مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۲، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۷، صفحه ۵۱-۴۱

طراحی کنترل‌کننده تصادفی ناهماهنگ برای کلاس خاصی از سیستم های پرش مارکوف خطی

مونا فرجی نیری[۱]، محمدرضا جاهد مطلق[۲]

[۱] استادیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، موسسه آموزش عالی پویش، m_farajiniri@pooyesh.ac.ir

[۲] استاد، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه علم و صنعت ایران، jahedmr@iust.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۵/۹/۱۶ ویرایش اول: ۱۳۹۶/۷/۱۵ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۰/۱۳

چکیده: هدف این مقاله طراحی کنترل‌کننده تصادفی کلیدزن ناهماهنگ برای سیستم پرش مارکوف است. منظور از این ناهماهنگی، عدم‌تطابق بین کلیدزنی کنترل‌کننده و کلیدزنی سیستم است. این ناهماهنگی یکی از محدودیت‌هایی است که به هنگام کنترل سیستم‌های پرش مارکوف بروز می‌کند و دلیل آن نبود امکان تشخیص دقیق و بلادرنگ سیگنال کلیدزنی در سیستم پرش مارکوفی است. در این مقاله با بهره‌گیری از رویکردی جدید، اثرات تشخیص نادقیق وضعیت کلیدزنی در کنترل‌کننده لحاظ شده و علی‌رغم عدم‌تطابق بین تغییر وضعیت سیستم و تغییر وضعیت کنترل‌کننده، پایدارسازی سیستم صورت پذیرفته‌است. بدین‌منظور ابتدا اثر ناهماهنگی با تعریف دو زنجیره مارکوف مستقل اما پیرو برای سیستم و کنترل‌کننده معرفی شده و سپس با ساختاردهی سیستم حلقه بسته به صورت یک سیستم پرش مارکوف ناهمگن به طراحی کنترل‌کننده پرداخته شده‌است. اساس این طراحی بر تئوری لیاپانوف چندگانه‌ای استوار است که به شرایط کافی پایداری‌پذیری و طراحی کنترل‌کننده برای سیستم منجر می‌شود. کلیه روابط بدست آمده جهت بررسی پایداری پذیری و طراحی پایدارساز به صورت مجموعه‌ای از نامساوی‌های ماتریسی خطی بوده و نتایج شبیه‌سازی نشانگر مزایا و ویژگی‌های طرح پیشنهادی است.

کلمات کلیدی: کنترل تصادفی، کنترل ناهماهنگ، نامساوی ماتریسی خطی، سیستم پرش مارکوف خطی، سیستم پرش مارکوف ناهمگن.

Asynchronous Stochastic Controller Design for a Class of Markov Jump Linear Systems

Mona Faraji-Niri, Mohammad Reza Jahed-Motlagh

Abstract: This paper investigates asynchronous controller design problem for a class of continuous-time Markov jump linear systems. The mentioed asynchronous phenomenon is a case in which the system and the controller Markov chainsare not matched, however they are relevant according to certain probabilities. This phenomenon describes a realistic and practical situation which arises as a result of inaccurate observation of the system's Markov chain. The proposed design scheme considers the closed-loop system as a unified Markov jump linear system and utulizes the multiple Lyapunov function approach. By this approach, firstly, the stabilizability of the closed-loop system is ensured and then the asynchronous state-feedback controller is synthesizesed. The designed controller is formulated in terms of linear matrix inequalities; which are easy to check. A numerical example illustrates the usefulness of the developed method.

Keywords: Asynchronous Control, Linear Matrix Inequality, Markov Jump Linear System, Stochastic Control.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.2.2.8]
[DOI: 10.29252/joc.12.2.41]

۱- مقدمه

امروزه ساختارهای پرش مارکوف با قابلیت خود در توصیف تغییرات ناگهانی در سیستم‌ها، بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند [۱-۱۰]. کاربردهای این سیستم را می‌توان در حوزه‌های متعددی همچون سیستم‌های اقتصادی [۸]، سیستم‌های قدرت [۹]، سیستم‌های زیستی [۱۰]، سیستم‌های چندعامله [۱۱]، سیستم‌های در معرض عیب [۱۲] و سیستم‌های کنترلی شبکه [۱۳] یافت. سیستم های پرش مارکوف کلاس خاصی از سیستم‌های کلیدزن تصادفی هستند. سیستم‌های کلیدزن تصادفی، ساختارهایی هستند که منطق کلیدزنی در آن‌ها از نوع تصادفی بوده و می‌توانند اثرات ناشی از تغییرات ناگهانی در اثر اغتشاشات داخلی و خارجی، تعمیرات و یا تغییرات اندرکنش‌های بین اجزای سیستم را مدل کنند [۱۴ و ۱۵]. سیستم های پرش مارکوف، شامل دسته‌ای از زیرسیستم‌ها (وضعیت‌های سیستم) هستند که کلیدزنی بین آن‌ها توسط قاعده مارکوفی با تعداد وضعیت‌های محدود صورت می گیرد [۱۵].

محققین بسیاری از مسائل پایداری [۲ و ۳ و ۵ و ۶]، پایدارسازی [۵ و ۶ و ۱۶]، و طراحی کنترل‌کننده [۷ و ۱۷ و ۱۸] را برای سیستم‌های پرش مارکوف مورد بررسی قرار داده‌اند. اغلب پژوهش‌هایی که بر مسائل پایدارسازی و کنترل این سیستم‌ها تعلق دارند، مبتنی بر یک فرض اساسی هستند که بر اساس آن پایدارساز یا کنترل‌کننده کاملا با سیستم تحت کنترل هماهنگ است [۱ و ۵-۷ و ۱۴-۱۸]. این فرض بدین معناست که فرآیند مارکوفی که تغییرات مودهای کنترل‌کننده را مدیریت می‌کند دقیقا با زنجیره مارکوف مدیریت کننده‌ی تغییرات مودهای سیستم یکسان است. باید توجه داشت که این یک فرض دور از واقعیت است و هرچند منجر به سادگی تحلیل و طراحی می گردد اما کاربرد کنترل‌کننده را برای این سیستم‌ها بسیار محدود می‌کند. دلیل این امر آن است که، زنجیره مارکوف سیستم همواره به صورت دقیق قابل شناسایی نبوده و معمولا مود فعال سیستم به صورت بلادرنگ در اختیار کنترل‌کننده قرار نمی‌گیرد. به عبارتی دیگر، از دیدگاه عملی، زنجیره مارکوف مدیریت‌کننده سیستم و کنترل‌کننده نامطابق هستند. این عدم‌تطابق اگر به درستی درنظر گرفته نشود کلیدزنی ناهمزمان سیستم و کنترل‌کننده باعث افت کارائی و یا حتی ناپایداری سیستم می گردد.

یک راه برای برخورد با این مسئله، طراحی کنترل‌کننده‌های مستقل از مود برای سیستم است [۱۵ و ۱۹]. منظور از کنترل‌کننده مستقل از مود سیستم، کنترل‌کننده‌ای است که کلیه تغییرات وضعیت سیستم را نادیده گرفته و درواقع فاقد کلیدزنی است. هرچند کنترل‌کننده‌ی مستقل از مود می‌تواند راه‌حلی ساده در مواقع عدم‌دسترسی به مودهای سیستم باشد اما بسیار محافظه‌کار است [۱۹]. دلیل این محافظه‌کاری، ثابت ماندن کنترل‌کننده علی‌رغم تغییرات سیستم است. بدیهی است این نوع کنترل‌کننده نمی‌تواند در مواقع تغییرات شدید وضعیت سیستم پاسخ مناسبی برای آن فراهم سازد. به همین سبب اتخاذ رویکردی که بتواند عدم‌تطابق پیچیده‌ی موجود بین سیستم و کنترل‌کننده را لحاظ کند بسیار ضروری است. بر خلاف کنترل کننده مستقل از مود، که از اطلاعات سیستم چشم پوشی می کند، یک کنترل‌کننده ناهماهنگ سعی در بهره‌گیری از اطلاعات بدست آمده از طریق مشاهده‌ی زنجیره‌ی مارکوف سیستم دارد.

