مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۴، شماره ۱، بهار ۱۳۹۹، صفحه ۹۱-۷۳

طراحی گشتاورهای غیرخطی زمان-محدود مقاوم برای ربات n-درجه آزادی درحضور نامعینی‌ها و غیرخطی‌سازهای ورودی شعاعی و ناحیه مرده

علی ابوئی[۱]، حمیدرضا احمدزاده[۲]، محمد حائری[۳] و محمد مهدی عارفی[۴]

[۱] استادیار، دانشکده مهندسی برق، بخش الکترونیک و کنترل، دانشگاه یزد، Aliabooee@yazd.ac.ir
[۲] دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی برق، بخش الکترونیک و کنترل، دانشگاه یزد، Ahmadzadehhamid@yahoo.com
[۳] استاد، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شریف، Haeri@sina.sharif.edu
[۴] دانشیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، بخش مهندسی قدرت و کنترل، دانشگاه شیراز، Arefi@shirazu.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۶/۰۶/۱۳ ویرایش: ۱۳۹۷/۰۵/۱۴ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۰/۱۷

چکیده: در این مقاله، ابتدا مدل دینامیکی جامعی برای ربات بازویی n-درجه آزادی دارای نامعینی ارائه می‌شود که شامل توصیف عملکرد غیرخطی‌سازهای ورودی از نوع شعاعی و ناحیه مرده است. سپس، مسئله‌ی ردیابی زمان-محدود مقاوم مسیرهای دلخواه به صورت روابط ریاضی فرمول‌بندی و بیان می‌شود. در ادامه با تعمیم روش کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین و تعریف خمینه‌های لغزشی غیرخطی جدید، چندین نوع گشتاورهای ورودی طراحی می‌شوند تا با وجود نامعینی‌ها و غیرخطی سازهای ورودی (شعاعی و ناحیه مرده)، متغیرهای پیکربندی مفاصل ربات را در مدت زمان محدودی و بدون هیچ نوع خطاهای حالت ماندگاری به مسیرهای دلخواه برسانند. برای هر دسته از گشتاورهای پیشنهادی، پایداری زمان-محدود سرتاسری سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات n-درجه آزادی با استفاده از تعدادی لم‌های کاربردی و نامساوی‌های متداول به اثبات می‌رسد و هم‌چنین روابطی برای تخمین زمان‌های محدود همگرایی استخراج می‌شوند. این روابط، ارتباط زمان‌های محدود همگرایی را با شرایط اولیه ربات و پارامترهای اختیاری موجود درگشتاورهای ورودی نشان می‌دهند. در انتها، با استفاده از محیط شبیه‌سازی نرم‌افزار MATLAB، گشتاورهای طراحی شده به مدل ربات صنعتی چهار-درجه آزادی SCARA با وجود غیرخطی‌سازهای ورودی اعمال می‌شوند که نتایج شبیه‌سازی‌ها، عملکرد مناسب و قابل قبول ورودی‌های کنترلی پیشنهادی را نشان می‌دهند.

کلمات کلیدی: ربات بازویی n-درجه آزادی، غیرخطی‌سازهای شعاعی و ناحیه مرده، ردیابی زمان-محدود مقاوم، کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین، ربات صنعتی SCARA.

Designing Robust Finite-Time Nonlinear Torques for a n-DOF Robot Manipulator with Uncertainties, Sector and Dead-Zone Nonlinearities

Ali Abooee, Hamidreza Ahmadzadeh, Mohammad Haeri, Mohammad Mehdi Arefi

Abstract: In this paper, a complete dynamical model is presented for an uncertain n-DOF robot manipulator containing description of sector and dead-zone nonlinearities. Next, robust finite-time tracking problem of desired trajectories is declared and formulated for the aforementioned robot manipulator. By defining innovative nonlinear sliding manifolds and developing the nonsingular terminal sliding mode control, several types of input torques are designed to exactly reach configuration variables of robot′s joints to desired paths within the finite times in the presence of uncertainties, sector and dead-zone nonlinearities. By utilizing some applicable lemmas and well-known inequalities, for each class of the proposed input torques, the global finite-time stability of the closed-loop robot system is proven analytically. Also, several new formulas are extracted for determining the convergence finite times of the closed-loop system. These formulas demonstrate that mentioned times are dependent on robot′s initial conditions and optional parameters of the suggested torques. Finally, by using MATLAB software, all classes of the designed torques are numerically simulated onto the SCARA industrial robot manipulator and obtained results show the acceptable performance of the suggested control scheme.

Keywords: n-DOF Robot manipulator, Sector and dead-zone nonlinearities; Robust finite-time tracking; Nonsingular terminal sliding mode control (NTSMC), SCARA industrial robot.

[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.5.3]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.73]

۱- مقدمه

در چند دهه‌ی اخیر، ربات‌های ایستا (دارای تکیه‌گاه ثابت یا پایه‌ی غیرمتحرک متصل به زمین) که از چندین لینک[۱] با مفاصل چرخشی[۲] یا انتقالی[۳] تشکیل شده‌اند، در بسیاری از کاربردهای صنعتی جایگزین نیروی انسانی شده‌اند و نتیجتاً امروزه نقش مهم و غیرقابل انکاری در مکانیزه کردن و اتوماسیون صنایع مختلف دارند [۵-۱]. اغلب به آخرین مفصل این نوع ربات‌ها که با عنوان ربات‌های بازویی[۴] شناخته می‌شوند، یک وسیله یا چنگک مخصوص به نام مجری نهایی[۵] نصب می‌شود. با توجه به نوع مجری نهایی می‌توان از این ربات‌ها در کاربردهای گوناگونی هم چون رنگ‌آمیزی اشیا، جابجایی قطعات و اجسام سنگین، جوشکاری، برش قطعات فلزی، تراشکاری و ... استفاده کرد. بنابراین با استناد به هدف درنظر گرفته شده برای این نوع ربات‌ها، مجری نهایی باید یک مسیر خاصی را در فضای سه‌بعدی اطراف خود طی کند. با در اختیار داشتن سینماتیک[۶] ربات و استفاده از روابط سینماتیکی معکوس، می‌توان مسیر مورد نظر مجری نهایی را به مسیرهای لازمه برای متغیرهای پیکربندی مفاصل[۷] (جابجایی‌های زاویه‌ای[۸] برای مفاصل چرخشی و جابجایی‌های خطی برای مفاصل انتقالی) تبدیل کرد. بنابراین برای آن‌که مجری نهایی در چنین ربات‌هایی بتواند وظیفه خاص خود را انجام دهد، موتورهای الکتریکی (هیدرولیکی و یا پنوماتیکی) موجود در مفصل‌ها باید گشتاورهای مناسبی را برای هدایت هر مفصل به مسیر مورد نظر فراهم سازند [۱۰-۶].

با توجه به انگیزش مطرح شده، مسئله طراحی گشتاورهای ربات با هدف رساندن متغیرهای پیکربندی مفصل‌ها به مسیرهای از پیش طراحی شده، تبدیل به موضوعی چالش برانگیز و جذاب در میان جامعه‌ی مهندسین کنترل شده است. بنابراین در راستای حل این مسئله، پژوهش‌ها و مطالعات گسترده‌ای [۴۷-۱] به چاپ رسیده‌اند که هر کدام راه‌کارهای کنترلی خاصی را به کار برده‌اند. شاخص‌ترین این روش‌های کنترلی عبارتند از: روش دینامیک معکوس[۱] ، کنترل‌کننده‌های خطی PD و PID [۲۷-۲۴]، کنترل مد لغزشی[۹] [۱۵، ۸، ۷، ۳، ۲]، کنترل تطبیقی (وفقی) [۴۶، ۳۸، ۳۶، ۲۴، ۲۲، ۲۰، ۱۴]، روش کنترلی خطی‌سازی فیدبک[۱۰] [۴۱]، کنترل پیش‌بین[۱۱] [۲۸، ۲۱، ۱۳]، روش گام به عقب (پسگام)[۱۲] [۳۱]، کنترل فازی [۳۳،۴۲]و کنترل‌کننده‌های طراحی شده بر اساس شبکه‌های عصبی مصنوعی [۳۰،۳۴]. شایان ذکر است برخی مراجع از تلفیق چندین روش کنترلی به منظور حل مسئله ردیابی برای بازوهای رباتی ایستا استفاده کرده‌اند. برخی از این روش‌های ترکیبی کنترلی عبارتند از: کنترل مد لغزشی-فازی غیرخطی[۳۲،۳۵]، کنترل مد لغزشی-تطبیقی غیرخطی[۱۷، ۱۶، ۱۲، ۴]، کنترل مد لغزشی-بهینه، تلفیق کنترل تطبیقی با روش‌های فازی و شبکه‌های عصبی مصنوعی [۴۰، ۳۱، ۲۹، ۱۱]، روش کنترلی پسگام-تطبیقی [۳۹، ۳۷، ۱۸].

تمرکز بر روی مراجع فوق‌الذکر [۴۷-۱] نشان می‌دهد که اغلب این پژوهش‌ها، دارای چندین کاستی و نقص مشترک هستند که در ادامه چهار مورد از مهم‌ترین آن‌ها به صورت فهرست‌وار آورده می‌شوند و هر مورد در یک پارگراف جداگانه به صورت مبسوط مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

(الف) درنظرگرفتن مدل خطی‌سازی شده به جای مدل غیرخطی: برخی از مراجع [۲۴-۲۷] از مدل خطی‌سازی شده ربات حول نقطه کار استفاده کرده و کنترل‌کننده‌های خطی را برای رسیدن به هدف ردیابی مسیر پیشنهاد داده‌اند. با توجه به طراحی کنترل‌کننده بر اساس مدل خطی‌سازی شده، فقط پایداری مجانبی محلی[۱۳] برای سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات تضمین می‌شود. با توجه به تغییر مداوم نقطه کار ربات‌ها، این روش‌های کنترلی کارایی چندانی نخواهند داشت.

(ب) عدم توجه با نامعینی‌های[۱۴] مدل ربات: مدل اغلب ربات‌های صنعتی دارای نامعینی‌هایی است که می‌توانند ناشی از مواردی هم‌چون عدم‌قطعیت در محاسبه‌ی پارامترهای فیزیکی، وجود برخی ترم‌های دینامیکی لحاظ نشده، درنظر نگرفتن گشتاورهای اصطکاکی مفاصل و اغتشاش‌های خارجی باشند. برخی مراجع[۴۶، ۳۸، ۳۶، ۲۸، ۲۴، ۲۲، ۱۴] در حین فرآیند طراحی کنترل‌کننده‌ها، به نامعینی‌های مدل توجه نکرده‌اند که باعث بروز مشکلاتی در حین پیاده‌سازی عملی شده و در نتیجه عملکرد و بازده مورد نظر حاصل نمی‌شود یا حتی در مواردی ناپایداری سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات رخ می‌دهد. بنابراین باید نامعینی‌های مدل را در هنگام فرآیند طراحی مورد توجه جدی قرار داد و از روش‌های کنترلی مقاوم استفاده کرد.

(پ) عدم توجه به محدودیت‌های غیرخطی عملگرهای[۱۵] فیزیکی مفاصل ربات: هر ربات ایستا از تعدادی عملگر تشکیل شده است که ورودی‌های کنترلی از طریق آن‌ها به مفاصل اعمال می‌شوند. بنابراین محدودیت‌های غیرخطی عملگرها ممکن است باعث شوند که به جای گشتاورهای ورودی طراحی شده، توابعی غیرخطی از این گشتاورهای کنترلی به مفاصل ربات اعمال شوند. به عبارت دیگر این امکان وجود دارد که عملگرها نقش توابع غیرخطی‌ساز را در مسیر اعمال ورودی‌های کنترلی به ربات بازی کنند [۴۹-۴۱، ۲۶، ۲۵، ۲۰، ۸، ۷]. رفتار غیرخطی‌گری عملگرها می‌تواند از نوع استاتیکی یا دینامیکی باشد و بر همین اساس، عملگرها به دو دسته‌ی کلی غیرخطی‌سازهای استاتیکی و دینامیکی تقسیم‌بندی می‌شوند. غیرخطی‌سازهای استاتیکی همان عملگرهایی هستند که توابعی غیرخطی چندحالته از ورودی‌های کنترلی را به سیستم اعمال می‌کنند و هیچ مرتبه‌ی دینامیکی ندارند. غیرخطی‌سازهایی همچون اشباع[۱۶] [۴۱،۴۲، ۲۶، ۲۵، ۲۰، ۸] ، ناحیه مرده[۱۷] [۴۸، ۴۵، ۴۳، ۳۹، ۷]و شعاعی (قطاعی)[۱۸] [۴۹، ۴۸، ۴۵] در این دسته جای می‌گیرند.

---

[1] Link
[2] Revolute joints
[3] Prismatic joints
[4] Robot manipulators
[5] End effector (Gripper)
[6] Kinematic
[7] Configuration variables
[8] Angular displacements
[9] Sliding mode control
[10] Feedback linearization
[11] Model predictive control
[12] Backstepping control
[13] Local asymptotic stability
[14] Uncertainties
[15] Actuators
[16] Saturation
[17] Dead-zone
[18] Sector nonlinearities

غیرخطی‌سازهای دینامیکی عملگرهایی هستند که ارتباط میان ورودی و خروجی آن‌ها از طریق معادلات دیفرانسیلی غیرخطی چندوضعیتی توصیف می‌شود و این عملگرها مرتبه دینامیکی سیستم حلقه‌بسته‌ی تحت کنترل را افزایش می‌دهند. غیرخطی‌سازهایی همچون لقی[1] [۴۷، ۴۶، ۴۴] و هیسترزیس از این نوع هستند. برخی از مراجع در حین طراحی گشتاورهای کنترلی برای ربات‌ها به وجود غیرخطی‌سازها توجه نمی‌کنند که این موضوع باعث مشکلات عدیده‌ای از جمله کاهش سرعت پاسخ گذرای سیستم حلقه‌بسته، کاهش شدید دقت حرکت مجری نهایی ربات، عملکرد و کارایی نامطلوب سیستم حلقه‌بسته، رفتار دینامیکی غیرقابل انتظار از ربات تحت کنترل و حتی در مواردی ناپایداری سیستم حلقه‌بسته رخ خواهد داد[۴۹، ۴۸]. بنابراین باید در حین طراحی کنترل‌کننده‌های ربات این موضوع لحاظ شده و اثبات پایداری‌های سیستم حلقه‌بسته با وجود رفتار غیرخطی گری عملگرها انجام شود.

(ت) عدم توجه به پایدارسازی زمان–محدود سرتاسری[2] سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات: اغلب روش‌های کنترلی غیرخطی ارائه شده در بحث ردیابی مسیر ربات‌ها [۱، ۷–۴، ۱۴–۹، ۱۶, ۱۸، ۴۷–۲۰]، فقط پایداری مجانبی سیستم حلقه‌بسته را تضمین می‌کنند و بنابراین بعد از گذشت زمان نامحدود، خطاهای ردیابی به صفر همگرا می‌شوند. در بسیاری از کاربردهای عملی برای ربات‌ها لازم است که متغیرهای پیکربندی در مدت زمان محدودی دقیقاً به مسیرهای دلخواه برسند و بنابراین روش کنترلی مورد استفاده باید پایداری زمان–محدود سیستم حلقه‌بسته را تضمین کند [۲، ۳، ۸، ۱۵، ۱۷، ۱۹] . تاکنون سه روش و راه‌کار کلی برای پایدارسازی زمان–محدود سیستم‌های دینامیکی غیرخطی ارائه شده است [۲، ۳، ۸، ۱۵، ۱۷، ۱۹، ۶۱–۵۰] که عبارتند از: روش شبه–لیاپانوف مستقیم[3] [۵۰، ۵۲]، روش هموژنی[4] [۵۶، ۶۱]و روش کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین[5] [۲، ۳، ۸، ۱۵، ۱۷، ۱۹، ۵۱، ۵۵–۵۳، ۵۹–۵۷]. در راه‌کار اول که براساس قضیه‌ای مشابه با قضیه لیاپانوف پایه‌گذاری شده است، یافتن کاندیدای لیاپانوف مناسب که بتواند نامساوی موجود در قضیه را برآورده سازد، کاری سخت و زمان‌بر بوده و هم‌چنین الگوریتم سیستماتیکی در این روش برای طراحی وجود ندارد [۵۰، ۵۲]. روش پایدارسازی زمان–محدود هموژنی فقط قابلیت اعمال به سیستم‌های غیرخطی با درجه هموژنی منفی را دارد. با بهره‌گیری از این روش، فقط وجود زمان محدود برای همگرا شدن دقیق متغیرهای سیستم تحت مطالعه به نقطه تعادل تضمین شده و هیچ رابطه خاصی برای محاسبه و تخمین این زمان محدود ارائه نمی‌شود [۵۶، ۶۱]. رهیافت کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین بر اساس همان اصول کنترل مد لغزشی معمولی بنیان‌گذاری شده و روشی دو مرحله‌ای است که این مراحل در بخش چهارم مقاله توضیح داده خواهند شد. روش سوم برای پایدارسازی زمان–محدود سیستم‌های غیرخطی، خمینه‌های لغزشی غیرخطی[6] را جایگزین سطوح لغزشی خطی کرده است. این روش دارای ویژگی‌ها و برتری‌های شاخصی است که برخی از آنها عبارتند از: ۱) مقاوم بودن در برابر انواع نامعینی‌ها و اغتشاش خارجی، ۲) پاسخ گذرای سریع و مناسب، ۳) ارائه‌ی رابطه مشخص برای محاسبه و تخمین زمان محدود همگرایی سیستم حلقه‌بسته، ۴) قابلیت تلفیق ساده با روش‌های کنترلی دیگر به منظور برآورده ساختن خواسته‌های کنترلی بیشتر، ۵) تحقق فیزیکی ساده و پیاده‌سازی عملی ارزان [۲، ۳، ۸، ۱۵، ۱۷، ۱۹، ۵۱، ۵۵–۵۳، ۵۹–۵۷].

