\sin\bar{\alpha} \ge -\bar{\alpha}, \quad \cos\bar{\alpha} \le 1 \to -\cos\bar{\alpha} \ge -1 \quad (۴۰)$$

می‌توان عبارت (۳۹) را به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} &(1-2D\Delta_i)\omega^4 + \{D^2 - 2(K_{i,i-1}^\sigma + K_{i,i+1}^\sigma + K) \\ &(1 + D(\tau_i + \Delta_i))\}\omega^2 + (K_{i,i-1}^\sigma + K_{i,i+1}^\sigma + K)^2 - \\ &-4(K_{i,i-1}^\sigma)^2 \ge 0 \end{aligned} \quad (۴۱)$$

تحت شرایط زیر نامساوی فوق برقرار خواهد بود.

$$\begin{aligned} &1 - 2D\Delta_i \ge 0, \\ &D^2 - 2(K_{i,i-1}^\sigma + K_{i,i+1}^\sigma + K)(1 + D(\tau_i + \Delta_i)) \ge 0, \\ &K \ge K_{i,i-1}^\sigma - K_{i,i+1}^\sigma \end{aligned} \quad (۴۲)$$

با استدلال مشابه برای $|G_{i+1}| = \sqrt{\dfrac{p_{i+1}}{q_{i+1}}} \le \dfrac{1}{2}$ نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} &1 - 2D\Delta_i \ge 0, \\ &D^2 - 2(K_{i,i-1}^\sigma + K_{i,i+1}^\sigma + K)(1 + D(\tau_i + \Delta_i)) \ge 0, \\ &K \ge K_{i,i+1}^\sigma - K_{i,i-1}^\sigma \end{aligned} \quad (۴۳)$$

دینامیک حلقه بسته آخرین خودرو به صورت می‌باشد:

$$\begin{aligned} \ddot{e}_N &= K_{N,N-1}^\sigma[e_{N-1}(t-\tau_N) - e_N(t-\tau_N)] \\ &- K_N^\sigma e_N(t-\tau_N) - D\dot{e}_N(t-\Delta_N) \end{aligned} \quad (۴۴)$$

با انجام روال مشابه قبل می‌توان نشان داد اگر شرایط زیر برقرار باشند، آنگاه $|E_N/E_{N-1}| \le 1$:

$$\begin{aligned} &1 - 2D\Delta_N \ge 0, \\ &D^2 - 2(K_{N,N-1}^\sigma + K_N^\sigma)(1 + D(\tau_N + \Delta_N)) \ge 0 \end{aligned} \quad (۴۵)$$

با انجام محاسبات جبری عبارات (۴۲)، (۴۳) و (۴۵) را می‌توان به صورت شرط زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} &(K_{i,i-1}^\sigma + K_{i,i+1}^\sigma + K)(\tau_i + \Delta_i + \\ &\sqrt{(\tau_i + \Delta_i)^2 + \frac{2}{K_{i,i-1}^\sigma + K_{i,i+1}^\sigma + K}}) \le D \\ &\le \frac{1}{2\Delta_i}, \ K_{N,N+1}^\sigma = 0 \end{aligned} \quad (۴۶)$$

□

مراجع

[1] R. Horowitz and P. Varaiya, "Control design of an automated highway system", Proceedings of the IEEE IFACK Conference, vol. 88, no. 7, pp. 913–925, 2000.

[2]Y. Toor, P. Muhlethaler and A. Laouiti, "Vehicle ad hoc networks: applications and related technical issues", IEEE Communication Survey Tutorial, vol. 10, no. 3, pp. 74-88, 2008.

[3]A. Ghasemi, R. Kazemi and S. Azadi, "Directional control of a platoon of vehicles for comfort Specification by considering parasitic time delays and lags", Promet-Traffic and Transportation, vol. 25, no. 5, pp. 412-420, 2013.

[4]D. Helbing and B. Tilch, "Generalized force model of traffic dynamics", Physics Revision E, vol. 58, pp. 133-138, 1998.

[5]Y. Li, D. Sun, W. Liu, M. Zhang, M. Zhao and L. Tang, "Modeling and simulation for microscopic traffic flow based on multiple headway, velocity and acceleration difference", Nonlinear Dynamic, vol. 66, pp. 15–28, 2011.

[6]H. Hao and P. Barooah, "Stability and robustness of large platoons of vehicles with double-integrator models and nearest neighbor interaction", International Journal of Robust Nonlinear Control, vol. 23, no. 18, pp. 2097–2122, 2003.

[7]S. Eben, K. Li and J. Wang, "Economy-oriented vehicle adaptive cruise control with coordinating multiple objectives functions", Vehicular System Dynamic, vol. 51, no. 1, pp. 1–17, 2013.