در رابطه با سیستم‌های پرش مارکوف، پژوهش‌هایی تحت عنوان طراحی کنترل‌کننده ناهماهنگ برای این سیستم‌ها صورت پذیرفته‌است [۲۰-۲۵]. نکته قابل ذکر آن است که، در اغلب این پژوهش‌ها ماهیت ناهماهنگی مربوط به حالت‌های پیوسته در دینامیک‌ها بوده و با عدم‌تطابق حالت‌های زنجیره‌های مارکوف کاملا متفاوت است. درواقع، در پژوهش‌های یادشده ناهماهنگی به معنای وجود تاخیر بین حالت‌های سیستم و کنترل‌کننده است که از طریق تعریف تاخیر زمانی به صورت متغیری قطعی و از پیش تعریف‌شده [۲۳]، و یا متغیری تصادفی با توزیع احتمالاتی خاص در سیستم حلقه‌بسته [۲۲ و ۲۴ و ۲۵]، بررسی می‌شود. از جمله پژوهش‌های اختصاص یافته به مسئله‌ی عدم‌تطابق زنجیره‌های مارکوف [۲۰] و [۲۱] هستند. در پژوهش [۲۱]، مسئله‌ی ناهماهنگی بین مودهای سیستم و کنترل‌کننده با تعریف دو زنجیره‌ی مارکوف کاملا متفاوت مطرح شده که بر اساس تئوری جدایی‌پذیری به طراحی کنترل‌کننده منجر می گردد. رویکرد مذکور بسیار محافظه‌کارانه است. در واقع با این که زنجیره کنترل‌کننده با سیستم متفاوت است اما اطلاعاتی از آن را دربردارد که چشم‌پوشی از این اطلاعات منجر به محافظه‌کاری می‌گردد. فرض متفاوت بودن زنجیره‌ها در [۲۱] توسط [۲۰] از میان برداشته می‌شود اما این رویکرد [۲۰] خود تنها محدود به طراحی فیلتر بوده و وجود تعداد زیاد پارامترهای طراحی در آن باعث دشواری در تست شرایط و پیاده‌سازی عملی آن‌ها است.

با توجه به آن‌چه که ذکر شد، پرداختن به مسئله‌ی طراحی یک کنترل‌کننده با فرض دسترسی نادقیق آن به وضعیت‌های سیستم و دست‌یافتن به شروطی با قابلیت تست ساده و پیاده‌سازی عملی بسیار حائز اهمیت است. هدف این مقاله دست‌یافتن به اهداف مذکور است. بدین‌ترتیب روش ارائه شده در این مقاله در دو بخش قابل پیگیری است. در بخش نخست، ابتدا اثر عدم تطابق بین سیستم و کنترل‌کننده به صورت دو زنجیره مارکوف مجزا اما وابسته به هم بیان شده و در ادامه با توجه به وجود این زنجیره های دوگانه، سیستم به صورت یک مجموعه‌ی مارکوفی ناهمگن، یا به طور دقیق‌تر تکه‌ای همگن [۱۷ و ۲۶]، ساختاردهی مجدد می‌گردد. دلیل این ساختاردهی آن است که زنجیره‌ی مشاهده‌شده در عمل به زنجیره‌ی سیستم وابسته است. از آن‌جایی که زنجیره‌ی سیستم یک سیگنال متغیر با زمان به صورت تکه‌ای است، لذا ویژگی‌های احتمالاتی (نرخ‌های گذار [۱۵]) زنجیره مشاهده‌شده نیز متغیر با زمان به صورت تکه‌ای خواهندبود. بنابراین کل سیستم می‌تواند به صورت یک سیستم پرش مارکوف تکه‌ای همگن درنظر گرفته شود. در یک ساختار مارکوفی تکه‌ای همگن نرخ‌های گذار متغیر با زمان بوده اما در بازه‌ی زمانی مشخصی ثابت هستند [۱۷ و ۲۶]. در بخش دوم، با

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.2.2.8]
[DOI: 10.29252/joc.12.2.41]

استفاده از ساختار ارائه شده، به طراحی کنترل‌کننده بر مبنای تئوری لیاپانوف پرداخته می‌شود. بدین منظور تابع لیاپانوفی از نوع چندگانه درنظر گرفته می‌شود که تنها به مودهای کنترل‌کننده وابسته بوده و به صورت غیرمستقیم مودهای سیستم را نیز لحاظ می‌کند. براساس این تابع لیاپانوف ابتدا پایداری‌پذیری سیستم مورد بررسی قرار گرفته و در نهایت کنترل‌کننده ناهماهنگ طراحی می‌گردد. شایان ذکر است که سیستم پرش مارکوف برای سادگی به صورت خطی درنظر گرفته شده و به منظور عمومیت‌دهی به مسئله، شامل عدم قطعیت‌های دینامیک کران محدود از نوع متغیر با زمان فرض گشته‌است. به دلیل رویکرد خاص مبتنی بر سیستم‌های پرش مارکوفی تکه‌ای همگن، تمام روابط و طراحی‌ها به صورت مجموعه‌ای از روابط نامساوی ماتریسی خطی حاصل شده‌اند که قابلیت حل‌پذیری بالایی توسط نرم افزارها و روش‌های بهینه‌سازی موجود دارند. روش ارائه‌شده، به دلیل استفاده از اطلاعات مربوط به تغییر وضعیت در سیستم، نسبت به کنترل‌کننده‌ی مستقل از مود [۱۹] از لحاظ محافظه‌کاری ارجحیت دارد. همچنین، این کنترل‌کننده نسبت به کنترل‌کننده‌های ناهماهنگ مشابه [۲۰ و ۲۱] قابلیت لحاظ کردن زنجیره‌های مستقل اما پیرو را بین سیستم و کنترل‌کننده داشته و از نظر قابلیت حل‌پذیری و سادگی روابط بر آن‌ها برتری دارد. نتایج شبیه‌سازی این روش بر روی سیستم نمونه، نمایانگر ویژگی‌های آن است.

ساختار این مقاله بدین‌ترتیب است، در بخش ۲ تعاریف اولیه ذکر شده و مسئله کنترل ناهماهنگ برای سیستم پرش مارکوف بیان گشته‌است. در بخش ۳ با استفاده از رویکرد سیستم‌های پرش مارکوف ناهمگن، ابتدا پایداری‌پذیری سیستم بررسی گشته و در ادامه، طراحی کنترل‌کننده صورت پذیرفته‌است. بخش ۴ به نتایج شبیه‌سازی و مقایسه‌های مربوطه اختصاص یافته و بخش ۵ حاوی جمع‌بندی، نتیجه‌گیری و پیشنهاداتی برای ادامه پژوهش جاری است.

۲- تعاریف اولیه و بیان مسئله

برای معرفی سیستم پرش مارکوف خطی، فضای احتمالاتی (Ω, F, ρ) با فرض‌های رایج درنظر گرفته می‌شود [۲۰] که در آن Ω، F و ρ به‌ترتیب فضای نمونه، جبر وقایع و سنجه‌ی احتمال در فضای نمونه هستند. در این صورت سیستم پرش مارکوف خطی نامعین به صورت معادله‌ی (۱) در فضای احتمالاتی بیان می‌گردد.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(r_t,t)x(t) + B(r_t,t)u(t), \\ x(t_0) = x_0,\ r_{t_0} = r_0 \end{cases} \qquad (۱)$$

که در آن $x(t) \in \mathbf{R}^n$ بردار حالت‌های سیستم با بعد n، $u(t) \in \mathbf{R}^m$ بردار ورودی سیستم با بعد m و x_0 بردار شرایط اولیه برای سیستم است. پارامتر $\{r_t, t \geq 0\}$ معرف یک زنجیره‌ی مارکوف همگن و پیوسته-زمان است که مقادیری گسسته خود را از مجموعه‌ی متناهی $\underline{N} =: \{1,2,...,N\}$ اتخاذ می‌کند. این زنجیره مارکوف ماتریس گذاری به صورت (۲) دارد،

$$\Lambda_{N\times N} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{N1} & \lambda_{N2} & \dots & \lambda_{NN} \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

که در آن نرخ‌های گذار از رابطه‌ی (۳) پیروی می‌کنند.

$$\Pr\{r_{t+h} = j \mid r_t = i\} = \begin{cases} \lambda_{ij}h + o(h) & i \neq j \\ 1 + \lambda_{ii}h + o(h) & i = j \end{cases} \qquad (۳)$$

در رابطه‌ی (۳)، λ_{ij} معرف نرخ گذار از مود i در لحظه t به مود j در لحظه $t+h$ است که شرایط زیر را برقرار می‌سازد،

$$\lambda_{ij} \geq 0 \qquad (۴)$$

$$\lambda_{ii} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{N} \lambda_{ij} \qquad (۵)$$

که شرط (۴) بدین معناست که نرخ‌های گذار منفی نیستند و شرط (۵) نیز بدین معناست که حرکت سیستم از مود i به یکی از مودهای j با احتمال یک تضمین‌شده است. همچنین فرض برآن است که زنجیره مارکوف کاهش‌ناپذیر است یعنی احتمال حرکت سیستم از یک مود به مود دیگر در تعداد قابل شمارشی از کلیدزنی‌ها (پرش‌ها) صورت می‌گیرد [۱۵].