با توجه به مباحث انگیزشی مطرح شده، در این مقاله مسئله ردیابی زمان–محدود مقاوم[7] برای ربات n–درجه آزادی مورد مطالعه و بحث قرار می‌گیرد. مدل ربات مورد مطالعه تحت تاثیر سه عامل ۱) نامعینی‌ها و اغتشاش، ۲)گشتاورهای اصطکاکی و ۳) غیرخطی‌سازهای ورودی[8]از نوع شعاعی و ناحیه مرده می‌باشد. در این مقاله با تعمیم روش کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین و تعریف خمینه‌های لغزشی غیرخطی جدید، چهار دسته‌ی مجزا از گشتاورهای ورودی کنترلی برای ربات n–درجه آزادی طراحی می‌شوند. هر دسته از این گشتاورهای پیشنهادی می‌توانند در مدت زمان محدود قابل تنظیم، متغیرهای پیکربندی ربات را به مسیرهای دلخواه از پیش طراحی شده برسانند. این مقاله در مقایسه با مقالات مرتبط دیگر، دارای چندین نوآوری شاخص و برجسته می‌باشد که در زیر به صورت فهرست‌وار به آنها اشاره می‌شود.

۱) تضمین پایداری زمان–محدود مقاوم سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات در حضور نامعینی‌ها، گشتاورهای اصطکاکی و غیرخطی‌سازهای ورودی شعاعی و ناحیه مرده.

۲) قابلیت تعمیم هر چهار دسته گشتاورهای پیشنهادی به کلاس وسیع و گسترده‌ای از ربات‌های بازویی ایستا.

۳) استخراج روابط جدیدی برای تعیین و تخمین زمان‌های محدود همگرایی سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات

۴) قابلیت کاهش زمان‌های محدود همگرایی و بهبود کیفیت پاسخ‌های گذرای متغیرهای پیکربندی ربات به وسیله‌ی تنظیم مناسب پارامترهای آزاد موجود در گشتاورهای کنترلی پیشنهادی. در این مقاله روابط صریحی استخراج می‌شوند که نحوه‌ی وابستگی میان زمان‌های محدود همگرایی را با پارامترهای آزاد موجود در ورودی‌های کنترلی بیان می‌کنند.

بخش‌های بعدی مقاله به شرح زیر ساماندهی و نوشته شده‌اند. در بخش دوم، مفاهیم ریاضی مرتبط با پایداری زمان–محدود مرور می‌شوند. بخش سوم به معرفی مدل ربات n–درجه آزادی و توصیف غیرخطی‌سازهای شعاعی و ناحیه مرده اختصاص می‌یابد. مسئله‌ی ردیابی زمان–محدود مقاوم در همین بخش فرمول‌بندی می‌شود. در بخش چهارم، طراحی چهار دسته‌ی مجزا از گشتاورهای غیرخطی ورودی ربات انجام می‌پذیرد. نتایج شبیه‌سازی‌های مقاله بر روی ربات صنعتی SCARA در بخش پنجم آورده می‌شوند. بخش ششم به جمع‌بندی، نتیجه‌گیری کلی و بیان کارهای آینده اختصاص داده می‌شود.

علائم ریاضی. بردار $x \in \Re^n$ و ماتریس مربعی $A \in \Re^{n\times n}$ را درنظر

[1] Backlash
[2] Global finite-time stability
[3] Direct Lyapunov-like
[4] Homogenous control method
[5] Nonsingular terminal sliding mode control
[6] Nonlinear sliding manifolds
[7] Robust finite-time tracking problem
[8] Input nonlinearities

[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.5.3]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.73]

بگیرید. نمادهای $\|\boldsymbol{x}\|$ و $\|\boldsymbol{A}\|$ به ترتیب توصیف‌کننده‌ی نرم‌های اقلیدسی[1] بردار $\boldsymbol{x}$ و ماتریس $\boldsymbol{A}$ هستند و با رابطه‌های $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}$ و $\|\boldsymbol{A}\| = \sqrt{\lambda_{max}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})}$ محاسبه می‌شوند که $\lambda_{max}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$ بیانگر بزرگترین مقدار ویژه ماتریس $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ است. برای عدد حقیقی $x \in \mathfrak{R}$، دو نماد $|x|$ و $\text{sign}(x)$ به مفهوم تابع قدرمطلق و تابع علامت می‌باشند. شایان ذکر است که در سرتاسر این مقاله منظور دقیق از اصطلاحات پایداری زمان-محدود و ردیابی زمان-محدود همان پایداری زمان-محدود سرتاسری و ردیابی زمان-محدود سرتاسری است.

۲- تعریف و لم‌های کاربردی پایداری زمان-محدود سیستم‌های غیرخطی

در این بخش، پس از تعریف پایداری زمان-محدود، چندین لم کاربردی مرتبط با پایدارسازی سیستم‌های غیرخطی ارائه می‌شوند. این لم‌ها در اثبات قضیه‌های اصلی مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

تعریف ۱. سیستم غیرخطی مرتبه n رابطه (۱) را درنظر بگیرید که دارای نقطه تعادل $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ بوده و برای بردار شرط اولیه دلخواه $\boldsymbol{x_0}$، دارای بردار پاسخ یکتای $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x_0})$ است.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \text{ with } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Gamma} \subseteq \mathfrak{R}^n \text{ and } \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x_0} \qquad (۱)$$

در این رابطه، $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{\Gamma} \to \mathfrak{R}^n$ تابع برداری پیوسته و $\boldsymbol{\Gamma} \subseteq \mathfrak{R}^n$ همسایگی باز از نقطه تعادل $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ می‌باشند. آنگاه نقطه تعادل $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ پایدار زمان-محدود محلی[2] است اگر دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشند.

(الف) نقطه تعادل $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ باید در ناحیه $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}$، پایدار مجانبی محلی باشد که $\hat{\boldsymbol{\Gamma}} \subseteq \boldsymbol{\Gamma}$ یک همسایگی باز حول نقطه تعادل است.

(ب) برای هر بردار شرط اولیه $\boldsymbol{x_0}$، زمان محدود همگرایی $T(\boldsymbol{x_0}): \hat{\boldsymbol{\Gamma}} \setminus \{\boldsymbol{0}\} \to [0, \infty)$ وجود داشته باشد به طوری که رابطه (۲) برآورده شود.

$$\lim_{t \to T(\boldsymbol{x_0})} \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{0} \text{ and } \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{0} \text{ for } t \geq T(\boldsymbol{x_0}) \qquad (۲)$$

در صورتی که $\boldsymbol{\Gamma} = \mathfrak{R}^n$ باشد، آنگاه نقطه تعادل $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$، پایدار زمان-محدود سرتاسری[3] است [50] ■.

لم ۱. سیستم غیرخطی (۱) را با $\boldsymbol{\Gamma} = \mathfrak{R}^n$ درنظر بگیرید. اگر تابع شعاعی بیکران[4] پیوسته مشتق‌پذیر $V(\boldsymbol{x}): \boldsymbol{\Gamma} \to \mathfrak{R}^+ \cup \{0\}$ و دو عدد حقیقی $\rho_1 > 0$ و $0 < \rho_2 < 1$ چنان وجود داشته باشند که نامساوی $\dot{V}(\boldsymbol{x}) + \rho_1 V^{\rho_2}(\boldsymbol{x}) \leq 0$ برآورده شود، آنگاه نقطه تعادل $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$، پایدار زمان-محدود سرتاسری خواهد بود. علاوه بر این، نامساوی (۳) تخمینی از کران بالای زمان محدود همگرایی $T(\boldsymbol{x_0})$ ارائه می‌دهد که برای زمان‌های $t \geq T(\boldsymbol{x_0})$ همه‌ی متغیرهای حالت سیستم غیرخطی با شروع از هر شرایط اولیه‌ای دقیقاً به نقطه تعادل $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ می‌رسند [50].

$$T(\boldsymbol{x_0}) \leq \left(\rho_1(1 - \rho_2)\right)^{-1} V^{1-\rho_2}(\boldsymbol{x_0}) \qquad (۳)$$

لم ۲. سیستم غیرخطی (۱) را با $\boldsymbol{\Gamma} = \mathfrak{R}^n$ درنظر بگیرید. نقطه تعادل $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$، پایدار زمان-محدود سرتاسری است اگر تابع شعاعی بیکران پیوسته مشتق‌پذیر $V(\boldsymbol{x}): \boldsymbol{\Gamma} \to \mathfrak{R}^+ \cup \{0\}$ و سه عدد حقیقی $\rho_1 > 0$، $0 < \rho_2 < 1$ و $\rho_3 > 0$ چنان وجود داشته باشند که نامساوی $\dot{V}(\boldsymbol{x}) + \rho_1 V^{\rho_2}(\boldsymbol{x}) + \rho_3 V(\boldsymbol{x}) \leq 0$ برآورده شود. هم‌چنین، زمان محدود همگرایی $T(\boldsymbol{x_0})$ چنان وجود دارد که برای $t \geq T(\boldsymbol{x_0})$، همگی متغیرهای حالت سیستم غیرخطی با شروع از هر شرایط اولیه دلخواه دقیقاً به نقطه تعادل $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ همگرا می‌شوند و نامساوی (۴) می‌تواند تخمینی از کران بالای $T(\boldsymbol{x_0})$ ارائه دهد [62].

$$T(\boldsymbol{x_0}) \leq \left(\rho_3(1 - \rho_2)\right)^{-1}\left(\ln(\rho_3 V^{1-\rho_2}(\boldsymbol{x_0}) + \rho_1) - \ln \rho_1\right) \qquad (٤)$$

لم ۳. سیستم غیرخطی (۱) را با $\boldsymbol{\Gamma} = \mathfrak{R}^n$ درنظر بگیرید. نقطه تعادل $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$، پایدار زمان-محدود سرتاسری است اگر تابع شعاعی بیکران پیوسته مشتق‌پذیر $V(\boldsymbol{x}): \boldsymbol{\Gamma} \to \mathfrak{R}^+ \cup \{0\}$ و اعداد حقیقی $\rho_1 > 0$، $\rho_2 > 0$، $\rho_3 > 1$، $\rho_4 = 1 - 0.5(\rho_3)^{-1}$، $\rho_5 = 1 + 0.5(\rho_3)^{-1}$ چنان وجود داشته باشند که نامساوی $\dot{V}(\boldsymbol{x}) + \rho_1 V^{\rho_4}(\boldsymbol{x}) + \rho_2 V^{\rho_5}(\boldsymbol{x}) \leq 0$ برآورده شود. علاوه بر این، تمامی متغیرهای حالت سیستم غیرخطی برای زمان‌های $t \geq T$، دقیقاً به نقطه تعادل $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ می‌رسند. شایان ذکر است که نامساوی $T \leq \pi\rho_3\left(\sqrt{\rho_1\rho_2}\right)^{-1}$، کران بالای زمان محدود همگرایی T را ارائه می‌دهد و این کران بالا، برخلاف رابطه‌های (۳) و (۴) به شرایط اولیه سیستم غیرخطی یعنی بردار $\boldsymbol{x_0}$ بستگی ندارد [63] ■.

لم ٤. سیستم غیرخطی مرتبه دوم رابطه (۵) را با ورودی کنترلی $\mathscr{g}(x_1, x_2) = -\rho_1\text{sign}(x_1) - \rho_2\text{sign}(x_2)$ درنظر بگیرید که دو عدد حقیقی ρ_1 و ρ_2 شرط $\rho_1 > \rho_2 > 0$ را برآورده می‌سازند. آنگاه هر دو متغیر حالت x_1 و x_2 (با شروع از هرشرط اولیه‌ای) برای زمان‌های $t \geq T\left(x_1(0), x_2(0)\right)$ دقیقاً به صفر همگرا می‌شوند.

$$\dot{x}_1 = x_2 \text{ and } \dot{x}_2 = \mathscr{g}(x_1, x_2) \qquad (۵)$$

در رابطه (۶)، علاوه بر تخمینی از کران بالای $T\left(x_1(0), x_2(0)\right)$، تابع لیاپانوفی نیز معرفی شده است که با استفاده از آن می‌توان پایداری زمان-محدود سرتاسری سیستم حلقه‌بسته‌ی (۵) را اثبات کرد. شایان ذکر است که کران بالای زمان $T\left(x_1(0), x_2(0)\right)$ به تابع لیاپانوف معرفی شده در لحظه $t = 0$ وابسته است.

$$\begin{aligned} &T\left(x_1(0), x_2(0)\right) \leq 2(\min(\rho_4))^{-1}\sqrt{V\left(x_1(0), x_2(0)\right)} \\ &V(x_1, x_2) = \begin{cases} 0.25(\rho_4)^2(h)^2 & \text{if } x_1x_2 \neq 0 \\ 0.25(\bar{\rho})^2 x_2^2 & \text{if } x_1 = 0 \\ 0.25|x_1| & \text{if } x_2 = 0 \end{cases} \\ &h = (\rho_3)^{-1}x_2\text{sign}(x_1) + \rho_5\sqrt{|x_1| + 0.5(\rho_3)^{-1}x_2^2} \end{aligned} \qquad (٦)$$

مقدار عدد حقیقی $\bar{\rho}$ چنان انتخاب می‌شود که نامساوی $\left(\sqrt{2(\rho_1 + \rho_2)}\right)^{-1} < \bar{\rho} < \left(\sqrt{2(\rho_1 - \rho_2)}\right)^{-1}$ برقرار باشد و اعداد حقیقی ρ_3، ρ_4 و ρ_5 از تساوی‌های بیان شده در (۷) محاسبه می‌شوند [64] ■.

$$\begin{aligned} &\rho_3 = \rho_1 + \rho_2\text{sign}(x_1x_2) \\ &\rho_4 = \sqrt{0.5\rho_3}\left|\sqrt{2\rho_3}\,\bar{\rho} - 1\right| \\ &\rho_5 = \sqrt{2(\rho_3)^{-1}}\left(\sqrt{2\rho_3}\,\bar{\rho} - 1\right)^{-1}\text{sign}(x_1x_2) \end{aligned} \qquad (۷)$$

لم ۵. سیستم غیرخطی مرتبه دوم (۵) را با ورودی کنترلی رابطه (۸) درنظر بگیرید که ρ_1 عددی حقیقی با شرط $0 < \rho_1 < 1$ است. آنگاه هر دو متغیر حالت x_1 و x_2 (با شروع از هرشرط اولیه‌ای) برای زمان‌های $t \geq T\left(x_1(0), x_2(0)\right)$ دقیقاً به صفر واقعی می‌رسند.

[1] Euclidean norm
[2] Locally finite time stable
[3] Globally finite time stable
[4] Radially unbounded

[DOI: 10.29252/joc.14.1.73]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.5.3]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.5.3]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.73]

$$\begin{aligned} g(x_1,x_2) &= -|x_2|^{\rho_1}\mathrm{sign}(x_2) - |\ell(x_1,x_2)|^{\rho_1(2-\rho_1)^{-1}}\mathrm{sign}(\ell(x_1,x_2)) \\ \ell(x_1,x_2) &= x_1 + (2-\rho_1)^{-1}|x_2|^{2-\rho_1}\mathrm{sign}(x_2) \end{aligned} \quad (۸)$$

کران بالای $t \geq T(x_1(0), x_2(0))$ از نامساوی رابطه (۹) تخمین زده می‌شود که ρ_2 و ρ_3 دو عدد حقیقی اختیاری با شرایط $0 < \rho_2 < 1$ و $\rho_3 > 1$ می‌باشند [50] ■.

$$T_{conv} \leq \left(\varpi(1-\rho_1)\right)^{-1}(3-\rho_1)\left(V(x_1(0),x_2(0))\right)^{\frac{1-\rho_1}{3-\rho_1}} \quad (۹)$$

که تابع $V(x_1,x_2)$ توسط رابطه (۱۰) معرفی می‌شود.

$$\begin{aligned} V(x_1,x_2) &= \tfrac{2-\rho_1}{3-\rho_1}|\ell(x_1,x_2)|^{\frac{3-\rho_1}{2-\rho_1}} + \rho_2\, x_2\ell(x_1,x_2) + \tfrac{\rho_3}{3-\rho_1}|x_2|^{3-\rho_1} \\ \varpi &= -\max_{(x_1,x_2)\in\Xi}\dot{V}(x_1,x_2) \;\text{ with }\; \Xi = \{(x_1,x_2): V(x_1,x_2) = 1\} \end{aligned} \quad (۱۰)$$

۳- توصیف مدل ربات بازویی n-درجه آزادی با غیرخطی‌سازهای ورودی و بیان مسئله ردیابی

مدل جامع دینامیکی یک ربات بازویی n-درجه آزادی به فرم رابطه (۱۱) قابل توصیف است که $\boldsymbol{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T \in \mathfrak{R}^n$ بیانگر متغیرهای پیکربندی ربات بوده و بردارهای $\dot{\boldsymbol{q}} \in \mathfrak{R}^n$ و $\ddot{\boldsymbol{q}} \in \mathfrak{R}^n$ به ترتیب مشتق مرتبه‌های اول و دوم $\boldsymbol{q} \in \mathfrak{R}^n$ هستند. $\mathbf{M}(\boldsymbol{q}) \in \mathfrak{R}^{n\times n}$، ماتریس اینرسی[1] ربات می‌باشد که همواره متقارن و مثبت معین[2] است.

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \mathbf{F}(\dot{\boldsymbol{q}}) + \mathbf{G}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{dis}} \quad (۱۱)$$

در رابطه (۱۱)، ماتریس نیروهای کوریولیس و گریز از مرکز[3] و بردار نیروهای گرانشی و جاذبه[4] با نمادهای ماتریسی $\mathbf{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \in \mathfrak{R}^{n\times n}$ و $\mathbf{G}(\boldsymbol{q}) \in \mathfrak{R}^n$ معرفی شده‌اند. بردار $\mathbf{F}(\dot{\boldsymbol{q}}) \in \mathfrak{R}^n$ بیانگر نیروهای اصطکاک موجود در مفاصل ربات است که توسط رابطه (۱۲) قابل توصیف می‌باشند. در رابطه (۱۲)، $i = 1,2,\cdots,n$ ، $f_{c_i}, f_{s_i}, \varepsilon_i, \sigma_i$ پارامترهای ثابت و معلوم هستند [9].