[8]A. Ghasemi, R. Kazemi and S. Azadi, "Stable decentralized control of platoon of vehicles with

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.1.6.3]

[19]Y. Li, K. Li, T. Zheng and Y. Li, "Evaluating the performance of vehicular platoon control under different network topologies of initial states", Physica A, vol. 450, pp. 359-368, 2016.

[20]J. Naranjo, C. Gonzalez and R. Carcia, "ACC+stop&go maneuvers with throttle and brake fuzzy control", IEEE Transaction on Intelligent Transportation System, vol. 7, no. 2, pp. 213–225, 2006.

[21] R. Kianfar, P. Falcone and J. Fredriksson, "A control matching model predictive control approach to string stable vehicle platooning", Cont Engineering Practice, vol. 45, pp. 163–173, 2015.

[22]G. L. Naus, R. Vugts, J. Ploeg, J. Molengraft and M. Steinbuch, "String-stable CACC design and experimental validation: a frequency-domain approach", IEEE Transaction on Vehicular Technology, vol. 59, no. 9, pp. 4268-4277, 2010.

[23]X. L. Yun and G. Feng , "Effect of information delay on string stability of platoon of automated vehicles under typical information frameworks", J Cent South University Technology, vol. 17, pp. 1271-1278, 2010.

[24]D. Liberzon, "Switching in systems and control", Boston Birkhauser, 2003.

[25]H. Chehardoli and M. Eghtesad, "Robust adaptive control of switched nonlinear systems in strict feedback form with unknown time delay", IMA Journal of Mathematical Control and Information, vol. 32, pp. 761–779, 2015.

[26]J. Hu and Y. Hong, "Leader-following coordination of multi-agent systems with coupling time delays", Physica A Statistical Mechanics and its Applications, vol. 374, pp. 2, 853-863, 2007.

[27]R. Horn and C. Johnson, "Matrix analysis", New York Cambridge Univ Press, 1985.

[28]J. Gallier, "The schur complement and symmetric positive semi definite (and definite) matrices", 2010.

[29]K. Gu, V. Kharitonov and J. Chen, "Stability of time-delay Systems", Birkhauser, 2003.

[30]R. Gomez, "Exact and Exhaustive Stability Analysis of Linear Consensus Protocols with Time Delay", PhD. Thesis, University of Connecticut, Storrs, CT, 2012.

heterogeneous information feedback", IEEE Transaction on Vehicular Technology, vol. 62, no. 9, pp. 4299–4308, 2013.

[9]A. Ghasemi, R. Kazemi and S. Azadi, "Stability analysis of bidirectional adaptive cruise control with asymmetric information flow", Journal of Mechanical Engineering Science, vol. 229, no. 2, pp. 216–226, 2015.

[10]G. Guo and S. Wen, "Communication scheduling and control of a platoon of vehicles in VANETs", IEEE Transaction on Transportation Systems, vol. 17, pp. 1551-1563, 2016.

[11]J. Ploeg, A. Serrarens and G. Heijenk, "Connect & Drive: Design and evaluation of cooperative adaptive cruise control for congestion reduction", Journal of Modeling Transportation, vol. 19, no. 3, pp. 207–213, 2011.

[12]R. Rajmani, "Vehicle dynamic and control", Springer, 2011.

[13]L. Xiao and F. Gao, "Practical string stability of platoon of adaptive cruise control vehicles", IEEE Transaction on Intelligent Transportation System, vol. 12, no. 4, pp. 1184–1194, 2011.

[14]A. Ghasemi, R. Kazemi and S. Azadi, "Exact stability of a platoon of vehicles by considering time delay and lag", Journal of Mechanical Science and Technology, vol. 29, no. 2, pp. 799-805, 2015.

[15]D. Jia and D. Ngoduy, "Platoon based cooperative driving model with consideration of realistic inter vehicle communication", Transportation Research Part C, vol. 68, pp. 245-264, 2016.

[16]K. Wook and C. Dongk, "Direct adaptive bidirectional platoon using a coupled sliding mode control method", IEEE Transaction of Intelligent Transportation Systems, vol. 15, no. 4, pp. 2040-2049, 2016.

[17]A. A. Peters, R. H. Middelton and O. Mason, "Leader tracking homogeneous platoons with broadcast delays", Automatica, vol. 50, pp. 64-74, 2014.

[18]M. Bernardo and A. Salvi, "Santini S, Valente AS, "Third-order consensus in vehicles platoon with heterogeneous time-varying delays", IFAC Conference, pp. 358–363, 2015.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1396.11.1.6.3]