در معادله (۱)، $A(r_t,t)$ و $B(r_t,t)$ ماتریس‌های سیستم هستند که وابسته به مود بوده و ابعاد مناسبی دارند. به منظور لحاظ کردن عدم‌قطعیت‌ها در مدل، ماتریس‌های دینامیک سیستم به صورت $A(r_t,t) = A(r_t) + \Delta A(r_t,t)$ و $B(r_t,t) = B(r_t) + \Delta B(r_t,t)$؛ عریف شده‌اند که در آن‌ها $A(r_t)$ و $B(r_t)$ ماتریس‌های معلوم و $\Delta A(r_t,t)$ و $\Delta B(r_t,t)$ ماتریس‌هایی نامعلوم و وابسته به مود هستند که اثر عدم‌قطعیت متغیر با زمان و کران محدود را بیان می‌کنند. این عدم‌قطعیت‌ها به صورت (۶) هستند،

$$\begin{aligned} \Delta A(r_t,t) &= D_A(r_t)F_A(r_t,t)E_A(r_t), \\ \Delta B(r_t,t) &= D_B(r_t)F_B(r_t,t)E_B(r_t) \end{aligned} \qquad (۶)$$

ماتریس‌های $D_A(r_t)$، $D_B(r_t)$، $E_A(r_t)$ و $E_B(r_t)$ معلوم و حقیقی بوده و ماتریس‌های $F_A(r_t, t)$ و $F_B(r_t, t)$ نامعلوم و متغیر با زمان هستند که عناصر قابل سنجش با معیار لبگ[۱] با شرایط زیر را دارند،

$$F_B^T(r_t,t)F_B(r_t,t) \leq I,\ F_A^T(r_t,t)F_A(r_t,t) \leq I$$

نکته ۱-از این پس به منظور سادگی در علامت‌گذاری‌ها از عبارت $r_t = i$ به منظور اشاره به مود i ام بهره برده می‌شود. بنابرین ماتریس‌های سیستم به صورت $A(i)$، $B(i)$، $\Delta A(i)$، $\Delta B(i)$، $F_A(i)$، $F_B(i)$، $D_A(i)$،

[۱] Lebesgue

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.2.2.8]
[DOI: 10.29252/joc.12.2.41]

$D_B(i)$، $E_A(i)$ و $E_B(i)$ خواهندبود. علاوه براین زمان آغازین $t_0 = 0$ بوده و حالت و وضعیت آغازین یعنی x_0 و r_0 معلوم فرض شده‌اند.

برای سیستم (۱)، کنترل‌کننده به صورت،

$$u(t) = K(\sigma_t)x(t) \qquad (۷)$$

درنظر گرفته شده‌است. ماتریس $K(\sigma_t)$ بهره کنترل‌کننده و دارای ابعاد مناسب است که باید به منظور پایدرسازی مقاوم و تصادفی سیستم طراحی گردد. $\{\sigma_t,\ t \geq 0\}$ معرف زنجیره مارکوفی است که کلیدزنی بین کنترل‌کننده‌های کاندید $K(\sigma_t)$ را برای پایدارسازی مدیریت می‌کند. این زنجیره نیز یک زنجیره پیوسته-زمان با مقادیر گسسته است که در مجموعه متناهی $\underline{M} =: \{1, 2, ..., M\}$ با ماتریس گذار (۸) بیان می‌شود.

$$P^{r_{t+h}} = \begin{bmatrix} p_{11}^{r_{t+h}} & p_{12}^{r_{t+h}} & \cdots & p_{1M}^{r_{t+h}} \\ p_{21}^{r_{t+h}} & p_{22}^{r_{t+h}} & \cdots & p_{2M}^{r_{t+h}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1}^{r_{t+h}} & p_{M2}^{r_{t+h}} & \cdots & p_{MM}^{r_{t+h}} \end{bmatrix} \qquad (۸)$$

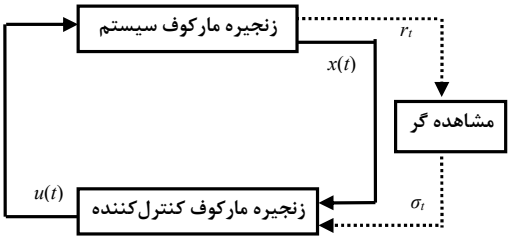
عناصر ماتریس گذار (۸) مطابق با (۹) تعریف شده‌اند، و در آن $p_{mn}^{r_{t+h}} \geq 0$ نرخ گذار از وضعیت m در زمان t به وضعیت n در زمان $t+h$ بوده و شرط $p_{mm}^{r_{t+h}} = -\sum_{n=1,n\neq m}^{M} p_{mn}^{r_{t+h}}$ را نیز برقرار می‌سازد که پیش‌تر در مورد آن شرح داده شده‌است.

$$\Pr\left\{\sigma_{t+h} = n \mid \sigma_t = m\right\} = \begin{cases} p_{mn}^{r_{t+h}} h + o(h) & m \neq n \\ 1 + p_{mm}^{r_{t+h}} h + o(h) & m = n \end{cases} \qquad (۹)$$

طبق رابطه‌ی (۹) مشخص است که زنجیره σ_t به‌دلیل نرخ‌های گذار وابسته به r_t از این زنجیره پیروی می‌کند اما باید توجه داشت که زنجیره r_t از نظر تصادفی از زنجیره σ_t مستقل است. این بدین معناست که حالت بعدی در زنجیره σ_t تنها به حالت قبلی خود این زنجیره وابسته بوده و به طور تصادفی با حالت های زنجیره r_t در ارتباط نیست. از این پس همانند نکته ذکر شده در توجه ۱، به منظور سادگی برای اشاره به بهره‌های کنترل‌کننده از $K(m)$ در حالت $\sigma_t = m$ استفاده خواهدشد.

کنترل‌کننده (۷) یک کنترل‌کننده ناهماهنگ با سیستم است چرا که زنجیره مارکوف مدیریت‌کننده کلیدزنی در آن با زنجیره مارکوف تنظیم‌کننده‌ی پرش در سیستم متفاوت است. البته، لازم به ذکر است که هر چند دو زنجیره نامطابق هستند اما براساس احتمالات مشخصی (مطابق رابطه (۹))، به یکدیگر مرتبط می باشند.

انگیزه اصلی برای در نظر گرفتن یک ساختار کنترلی ناهماهنگ، مسئله عدم‌دسترسی به وضعیت‌های سیستم در هر لحظه است. در واقع تشخیص وضعیت فعال سیستم به صورتی دقیق و صحیح عملا با دشواری‌هایی مواجه است. تشخیص وضعیت فعال توسط مشاهده‌گری از زنجیره مارکوف صورت می‌گیرد، دقیق نبودن این مشاهده منجر به تشخیص نادقیق وضعیت فعال و باعث بروز عدم‌قطعیت در انتخاب وضعیت صحیح از کنترل‌کننده می‌شود. برای غلبه بر این مشکل لازم است ساختار کنترلی اثرات این عدم‌انطباق بین زنجیره مارکوف سیستم و زنجیره مارکوف مشاهده شده از سیستم را لحاظ کند. چنین ساختاری که یک ساختار ناهماهنگ نامیده می‌شود و در شکل ۱ نشان داده شده‌است.



شکل ۱: ساختار کنترلی ناهماهنگ مارکوفی

در ادامه، با توجه به بیانی که از مسئله‌ی کنترل ناهماهنگ برای سیستم‌های مارکوفی ارائه گشت به طراحی این ساختار پرداخته شده‌است. اما پیش از آغاز این طراحی تعدادی از تعاریف مهم و کاربردی بیان می‌گردند.

تعریف ۱- [۱۷ و ۲۶] یک فرآیند مارکوف با تعداد حالات محدود بر مجموعه $\underline{N} =: \{1, 2, ..., N\}$ همگن است اگر احتمالات گذار آن از وضعیت i به وضعیت j در تمامی زمان‌ها مطابق رابطه $\Pr\left\{r_{t+h} = j \mid r_t = i\right\} = p(i, j, h)$ باشدکه در آن $p(\cdot)$ معرف تابع احتمال است. به‌همین‌ترتیب یک فرآیند مارکوف ناهمگن است اگر نرخ‌های گذار آن در رابطه $\Pr\left\{r_{t+h} = j \mid r_t = i\right\} = p(i, t, j, t+h)$ صدق نمایند. به عبارتی یک فرآیند مارکوف ناهمگن (همگن) است اگر نرخ های گذار آن متغیر با زمان (ثابت با زمان) باشند.

نکته ۲- نرخ‌های گذار فرآیند مارکوف کنترل‌کننده، متغیر با زمان هستند اما تغییرات زمانی آن‌ها به صورت لحظه‌ای نیست. در واقع تغییرات زمانی نرخ‌های گذار زنجیره σ_t به دلیل وابستگی آن به زنجیره r_t است. از آن‌جایی که r_t یک سیگنال متغیر با زمان به صورت تکه‌ای است، لذا نرخ‌های گذار σ_t نیز متغیر با زمان به صورت تکه‌ای هستند. بنابرین زنجیره σ_t درواقع یک زنجیره مارکوف تکه‌ای همگن است. منظور از زنجیره تکه‌ای همگن، زنجیره‌ای با نرخ‌های گذار متغیر با زمان، اما ثابت در بازه‌های مشخص است.

نکته ۳- سیستم (۱) یک سیستم پرش مارکوف همگن و خطی است اما کنترل‌کننده‌ی مربوط به آن بر اساس یک زنجیره مارکوف تکه‌ای همگن کلید می‌زند. از این رو، سیستم حلقه بسته (کنترل‌شده) دارای دو زنجیره مارکوف مجزا بوده و به عنوان یک سیستم یکپارچه، ساختاری با پرش مارکوف تکه‌ای همگن است.