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\dot{\boldsymbol{q}}) &= [f_1(\dot{q}_1) \quad f_2(\dot{q}_2) \quad \cdots \quad f_n(\dot{q}_n)]^T \\ f_i(\dot{q}_i) &= \left(f_{c_i} + (f_{s_i} - f_{c_i})e^{-\left(\frac{\dot{q}_i}{\varepsilon_i}\right)^2}\right)\mathrm{sign}(\dot{q}_i) + \sigma_i\dot{q}_i \\ &\text{with } i = 1,2,\cdots,n. \end{aligned} \quad (۱۲)$$

نماد برداری $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{dis}} \in \mathfrak{R}^n$ (بیان شده در (۱۱)) بیانگر نامعینی‌های موجود در مدل ربات می‌باشد که می‌توانند ناشی از عدم‌قطعیت‌های پارامتری، دینامیک‌های مدل نشده و گشتاورهای اغتشاش خارجی وارده بر مفاصل ربات باشند. در سرتاسر مقاله، فرض ۱ همواره برای بردار نامعینی $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{dis}}$ برقرار می‌باشد.

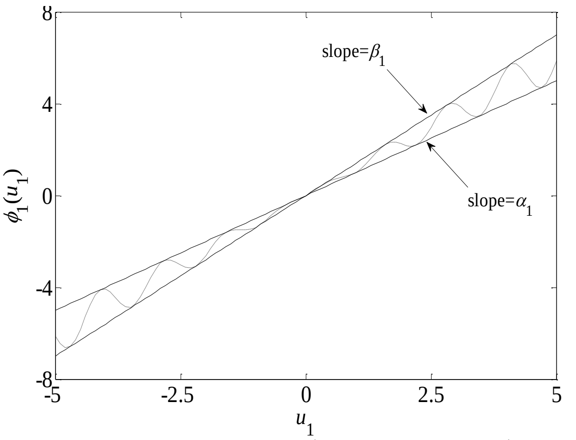
فرض ۱. نرم اقلیدسی بردار نامعینی $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{dis}} \in \mathfrak{R}^n$ همواره در رابطه (۱۳) صدق می‌کند که ضرایب حقیقی مثبت $\lambda_h, \varpi_h, h = 0,1,2,\cdots,n$ همواره معلوم و در اختیارند.

$$\|\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{dis}}\| \leq \textstyle\sum_{h=0}^{n}(\lambda_h\|\boldsymbol{q}\|^h + \varpi_h\|\dot{\boldsymbol{q}}\|^h) = \chi(\|\boldsymbol{q}\|, \|\dot{\boldsymbol{q}}\|) \quad (۱۳)$$

$\boldsymbol{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n]^T \in \mathfrak{R}^n$ بردار گشتاورهای ورودی مفاصل است که نقش ورودی‌های کنترلی سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات را دارند. $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u}) = [\phi_1(u_1) \quad \phi_2(u_2) \quad \dots \quad \phi_n(u_n)]^T \in \mathfrak{R}^n$، بردار توابع غیرخطی‌سازهای ورودی هستند که رابطه‌های (۱۴) و (۱۵) به ترتیب نحوه عملکرد غیرخطی سازهای شعاعی و ناحیه مرده را توصیف می‌کنند.

$$\alpha_i u_i^2 \leq \phi_i(u_i)u_i \leq \beta_i u_i^2 \;\text{ and }\; \phi_i(0) = 0 \text{ with } i = 1,2,\cdots,n. \quad (۱۴)$$

در رابطه (۱۴) که تابع غیرخطی‌ساز شعاعی $\phi_i(u_i)$ را توصیف می‌کند، ضرایب α_i, β_i اعدادحقیقی مثبت و معلوم می‌باشند. در واقع نامساوی (۱۴) بیانگر این موضوع است که تابع غیرخطی‌ساز $\phi_i(u_i)$ درون قطاع $[\alpha_i, \beta_i]$ قرار می‌گیرد. شکل ۱ تصویری مفهومی از نحوه عملکرد تابع غیرخطی‌ساز شعاعی $\phi_i(u_i)$ را برای $i = 1$ ارائه می‌دهد [48, 49].



شکل ۱. تصویری مفهومی از عملکرد تابع غیرخطی‌ساز $\phi_1(u_1)$ محصور شده درون قطاع $[\alpha_1, \beta_1]$ [48, 49].

رابطه (۱۵) نحوه عملکرد تابع غیرخطی‌ساز ناحیه مرده $\phi_i(u_i)$ را شرح می‌دهد که $\phi_{+i}(u_i)$ و $\phi_{-i}(u_i)$ توابعی غیرخطی مثبت نامعلوم از گشتاور ورودی u_i هستند. $u_{+i} > 0$، $u_{-i} < 0$، $\beta_{+i} > 0$ و $\beta_{-i} > 0$ چهار عدد حقیقی ثابت و معلوم هستند که دو عدد حقیقی β_{+i} و β_{-i} همواره دو نامساوی $0 < \beta_{+i} \leq \phi_{+i}(u_i)$ و $0 < \beta_{-i} \leq \phi_{-i}(u_i)$ را ارضا می‌کنند.

$$\begin{aligned} &\phi_i(u_i) = \begin{cases} (u_i - u_{+i})\phi_{+i}(u_i) & \text{if} \quad u_i > u_{+i} \\ 0 & \text{if} \quad u_{-i} \leq u_i \leq u_{+i} \\ (u_i - u_{-i})\phi_{-i}(u_i) & \text{if} \quad u_i < u_{-i} \end{cases} \\ &\text{and} \\ &\begin{cases} (u_i - u_{+i})\phi_i(u_i) \geq \beta_{+i}(u_i - u_{+i})^2 & \text{if} \quad u_i > u_{+i} \\ \phi_i(u_i) = 0 & \text{if} \quad u_{-i} \leq u_i \leq u_{+i} \\ (u_i - u_{-i})\phi_i(u_i) \geq \beta_{-i}(u_i - u_{-i})^2 & \text{if} \quad u_i < u_{-i} \end{cases} \end{aligned} \quad (۱۵)$$

شکل ۲ تصویری مفهومی از نحوه عملکرد تابع غیرخطی‌ساز ناحیه مرده $\phi_i(u_i)$ را برای $i = 1$ ارائه می‌دهد. برای ربات n-درجه آزادی رابطه (۱۱)، همواره فرض ۲ در سرتاسر مقاله برقرار است.

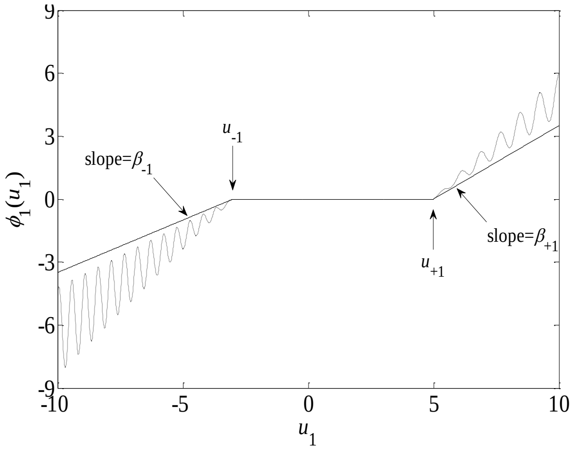
فرض ۲. برای ربات n-درجه آزادی، دو بردار $\boldsymbol{q} \in \mathfrak{R}^n$ و $\dot{\boldsymbol{q}} \in \mathfrak{R}^n$ همواره و در هر لحظه از زمان به طور فیزیکی با حسگرهای (سنسورهای) دقیق اندازه‌گیری شده و در اختیار می‌باشند. بنابراین در تولید گشتاورهای ورودی مفاصل، می‌توان از این دو بردار استفاده کرد.

در ادامه، مسئله ردیابی زمان-محدود مقاوم برای ربات n-درجه آزادی، به فرم روابط ریاضی فرمول‌بندی می‌شود. بردار مسیرهای مورد نظر برای متغیرهای پیکربندی مفاصل (چرخشی یا انتقالی) ربات به فرم $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{d}}(t) = [q_{d_1} \quad q_{d_2} \quad \cdots \quad q_{d_n}]^T$ انتخاب می‌شود که انتخاب مناسب $\boldsymbol{\eta}_d$ می‌تواند باعث شود که مجری نهایی ربات عمل خاصی را در فضای سه بعدی اطراف خودش انجام دهد. در مسئله ردیابی ذکرشده، گشتاورهای ورودی $\boldsymbol{u} \in \mathfrak{R}^n$ باید چنان طراحی شوند که بتوانند بردار

[1] Inertia matrix
[2] Symmetric and positive definite matrix
[3] Coriolis and centripetal forces
[4] Gravitational forces

متغیرهای پیکربندی مفاصل را در مدت زمان محدود T_t به طور کاملاً دقیق به بردار مسیرهای مورد نظر $\boldsymbol{q_d}(t)$ برسانند. فرض ۳ همواره برای بردار مسیرهای دلخواه $\boldsymbol{q_d}(t)$ برقرار است.

فرض ۳. بردار مسیرهای دلخواه $\boldsymbol{q_d}(t) \in \Re^n$ همواره مشخص بوده و تمام درایه‌های آن توابعی هستند که حداقل تا دو بار پیوسته و مشتق‌پذیر می‌باشند. به عبارت دیگر، همواره فرض بر این است که $\dot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}}(t) = [\dot q_{d_1} \quad \dot q_{d_2} \quad \cdots \quad \dot q_{d_n}]^T$ و $\ddot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}}(t) = [\ddot q_{d_1} \quad \ddot q_{d_2} \quad \cdots \quad \ddot q_{d_n}]^T$ وجود دارند و می‌توانند در طراحی گشتاورهای ورودی ربات مورد استفاده قرار گیرند.



شکل ۲. تصویری از عملکرد تابع غیرخطی‌ساز ناحیه مرده $\phi_1(u_1)$ [48, 49].

برای فرمول‌بندی مسئله ردیابی، دو بردار خطای $\boldsymbol{e_{odd}} \in \Re^n$ و $\boldsymbol{e_{even}} \in \Re^n$ به صورت رابطه (۱۶) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e_{odd}} &= [e_1 \quad e_3 \quad \cdots \quad e_{2n-1}]^T \\ &= [q_1 - q_{d_1} \quad q_2 - q_{d_2} \quad \cdots \quad q_n - q_{d_n}]^T \\ \boldsymbol{e_{even}} &= [e_2 \quad e_4 \quad \cdots \quad e_{2n}]^T \\ &= [\dot q_1 - \dot q_{d_1} \quad \dot q_2 - \dot q_{d_2} \quad \cdots \quad \dot q_n - \dot q_{d_n}]^T \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

با درنظر گرفتن دو بردار خطای تعریف شده و استفاده از مدل دینامیکی ربات n–درجه آزادی (۱۱)، سیستم دینامیکی مرتبط با خطاهای ردیابی مفاصل ربات به فرم رابطه (۱۷) حاصل می‌شود. بدیهی است که سیستم (۱۷) متشکل از n زیرسیستم غیرخطی مرتبه دوم است که همگی دارای اندرکنش متقابل هستند.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{odd}} &= \boldsymbol{e_{even}} \\ \dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{even}} &= -\mathbf{M^{-1}}(\mathbf{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \mathbf{G}(\boldsymbol{q}) + \mathbf{F}(\dot{\boldsymbol{q}})) \\ &\quad + \mathbf{M^{-1}}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u}) + \mathbf{M^{-1}}\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{dis}} - \ddot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}} \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

با توجه به سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی (۱۷)، مسئله‌ی ردیابی زمان–محدود مقاوم ربات به فرم (۱۸) بازنویسی می‌گردد. رابطه (۱۸) بیانگر این موضوع است که برای فراهم ساختن هدف ردیابی زمان–محدود مقاوم ذکر شده، گشتاورهای ورودی مفاصل ربات n–درجه آزادی باید به گونه‌ای طراحی گردند که بعد از زمان محدود T_t، دو بردار خطای ردیابی $\boldsymbol{e_{odd}}$ و $\boldsymbol{e_{even}}$ به صفر همگرا شوند و برای زمان‌های $t \geq T_t$ این دو بردار همواره صفر واقعی باشند. بنابراین، برآورده شدن هدف ردیابی زمان–محدود مقاوم ربات n–درجه آزادی معادل با برآورده شدن شرایط رابطه (۱۸) می‌باشد.

$$\begin{aligned} &\lim_{t \to T_t} \boldsymbol{e_{odd}} = \mathbf{0}, \ \text{and} \ \ \boldsymbol{e_{odd}} = \mathbf{0} \ \ \text{for} \ \forall \ t \geq T_t \\ &\lim_{t \to T_t} \boldsymbol{e_{even}} = \mathbf{0}, \ \text{and} \ \ \boldsymbol{e_{even}} = \mathbf{0} \ \ \text{for} \ \forall \ t \geq T_t \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

٤- طراحی چهار دسته گشتاورهای غیرخطی مفاصل ربات بازوئی $\boldsymbol{n}$-درجه آزادی

با توجه به ویژگی‌های منحصر به فرد روش کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین، از تعمیم این روش و تعریف خمینه‌های لغزشی غیرخطی جدید برای حل مسئله ردیابی زمان–محدود مقاوم ربات استفاده می‌شود. طراحی گشتاورهای ورودی مفاصل ربات با این روش غیرخطی از دو مرحله تشکیل شده است که عبارتند از: (الف) تعریف خمینه‌های لغزشی غیرخطی مناسب با هدف پایدارسازی زمان–محدود دینامیک مد لغزشی.

(ب) طراحی گشتاورهای غیرخطی ورودی به منظور رساندن متغیرهای حالت ربات n–درجه آزادی به دینامیک مد لغزشی در مدت زمان محدود [51, 53-55, 57-59].

در مرحله (الف) با استفاده از بردارهای خطاهای ردیابی، خمینه‌های لغزشی غیرخطی چنان تعریف می‌شوند که دینامیک مد لغزشی مرتبط با سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات، دارای پایداری زمان–محدود با زمان محدود همگرایی T_s باشد. در مرحله (ب) گشتاورهای ورودی غیرخطی چنان طراحی می‌شوند تا بتوانند همه خطاهای ردیابی ربات را در زمان محدود T_r بر روی خمینه‌های لغزشی غیرخطی قرار دهند یا به عبارت دیگر گشتاورهای ورودی باید قادر باشند در زمان محدود T_r، وجود دینامیک مد لغزشی را برای سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات تضمین کنند. بنابراین بعد از زمان محدود کلی T_t $(T_t = T_s + T_r)$، هدف ردیابی زمان–محدود مقاوم ربات n–درجه آزادی که به صورت رابطه (۱۸) فرمول‌بندی شده است، برآورده می‌شود.

٤-١ طراحی گشتاورهای ورودی با فرض غیرخطی‌ساز شعاعی

زیربخش‌های ۴-۱-۱ و ۴-۱-۲ به ترتیب به طراحی دسته‌های اول و دوم از گشتاورهای ورودی ربات با فرض وجود غیرخطی‌سازهای شعاعی اختصاص یافته‌اند.

٤-١-١ طراحی دسته اول از گشتاورهای ورودی ربات

برای دسته اول از گشتاورهای ورودی، بردار خمینه‌های لغزشی غیرخطی $\boldsymbol{s}(t) = [s_1 \quad s_2 \quad \cdots \quad s_n]^T \in \Re^n$ به صورت رابطه (۱۹) تعریف می‌شود که $l_{j_i}, j = 1, 2 \ , i = 1, 2, \cdots, n$ اعداد حقیقی اختیاری با شرایط $l_{1_i} > l_{2_i} > 0$ هستند.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{s}(t) = \mathbf{M\theta}, \ \ \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{e_{even}} + \int_0^t \boldsymbol{l_1}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e_{odd}}(\varsigma))d\varsigma + \int_0^t \boldsymbol{l_2}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e_{even}}(\varsigma))d\varsigma \\ &\boldsymbol{l_1}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e_{odd}}) = [l_{1_1} sign(e_1) \quad l_{1_2} sign(e_3) \quad \ldots \quad l_{1_n} sign(e_{2n-1})]^T \\ &\boldsymbol{l_2}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e_{even}}) = [l_{2_1} sign(e_2) \quad l_{2_2} sign(e_4) \quad \ldots \quad l_{2_n} sign(e_{2n})]^T \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

گشتاورهای ورودی (۲۰) برای تضمین دینامیک مد لغزشی به صورت زمان–محدود پیشنهاد می‌شوند که در این رابطه، $\chi(\|\boldsymbol{q}\|, \|\dot{\boldsymbol{q}}\|)$ همان کران بالای بردار نامعینی‌هاست (قبلاً در فرض ۱ معرفی شده است). علاوه بر این، $\alpha_i, i = 1,2, \ldots, n$ همان اعداد حقیقی مثبت موجود در غیرخطی‌ساز شعاعی رابطه(۱۴) هستند. در رابطه (۲۰)، ξ_i، ζ، η_0، η_1 و η_2 اعداد حقیقی اختیاری با شرایط $\xi_i > (\alpha_i)^{-1}$، $\zeta > 1$، $\eta_0 \geq 0$، $\eta_1 \geq 0$ و $\eta_2 \geq 0$ هستند که توسط طراح و کاربر تعیین می‌شوند. این اعداد حقیقی اختیاری هم بر روی انرژی کنترلی و هم بر روی زمان محدود مورد نیاز برای تضمین

وجود دینامیک مد لغزشی تاثیر بسزایی دارند. بدیهی است برای ربات n-درجه آزادی، تعداد کل پارامترهای اختیاری مرتبط با گشتاورهای دسته اول $3n+4$ است. قضیه ۱ نشان می‌دهد که گشتاورهای غیرخطی ورودی پیشنهاد شده با رابطه‌های (۱۹) و (۲۰)، می‌توانند هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم را برای ربات n-درجه آزادی برآورده سازند.

$$\begin{aligned}
&u_i = -\xi_i \Omega \operatorname{sign}(s_i), \text{with } i = 1,2,\dots,n.\\
&\Omega = \Pi_1 + \Pi_2 \text{ and } \xi_i > (\alpha_i)^{-1}\\
&\Pi_1 = \eta_0\|\boldsymbol{s}\| + \eta_1\|\boldsymbol{s}\|^{h_1} + \eta_2\|\boldsymbol{s}\|^{h_2}\\
&h_1 = 1-\zeta^{-1} \text{ and } h_2 = 1+\zeta^{-1}\\
&\Pi_2 = \chi + \|\dot{\mathbf{M}}\|\|\boldsymbol{\theta}\| + \|\mathbf{C}\|\|\dot{\boldsymbol{q}}\| + \|\mathbf{G}\| + \|\mathbf{F}\| +\\
&\quad +\|\mathbf{M}\|(\|\ddot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}}\| + \|\boldsymbol{l}_{\mathbf{1}}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e}_{odd})\| + \|\boldsymbol{l}_{\mathbf{2}}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e}_{even})\|)
\end{aligned} \quad (۲۰)$$

قضیه ۱. ربات بازویی n-درجه آزادی رابطه (۱۱) را همراه با غیرخطی‌سازهای ورودی شعاعی (۱۴) و فرض‌های ۱، ۲ و ۳ درنظر بگیرید. چنانچه گشتاورهای ورودی پیشنهادشده با رابطه‌های (۱۹) و (۲۰) به مفاصل ربات (۱۱) اعمال شوند، آنگاه هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم توصیف شده با رابطه (۱۸) برآورده شده و بردار متغیرهای پیکربندی مفاصل $\boldsymbol{q}(t)$ در مدت زمان محدود $T_t = T_r + T_s$ به طور کاملاً دقیق به بردار $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{d}}(t)$ می‌رسد. به عبارت دیگر، برای زمان‌های $t \geq T_t$ تساوی $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{d}}(t)$ برقرار می‌گردد. هم‌چنین، دو زمان محدود T_r و T_s می‌توانند به ترتیب توسط نامساوی‌های (۲۱) و (۲۲) تعیین شوند.

$$\begin{aligned}
&(i)\text{: if } \eta_0 = \eta_2 = 0 \text{ then } T_r \leq \left(\eta_1(1-h_1)\right)^{-1}(\|\boldsymbol{s}(\mathbf{0})\|)^{1-h_1}\\
&(ii)\text{: if } \eta_2 = 0 \text{ then } T_r \leq \left(\eta_0(1-h_1)\right)^{-1}\left(\ln\left(\frac{\eta_0(\|\boldsymbol{s}(\mathbf{0})\|)^{1-h_1}+\eta_1}{\eta_1}\right)\right)\\
&(iii)\text{: if } \eta_0 = 0 \text{ then } T_r \leq \pi\zeta\left(\sqrt{2^{1+0.5(h_1+h_2)}\eta_1\eta_2}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

(۲۱)

و

$$\begin{aligned}
&T_s = \max_i({}_iT_s), \text{with } i = 1,2,\cdots,n.\\
&{}_iT_s \leq 2\left(\min\left(l_{4_i}\right)\right)^{-1}\sqrt{\Psi_i(e_{2i-1}(t=T_r), e_{2i}(t=T_r))}\\
&\Psi_i = \begin{cases} 0.25\left(l_{4_i}\right)^2(h_i)^2 & \text{if } e_{2i-1}e_{2i} \neq 0\\ 0.25\left(\overline{l_\iota}\right)^2 e_{2i}^2 & \text{if } e_{2i-1} = 0\\ 0.25|e_{2i-1}| & \text{if } e_{2i} = 0\end{cases}\\
&h_i = \left(l_{3_i}\right)^{-1}e_{2i}\operatorname{sign}(e_{2i-1}) + l_{5_i}\sqrt{|e_{2i-1}| + 0.5\left(l_{3_i}\right)^{-1}e_{2i}^2}
\end{aligned} \quad (۲۲)$$

در رابطه (۲۲)، $\overline{l_\iota}$ از $\left(\sqrt{2\left(l_{1_i}+l_{2_i}\right)}\right)^{-1} < \overline{l_\iota} < \left(\sqrt{2\left(l_{1_i}-l_{2_i}\right)}\right)^{-1}$ انتخاب می‌شوند. هم‌چنین l_{3_i}، l_{4_i} و l_{5_i} توسط رابطه (۲۳) تعیین می‌شوند ■.

$$\begin{aligned}
&l_{3_i} = l_{1_i} + l_{2_i}\operatorname{sign}(e_{2i-1}e_{2i})\\
&l_{4_i} = \sqrt{0.5 l_{3_i}}\left|\sqrt{2l_{3_i}}\,\overline{l_\iota} - 1\right|\\
&l_{5_i} = \sqrt{2\left(l_{3_i}\right)^{-1}}\left(\sqrt{2l_{3_i}}\,\overline{l_\iota} - 1\right)^{-1}\operatorname{sign}(e_{2i-1}e_{2i})
\end{aligned} \quad (۲۳)$$

اثبات. این اثبات دو مرحله‌ای بوده و در مرحله اول اثبات می‌شود که گشتاورهای ورودی پیشنهادی می‌توانند وجود دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \mathbf{0}$ را در زمان محدود T_r تضمین دهند. در این مرحله نشان داده می‌شود که گشتاورهای ورودی می‌توانند سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی (۱۷) را برای زمان‌های $t \geq T_r$ به دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \mathbf{0}$ تبدیل کنند. در مرحله دوم، نشان داده می‌شود که دینامیک مد لغزشی دارای پایداری زمان-محدود سرتاسری است و خطاهای ردیابی e_{2i-1}, e_{2i}, $i = 1,2,\cdots,n$ که بر روی دینامیک مد لغزشی قرار گرفته‌اند، بعد از زمان T_s به صفر واقعی می‌رسند. با جمع‌بندی این دو مرحله، اثبات می‌گردد که گشتاورهای ورودی (۱۹) و (۲۰)، شرایط رابطه (۱۸) را در مدت $T_t = T_r + T_s$ برآورده خواهند ساخت. برای اثبات ادعای مرحله اول، کاندیدای لیاپانوف به صورت $V(t) = 0.5\|\boldsymbol{s}\|^2 = 0.5\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s}$ انتخاب می‌شود که مشتق آن $\dot{V}(t) = \boldsymbol{s}^T(t)\dot{\boldsymbol{s}}(t)$ به فرم رابطه (۲۴) قابل بیان است.

$$\dot{V} = \boldsymbol{s}^T\left(\dot{\mathbf{M}}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{M}\left(\dot{\boldsymbol{e}}_{even} + \boldsymbol{l}_{\mathbf{1}}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e}_{odd}) + \boldsymbol{l}_{\mathbf{2}}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e}_{even})\right)\right) \quad (۲٤)$$

جایگذاری $\dot{\boldsymbol{e}}_{even}$ (از رابطه (۱۷)) در رابطه (۲۴)، به نامساوی رابطه (۲۵) خواهیم رسید.

$$\begin{aligned}
\dot{V} = &\boldsymbol{s}^T\left(\dot{\mathbf{M}}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} - \mathbf{F}(\dot{\boldsymbol{q}}) - \mathbf{G}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u})\right)\\
&+ \boldsymbol{s}^T\left(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{dis}} - \mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}} + \mathbf{M}\,\boldsymbol{l}_{\mathbf{1}}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e}_{odd}) + \mathbf{M}\boldsymbol{l}_{\mathbf{2}}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e}_{even})\right)
\end{aligned} \quad (۲٥)$$

با استفاده از نامساوی کوشی-شوآرتز[1] و درنظر گرفتن فرض ۱ (یعنی $\|\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{dis}}\| \leq \chi(\|\boldsymbol{q}\|, \|\dot{\boldsymbol{q}}\|)$)، تساوی رابطه (۲۵) به نامساوی رابطه (۲۶) تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned}
\dot{V} \leq \{&\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u}) + \|\boldsymbol{s}\|\left(\|\dot{\mathbf{M}}\|\|\boldsymbol{\theta}\| + \|\mathbf{C}\|\|\dot{\boldsymbol{q}}\| + \|\mathbf{F}\| + \|\mathbf{G}\| + \chi\right)\\
&+\|\boldsymbol{s}\|\|\mathbf{M}\|(\|\ddot{\boldsymbol{q}}_d\| + \|\boldsymbol{l}_{\mathbf{1}}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e}_{odd})\| + \|\boldsymbol{l}_{\mathbf{2}}\mathbf{sign}(\boldsymbol{e}_{even})\|)\}
\end{aligned} \quad (۲٦)$$

با توجه به تعریف Π_2 (بیان شده در رابطه (۲۰))، نامساوی (۲۶) به فرم ساده شده‌ی $\dot{V} \leq \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u}) + \|\boldsymbol{s}\|\Pi_2$ تبدیل می‌شود. با درنظرگرفتن $\Omega = \Pi_1 + \Pi_2$ و نامساوی $\left(\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u}) \leq -\Omega\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i|s_i|\right)$ (که اثبات آن در پیوست ۱ آمده است)، فرم ساده شده‌ی نامساوی (۲۶) به صورت نامساوی (۲۷) نتیجه می گردد.

$$\dot{V} \leq \|\boldsymbol{s}\|\Omega - \|\boldsymbol{s}\|\,\Pi_1 - \Omega\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i|s_i| \quad (۲۷)$$

با تعریف $\mu = \min_i(\alpha_i\xi_i)$, $i = 1,2,\dots,n$ و در نظرگرفتن نامساوی $\left(-\sum_{i=1}^{n}|s_i| \leq -\|\boldsymbol{s}\|\right)$، رابطه (۲۷) به نامساوی (۲۸) تبدیل می‌شود.

$$\dot{V} \leq \|\boldsymbol{s}\|\Omega(1-\mu) - \|\boldsymbol{s}\|\,\Pi_1 \quad (۲۸)$$

از آنجایی که اعداد حقیقی دلخواه ξ_i, $i = 1,2,\dots,n$ با شرط $\xi_i > 1/\alpha_i$ انتخاب می‌شوند، بدیهی است که $\mu = \min_i(\alpha_i\xi_i)$ همواره $\mu > 1$ بوده و درنتیجه ترم $\|\boldsymbol{s}\|\Omega(1-\mu)$ همواره نامثبت خواهد بود. با درنظر گرفتن این موضوع، نامساوی (۲۸) به نامساوی $\dot{V} \leq -\|\boldsymbol{s}\|\,\Pi_1$ تبدیل می‌شود. در ادامه با جایگذاری $\Pi_1 = \eta_0\|\boldsymbol{s}\| + \eta_1\|\boldsymbol{s}\|^{h_1} + \eta_2\|\boldsymbol{s}\|^{h_2}$ (مطابق با رابطه (۲۰)) و درنظر گرفتن تعریف کاندیدای لیاپانوف $V(t) = 0.5\|\boldsymbol{s}\|^2$، نامساوی $\dot{V} \leq -\|\boldsymbol{s}\|\,\Pi_1$ به رابطه (۲۹) تبدیل می‌شود.

$$\dot{V} + 2\eta_0 V + \sqrt{2^{h_1+1}}\eta_1 V^{0.5(h_1+1)} + \sqrt{2^{h_2+1}}\eta_2 V^{0.5(h_2+1)} \leq 0 \quad (۲۹)$$

با فرض $\eta_0 = \eta_2 = 0$، و انتخاب $\rho_1 = \sqrt{2^{h_1+1}}\eta_1$، $\rho_2 = 0.5(h_1+1)$ و استناد به لم ۱، می‌توان نتیجه گرفت که $V(t)$ و $\boldsymbol{s}(t)$ در مدت زمان محدود T_r (که توسط (i) از رابطه (۲۱) ارائه شده است) به صفر همگرا می‌شوند و برای زمان‌های $t \geq T_r$ وجود دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \mathbf{0}$ تضمین می گردد.

با فرض $\eta_2 = 0$ و انتخاب $\rho_1 = \sqrt{2^{h_1+1}}\eta_1$، $\rho_2 = 0.5(h_1+1)$، $\rho_3 =$

[1] Cauchy-Schwartz inequality

$2\eta_0$ و استناد به لم ۲، می‌توان نتیجه گرفت که $V(t)$ و $\boldsymbol{s}(t)$ در مدت زمان محدود T_r (که توسط (ii) از رابطه (۲۱) ارائه شده است) به صفر همگرا می‌شوند و برای زمان‌های $t \geq T_r$ وجود دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{0}$ تضمین می‌گردد.

با فرض $\eta_0 = 0$ و انتخاب $\rho_1 = \sqrt{2^{h_1+1}}\eta_1$، $\rho_2 = \sqrt{2^{h_2+1}}\eta_2$، $\rho_3 = \zeta$، $\rho_4 = 0.5(h_1+1)$، $\rho_5 = 0.5(h_2+1)$، و استناد به لم ۳، می‌توان نتیجه گرفت که $V(t)$ و $\boldsymbol{s}(t)$ در مدت زمان محدود T_r (که توسط (iii) از رابطه (۲۱) ارائه شده است) به صفر همگرا می‌شوند و برای زمان‌های $t \geq T_r$ وجود دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{0}$ تضمین می‌گردد. در اینجا اثبات مرحله اول به پایان می‌رسد.

در مرحله دوم برای زمان‌های $t \geq T_r$، سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی (۱۷) به دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{0}$ مطابق با رابطه (۳۰) تبدیل می‌شود که متشکل از n زیرسیستم غیرخطی مرتبه دوم منفک از هم است.

$$\begin{aligned}
&\dot{e}_{2i-1} = e_{2i}\\
&\dot{e}_{2i} = -l_{1_i}\mathrm{sign}(e_{2i-1}) - l_{2_i}\mathrm{sign}(e_{2i})\\
&\text{with } i = 1, 2, \cdots, n.
\end{aligned} \tag{۳۰}$$

مقایسه‌ی هر کدام از n زیرسیستم غیرخطی رابطه (۳۰) با سیستم غیرخطی مرتبه دوم موجود در لم ۴ (رابطه (۵))، پایداری زمان-محدود دینامیک مد لغزشی (۳۰) را نتیجه می‌دهد. فلذا خطاهای ردیابی ربات قرار گرفته بر روی دینامیک مد لغزشی، بعد از گذشت مدت زمان محدود T_s به صفر واقعی همگرا می‌شوند که T_s می‌تواند توسط رابطه (۲۲) تخمین زده شود. در انتها با استناد به دو مرحله‌ی ذکر شده می‌توان نتیجه گرفت که بردار متغیرهای پیکربندی ربات $\boldsymbol{q}(t)$ در مدت زمان محدود $T_t = T_s + T_r$ به بردار مسیرهای موردنظر $\boldsymbol{q_d}(t)$ می‌رسد و هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم (۱۸) برآورده می‌گردد. اثبات قضیه ۱ در همین‌جا پایان می‌پذیرد ■.

۲-۱-۴ طراحی دسته دوم از گشتاورهای ورودی ربات

برای دسته دوم از گشتاورهای ورودی، بردار خمینه‌های لغزشی غیرخطی $\boldsymbol{s}(t) = [s_1 \quad s_2 \quad \cdots \quad s_n]^T \in \mathfrak{R}^n$ به صورت رابطه (۳۱) تعریف می‌شود که در این رابطه، $i = 1,2,\cdots,n$ ، o_i اعداد حقیقی اختیاری با شرایط $0 < o_i < 1$ هستند.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{s} = \mathbf{M}\boldsymbol{\theta}, \text{with } i = 1, 2, \cdots, n\\
&\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{e}_{even} + \int_0^t \mathbf{sig}^{\boldsymbol{o}}\big(\boldsymbol{e}_{even}(\varsigma)\big)d\varsigma + \int_0^t \mathbf{sig}^{\boldsymbol{o}(2-\boldsymbol{o})^{-1}}\big(\boldsymbol{\Upsilon}(\varsigma)\big)d\varsigma\\
&\Upsilon_i(e_{2i-1}, e_{2i}) = e_{2i-1} + (2-o_i)^{-1}|e_{2i}|^{(2-o_i)}\mathrm{sign}(e_{2i})\\
&\mathbf{sig}^{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{e}_{even}) = \begin{bmatrix} |e_2|^{o_1}\mathrm{sign}(e_2)\\ |e_4|^{o_2}\mathrm{sign}(e_4)\\ \vdots\\ |e_{2n}|^{o_n}\mathrm{sign}(e_{2n}) \end{bmatrix}\\
&\mathbf{sig}^{\boldsymbol{o}(2-\boldsymbol{o})^{-1}}(\boldsymbol{\Upsilon}) = \begin{bmatrix} |\Upsilon_1|^{o_1(2-o_1)^{-1}}\mathrm{sign}(\Upsilon_1)\\ |\Upsilon_2|^{o_2(2-o_2)^{-1}}\mathrm{sign}(\Upsilon_2)\\ \vdots\\ |\Upsilon_n|^{o_n(2-o_n)^{-1}}\mathrm{sign}(\Upsilon_n) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{۳۱}$$

گشتاورهای ورودی مقاوم برای تضمین زمان-محدود دینامیک مد لغزشی به صورت همان رابطه (۲۰) پیشنهاد می‌شوند با این تفاوت که Π_2 به صورت رابطه (۳۲) اصلاح می‌گردد.

$$\begin{aligned}
\Pi_2 = \chi + \|\dot{\mathbf{M}}\|\|\boldsymbol{\theta}\| + \|\mathbf{C}\|\|\dot{\boldsymbol{q}}\| + \|\mathbf{G}\| + \|\mathbf{F}\| +\\
+\|\mathbf{M}\|\big(\|\ddot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}}\| + \|\mathbf{sig}^{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{e}_{odd})\| + \|\mathbf{sig}^{\boldsymbol{o}(2-\boldsymbol{o})^{-1}}(\boldsymbol{\Upsilon})\|\big)
\end{aligned} \tag{۳۲}$$

شایان ذکر است که برای ربات n-درجه آزادی، تعداد کلی پارامترهای آزاد مرتبط با گشتاورهای دسته دوم $2n + 4$ است. قضیه ۲ نشان می‌دهد که گشتاورهای ورودی توصیف شده با رابطه‌های (۳۱)، (۲۰) و (۳۲)، می‌توانند هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم را برای ربات n-درجه آزادی فراهم سازند.