تعریف ۲- [۱۵] برای هر وضعیت آغازین r_0 و به ازای هر بردار از شرایط اولیه x_0 سیستم (۱) با $u(t) = 0$ پایدار مقاوم تصادفی است اگر شرط (۱۰) به ازای تمامی عدم‌قطعیت‌های ممکن برقرار گردد،

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.2.2.8]
[DOI: 10.29252/joc.12.2.41]

$$\int_0^\infty \mathrm{E}\left\{\|x(t)\|^2\, dt \mid x_0, r_0\right\} < \infty \qquad (۱۰)$$

که در این رابطه، $\mathrm{E}\{.\mid.\}$ امید مشروط به مقادیر اولیه x_0 و r_0 است.

لم ۱- [۲۷] اگر Y ماتریس متقارن، H و E ماتریس‌هایی با ابعاد مناسب و F ماتریسی با شرط $F^TF \le I$ باشد، آنگاه نامساوی‌های زیر برقرار و معادل هستند،

- به ازای هر $\varepsilon > 0$، $HFE + E^TF^TH^T \le \varepsilon HH^T + \varepsilon^{-1}E^TE$ برقرار است.

- $Y + HFE + E^TF^TH^T < 0$ برقرار است اگر و فقط اگر $\varepsilon > 0$ وجود داشته‌باشد که $Y + \varepsilon HH^T + \varepsilon^{-1}E^TE < 0$ برقرار باشد.

لم ۲- [۱۵] نامساوی ماتریس خطی $M = \begin{bmatrix} X & Y^T \\ Y & Z \end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید که در آن X و Z ماتریس‌هایی متقارن و Y ماتریسی با ابعاد مناسب باشد. در این صورت M مثبت معین است اگر و فقط اگر $X > 0$ بوده و $X - Y^TZ^{-1}Y > 0$ برقرار باشد. به رابطه دوم مکمل شر[۱] گفته می‌شود.

با معرفی سیستم، ساختار کنترل‌کننده‌ی ناهماهنگ، تعاریف و لم‌ها، اکنون مسئله‌ی این مقاله بدین صورت بیان می‌گردد:

۱) بدست آوردن شرایط پایداری‌پذیری برای سیستم پرش مارکوف خطی و نامعین تحت کنترل‌کننده ناهماهنگ.

۲) طراحی بهره‌های کنترل‌کننده ناهماهنگ برای سیستم پرش مارکوف خطی به طوری که سیستم حلقه بسته پایدار مقاوم تصادفی گردد.

نکته ٤- در این مقاله فرض بر آن است که نرخ های گذار مربوط به زنجیره مارکوف سیستم و نرخ های گذار مربوط به زنجیره مارکوف مشاهده‌شده (که توسط کنترل‌کننده مورد استفاده قرار می‌گیرند)، از پیش موجود و فراهم هستند. به عبارتی دیگر تعداد وضعیتها و نرخ‌های گذار آن‌ها، پارامترهای طراحی نیستند. در حالت کلی، برای دستیابی به اطلاعات ماتریس‌های گذار باید آزمایش‌هایی عملی بر روی سیستم صورت پذیرد و یا از داده‌های ذخیره شده در طول مدت عملکرد پیشین سیستم (داده‌های حافظه سیستم) بهره برده‌شود. روش‌های متعدد و معروفی برای به دست آوردن نرخ‌های گذار سیگنال‌های مارکوفی وجود دارد که به تعدادی از آن‌ها در [۲۸] اشاره شده‌است. نخستین راه استفاده از الگوریتم‌های تخمین آماری و دومین راه استفاده از تکنیک‌های گرافیکی است [۲۸] و [۲۹]. روش اول هنگامی کارائی دارد که تعداد کل نرخ‌های گذار اندک باشد اما روش دوم برای تعداد زیاد نرخ‌های گذار مناسب است.

۳- بررسی پایداری‌پذیری و طراحی پایدارساز تصادفی ناهماهنگ

هدف این بخش پرداختن به مسئله پایداری‌پذیری و طراحی پایدارساز تصادفی ناهماهنگ برای سیستم پرش مارکوف خطی است. در ابتدا یک شرط کافی برای پایداری‌پذیری سیستم با کنترل‌کننده فیدبک حالت ناهماهنگ بدست آمده و سپس کنترل‌کننده به‌نحوی طراحی می‌گردد که سیستم (۱) پایدار مقاوم تصادفی گردد. شرط پایداری‌پذیری و روابط طراحی کنترل‌کننده همگی به صورت مجموعه‌ای از نامساوی‌های ماتریسی خطی بدست به‌دست آمده‌اند که به‌صورت سیستماتیک و با استفاده از ابزارهای موجود به‌سادگی قابل حل هستند.

قانون کنترلی به صورت (۷) درنظر گرفته شده و با جایگزینی در معادله (۱)، دینامیک سیستم حلقه بسته به‌صورت (۱۱) بدست می‌آید،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \overline{A}(r_t, \sigma_t, t)x(t) \\ x(t_0) = x_0,\ r_{t_0} = r_0 \end{cases} \qquad (۱۱)$$

به صورتی که ماتریس حلقه‌بسته سیستم به صورت (۱۲) است.

$$\overline{A}(r_t, \sigma_t, t) = A(r_t, t) + B(r_t, t)K(\sigma_t) \qquad (۱۲)$$

قضیه‌ای که در ادامه خواهدآمد، شرط کافی برای پایداری‌پذیری سیستم است.

قضیه- سیستم نامعین (۱) تحت بهره‌های کنترلی (۷) پایداری‌پذیر در مفهوم مقاوم تصادفی است اگر مجموعه‌ای از ماتریس‌های متقارن، مثبت معین و وابسته به وضعیت $X(m)$، مجموعه‌ای از ماتریس‌های وابسته به وضعیت $Y(m)$ و همچنین اسکالرهای مثبت و وابسته به وضعیت $\varepsilon_A(i)$ و $\varepsilon_B(i)$ به نحوی وجود داشته باشند که مجموعه روابط نامساوی ماتریسی خطی زیر به ازای تمامی $i \in \underline{N}$ و $m \in \underline{M}$ برقرار گردند،

$$\begin{bmatrix} J(i,m) & X(m)E_A^T(i) & Y^T(m)E_B^T(i) & \underline{S}(i,m) \\ E_A(i)X(m) & -\varepsilon_A(i)I & 0 & 0 \\ E_B(i)Y(m) & 0 & -\varepsilon_B(i)I & 0 \\ \underline{S}^T(i,m) & 0 & 0 & -\underline{Z}(m) \end{bmatrix} < 0 \qquad (۱۳)$$

که در آن داریم،

$$J(i,m) = X(m)A^T(i) + A(i)X(m) + Y^T(m)B^T(i) + B(i)Y(m) + \varepsilon_A(i)D_A(i)D_A^T(i) + \varepsilon_B(i)D_B(i)D_B^T(i) + p_{mm}^i X(m) \qquad (۱۴)$$

$$\underline{S}(i,m) = \left[\sqrt{p_{m1}^i}X(m), ..., \sqrt{p_{mm-1}^i}X(m), \sqrt{p_{mm+1}^i}X(m), ..., \sqrt{p_{mM}^i}X(m)\right] \qquad (۱۵)$$

$$\underline{Z}(m) = diag\left[X(1), ..., X(m-1), X(m+1), ..., X(M)\right] \qquad (۱۶)$$

[۱] Schur Complement.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.2.2.8]
[DOI: 10.29252/joc.12.2.41]

در این صورت بهره‌های پایدارساز از رابطه $K(m) = Y(m)X(m)^{-1}$ بدست می‌آیند.

اثبات- تابع لیاپانوفی به صورت مربعی و وابسته به زنجیره‌ی مشاهده‌شده به‌صورت (۱۷) در نظر گرفته شده‌است.

$$V(x(t), r_t, \sigma_t) = x^T(t)P(\sigma_t)x(t) \qquad (۱۷)$$

این تابع به صورت یک تابع لیاپانوف چندگانه[۱] فرض شده‌است تا اثرات تغییرات دینامیک و بهره‌های کنترلی را لحاظ کند. زوج (r_t, σ_t) در $V(x(t), r_t, \sigma_t)$ مقادیر خود را از مجموعه $\underline{N} \times \underline{M}$ اخذ کرده و $P(m)$ معرف ماتریس‌های مثبت معین متقارن به ازای $m \in \underline{M}$ است. این تابع لیاپانوف به صورت مستقیم به وضعیتهای زنجیره مارکوف سیستم وابستگی ندارد بلکه از طریق زنجیره‌ی مشاهده‌شده با آن مرتبط می‌شود.