قضیه ۲. ربات بازویی n-درجه آزادی رابطه (۱۱) را همراه با غیرخطی‌سازهای ورودی شعاعی (۱۴) و فرض‌های ۱، ۲ و ۳ درنظر بگیرید. چنانچه گشتاورهای ورودی طراحی شده با رابطه‌های (۳۱)، (۲۰) و (۳۲) به مفاصل ربات (۱۱) اعمال شوند، آنگاه هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم توصیف شده با رابطه (۱۸) فراهم شده و بردار متغیرهای پیکربندی مفاصل ربات $\boldsymbol{q}(t)$ در مدت زمان محدود $T_t = T_r + T_s$ به بردار $\boldsymbol{q_d}(t)$ می‌رسد. به عبارت دیگر، برای زمان‌های $t \geq T_t$ تساوی $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q_d}(t)$ برقرار می‌گردد. هم‌چنین، دو زمان محدود T_r و T_s می‌توانند به ترتیب توسط نامساوی‌های (۲۱) و (۳۳) تعیین شوند.

$$\begin{aligned}
&T_s = \max_i\big({}_iT_s\big), \text{with } i = 1,2,\cdots,n\\
&{}_iT_s \leq \big(\varpi_i(1-o_i)\big)^{-1}(3-o_i)\big(\Psi_i(e_{2i-1}(t=T_r), e_{2i}(t=T_r))\big)^{\frac{1-o_i}{3-o_i}}\\
&\Psi_i(e_{2i-1}, e_{2i}) = \tfrac{2-o_i}{3-o_i}|\Upsilon_i(e_{2i-1}, e_{2i})|^{\frac{3-o_i}{2-o_i}} +\\
&\qquad +\vartheta_{1_i} e_{2i}\Upsilon_i(e_{2i-1}, e_{2i}) + \tfrac{\vartheta_{2_i}}{3-o_i}|e_{2i}|^{3-o_i}\\
&\varpi_i = -\max_{(e_{2i-1}, e_{2i})\in\Xi_i}\dot{\Psi}_i(e_{2i-1}, e_{2i})\\
&\text{with } \Xi_i = \{(e_{2i-1}, e_{2i}): \Psi_i(e_{2i-1}, e_{2i}) = 1\}
\end{aligned} \tag{۳۳}$$

در رابطه (۳۳)، $i = 1, 2, \cdots, n$، ϑ_{1_i} و ϑ_{2_i} اعداد حقیقی اختیاری با شرایط $0 < \vartheta_{1_i} < 1$ و $\vartheta_{2_i} > 1$ هستند ■.

اثبات. این اثبات مشابه با اثبات قضیه ۱، دو مرحله‌ای است و مرحله اول آن کاملاً با اثبات قبلی یکسان است. بنابراین فقط اثبات مرحله دوم ارائه می‌شود. در مرحله‌ی دوم اثبات، برای زمان‌های $t \geq T_r$، دینامیک مد لغزشی $\boldsymbol{s}(t) = \boldsymbol{0}$ به صورت رابطه (۳۴) نتیجه می‌شود که از n زیرسیستم غیرخطی مرتبه دوم بدون اندرکنش تشکیل شده است.

$$\begin{aligned}
&\dot{e}_{2i-1} = e_{2i}\\
&\dot{e}_{2i} = -|e_{2i}|^{o_i}\mathrm{sign}(e_{2i}) - |\Upsilon_i|^{o_i(2-o_i)^{-1}}\mathrm{sign}(\Upsilon_i)\\
&\Upsilon_i(e_{2i-1}, e_{2i}) = e_{2i-1} + (2-o_i)^{-1}|e_{2i}|^{(2-o_i)}\mathrm{sign}(e_{2i})\\
&\text{with } i = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned} \tag{۳۴}$$

با قیاس میان هر کدام از n زیرسیستم غیرخطی رابطه (۳۴) با سیستم غیرخطی مرتبه دوم موجود در لم ۵ (رابطه‌های (۵) و (۸))، پایداری زمان-محدود دینامیک مد لغزشی (۳۴) مشخص می‌گردد و خطاهای ردیابی ربات که بر روی دینامیک مد لغزشی قرار گرفته‌اند بعد از گذشت مدت زمان محدود T_s (که توسط رابطه (۳۳) توصیف می‌شود) به صفر واقعی همگرا می‌شوند. در آخر، با توجه به دو مرحله‌ی ذکر شده نتیجه می‌شود که بردار متغیرهای پیکربندی مفاصل $\boldsymbol{q}(t)$ در مدت زمان محدود $T_t = T_s + T_r$ به بردار $\boldsymbol{q_d}(t)$ می‌رسد و شروط (۱۸) برآورده می‌شوند. اثبات قضیه ۲ در همین‌جا پایان می‌پذیرد ■.

۲-۴ طراحی گشتاورهای ورودی با فرض غیرخطی‌ساز ناحیه مرده

زیربخش‌های ۴-۲-۱ و ۴-۲-۲ به ترتیب به طراحی دسته‌های سوم و چهارم از گشتاورهای ورودی ربات با فرض وجود غیرخطی‌سازهای ناحیه مرده اختصاص یافته‌اند.

[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.5.3]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.73]

۴-۲-۱ طراحی دسته سوم از گشتاورهای ورودی ربات

برای دسته سوم از گشتاورهای ورودی، بردار خمینه‌های لغزشی غیرخطی $s(t) \in \mathfrak{R}^n$ به صورت کاملاً یکسان با رابطه (۱۹) تعریف می‌شود. گشتاورهای غیرخطی ورودی (۳۵) برای تضمین دینامیک مد لغزشی به صورت زمان–محدود پیشنهاد می‌شوند که در این رابطه، $\beta_{+i}, \beta_{-i}, u_{-i},\ u_{+i}, i = 1,2,\dots,n$ همان اعداد حقیقی مثبت موجود در غیرخطی‌ساز ناحیه مرده رابطه (۱۵) هستند.

$$
\begin{aligned}
&u_i = \begin{cases} -\xi_i \Omega \mathrm{sign}(s_\mathrm{i}) + u_{-i} & \text{if} \quad s_i > 0 \\ 0 & \text{if} \quad s_i = 0 \\ -\xi_i \Omega \mathrm{sign}(s_\mathrm{i}) + u_{+i} & \text{if} \quad s_i < 0 \end{cases} , i = 1,2,\dots,n. \\
&\Omega = \Pi_1 + \Pi_2 \text{, with } \xi_i > (\min(\beta_{+i}, \beta_{-i})^{-1} = (\beta_i^*)^{-1} \\
&h_1 = 1 - \zeta^{-1} \text{ and } h_2 = 1 + \zeta^{-1} \\
&\Pi_1 = \eta_0 \|\boldsymbol{s}\| + \eta_1 \|\boldsymbol{s}\|^{h_1} + \eta_2 \|\boldsymbol{s}\|^{h_2} \\
&\Pi_2 = \chi + \|\dot{\mathbf{M}}\| \|\boldsymbol{\theta}\| + \|\mathbf{C}\| \|\dot{\boldsymbol{q}}\| + \|\mathbf{G}\| + \|\mathbf{F}\| + \\
&\quad + \|\mathbf{M}\| (\|\ddot{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{d}}\| + \|\boldsymbol{l_1} \mathbf{sign}(\boldsymbol{e}_{odd})\| + \|\boldsymbol{l_2} \mathbf{sign}(\boldsymbol{e}_{even})\|)
\end{aligned}
\tag{۳۵}
$$

در رابطه (۳۵)، ξ_i، ζ، η_0، η_1 و η_2 اعداد حقیقی اختیاری با شرایط $\xi_i > (min\ (\beta_{+i}, \beta_{-i})^{-1}$، $\zeta > 1$، $\eta_0 \geq 0$، $\eta_1 \geq 0$ و $\eta_2 \geq 0$ هستند. واضح است که برای ربات n–درجه آزادی، تعداد کل پارامترهای اختیاری مرتبط با گشتاورهای دسته سوم $3n + 4$ است. قضیه ۳ نشان می‌دهد که گشتاورهای ورودی پیشنهادی با رابطه‌های (۱۹) و (۳۵)، می‌توانند هدف ردیابی زمان–محدود مقاوم را برای ربات n–درجه آزادی برآورده سازند.

قضیه ۳. ربات بازویی n–درجه آزادی رابطه (۱۱) را همراه با غیرخطی‌سازهای ورودی ناحیه مرده (۱۵) و فرض‌های ۱، ۲ و ۳ درنظر بگیرید. چنانچه گشتاورهای ورودی پیشنهادشده با رابطه‌های (۱۹) و (۳۵) به مفاصل ربات (۱۱) اعمال شوند، آنگاه هدف ردیابی زمان–محدود مقاوم توصیف شده با رابطه (۱۸) برآورده شده و بردار متغیرهای پیکربندی مفاصل $\boldsymbol{q}(t)$ در مدت زمان محدود $T_t = T_r + T_s$ به بردار $\boldsymbol{q_d}(t)$ می‌رسد. به عبارت دیگر، برای زمان‌های $t \geq T_t$ تساوی $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q_d}(t)$ برقرار می‌گردد. هم‌چنین، دو زمان محدود T_r و T_s می‌توانند به ترتیب توسط نامساوی‌های (۲۱) و (۲۲) تعیین شوند.

اثبات. این اثبات مشابه با اثبات قضیه‌های ۱ و ۲، دو مرحله‌ای است. مرحله اول اثبات روندی مشابه با اثبات مرحله اول قضیه‌های ۱و ۲ دارد. با طی کردن فرآیندی کاملاً یکسان با مرحله اول دو اثبات قبلی، نامساوی $\dot{V} \leq \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u}) + \|\boldsymbol{s}\| \Pi_2$ حاصل می‌شود. با استناد به $\Omega = \Pi_1 + \Pi_2$ و نامساوی $(\boldsymbol{s}^T \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u}) \leq -\Omega \sum_{i=1}^n \beta_i^* \xi_i |s_i|)$ (که اثبات آن در پیوست ۲ آمده است)، نامساوی $\dot{V} \leq (\|\boldsymbol{s}\| \Omega - \|\boldsymbol{s}\|\ \Pi_1 - \Omega \sum_{i=1}^n \beta_i^* \xi_i |s_i|)$ نتیجه می‌گردد. با تعریف $\Delta = min_i\ (\beta_i^* \xi_i)\ , i = 1,2,\dots,n$ و درنظرگرفتن $(-\sum_{i=1}^n |s_i| \leq -\|\boldsymbol{s}\|)$، نامساوی اخیر برای $\dot{V}$ به فرم ساده شده‌ی $\dot{V} \leq (\|\boldsymbol{s}\| \Omega (1 - \Delta) - \|\boldsymbol{s}\|\ \Pi_1)$ تبدیل می‌شود. از آنجایی که اعداد حقیقی دلخواه ξ_i با شرط $\xi_i > 1/\beta_i^*$ انتخاب می‌شوند، $\Delta = min_i\ (\beta_i^* \xi_i)$ همواره $\Delta > 1$ بوده و درنتیجه ترم $\|\boldsymbol{s}\| \Omega (1 - \Delta)$ همواره نامثبت خواهد بود. با اعمال این موضوع، نامساوی $\dot{V} \leq -\|\boldsymbol{s}\|\ \Pi_1$ برای $\dot{V}$ حاصل می‌شود. ادامه اثبات مرحله اول این قضیه با اثبات مرحله اول قضیه ۱ کاملاً یکسان است. اثبات مرحله دوم نیز دقیقاً با اثبات مرحله دوم قضیه ۱ یکسان است. بنابراین اثبات قضیه ۳ در همین‌جا پایان می‌پذیرد ■.

۴-۲-۲ طراحی دسته چهارم از گشتاورهای ورودی ربات

برای دسته چهارم از گشتاورهای ورودی، بردار خمینه‌های لغزشی غیرخطی $s(t) \in \mathfrak{R}^n$ به صورت همان رابطه (۳۱) تعریف می‌شود. گشتاورهای ورودی مقاوم برای تضمین دینامیک مد لغزشی به صورت زمان–محدود توسط رابطه (۳۵) پیشنهاد می‌شوند که Π_2 نیز به صورت رابطه (۳۲) اصلاح شده باشد. شایان ذکر است که برای ربات n–درجه آزادی، تعداد کلی پارامترهای آزاد مرتبط با گشتاورهای دسته چهارم $2n + 4$ است. قضیه ۴ نشان می‌دهد که گشتاورهای ورودی پیشنهادی شده با رابطه‌های (۳۱)، (۳۵) و (۳۲)، می‌توانند هدف ردیابی زمان–محدود مقاوم را برای ربات n–درجه آزادی فراهم سازند.

قضیه ۴. ربات بازویی n–درجه آزادی رابطه (۱۱) را همراه با غیرخطی‌سازهای ورودی ناحیه مرده (۱۵) و فرض‌های ۱، ۲ و ۳ درنظر بگیرید. چنانچه گشتاورهای ورودی پیشنهادشده با رابطه‌های (۳۱)، (۳۵) و (۳۲) به مفاصل ربات (۱۱) اعمال شوند، آنگاه هدف ردیابی زمان–محدود مقاوم توصیف شده با رابطه (۱۸) برآورده شده و بردار متغیرهای پیکربندی مفاصل $\boldsymbol{q}(t)$ در مدت زمان محدود $T_t = T_r + T_s$ به بردار $\boldsymbol{q_d}(t)$ می‌رسد. به عبارت دیگر، برای زمان‌های $t \geq T_t$ تساوی $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q_d}(t)$ برقرار می‌گردد. هم‌چنین، دو زمان محدود T_r و T_s می‌توانند به ترتیب توسط نامساوی‌های (۲۱) و (۳۳) تعیین شوند.

اثبات. مشابه با اثبات قضیه‌های قبلی، این اثبات نیز دو مرحله‌ای است. مرحله اول این اثبات اخیر، کاملاً با اثبات مرحله اول قضیه ۳ یکسان است.هم‌چنین، مرحله‌ی دوم این اثبات نیز کاملاً با اثبات مرحله دوم قضیه ۲ همانند است. بنابراین اثبات قضیه ۴ در همین‌جا پایان می‌پذیرد ■.

۵- نتایج شبیه‌سازی‌های کامپیوتری بر روی مدل ربات چهار درجه آزادی SCARA

برای انجام شبیه‌سازی‌ها، از یک مدل بازوی ربات صنعتی به نام SCARA [9] استفاده خواهد شد که دارای چهار درجه آزادی است. شکل ۳ تصویری از این ربات صنعتی را همراه با دستگاه‌های مختصات مفاصل نشان می‌دهد که دستگاه‌ها با توجه به قرارداد DH[1] تعیین شده‌اند و برای نوشتن معادلات سینماتیکی و دینامیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. شکل ۳ نشان می‌دهد ربات SCARA از چهار مفصل تشکیل شده که دو مفصل اول از نوع چرخشی بوده و حرکت در صفحه افقی را به وجود می‌آورند. مفصل سوم این بازوی رباتی از نوع انتقالی بوده و حرکت خطی را در راستای محور عمود بر صفحه افقی ایجاد می‌کند. مفصل چهارم که لینک سوم را به مجری نهایی متصل می‌کند، از نوع چرخشی بوده و باعث چرخش مجری نهایی حول محور عمود بر صفحه افقی می‌گردد [9]. برای این ربات، بردار متغیرهای پیکربندی مفاصل به فرم $\boldsymbol{q}(t) = [q_1(t) \quad q_2(t) \quad q_3(t) \quad q_4(t)]^T$ است که q_1 و q_2 جابجایی‌های زاویه‌ای مفصل‌های اول و دوم حول محورهای عمودی z_1, z_2، q_3

[1] Denavit-Hartenberg

جابجایی خطی مفصل سوم در راستای محور z_3 و q_4 جابجایی زاویه‌ای مجری نهایی حول محور z_4 می‌باشند. مدل دینامیکی این ربات دقیقاً از رابطه (۱۱) تبعیت می‌کند که ماتریس‌های $\mathbf{M}(\boldsymbol{q})$، $\mathbf{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ و $\mathbf{G}(\boldsymbol{q})$ با رابطه (۳۶) بیان شده‌اند.

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} p_1 + p_2\cos(q_2) & p_3 + 0.5p_2\cos(q_2) & 0 & -p_5 \\ p_3 + 0.5p_2\cos(q_2) & p_3 & 0 & -p_5 \\ 0 & 0 & p_4 & 0 \\ -p_5 & -p_5 & 0 & p_5 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} -0.5p_2\dot{q}_2\sin(q_2) & -0.5p_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\sin(q_2) & 0 & 0 \\ 0.5p_2\dot{q}_1\sin(q_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۳۶}$$
$$\mathbf{G}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.8p_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

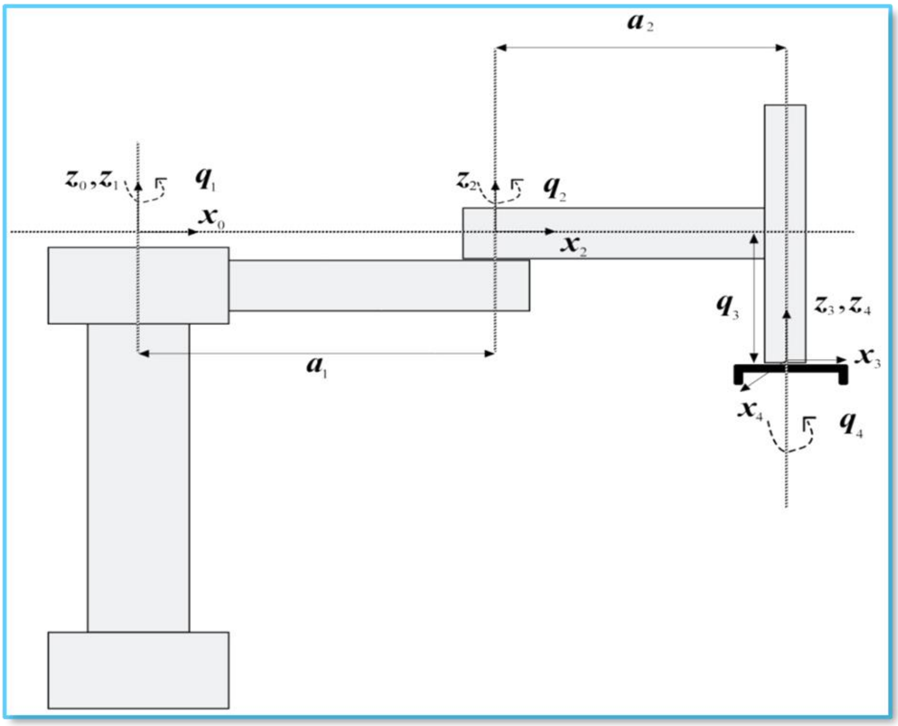
شایان ذکر است که p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 در رابطه (۳۷) معرفی شده‌اند.

$$\begin{aligned} p_1 &= m_1 a_{c_1}^2 + m_2\left(a_1^2 + a_{c_2}^2\right) + (m_3 + m_4)(a_1^2 + a_2^2) + \textstyle\sum_{i=1}^4 I_i \\ p_2 &= 2a_1 a_{c_2} m_2 + 2a_1 a_2 (m_3 + m_4) \\ p_3 &= m_2 a_{c_2}^2 + a_2^2(m_3 + m_4) + \textstyle\sum_{i=2}^4 I_i \\ p_4 &= (m_3 + m_4), p_5 = I_4 \end{aligned} \tag{۳۷}$$

مقادیر عددی مرتبط با پارامترهای فیزیکی $m_i, i = 1,2,3,4$، $I_i, i = 1,2,3,4$، a_1, a_2 و a_{c_1}, a_{c_2} در جدول ۱ آورده شده‌اند.

برای ربات صنعتی SCARA، بردار گشتاور اصطکاکی مفاصل به فرم $\mathbf{F}(\dot{\boldsymbol{q}}) = [f_1(\dot{q}_1) \quad f_2(\dot{q}_2) \quad f_3(\dot{q}_3) \quad f_4(\dot{q}_4)]^T$ است که $f_i(\dot{q}_i), i = 1,2,3,4$ از رابطه (۱۲) تعیین می‌شوند. جدول ۲، شانزده ضرایب ثابت مرتبط با چهار گشتاور اصطکاکی ربات SCARA را نشان می‌دهد. در تمام شبیه‌سازی‌های مرتبط با این بخش از مقاله، شرایط اولیه برای ربات SCARA، بردار نامعینی‌ها و بردار مسیرهای دلخواه به فرم رابطه (۳۸) درنظر گرفته شده‌اند. با توجه این $\boldsymbol{\tau_{dis}}$ و استناد به فرض ۱، $\chi(\|\boldsymbol{q}\|, \|\dot{\boldsymbol{q}}\|)$ به فرم $\chi(\|\boldsymbol{q}\|, \|\dot{\boldsymbol{q}}\|) = 0.6 + 0.2\|\boldsymbol{q}\| + 0.15\|\dot{\boldsymbol{q}}\|$ نتیجه می‌گردد.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{q}(0) = \left[\tfrac{\pi}{5} \quad \tfrac{\pi}{4} \quad 0.05 \quad \tfrac{\pi}{2}\right]^T \\ &\dot{\boldsymbol{q}}(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \\ &\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{dis}} = 0.2\boldsymbol{q} + 0.15\dot{\boldsymbol{q}} + \\ &\quad +[0.1\sin(6t) \quad 0.15\sin(4\pi t) \quad 0.2\sin(5t) \quad 0.15\sin(5\pi t)]^T \\ &\boldsymbol{q_d}(t) = \left[\tfrac{\pi}{6}\sin(t) \quad \tfrac{\pi}{8}\cos(2t) \quad 0.15 \quad \tfrac{\pi}{6}\right]^T \end{aligned} \tag{۳۸}$$



شکل ۳. تصویری از بازوی ربات صنعتی چهار درجه آزادی SCARA همراه با دستگاه‌های مختصات تعیین‌شده برای مفاصل ربات [9].

جدول ۱. مقادیر عددی پارامترهای فیزیکی ربات ضنعتی SCARA [9].

پارامتر فیزیکی	معرفی فیزیکی	مقدار عددی	پارامتر فیزیکی	معرفی فیزیکی	مقدار عددی
m_1	جرم لینک اول	$15(kg)$	I_1	ممان اینرسی لینک اول	$\mathbf{0.0287}\boldsymbol{m_1}(\boldsymbol{kg.m^2})$
m_2	جرم لینک دوم	$12(kg)$	I_2	ممان اینرسی لینک دوم	$\mathbf{0.08}\boldsymbol{m_2}(\boldsymbol{kg.m^2})$
m_3	جرم لینک سوم	$3(kg)$	I_3	ممان اینرسی لینک سوم	$\mathbf{0.05}(\boldsymbol{kg.m^2})$
m_4	جرم لینک چهارم	$3(kg)$	I_4	ممان اینرسی لینک چهارم	$\mathbf{0.02}\boldsymbol{m_4}(\boldsymbol{kg.m^2})$
a_1	طول لینک اول	$0.5(m)$	a_2	طول لینک دوم	$\mathbf{0.4}(\boldsymbol{m})$
a_{c_1}	فاصله مرکز جرم لینک اول از مفصل اول	$0.25(m)$	a_{c_2}	فاصله مرکز جرم لینک دوم از مفصل دوم	$\mathbf{0.2}(\boldsymbol{m})$

جدول۲. مقادیر عددی مرتبط با ضرایب ثابت گشتاورهای اصطکاکی مفاصل ربات صنعتی SCARA [9].

مقدار عددی	ضرایب ثابت گشتاورهای اصطکاکی	مقدار عددی	ضرایب ثابت گشتاورهای اصطکاکی
$\mathbf{0.1(N)}$	f_{c_3}	$0.49(N.m)$	f_{c_1}
$\mathbf{1.65(N)}$	f_{s_3}	$3.5(N.m)$	f_{s_1}
$\mathbf{0.08(kg/s)}$	σ_3	$0.15(kg.m/s)$	σ_1
$\mathbf{0.12(m/s)}$	ε_3	$0.19(rad/s)$	ε_1
$\mathbf{0.1(N.m)}$	f_{c_4}	$0.31(N.m)$	f_{c_2}
$\mathbf{0.7(N.m)}$	f_{s_4}	$2.8(N.m)$	f_{s_2}
$\mathbf{0.03(kg.m/s)}$	σ_4	$0.12(kg.m/s)$	σ_2
$\mathbf{0.03(rad/s)}$	ε_4	$0.15(rad/s)$	ε_2

در تمامی شبیه‌سازی‌ها از تابع هموار $\frac{2}{\pi}\arctan(100s)$ به جای تابع علامت استفاده شده است تا پدیده چترینگ (وزوز) کاهش یابد. در ادامه، چهار دسته گشتاورهای ورودی پیشنهادی به طور جداگانه بر روی ربات صنعتی SCARA مورد شبیه‌سازی قرار می‌گیرند و زیربخش‌های ۵-۱، ۵-۲، ۵-۳ و ۵-۴ به ترتیب نتایج شبیه‌سازی‌های مرتبط با دسته اول تا چهارم از گشتاوروهای غیرخطی ورودی را ارائه می‌دهند.

۵-۱ نتایج شبیه‌سازی دسته اول از گشتاورهای ورودی

در شبیه‌سازی این زیربخش، گشتاورهای ورودی پیشنهادی رابطه‌های (۱۹) و (۲۰) به ربات SCARA اعمال شده‌اند. چهار غیرخطی‌ساز شعاعی در مسیر گشتاورهای ورودی به فرم رابطه (۳۹) درنظر گرفته شده‌اند. بنابراین با مقایسه با رابطه (۱۴)، ضرایب $\alpha_i, i = 1,2,3,4$ به صورت $\alpha_1 = 2.8, \alpha_2 = 1.9, \alpha_3 = 1.35, \alpha_4 = 1$ نتیجه می‌شوند.

$$\begin{aligned} &\phi_1(u_1) = \big(3 + 0.2\sin(u_1)\big)u_1 \\ &\phi_2(u_2) = \big(2 + 0.1\sin(u_2)\big)u_2 \\ &\phi_3(u_3) = \big(1.5 + 0.15\sin(u_3)\big)u_3 \\ &\phi_4(u_4) = \big(1.1 + 0.1\cos(u_4)\big)u_4 \end{aligned} \tag{۳۹}$$

مقادیر انتخابی برای پارامترهای حقیقی و آزاد گشتاورهای ورودی دسته اول در رابطه (۴۰) آورده شده است.

$$\begin{aligned} &l_{1_1} = l_{1_2} = l_{1_3} = l_{1_4} = 10 \\ &l_{2_1} = l_{2_2} = l_{2_3} = 8, l_{2_4} = 9.9 \\ &\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1,\ \xi_4 = 1.1 \\ &\zeta = 10, \eta_0 = 0, \eta_1 = \eta_2 = 5 \end{aligned} \tag{۴۰}$$

شکل ۴، پاسخ‌های زمانی متغیرهای پیکربندی ربات صنعتی SCARA را با فرض اعمال گشتاورهای پیشنهادی (۱۹) و (۲۰) و در نظرگرفتن غیرخطی‌سازهای ورودی شعاعی (۳۹) نشان می‌دهد. با کمی دقت در این شکل، می‌توان دید که بعد از زمان محدود 2.35(sec)، چهار متغیر پیکربندی ربات به مسیرهای مورد نظر رسیده‌اند. شکل ۵، پاسخ‌های زمانی گشتاورهای غیرخطی ورودی دسته اول را به تصویر کشیده است.

۵-۲ نتایج شبیه‌سازی دسته دوم از گشتاورهای ورودی

در شبیه‌سازی این زیربخش، برای به حرکت درآوردن مفاصل ربات صنعتی SCARA گشتاورهای ورودی پیشنهادی رابطه‌های (۳۱)، (۲۰) و (۳۲) اعمال شده‌اند. چهار غیرخطی‌ساز شعاعی در مسیر گشتاورهای ورودی به فرم همان رابطه (۳۹) درنظر گرفته شده‌اند. مقادیر انتخابی برای پارامترهای آزاد گشتاورهای ورودی دسته دوم در رابطه (۴۱) آورده شده است.

$$\begin{aligned} &o_1 = o_2 = o_3 = o_4 = 0.1 \\ &l_{2_1} = l_{2_2} = l_{2_3} = 8, l_{2_4} = 9.9 \\ &\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1,\ \xi_4 = 1.1, \\ &\zeta = 10, \eta_0 = 0, \eta_1 = \eta_2 = 5 \end{aligned} \tag{۴۱}$$

شکل ۶، پاسخ‌های زمانی متغیرهای پیکربندی مفاصل ربات SCARA را با فرض اعمال گشتاورهای پیشنهادی (۳۱)، (۲۰) و (۳۲) و در نظرگرفتن غیرخطی‌سازهای ورودی شعاعی (۳۹) نشان می‌دهد. این شکل به وضوح نشان می‌دهد بعد از زمان محدود 3.75(sec)، متغیرهای پیکربندی مفاصل ربات به مسیرهای دلخواه رسیده‌اند. شکل ۷، پاسخ‌های زمانی گشتاورهای غیرخطی ورودی دسته دوم را ارائه می‌دهد.

۵-۳ نتایج شبیه‌سازی دسته سوم از گشتاورهای ورودی

در شبیه‌سازی این زیربخش، گشتاورهای ورودی پیشنهادی رابطه‌های (۱۹) و (۳۵) به ربات SCARA اعمال شده‌اند. چهار غیرخطی‌ساز ناحیه مرده در مسیر گشتاورهای ورودی به فرم رابطه (۴۲) درنظر گرفته شده‌اند. بنابراین با مقایسه با رابطه (۱۵)، ضرایب $\beta_{+i}, \beta_{-i}, u_{-i}, u_{+i}, i = 1,2,3,4$ به صورت رابطه (۴۳) نتیجه می‌شوند.

$$\begin{aligned} &\phi_1(u_1) = \begin{cases} (u_1 - 3)(1 - 0.2\sin(u_1)) & \text{if} \quad 3 < u_1 \\ 0 & \text{if} \quad -2 \le u_1 \le 3 \\ (u_1 + 2)(0.8 - 0.2\cos(u_1)) & \text{if} \quad u_1 < -2 \end{cases} \\ &\phi_2(u_2) = \begin{cases} (u_2 - 2)(0.7 - 0.2\cos(u_2)) & \text{if} \quad 2 < u_2 \\ 0 & \text{if} \quad -1 \le u_2 \le 2 \\ (u_2 + 1)(0.4 + 0.2\sin(u_2)) & \text{if} \quad u_2 < -1 \end{cases} \\ &\phi_1(u_1) = \phi_3(u_3), \phi_2(u_2) = \phi_4(u_4) \end{aligned} \tag{۴۲}$$

و

$$\begin{aligned} &\beta_{+1} = \beta_{+3} = 0.8,\ \beta_{-1} = \beta_{-3} = 0.6 \\ &\beta_{+2} = \beta_{+4} = 0.5, \beta_{-2} = \beta_{-4} = 0.2 \\ &u_{+1} = u_{+3} = 3,\ u_{-1} = u_{-3} = -2 \\ &u_{+2} = u_{+4} = 2, u_{-2} = u_{-4} = -1 \end{aligned} \tag{۴۳}$$

مقادیر اختیار شده برای برای پارامترهای آزاد گشتاورهای ورودی دسته سوم در رابطه (۴۴) آورده شده است.

$$\begin{aligned} &l_{1_1} = l_{1_2} = l_{1_3} = l_{1_4} = 10 \\ &l_{2_1} = l_{2_2} = l_{2_3} = 8, l_{2_4} = 9.9 \\ &\xi_1 = \xi_3 = 2,\ \xi_2 = \xi_4 = 6 \\ &\zeta = 10, \eta_0 = 0, \eta_1 = \eta_2 = 5 \end{aligned} \tag{۴۴}$$

شکل ۸، پاسخ‌های زمانی متغیرهای پیکربندی ربات صنعتی SCARA را با فرض اعمال گشتاورهای پیشنهادی (۱۹) و (۳۵) و در نظرگرفتن غیرخطی‌سازهای ورودی ناحیه مرده (۴۰) نشان می‌دهد. با کمی دقت در این شکل، می‌توان دید که بعد از زمان محدود 1.4(sec)، چهار متغیر پیکربندی ربات دقیقاً به مسیرهای دلخواه همگرا شده‌اند. شکل ۹، پاسخ‌های زمانی گشتاورهای ورودی دسته سوم را به تصویر کشیده است.

٤-٥ نتایج شبیه‌سازی دسته چهارم از گشتاورهای ورودی

در شبیه‌سازی این زیربخش، برای به حرکت درآوردن مفاصل ربات صنعتی SCARA گشتاورهای ورودی پیشنهادی رابطه‌های (۳۱)، (۳۵) و (۳۲) اعمال شده‌اند. چهار غیرخطی‌ساز ناحیه مرده در مسیر گشتاورهای ورودی به فرم همان رابطه (۴۲) درنظر گرفته شده‌اند و پارامترهای مرتبط با این غیرخطی‌سازها توسط همان رابطه (۴۳) نتیجه می‌شوند. مقادیر انتخابی برای پارامترهای آزاد گشتاورهای ورودی دسته چهارم در رابطه (۴۵) آورده شده‌اند.

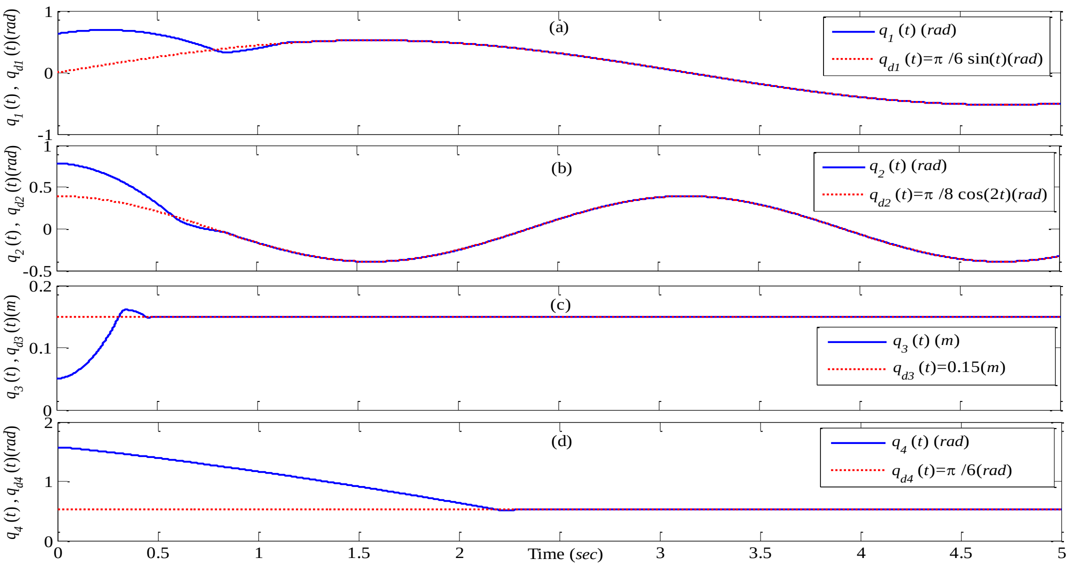
$$o_1 = o_2 = o_3 = o_4 = 0.1$$
$$\xi_1 = \xi_3 = 2 \text{ و } \xi_2 = \xi_4 = 6 \quad (٤٥)$$
$$\zeta = 10,\ \eta_0 = 0, \eta_1 = \eta_2 = 5$$

شکل ۱۰، پاسخ‌های زمانی متغیرهای پیکربندی مفاصل ربات SCARA را با فرض اعمال گشتاورهای پیشنهادی (۳۱)، (۳۵) و (۳۲) و در نظرگرفتن غیرخطی‌سازهای ورودی ناحیه مرده (۳۹) نشان می‌دهد. این شکل به وضوح نشان می‌دهد بعد از زمان محدود 3.4(sec)، متغیرهای پیکربندی مفاصل ربات به مسیرهای دلخواه رسیده‌اند. شکل ۱۱، پاسخ‌های زمانی گشتاورهای غیرخطی ورودی دسته چهارم را ارائه می‌دهد. با تمرکز بر روی شکل‌های ۴، ۶، ۸ و ۱۰ می‌توان زمان‌های همگرایی زوایای مفاصل ربات SCARA به مسیرهای مورد نظر را برای هر چهار دسته گشتاورهای طراحی شده استخراج کرد. جدول شماره ۴ این زمان‌های همگرایی را نشان می دهد.