مولد ضعیف[۲] [۱۵] برای این تابع لیاپانوف به صورت (۱۸) است.

$$LV(x(t), i, m) = \lim_{h\to 0} 1/h \left(E[V(x(t+h), r_{t+h}, \sigma_{t+h}) \mid x(t) = x(t), r_t = i, \sigma_t = m] - V(x(t), i, m)\right) \qquad (۱۸)$$

این مولد ضعیف در طول مسیر سیستم پرش مارکوف خطی به صورت رابطه (۱۹) محاسبه می‌شود که مبتنی بر قانون احتمالات کل است.

$$\begin{aligned} LV(x(t), i, m) = \lim_{h\to 0} 1/h \{ & \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \lambda_{ij} h \\ & [\sum_{n=1, n\neq m}^{N} p_{mn}^{j} h x(t+h)^T P(n)\, x(t+h) + \\ & (1 + p_{mm}^{j} h) x(t+h)^T P(m) x(t+h)] + (1 + \lambda_{ii} h) \\ & [\sum_{n=1, n\neq m}^{M} p_{mn}^{i} h x(t+h)^T P(n) x(t+h) + (1 + p_{mm}^{i} h) \\ & x(t+h)^T P(m) x(t+h)] - x(t)^T P(m) x(t)\} \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

با توجه به استقلال احتمالاتی دو زنجیره مارکوف r_t و σ_t، رابطه‌ی،

$$Pr(r_{t+h} = j, \sigma_{t+h} = n \mid r_t = i, \sigma_t = m) = Pr(r_{t+h} = j \mid r_t = i, \sigma_{t+h} = n, \sigma_t = m) = Pr(\sigma_{t+h} = n \mid r_t = i, \sigma_t = m)$$

برای احتمالات گذار برقرار است. بدین ترتیب، رابطه (۲۰) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} LV(x(t), i, m) = \lim_{h\to 0} \{ & \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \lambda_{ij} x(t+h)^T P(m) \\ & x(t+h) + 1/h [\sum_{n=1, n\neq m}^{M} p_{mn}^{i} h x(t+h)^T + (1 + p_{mm}^{j} h) \\ & P(n) x(t+h) x(t+h)^T P(m) x(t+h) + \lambda_{ii} x(t+h)^T \\ & P(m) x(t+h) - 1/h\, x(t)^T P(m) x(t)\} = \\ \lim_{h\to 0} \{ & \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} x(t+h)^T P(m) x(t+h) + \\ & \sum_{n=1}^{M} p_{mn}^{i} x(t+h)^T P(n) x(t+h) + 1/h [x(t+h)^T \\ & P(m) x(t+h) - x(t)^T P(m) x(t)]\} \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

رابطه (۲۰) پس از ساده‌سازی به صورت (۲۱) در می‌آید.

$$\begin{aligned} LV(x(t), i, m) = x(t)^T [& \overline{A}^T(i,t) P(m) + P(m) \\ & \overline{A}(i,t) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} P(m) + \sum_{n=1}^{M} p_{mn}^{i} P(n)] x(t) \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

بر اساس (۲۱)، اگر نامساوی (۲۲) برقرار باشد آن‌گاه $LV(x(t), i, m) < 0$ برقرار خواهدبود.

$$\begin{aligned} & \overline{A}^T(i,t) P(m) + P(m) \overline{A}(i,t) + \\ & \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} P(m) + \sum_{n=1}^{M} p_{mn}^{i} P(n) < 0 \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

بر اساس اثبات اشاره شده در تئوری ۴ بخش ۲,۲ از [۱۵]، برقراری نامساوی $LV(x(t), i, m) < 0$ به معنای برقراری تعریف پایداری تصادفی مقاوم (۱۰) برای سیستم حلقه بسته (۱۱) است.

اگر عبارت $\left(A(i) + \Delta A(i,t)\right) + \left(B(i) + \Delta B(i,t)\right) K(m)$ جایگزین $\overline{A}(i,m,t)$ در نامساوی (۲۲) شود، نامساوی (۲۳) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} & A^T(i) P(m) + P(m) A(i) + K^T(m) B^T(i) P(m) + \\ & P(m) B(i) K(m) + P(m) \Delta A(i,t) + \Delta A^T(i,t) P(m) \\ & + P(m) \Delta B(i,t) K(m) + K^T(m) \Delta B^T(i,t) P(m) + \\ & \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} P(m) + \sum_{n=1}^{M} p_{mn}^{i} P(n) < 0 \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

با استفاده از عبارت‌های (۶) که توصیف‌کننده عدم‌قطعیت‌های موجود در دینامیک سیستم هستند و برقراری $\sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} P(m) = 0$ با توجه به خاصیت (۵) از زنجیره مارکوف، نامساوی (۲۳) به صورت (۲۴) درمی‌آید.

[۱] Multiple Lyapunov Function

[۲] Infinitesimal Generator

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.2.2.8]
[DOI: 10.29252/joc.12.2.41]

$$A^T(i)P(m)+P(m)A(i)+K^T(m)B^T(i)P(m)+$$
$$P(m)B(i)K(m)+P(m)D_A(i)F_A(i,t)E_A(i)+$$
$$E_A^T(i)F_A^T(i,t)D_A^T(i)P(m)+P(m)D_B(i)F_B(i,t) \quad (۲۴)$$
$$E_B(i)K(m)+K^T(m)E_B^T(i)F_B^T(i,t)D_B^T(i)P(m)+$$
$$\sum_{n=1}^{M}p_{mn}^{i}P(n)<0$$

بر اساس آن‌چه‌که در لم ۱ ذکر شد، اگر اسکالرهای حقیقی و مثبت $\varepsilon_A(i)$ و $\varepsilon_B(i)$ طبق نامساوی‌های (۲۵) و (۲۶) برای بخش‌های غیرقطعی سیستم موجود باشند، آن‌گاه با استفاده از این نامساوی‌ها رابطه (۲۴) به‌صورت (۲۷) درمی‌آید.

$$P(m)D_A(i)F_A(i,t)E_A(i)+E_A^T(i)F_A^T(i,t)D_A^T(i)$$
$$P(m)\le\varepsilon_A(i)P(m)D_A(i)D_A^T(i)P(m)+ \quad (۲۵)$$
$$\varepsilon_A^{-1}(i)E_A^T(i)E_A(i)$$

$$P(m)D_B(i)F_B(i,t)E_B(i)K(m)+K^T(m)E_B^T(i)$$
$$F_B^T(i,t)D_B^T(i)P(m)\le\varepsilon_B(i)P(m)D_B(i)D_B^T(i) \quad (۲۶)$$
$$P(m)+\varepsilon_B^{-1}(i)K^T(m)E_B^T(i)E_B(i)K(m)$$

$$A^T(i)P(m)+P(m)A(i)+K^T(m)B^T(i)P(m)+$$
$$P(m)B(i)K(m)+\varepsilon_A(i)P(m)D_A(i)D_A^T(i)P(m)+$$
$$\varepsilon_A^{-1}(i)E_A^T(i)E_A(i)+\varepsilon_B(i)P(m)D_B(i)D_B^T(i)P(m)+ \quad (۲۷)$$
$$\varepsilon_B^{-1}(i)K^T(m)E_B^T(i)E_B(i)K(m)+\sum_{n=1}^{M}p_{mn}^{i}P(n)<0$$

همان‌طورکه مشاهده می‌شود، رابطه (۲۷) درواقع یک شرط غیرخطی برحسب $P(m)$ و $K(m)$ است. به‌منظور تبدیل این نامساوی ماتریسی به یک نامساوی ماتریسی خطی، $X(m)=P^{-1}(m)$ تعریف شده و عبارت (۲۷) از سمت راست و چپ در $X(m)$ ضرب می‌شود. دراین‌صورت رابطه (۲۸) بدست می‌آید.

$$X(m)A^T(i)+A(i)X(m)+X(m)K^T(m)B^T(i)+$$
$$B(i)K(m)X(m)+\varepsilon_A(i)D_A(i)D_A^T(i)+\varepsilon_A^{-1}(i)$$
$$X(m)E_A^T(i)E_A(i)X(m)X(m)+\varepsilon_B(i)D_B(i) \quad (۲۸)$$
$$D_B^T(i)+\varepsilon_B^{-1}(i)K^T(m)X(m)E_B^T(i)E_B(i)K(m)$$
$$X(m)+X(m)\left[\sum_{n=1}^{M}p_{mn}^{i}X^{-1}(n)\right]X(m)<0$$

دراین مرحله $\underline{S}(i,m)$ و $\underline{Z}(m)$ مطابق با (۱۵) و (۱۶) تعریف شده و عبارت $X(m)\left[\sum_{n=1}^{M}p_{mn}^{i}X^{-1}(n)\right]X(m)$ در نامساوی (۲۸)، به صورت (۲۹) نوشته می‌شود.

$$X(m)\left[\sum_{n=1}^{M}p_{mn}^{i}X^{-1}(n)\right]X(m)= \quad (۲۹)$$
$$\underline{S}(i,m)\underline{Z}^{-1}(m)\underline{S}^T(i,m)+p_{mm}^{i}X(m)$$