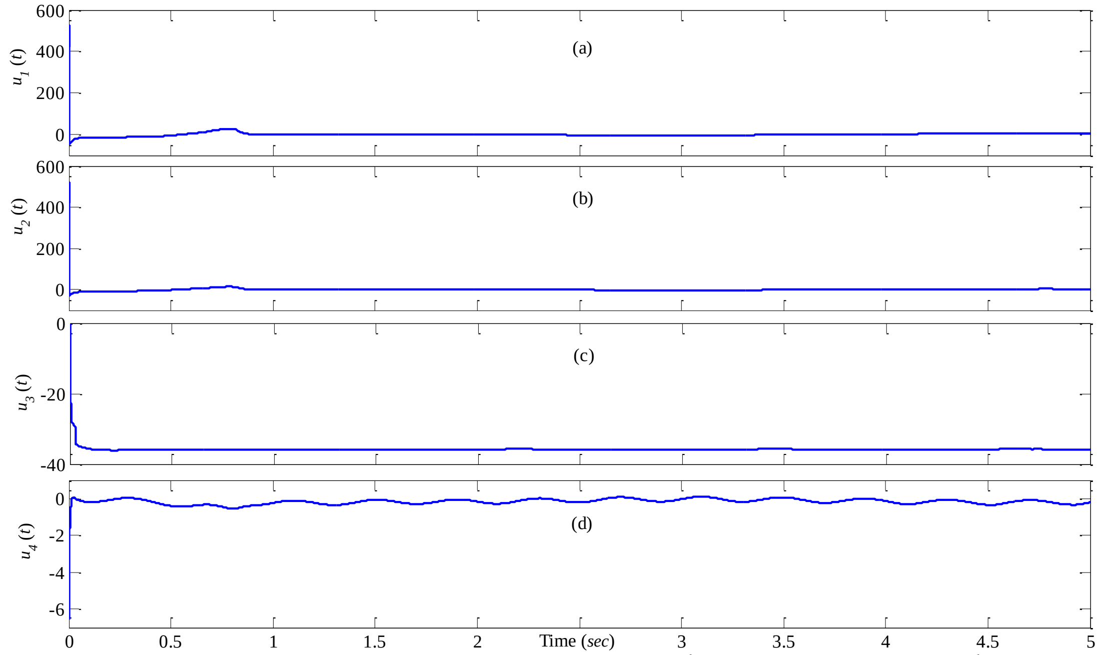
٦- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسئلهٔ ردیابی زمان-محدود سرتاسری مقاوم برای ربات بازویی n-درجه آزادی که تحت تاثیر نامعینی‌ها و غیرخطی‌سازهای ورودی شعاعی و ناحیه مرده بود، مورد بررسی قرار گرفت. با تعمیم روش غیرخطی کنترل مد لغزشی ترمینال و تعریف خمینه‌های لغزشی ابتکاری، چهار دسته‌ی مجزا از گشتاورهای غیرخطی ورودی پیشنهاد شدند تا متغیرهای پیکربندی ربات را در زمان‌های محدود قابل تنظیمی به مسیرهای دلخواه از قبل طراحی شده برسانند. برای هر دسته از گشتاورهای ورودی طراحی شده، پایداری زمان-محدود سرتاسری سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات n-درجه آزادی به صورت تحلیلی به اثبات رسید و رابطه‌ای به فرم نامساوی برای تخمین زمان محدود همگرایی استخراج شد. نتایج شبیه‌سازی عددی بر روی ربات صنعتی SCARA نشان داد که هر چهار دسته گشتاورهای ورودی پیشنهادی می‌توانند هدف ردیابی ذکر شده را به خوبی فراهم سازند.

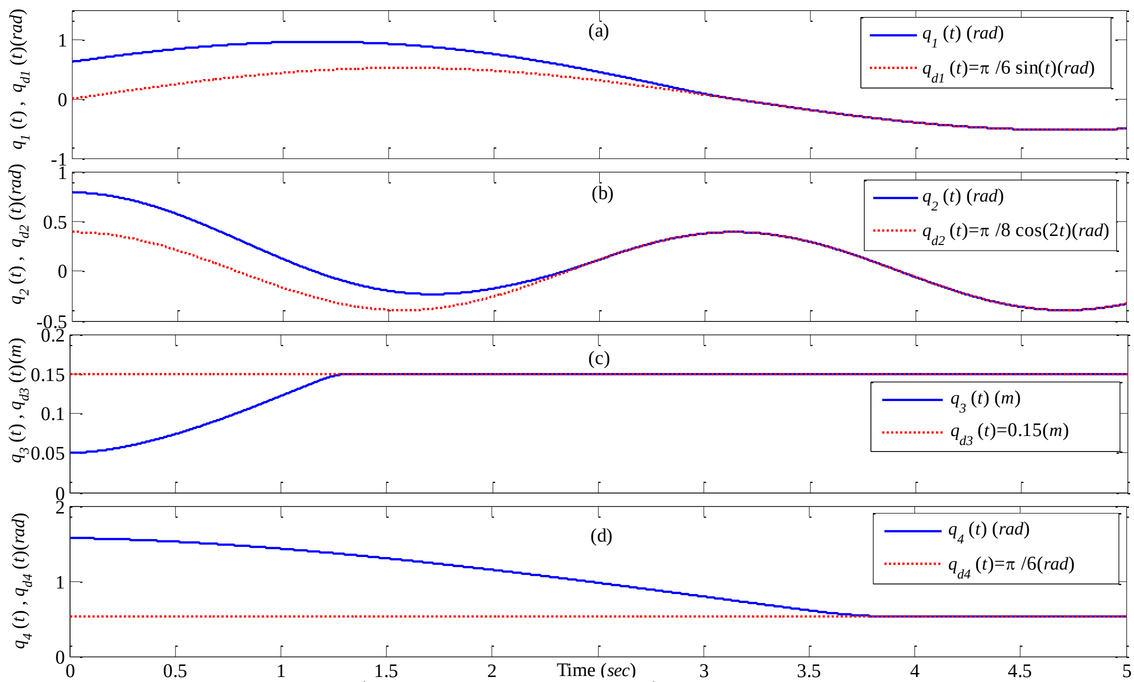
به عنوان اولین گام در راستای کارهای آینده، پارامترهای عددی مدل نیروهای اصطکاک، ثابت‌های عددی موجود در غیرخطی‌سازهای ورودی (شعاعی و ناحیه مرده) و ضرایب عددی کران بالای بردار نامعینی‌ها را نامعلوم (اما نامتغیربازمان) درنظر گرفته و با بکارگیری روش کنترل مد لغزشی ترمینال-تطبیقی، گشتاورهای ورودی پیشنهادی چنان اصلاح می‌شوند که هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم برآورده شده و قوانین تطبیق زمان-محدود برای تخمین پارامترهای عددی نامعلوم ذکر شده حاصل گردند. به عنوان گام دوم در راستای کارهای آینده، فرض خواهد شد که فقط بردار متغیرهای پیکربندی مفاصل ربات ($\boldsymbol{q} \in \Re^n$) به صورت فیزیکی در اختیار بوده و مشتق این بردار یعنی ($\dot{\boldsymbol{q}} \in \Re^n$) به صورت عملی قابل اندازه‌گیری نبوده و بنابراین به طراحی رویتگر زمان-محدود کاهش مرتبه یافته پرداخته خواهد شد تا بردار $\dot{\boldsymbol{q}} \in \Re^n$ را تخمین بزنند. در ادامه همین گام دوم، رویتگر زمان-محدود طراحی شده به سیستم حلقه‌بسته‌ی ربات n-درجه آزادی افزوده خواهد شد و پایداری زمان-محدود سرتاسری سیستم حلقه‌بسته (شامل گشتاورهای ورودی کنترلی و رویتگر)مورد بازبینی و اثبات مجدد قرار خواهد گرفت.



شکل ۴. پاسخ‌های زمانی متغیرهای پیکربندی مفاصل ربات SCARA با اعمال گشتاورهای پیشنهادی دسته اول و فرض درنظرگرفتن غیرخطی‌سازهای شعاعی. (a): پاسخ‌های زمانی $q_1(t)$ و $q_{d_1}(t)$، (b): پاسخ‌های زمانی $q_2(t)$ و $q_{d_2}(t)$، (c): پاسخ‌های زمانی $q_3(t)$ و $q_{d_3}(t)$، (d): پاسخ‌های زمانی $q_4(t)$ و $q_{d_4}(t)$.



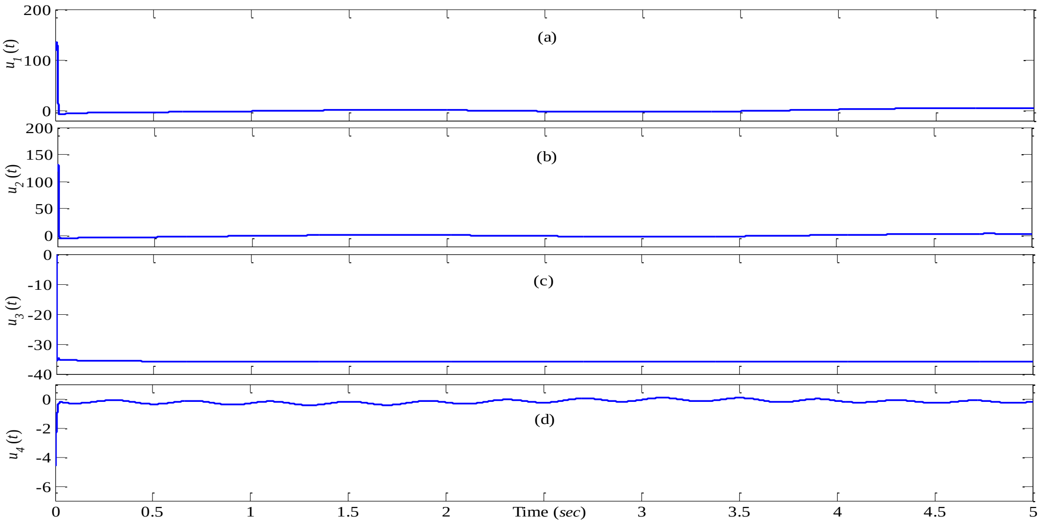
شکل ۵. پاسخ‌های زمانی گشتاورهای پیشنهادی دسته اول با فرض درنظرگرفتن غیرخطی‌سازهای شعاعی. (a): پاسخ زمانی $u_1(t)$، (b): پاسخ زمانی $u_2(t)$، (c): پاسخ زمانی $u_3(t)$، (d): پاسخ زمانی $u_4(t)$.



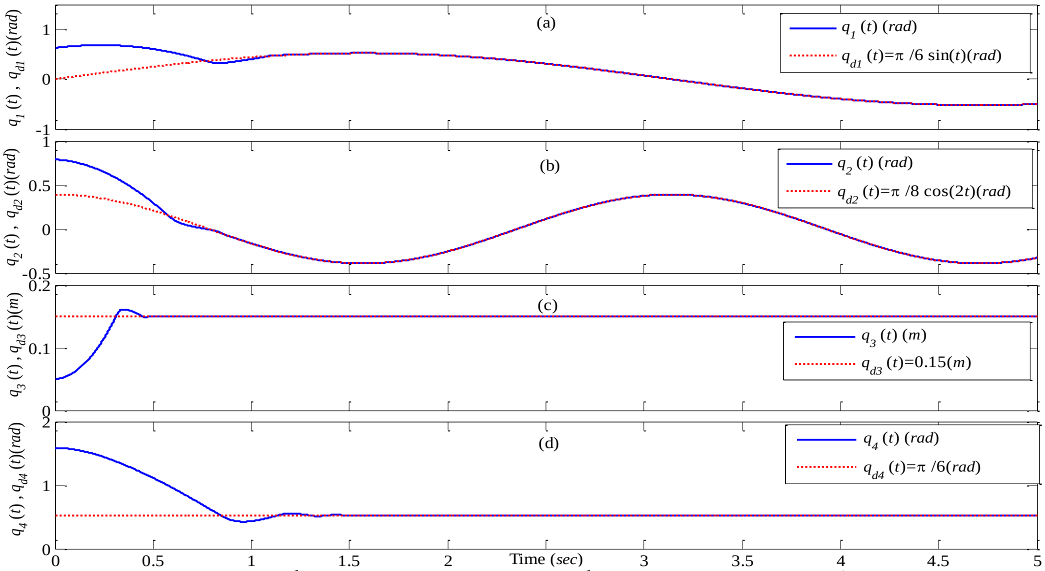
شکل ۶. پاسخ‌های زمانی متغیرهای پیکربندی مفاصل ربات SCARA با اعمال گشتاورهای پیشنهادی دسته دوم و فرض درنظرگرفتن غیرخطی‌سازهای شعاعی. (a): پاسخ‌های زمانی $q_1(t)$ و $q_{d_1}(t)$، (b): پاسخ‌های زمانی $q_2(t)$ و $q_{d_2}(t)$، (c): پاسخ‌های زمانی $q_3(t)$ و $q_{d_3}(t)$، (d): پاسخ‌های زمانی $q_4(t)$ و $q_{d_4}(t)$.

جدول۳. زمان‌های همگرایی زوایای مفاصل ربات SCARA به مسیرهای مورد نظر برای هر چهار دسته گشتاورهای طراحی شده

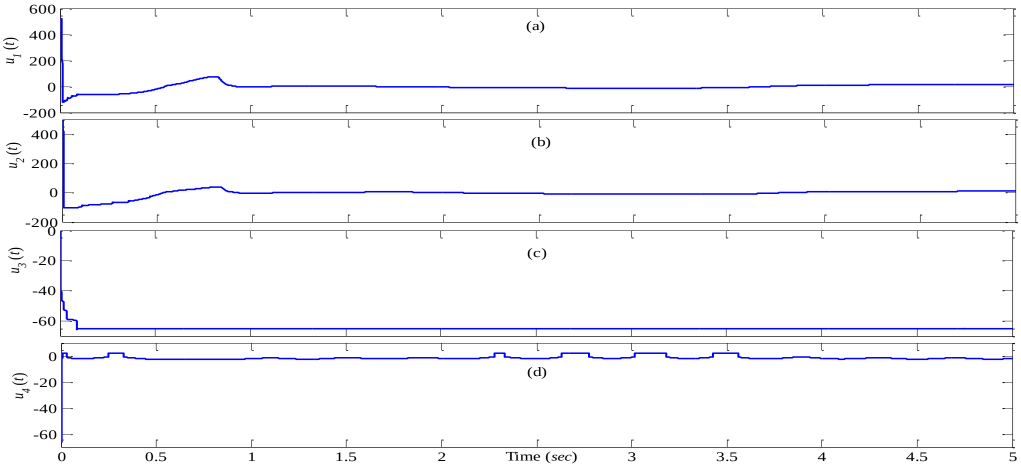
دسته گشتاور و نوع غیرخطی ساز	$q_1(t) \to q_{d_1}(t)$	$q_2(t) \to q_{d_2}(t)$	$q_3(t) \to q_{d_3}(t)$	$q_4(t) \to q_{d_4}(t)$
دسته اول از گشتاورها با غیرخطی ساز شعاعی	1.15(sec)	0.75(sec)	0.55(sec)	2.35(sec)
دسته دوم از گشتاورها با غیرخطی ساز شعاعی	3(sec)	2.45(sec)	1.3(sec)	3.75(sec)
دسته سوم از گشتاورها با غیرخطی ساز ناحیه مرده	1.1(sec)	0.8(sec)	0.5(sec)	1.4(sec)
دسته چهارم از گشتاورها با غیرخطی ساز ناحیه مرده	2.95(sec)	2.4(sec)	1.25(sec)	3.45(sec)



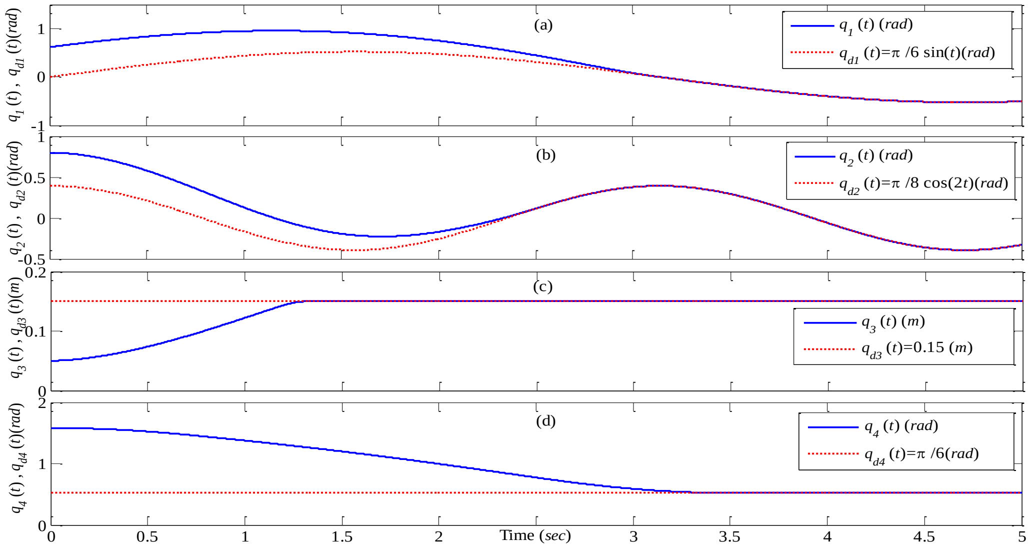
شکل ۷. پاسخ‌های زمانی گشتاورهای پیشنهادی دسته دوم با فرض درنظرگرفتن غیرخطی‌سازهای شعاعی. (a): پاسخ زمانی $u_1(t)$، (b): پاسخ زمانی $u_2(t)$، (c): پاسخ زمانی $u_3(t)$، (d): پاسخ زمانی $u_4(t)$.