در نهایت با تعریف $Y(m)=K(m)X(m)$ و استفاده از نامساوی (۲۹)، نامساوی (۳۰) حاصل می‌گردد. این نامساوی با استفاده از لم ۲ به صورت مجموعه‌ای از شروط به فرم نامساوی‌های ماتریسی خطی (۱۳) درمی‌آید.

$$X(m)A^T(i)+A(i)X(m)+X(m)K^T(m)B^T(i)+$$
$$B(i)K(m)X(m)+\varepsilon_A(i)D_A(i)D_A^T(i)+\varepsilon_A^{-1}(i)$$
$$X(m)E_A^T(i)E_A(i)X(m)+\varepsilon_B(i)D_B(i)D_B^T(i)+ \quad (۳۰)$$
$$\varepsilon_B^{-1}(i)K^T(m)X(m)E_B^T(i)E_B(i)K(m)X(m)+$$
$$\underline{S}(i,m)\underline{Z}^{-1}(m)\underline{S}^T(i,m)+p_{mm}^{i}X(m)<0$$

بدین‌ترتیب اثبات تکمیل است. ■

لازم به ذکر است که، قضیه ارائه شده وابسته به پارامترهای طراحی $\varepsilon_A(i)$ و $\varepsilon_B(i)$ است. این پارامترها که از لم ۱ نتیجه شده‌اند، درجه قوام ساختار طراحی شده را مشخص می‌کنند. هر چند لم ۱ به ازای هر مقداری از این پارامترها برقرار است اما اندازه آن‌ها در محافظه‌کاری نتایج موثر است. از همین رو بهتر است این مقدار به صورت آگاهانه انتخاب گردند. به طور کلی دو دیدگاه برای انتخاب این پارامترها مطرح است. دیدگاه اول انتخاب آن‌ها بر اساس درجه قوامی از پیش توصیه شده است دیدگاه دوم بهینه سازی این پارامترهاست [۲۷]. با توجه به این که بهینه ساز این پارامتر ها منجر به روابط نامساوی دوخطی ماتریسی می گردد که با دشواری های بسیار در حل مواجه هستند در این مقاله از رویکرد اول بهره برده شده است.

توجه ۵- به دلیل وجود عدم‌قطعیت در سیستم (۱)، قضیه ارائه شده یک شرط کافی برای بررسی پایداری‌پذیری سیستم و طراحی کنترل‌کننده است. توسعه شروط مذکور به صورت شروط لازم و کافی برای سیستم‌های مارکوف تحت کنترل ناهماهنگ نیازمند بررسی و پژوهش های تکمیلی می باشد.

توجه ٦- کنترل‌کننده ناهماهنگ حالت عمومی‌تری از کنترل هماهنگ و مستقل از وضعیت است. در واقع به ازای r_t و σ_t یکسان، نتایج به دست آمده در این مقاله حالت هماهنگ مورد اشاره در قضیه ۱۴ در [۱۵] و حالت مستقل از وضعیت در قضیه ۳۸ از [۱۵] را دربر می گیرد.

٤- نتایج شبیه سازی

در این بخش به منظور نشان دادن کارائی روش ارائه شده، یک کنترل کننده ناهماهنگ برای سیستم خطی پرش مارکوفی که در [۱۵] مورد اشاره قرار گرفته، طراحی و شبیه‌سازی شده است. نتایج بدست آمده از این طراحی با کنترل‌کننده هماهنگ با سیستم و کنترل‌کننده مستقل از وضعیت سیستم، مورد مقایسه قرار گرفته‌است. در واقع در این شبیه‌سازی‌ها نشان داده شده است که ساختار کنترل ناهماهنگ نه تنها قابلیت لحاظ کردن اثرات عدم انطباق را دارد بلکه کارائی قابل قبولی

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.2.2.8]
[DOI: 10.29252/joc.12.2.41]

همانند یک ساختار هماهنگ داشته و علاوه بر این، محافظه‌کاری کمتری نسبت به ساختار مستقل از وضعیت نیز فراهم می‌سازد. لازم به ذکر است که برای بدست آوردن نتایج شبیه‌سازی در این بخش، از نرم افزار MATLAB 2016a و به منظور حل روابط نامساوی ماتریسی خطی از [۳۰] استفاده شده‌است.

مثال: یک سیستم پرش مارکوف با دو وضعیت، یعنی $N = 2$ درنظر گرفته شده‌است. هر وضعیت دارای عدم‌قطعیت‌های دینامیکی پارامتری از نوع متغیر با زمان و کران محدود است. این سیستم دارای بردار حالت دو بعدی به صورت $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]$ و بردار ورودی کنترلی به صورت $u(t) = [u_1(t), u_2(t)]$ است. وضعیتهای نامی سیستم کلیدزن مارکوفی به همراه ماتریس‌های عدم‌قطعیت آن‌ها مطابق با روابط (۳۱) و (۳۲) هستند.

وضعیت اول،

$$A(1) = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.5 \\ 0.1 & 1.0 \end{bmatrix},\ D_A(1) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$
$$E_A(1) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \end{bmatrix},\ B(1) = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}, \qquad (۳۱)$$
$$D_B(1) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix},\ E_B(1) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

وضعیت دوم،

$$A(2) = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.5 \\ 0.0 & -0.25 \end{bmatrix}, D_A(2) = \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$
$$E_A(2) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, B(2) = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}, \qquad (۳۲)$$
$$D_B(2) = \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0.1 \end{bmatrix}, E_B(2) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

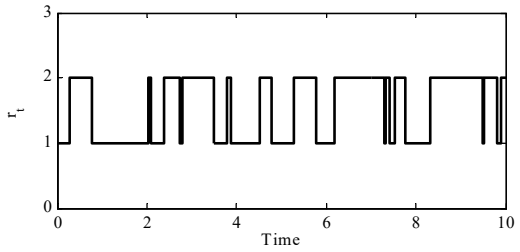
این سیستم دارای ماتریس‌گذاری به صورت (۳۳) است.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \qquad (۳۳)$$

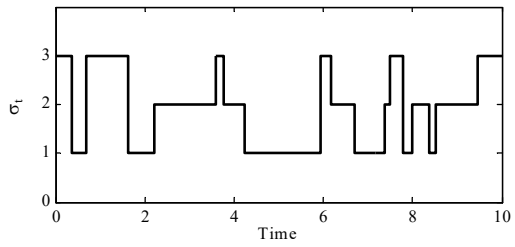
فرض برآن است که زنجیره مارکوف مشاهده‌شده، σ_t، سه وضعیتی یعنی دارای $M = 3$ است. ماتریس نرخ‌های گذار برای این زنجیره مطابق با (۳۴) فرض شده‌اند.

$$P^1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & -0.7 & 0.2 \\ 0.4 & 0.7 & -1.1 \end{bmatrix},$$
$$P^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1.5 & -2.5 & 1 \\ 1 & 0.2 & -1.2 \end{bmatrix} \qquad (۳۴)$$

یک تحقق از فرآیند مارکوف r_t در شکل ۲ و همچنین یک تحقق از زنجیره مارکوف σ_t در شکل ۳ نشان داده شده‌است.

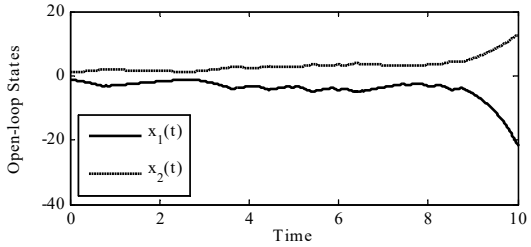


شکل۲: تغییرات بین دو وضعیت از زنجیره مارکوف سیستم (r_t)



شکل ۳: تغییرات بین دو وضعیت از زنجیره مارکوف کنترل‌کننده (σ_t)

شکل ۴ حالت‌های سیستم کنترل‌نشده را تحت کلیدزنی شکل ۲ نمایش می‌دهد. همان‌طور که از این شکل بر می‌آید سیستم کنترل نشده ناپایدار و طراحی کنترل‌کننده برای آن ضروری است.



شکل ۴: حالت های سیستم پرش مارکوف کنترل نشده

در ابتدا لازم است پایداری‌پذیر بودن سیستم بررسی گردد، بدین منظور بر اساس نامساوی‌های ماتریسی خطی (۱۳)-(۱۶) در قضیه به ازای انتخاب پارامترهای قوام [۲۷] $\varepsilon_A(1) = \varepsilon_B(1) = 0.5$ و $\varepsilon_A(2) = \varepsilon_B(2) = 0.1$، ماتریس های $X(m)$ و $Y(m)$ به صورت (۳۵) بدست می‌آیند که پایداری‌پذیر بودن سیستم را آشکار می‌سازد.

$$X(1) = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.01 \\ 0.01 & 0.21 \end{bmatrix}, X(2) = \begin{bmatrix} 0.18 & 0.09 \\ 0.09 & 0.19 \end{bmatrix},$$
$$X(3) = \begin{bmatrix} 0.19 & 0.09 \\ 0.09 & 0.19 \end{bmatrix} Y(1) = \begin{bmatrix} -0.3391 & 0.01 \\ 0.0147 & -0.34 \end{bmatrix}, \qquad (۳۵)$$
$$Y(2) = \begin{bmatrix} -0.31 & 0.01 \\ 0.01 & -0.32 \end{bmatrix}, Y(3) = \begin{bmatrix} -0.32 & 0.01 \\ 0.01 & -0.33 \end{bmatrix}$$

بدین‌ترتیب بهره‌های کنترل‌کننده ناهماهنگ به صورت (۳۶) بدست می‌آیند.

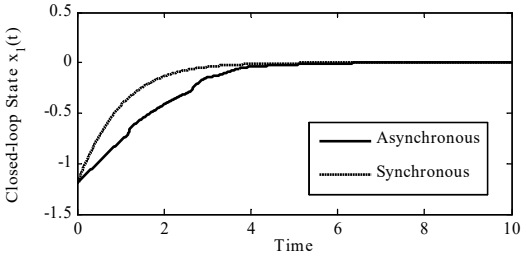
[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.2.2.8]
[DOI: 10.29252/joc.12.2.41]

$$K(1)=\begin{bmatrix}-1.6376 & 0.1522\\ 0.1545 & -1.6552\end{bmatrix},$$
$$K(2)=\begin{bmatrix}-1.3399 & 0.1743\\ 0.1418 & -0.9095\end{bmatrix}, \qquad (۳۶)$$
$$K(3)=\begin{bmatrix}-1.6981 & 0.1435\\ 0.1467 & -1.7233\end{bmatrix}$$

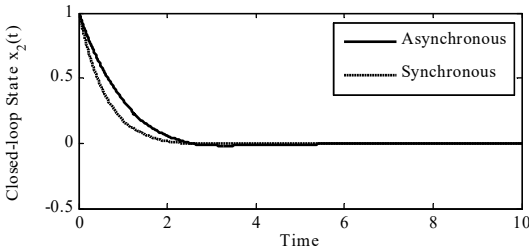
به منظور بررسی کارائی کنترل‌کننده ناهماهنگ، این ساختار با کنترل‌کننده هماهنگ با وضعیت‌های سیستم مورد مقایسه قرار گرفته‌است. در این حالت بهره‌های کنترل‌کننده هماهنگ بر اساس قضیه ۱۴ در [۱۵] مطابق با (۳۷) بدست می‌آیند.

$$K(1)=\begin{bmatrix}-2.2133 & 0.1779\\ 0.1944 & -2.2160\end{bmatrix},$$
$$K(2)=\begin{bmatrix}-0.9172 & -0.2744\\ -0.2795 & -0.7090\end{bmatrix} \qquad (۳۷)$$

با درنظر گرفتن $x_1(0) = -1.2, x_2(0) = 1, r_0 = 1, \sigma_0 = 3$ حالت $x_1(t)$ از سیستم کنترل‌شده تحت طراحی‌های هماهنگ و ناهماهنگ در شکل ۵ (الف) و حالت $x_2(t)$ از سیستم کنترل‌شده تحت این دو طراحی در شکل ۵ (ب) نشان داده شده‌اند.

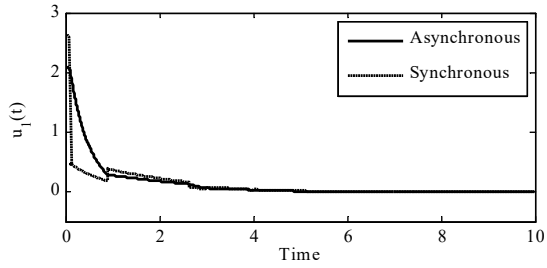


شکل ۵ (الف): حالت $x_1(t)$ از سیستم پرش مارکوف مورد شبیه‌سازی تحت کنترل هماهنگ و ناهماهنگ

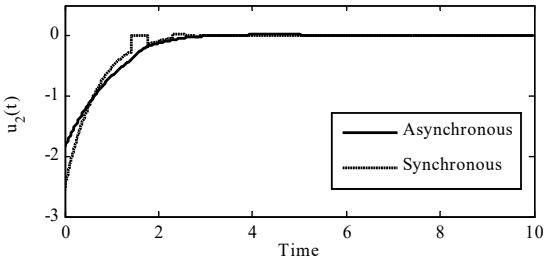


شکل ۵ (ب): حالت $x_2(t)$ از سیستم پرش مارکوف مورد شبیه‌سازی تحت کنترل هماهنگ و ناهماهنگ

این پاسخ‌ها به ازای تحقق‌های ۲ و ۳ بوده و سیگنال‌های کنترلی نظیر آن‌ها نیز در اشکال ۶ (الف) و ۶ (ب) نشان داده شده‌اند. نتایج بدست آمده حاکی از آن است که کنترل‌کننده ناهماهنگ حالت‌های سیستم‌ها را به مبدا هدایت کرده و ورودی‌های کنترلی مناسبی را فراهم نموده‌است.



شکل ۶ (الف): سیگنال $u_1(t)$ ناشی از کنترل کننده هماهنگ و ناهماهنگ مورد طراحی



شکل ۶ (ب): سیگنال $u_2(t)$ ناشی از کنترل کننده هماهنگ و ناهماهنگ مورد طراحی

در مقایسه بین کنترل‌کننده هماهنگ و ناهماهنگ باید گفت که کنترل‌کننده ناهماهنگ رفتاری نزدیک به کنترل‌کننده کاملا هماهنگ با سیستم دارد. این تشابه هم از نظر سرعت همگرایی پاسخ ها به مبدا و هم از جنبه هموارى سیگنال کنترلی در اشکال مشهود است. درواقع کنترل‌کننده ناهماهنگ می‌تواند با اثرات عدم‌انطباق بین زنجیره مارکوف سیستم و کنترل‌کننده برخورد کند و با این وجود کارائی بسیار مناسبی در مقایسه با کنترل‌کننده کاملا هماهنگ را فراهم سازد. بدیهی است هرچه خطای مشاهده و تخمین زنجیره مارکوف سیستم بیش‌تر باشد تفاوت بین ساختار ناهماهنگ و هماهنگ بیش‌تر خواهد شد. در چنین حالت هایی بهره‌گیری از ساختارهای ناهماهنگ کاملا ضروری خواهدبود.

به منظور مقایسه عملکرد ساختار ناهماهنگ و مستقل از وضعیت برای این سیستم، کنترل‌کننده مستقل از وضعیت طبق قضیه ۳۸ از [۱۵] به شرح (۳۸) طراحی شده‌است.

$$K=\begin{bmatrix}-2.9551 & 0.4308\\ 0.4437 & -3.200\end{bmatrix} \qquad (۳۸)$$

میزان محافظه کاری دو ساختار با دو معیار زمان نشست، T_s، برای پاسخ حالت‌ها و تغییرات کلی برای سیگنال کنترلی، TV، مورد مقایسه قرار گرفته‌است. نتایج حاصل از سیستم کنترل‌شده تحت این دو ساختار در جدول ۱ نمایش داده شده‌اند.

$$\|x(t)\|_2 \le 1.5\%\|x(0)\|_2,\ \ t > T_s \qquad (۳۹)$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.2.2.8]
[DOI: 10.29252/joc.12.2.41]

$$TV = \sum_{t=0}^{\infty} \left\| u(t+\Delta) - u(t) \right\| \qquad (۴۰)$$

شایان ذکر است که به منظور افزایش اطمینان، میانگینی از نتایج برای ۱۵۰ تحقق مستقل از سیستم گزارش شده‌است.

جدول ۱: مقایسه کنترل کننده‌های ناهماهنگ و مستقل از وضعیت برای سیستم مثال

نوع کنترل کننده	تغییرات کلی سیگنال کنترلی	زمان نشست میانگین
ناهماهنگ	۰/۰۰۱۹	۵/۱۹۲
مستقل از وضعیت	۱/۲۳۱۴	۹/۵۲۲

همان‌طور که از جدول ۱ برمی‌آید، کنترل‌کننده ناهماهنگ در مقایسه با کنترل‌کننده مستقل از وضعیت از محافظه‌کاری کمتری برخوردار است. اما باید توجه داشت که این کاهش محافظه‌کاری به بهای طراحی و پیاده‌سازی تعداد بیشتری از بهره‌های کنترلی است. لذا در این ساختارهامحافظه‌کاری و هزینه، از نقطه نظر طراح، در دو سوی یک طیف قرار دارند.

۵- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئله طراحی کنترل‌کننده ناهماهنگ برای سیستم پرش مارکوف خطی مورد بررسی قرار گرفته‌است. پدیده ناهماهنگی مورد اشاره، ناشی از عدم‌انطباق‌هایی بین زنجیره مارکوف سیستم و زنجیره مارکوف کنترل‌کننده است و در صورتی که به درستی با آن برخورد نشود منجر به افت کارائی و یا گاهی ناپایداری سیستم می‌گردد. بدین‌منظور در این مقاله یک کنترل‌کننده ناهماهنگ برای سیستم طراحی شده‌است. اصول این طراحی بر تئوری لیاپانوف چندگانه استوار بوده و با دید جدیدی از سیستم به صورت یک ساختار مارکوفی ناهمگن صورت پذیرفته‌است. حاصل این امر شروطی به صورت نامساوی‌های ماتریسی خطی، به منظور بررسی پایداری‌پذیری و طراحی بهره‌های کنترلی است. ساختار کنترلی ناهماهنگ ارائه شده به دلیل عدم وابستگی مستقیم به وضعیتهای سیستم ساختاری عملی‌تر و واقع‌گرایانه‌تر از کنترل‌کننده هماهنگ است و بر خلاف آن تنها به وضعیتهای مشاهده‌شده از سیستم وابستگی دارد. مقایسه نتایج شبیه‌سازی این کنترل‌کننده با کنترل‌کننده هماهنگ نشان می‌دهد که کارائی کنترل‌کننده مذکور، علی‌رغم استقلال از وضعیتهای سیستم، هم‌چنان قابل توجه و مناسب است و به همین سبب از دیدگاه عملی بر کنترل‌کننده هماهنگ ارجحیت دارد. همچنین این کنترل‌کننده بر ساختار مستقل از وضعیت نیز ارجحیت دارد و محافظه‌کاری کمتری در پاسخ به نتایج را فراهم می‌سازد. بدیهی است بهای این کاهش محافظه‌کاری، تعداد بهره‌های بیشتر کنترلی است که باید طراحی و پیاده‌سازی شوند. لازم به ذکر است که، روش پیشنهادی می‌تواند در طراحی انواع دیگر کنترل‌کننده‌ها با قابلیت‌های مختلف، از جمله کنترل‌کننده‌های بهینه، مقاوم و یا چندمنظوره نیز مورد استفاده قرار بگیرد. مستقل کردن این ساختارها از زنجیره سیستم و طراحی آن‌ها به صورتی که تنها به زنجیره مشاهده شده وابسته باشند گامی مهم در نزدیک‌تر کردن این ساختارها از حالت نظری به حالت‌های عملی و کاربردی است.

مراجع

[1] P. Shi, F. Li, "A survey on Markovian jump systems: Modeling and design", Int J Control Autom, 13(1), 1-16, 2015.

[2] C.C. Lutz and D.J. Stilwell, "Stability and disturbance attenuation for markov jump linear systems with time-varying transition probabilities", IEEE Trans. on Automatic Control, 61(5), 1413-1418, 2016.

[3] L. Zhang, Y. Leng, P. Colaneri, "Stability and stabilization of discrete-time semi-Markov jump linear systems via semi-Markov kernel approach", IEEE Trans. on Automatic Control, 61(2), 503-508, 2016.

[4] M. Faraji-Niri, M. R. Jahed-Motlagh and M. Barkhordari-Yazdi, "Stochastic stabilization of uncertain Markov jump linear systems with time varying transition rates", 22nd Iranian Conference on Electrical Engineering, pp. 1186-1191, Tehran, Iran, 20-22 May 2014.

[5] M. Faraji-Niri, M.R. Jahed-Motlagh, M. Barkhordari-Yazdi, "Stochastic stability and stabilization of a class of piecewise-homogeneous Markov jump linear systems with mixed uncertainties", Int J. Robust Nonlin, DOI: 10.1002/rnc.3602, 2016.

[6] M. Faraji-Niri, M.R. Jahed-Motlagh, "Stochastic Stability and Stabilization of Markov jump linear system with instantly time-varying transition probabilities", ISA Trans. 65, 51-61, 2016.

[۷] نسیبه ظهرابی، حمید رضا مومنی، امیرحسین ابوالمعصومی، "کنترل مود لغزشی سیستم های پرش مارکوف همراه با تأخیر متغیر با زمان با ماتریس نرخ احتمال انتقال نیمه معلوم"، مجله کنترل، جلد ۶ شماره ۳، صفحات ۷۰-۶۱، ۱۳۹۱.

[8] L.E.O. Svensson, N. Williams, "Optimal monetary policy under uncertainty: A Markov jump linear quadratic approach", Federal Reserve Bank of St. Louis Review, 90, 275-293, 2008.

[9] M. Rasheduzzaman, M.O. Rolla, T. Paul, and J.W. Kimball, "Markov jump linear system analysis of microgrid stability", American Control Conference, pp. 5062 – 5066, Portland, USA, 4-6 June 2014.

[10] F.R. Pour Safaei, K. Roh, S.R. Proulx, and J.P. Hespanha, "Quadratic control of stochastic hybrid systems with renewal transitions", Automatica, 50(11), 2822–2834, 2014.

[11] B.C. Wanga, J.F. Zhang, "Distributed output feedback control of Markov jump multi-agent systems", Automatica, 49(5), 1397–1402, 2013.

[12] M. Faraji-Niri, M.R. Jahed-Motlagh, and M. Barkhordari-Yazdi, "Stabilization of active fault-tolerant control systems by uncertain

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.2.2.8]
[DOI: 10.29252/joc.12.2.41]

[22] R. Zhang, Y. Zhang, Y. Zhao, J. Liao, B. Li, "Extended H_∞ estimation for two-dimensional Markov jump systems under asynchronous switching", Math. Probl. Eng. DOI: 10.1155/2013/734271, 2012.

[23] J. Wen, L. Peng, S.K. Nguang, "Asynchronous H_∞ control of constrained Markovian jump linear systems with average dwell time", Int. J. Sensor Wireless Comm. Contr. 3, 45-58, 2013.

[24] Y. Zhang, R. Zhang, A.G. Wu, "Asynchronous $l2$-$l\infty$ filtering for Markov jump systems", Australian Control Conference, 99-103, Perth, Australia, 2013.

[25] R. Zhang, Y. Zhang, C. Hu, M.Q.H. Meng, Q. He, "Asynchronous H_∞ filtering for a class of two-dimensional Markov jump systems", IET Control Theory Appl. 6, 979-984, 2012.

[26] L. Zhang, "H_∞ estimation for discrete-time piecewise homogeneous Markov jump linear system", Automatica 49, 2570-2576, 2009.

[27] L. Xie, "Output-feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty", Int. J. Control 63, 741-750, 1996 .

[28] M. Xie, and CD. Lai, "Reliability analysis using an additive Weibull model with bathtub-shaped failure rate function", Reliab. Eng. Syst. Safe. 52(1), 87–93, 1996.

[29] V. Venkatasubramanian, R. Rengaswamy, S.N. Kavuri, and K. Yin, "A review of process fault detection and diagnosis. Part III. Process history based methods", Comput. Chem. Eng. 27(3), 327–346, 2003.

[30] J. Löfberg, "YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB", IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, Taipei, 284-289, 2004.

nonhomogeneous Markovian jump models", Complexity, 21, 318–329, 2016.

[13] L. Qiu, S. Li, B. Xu, and G. Xu, "H_∞ control of networked control systems based on Markov jump unified model", Int J Robust Nonlinear Control, 25(15), 2770–2786, 2015.

[14] O.L.V. Costa, M.G. Todorov, M.D. Fragoso, "Continuous-Time Markov Jump Linear Systems", Springer-Verlag, Heidelberg, 2013.

[15] E.K. Boukas, "Stochastic Switching Systems: Analysis and Design", Birkhäuser, Basel, 2005.

[16] N.K. Kwon, B.Y. Park, and P. Park, "Less conservative stabilization conditions for Markovian jump systems with incomplete knowledge of transition probabilities and input saturation", Optimal Control Applications and Methods., 37(6), 1207–1216, 2016.

[17] L. Zhang, "H_∞ control of a class of piecewise homogeneous Markov jump linear systems", 7th Asian Control Conference, Hong Kong, China, 197-202, 27-29 Aug 2009.

[۱۸] بهزاد کفاش، زهرا نیکویی نژاد، علی دلاورخلفی، "یک الگوریتم تکراری برای حل مسایل کنترل بهینه تصادفی با استفاده از زنجیر مارکوف"، مجله کنترل، جلد ۱۰، شماره ۲، صفحات ۴۳-۳۵، ۱۳۹۵.

[19] R.C.L.F. Oliveira, A.N. Vargas, J.B.R. do Val, P.L.D. Peres, "Mode-independent H_2 control of a DC motor modeled as a Markov jump linear system", IEEE Trans. Contr. Syst. Technol. 22 (5), 1915-1919, 2014 .

[20] Z.G. Wu, P. Shi, H. Su, J. Chu, "Asynchronous l_2–l_∞ filtering for discrete-time stochastic Markov jump systems with randomly occurred sensor nonlinearities", Automatica 50, 180-186, 2014.

[21] Z. Shu, J. Xiong, J. Lam, "Asynchronous output-feedback stabilization of discrete-time Markovian jump linear systems", 51st IEEE Conference on Decision and Control, 1307-1312, Maiu, HI, 2012.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1397.12.2.2.8]
[DOI: 10.29252/joc.12.2.41]