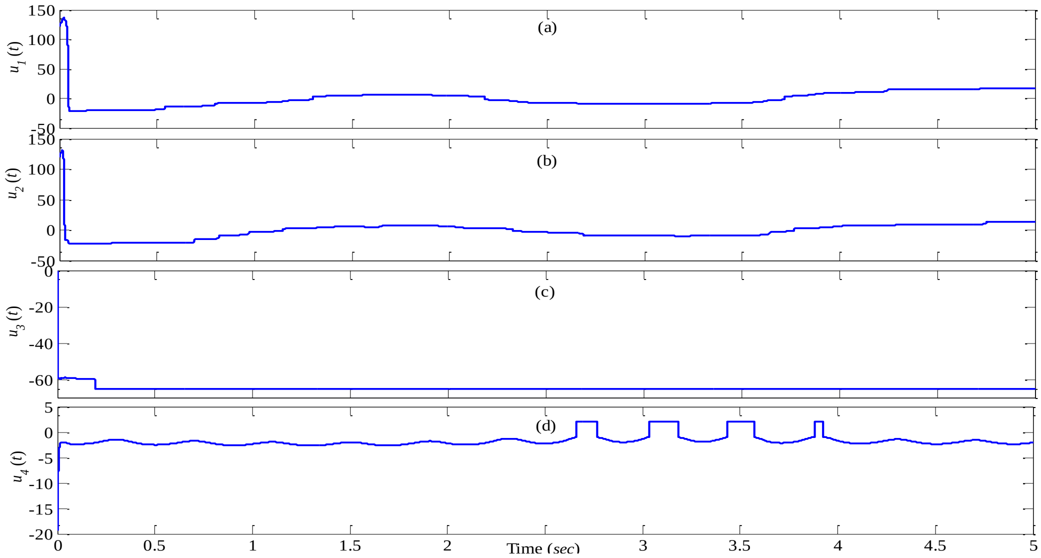
شکل ۸ پاسخ‌های زمانی متغیرهای پیکربندی مفاصل ربات SCARA با اعمال گشتاورهای پیشنهادی دسته سوم و فرض درنظرگرفتن غیرخطی‌سازهای ناحیه مرده. (a): پاسخ‌های زمانی $q_1(t)$ و $q_{d_1}(t)$، (b): پاسخ‌های زمانی $q_2(t)$ و $q_{d_2}(t)$، (c): پاسخ‌های زمانی $q_3(t)$ و $q_{d_3}(t)$، (d): پاسخ‌های زمانی $q_4(t)$ و $q_{d_4}(t)$.



شکل ۹. پاسخ‌های زمانی گشتاورهای پیشنهادی دسته سوم با فرض درنظرگرفتن غیرخطی‌سازهای ناحیه مرده. (a): پاسخ زمانی $u_1(t)$، (b): پاسخ زمانی $u_2(t)$، (c): پاسخ زمانی $u_3(t)$، (d): پاسخ زمانی $u_4(t)$.



شکل ۱۰. پاسخ‌های زمانی متغیرهای پیکربندی مفاصل ربات SCARA با اعمال گشتاورهای پیشنهادی دسته چهارم و فرض درنظرگرفتن غیرخطی‌سازهای ناحیه مرده. (a): پاسخ‌های زمانی $q_1(t)$ و $q_{d_1}(t)$، (b): پاسخ‌های زمانی $q_2(t)$ و $q_{d_2}(t)$، (c): پاسخ‌های زمانی $q_3(t)$ و $q_{d_3}(t)$، (d): پاسخ‌های زمانی $q_4(t)$ و $q_{d_4}(t)$.



شکل ۱۱. پاسخ‌های زمانی گشتاورهای پیشنهادی دسته چهارم با فرض درنظرگرفتن غیرخطی‌سازهای ناحیه مرده. (a): پاسخ زمانی $u_1(t)$، (b): پاسخ زمانی $u_2(t)$، (c): پاسخ زمانی $u_3(t)$، (d): پاسخ زمانی $u_4(t)$.

مراجع

[1] N. Adhikary and C. Mahanta, “Inverse dynamics based robust control method for position commanded servo actuators in robot manipulators,” *Control Engineering Practice*, vol. 66, no. 1, pp. 146-155, 2017.

[2] Z. Ma and G. Sun, “Dual terminal sliding mode control design for rigid robotic manipulator,” *Journal of the Franklin Institute*, doi: 10.1016/j.jfranklin.2017.01.034, Available online 4 February, 2017.

[3] M. Galicki, “Finite-time trajectory tracking control in a task space of robotic manipulator,” *Automatica*, vol. 67, no. 1, pp. 165-170, 2016.

[4] M. D. Tran and H. J. Kang, “Adaptive terminal sliding mode control of uncertain robotic manipulator based on local approximation of a dynamic system,” *Nerocomputing*, vol. 228, no. 1, pp. 231-240, 2017.

[5] K. Kaltsoukalas, S. Makris, and G. Chryssolouris, “On generating the motion of industrial robot manipulators,” *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 32, no. 1, pp. 65-71, 2015.

[6] G .Rigatos, P. Siano, and G. Raffo, “An H-infinity nonlinear control approach for multi-DOF robotic manipulator,” *IFAC-Paper Online*, vol. 49, no. 12, pp. 1406-1411, 2016.

[7] S. I. Han and J. Lee, "Finite-time sliding surface constrained control for a robot manipulator with an unknown dead-zone and disturbance," *ISA Transactions*, vol. 65, no. 1, pp. 307-318, 2016.

[8] A. Abooee, M. Moravej Khorasani, and M. Haeri, "Finite Time Control of Robotic Manipulators with Position Output Feedback," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 27, no. 16, pp. 2982-2999, 2017.

[9] A. Mohammadi, M. Tavakoli, H. J. Marquez, and F. Hashemzadeh, "Nonlinear disturbance observer design for robotic manipulators," *Control Engineering Practice*, vol. 21, no. 3, pp. 253-267, 2013.

[10] X. Wang and J. Zhao, "Autonomous switched control of load shifting robot manipulators," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 64, no. 9, pp. 7161-7170, 2017.

[11] M. Wang and A. Yang, "Dynamic learning from adaptive neural control of robot manipulators with prescribed performance," *IEEE Transactions on Systems Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 47, no. 8, pp. 2244-2255, 2017.

[12] J. Lee, P. H. Chang, and M. Jin, "Adaptive integral sliding mode control with time-delay estimation for robot manipulators," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 64, no. 8, pp. 6796-6804, 2017.

[13] G. Paolo, I. A. Ferrara, and L. Magni, "MPC for robot manipulators with integral sliding mode generation," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 22, no. 3, pp. 1299-1307, 2017.

[14] H. Wang, "Adaptive control of robot manipulators with uncertain kinematics and dynamics," *IEEE Transactions on Automatics Control*, vol. 62, no. 2, pp. 948-954, 2017.

[15] Y. Wang, L. Gu, Y. Xu, and X. Cao, "Practical tracking control of robot manipulators with continuous fractional-order nonsingular terminal sliding mode," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 63, no. 10, pp. 6194-6204, 2016.

[16] J. Baek, M. Jin, and S. Han, "A new adaptive sliding-mode control scheme for application to robot manipulators," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 63, no. 6, pp. 3628-3637, 2016.

[17] D. Nojavanzadeh and M. Badamchizadeh, "Adaptive fractional-order non-singular fast terminal sliding mode control for robot manipulators," *IET Control Theory and Applications*, vol. 10, no. 13, pp. 1565-1572, 2016.

[18] B. Baigzadehnoe, Z. Rahmani, A. Khosravi, and B. Rezaie, "On position/force tracking control problem of cooperative robot manipulators using adaptive fuzzy backstepping approach," *ISA Transactions*, vol. 70, no. 1, pp. 432-446, 2017.

[۱۹] علی ابویی، مسعود مروج خراسانی و محمد حائری، "ردیابی زمان محدود سرتاسری کلاس جامعی از سیستم های غیرخطی با استفاده از کنترل تطبیقی-لغزشی ترمینال غیرتکین" *مجله علمی و پژوهشی کنترل و ابزار دقیق*، جلد ۹، شماره ۴، تابستان ۱۳۹۴، صفحات ۳۹-۲۷.

[20] D. J. López-Araujo, A. Zavala-Río, V. Santibáñez, and F. Reyes, "Global adaptive regulation of robot manipulators with bounded inputs," *IFAC Proceedings Volume*, vol. 45, no. 22, pp. 881-888, 2012.

[21] J. Wilson, M. Charest, and R. Dubay, "Non-linear model predictive control schemes with application on a 2-link vertical robot manipulator," *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 41, no. 1, pp. 23-30, 2016.

[22] P. R. Ouyang, W. J. Zhang, and M. M. Gupta, "An adaptive switching learning control method for trajectory tracking of robot manipulators," *Mechatronics*, vol. 16, no. 1, pp. 51-61, 2006.

[23] T. Sun, H. Pei, Y. Pan, H. Zhou, and C. Zhang, "Neural network-based sliding mode adaptive control for robot manipulators," *Neurocomputing*, vol. 74, no. 14, pp. 2377-2384, 2011.

[24] P. Tomei, "Adaptive PD controller for robot manipulators," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 7, no. 4, pp. 565-570, 1991.

[25] A. Zavala-Rio and V. Santibanez, "A natural saturating extension of the PD-with-desired-gravity-compensation control law for robot manipulators with bounded inputs," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 23, no. 2, pp. 386-391, 2007.

[26] A. Zavala-Rio and V. Santibanez, "Simple extensions of the PD-with-gravity-compensation control law for robot manipulators with bounded inputs," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 14, no. 5, pp. 958-965, 2006.

[27] R. Kelly, "Global positioning of robot manipulators via PD control plus a class of nonlinear integral actions," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 7, pp. 934-938, 1998.

[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.5.3]
[DOI: 10.29252/joc.14.1.73]

[28] F. Temurtas, H. Temurtas, and N. Yumusak, "Application of neural generalized predictive control to robotic manipulators with a cubic trajectory and random disturbances," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 54, no. 1, pp. 74-83, 2006.

[29] W. He, D. O. Amoateng, C. Yang, and D. Gong, "Adaptive neural network control of a robotic manipulator with unknown backlash-like hysteresis," *IET Control Theory and Applications*, vol. 11, no. 4, pp. 567-575, 2017.

[30] C. Sun, W. He, and J. Hong, "Neural network control of a flexible robotic manipulator using the lumped spring-mass model," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 47, no. 8, pp. 1863-1874, 2017.

[31] R. J. Wai and R. Muthusamy, "Design of fuzzy-neural-network-inherited backstepping control for Robot manipulator including actuator dynamics," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 22, no. 4, pp. 709-722, 2014.

[32] M. R. Soltanpour, P. Otadolajam, M. H. Khooban, "Robust control strategy for electrically driven robot manipulators: adaptive fuzzy sliding mode," *IET Science, Measurement and Technology*, vol. 9, no. 3, pp. 322-334, 2015.

[33] Z. Li, C. Yang, C. Y. Su, S. Deng, F. Sun, and W. Zhang, "Decentralized fuzzy control of multiple cooperating robotic manipulators with impedance interaction," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 23, no. 4, pp. 1044-1056, 2015.

[34] Z. Zhang, L. Zheng, J. Yu, Y. Li, and Z. Yu, "Three recurrent neural networks and three numerical methods for solving a repetitive motion planning scheme of redundant robot manipulators," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 22, no. 3, pp. 1423-1434, 2017.

[35] M. Vijay and D. Jena. "PSO based neuro fuzzy sliding mode control for a robot manipulator," *Journal of Electrical Systems and Information Technology*, vol. 4, no. 1, pp. 243-256, 2017.

[36] P. Gierlak and M. Szuster, "Adaptive position/force control for robot manipulator in contact with a flexible environment," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 95, no. 1, pp. 80-101, 2017.

[37] N. Nikdel, M. A. Badamchizadeh, V. Azimirad, and M. A. Nazari, "Adaptive backstepping control for an n-degree of freedom robotic manipulator based on combined state augmentation," *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 44, no. 1, pp. 129-143, 2017.

[38] D. Zhang and B. Wei, "A review on model reference adaptive control of robotic manipulators," *Annual Reviews in Control*, vol. 43, no. 1, pp. 188-198, 2017.

[39] S. H. Park and S. I. Han, "Robust-tracking control for robot manipulator with dead-zone and friction using backstepping and RFNN controller," *IET Control Theory and Applications*, vol. 5, no. 12, pp. 1397-1417, 2011.

[40] W. He, Y. Dong, and C. Sun, "Adaptive neural impedance control of a robotic manipulator with input saturation," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 46, no. 3, pp. 334-344, 2016.

[41] E. Aguinaga-Ruiz, A. Zavala-Rio, V. Santibanez, and F. Reyes, "Global trajectory tracking through static feedback for robot manipulators with bounded inputs," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 17, no. 4, pp. 934-944, 2009.

[42] V. Santibanez, R. Kelly, and M. A. Liama, "A novel global asymptotic stable set-point fuzzy controller with bounded torques for robot manipulators," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 13, no. 3, pp. 362-372, 2005.

[43] W. Deng, J. Yao, and D. Ma, "Robust adaptive asymptotic tracking control of a class of nonlinear systems with unknown input dead-zone," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 352, no. 12, pp. 5686-5707, 2015.

[44] S. Hasanzadeh, F. Janabi-Sharifi, and P. Keenan, "Backlash characterization and position control of a robotic catheter manipulator using experimentally-based kinematic model," *Mechatronics*, vol. 44, no. 1, pp. 94-106, 2017.

[45] K. C. Hsu, W. Y. Wang, and P. Z. Lin, "Sliding mode control for uncertain nonlinear systems with multiple inputs containing sector nonlinearities and dead-zones," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, vol. 34, no. 1, pp. 374-380, 2004.

[46] B. K. Dinh, M. Xiloyannis, L. Cappello, C. W. Antuvan, S. C. Yen, and L. Masia, "Adaptive backlash compensation in upper limb soft wearable exoskeletons," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 92, no. 1, pp. 173-186, 2017.

[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.5.3]

[DOI: 10.29252/joc.14.1.73]

[47] T. Yang, S. Yan, and Z. Han, “Nonlinear model of space manipulator joint considering time-variant stiffness and backlash,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 341, no. 1, pp. 246-259, 2015.

[48] A. Abooee and M. Haeri, “Stabilization of commensurate fractional order polytopic nonlinear differential inclusion subject to input nonlinearity and unknown disturbances,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 7, no. 12, pp. 1624-1633, 2013.

[۴۹] علی ابویی و محمد حائری، "سنکرون‌سازی دو شمول دیفرانسیلی لور با وجود پارامترهای نامعلوم و غیرخطی‌ساز شعاعی در مسیر ورودی‌های کنترلی" *مجله علمی و پژوهشی کنترل و ابزار دقیق*، جلد ۷، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۲، صفحات ۶۹-۵۷.

[50] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, “Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 5, pp. 678-682, 1998.

[51] Z. Zuo and L. Tie, “A new class of finite-time nonlinear consensus protocols for multi-agent systems,” *International Journal of Control*, vol. 87, no. 2, pp. 363-370, 2016.

[52] A. Polyakov, D. Efimov, and W. Perruquetti, “Finite-time and fixed-time stabilization: Implicit Lyapunov function approach,” *Automatica*, vol. 51, no. 1, pp. 332-340, 2015.

[53] X. H. Zhang, K. Zhang, and X. J. Xie, “Finite-time output feedback stabilization of nonlinear high-order feed forward systems,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 26, no. 8, pp. 1794-1814, 2016.

[54] S. E. Parsegov, A. E. Polyakov, and P. S. Shcherbakov, “Fixed-time consensus algorithm for multi-agent systems with integrator dynamics,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 46, no. 27, pp. 110–115, 2013.

[55] Y. Feng, X. Yu, and F. Han, “On nonsingular terminal sliding-mode control of nonlinear systems,” *Automatica*, vol. 49, no. 6, pp. 1715-1722, 2013.

[56] Y. Zhang, G. Liu, and B. Luo, “Finite-time cascaded tracking control approach for mobile robots,” *Information Sciences*, vol. 284, no. 1, pp. 31-43, 2014.

[57] S. Mondal and C. Mahanta, “Adaptive second order terminal sliding mode controller for robotic manipulators,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 351, no. 4, pp. 2356-2377, 2014.

[58] Z. Zuo, “Nonsingular fixed-time consensus tracking for second-order multi-agent networks,” *Automatica*, vol. 54, no. 1, pp. 305–309, 2015.

[59] A. Abooee, M. Moravej Khorasani, and M. Haeri “Global Finite Time Stabilization of a Class of Uncertain MIMO Nonlinear Systems,” *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 138, no. 2, pp 021007 (1-9), 2016.

[60] H. Liu, T. Zhang, and X. Tian, “Continuous output-feedback finite-time control for a class of second-order nonlinear systems with disturbances,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 26, no. 2, pp. 218-234, 2016.

[61] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, “Geometric homogeneity with applications to finite-time stability,” *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 17, no. 2, pp. 101-127, 2005.

[62] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, “Finite-time stability of continuous autonomous systems,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 38, no. 3, pp. 751-766, 2000.

[63] M. Defoort, A. Polyakov, G. Demesure, M. Djemai, and K. Veluvolu, “Leader-follower fixed-time consensus for multi-agent systems with unknown non-linear inherent dynamics,” *IET Control Theory and Applications*, vol. 9, no. 14, pp. 2165–2170, 2015.

[64] A. Polyakov and A. Poznyak, “Lyapunov function design for finite-time convergence analysis: “Twisting” controller for second-order sliding mode realization,” *Automatica*, vol. 45, no. 2, pp. 444-448, 2009.

پیوست ۱. اثبات نامساوی $(\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u}) \le -\Omega\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i|s_i|)$ با درنظرگرفتن گشتاورهای (۲۰) و غیرخطی‌سازهای شعاعی (۱۴).

با جایگذاری u_i از رابطه (۲۰) در نامساوی مرتبط با غیرخطی‌ساز شعاعی (۱۴)، رابطه (۱-۱)حاصل می‌شود.

$$\alpha_i\xi_i^2\Omega^2\mathrm{sign}^2(s_\mathrm{i}) \le -\xi_i\Omega\mathrm{sign}(s_\mathrm{i})\phi_i(u_i) \text{ with } i=1,2,\cdots,n. \qquad (۱-۱)$$

حال با ضرب ترم s_i^2 در طرفین نامساوی (۱-۱) و درنظر گرفتن حقیقت $s_i\mathrm{sign}(s_\mathrm{i})=|s_\mathrm{i}|$، رابطه (۱-۲) نتیجه می گردد.

$$\alpha_i\xi_i^2\Omega^2|s_\mathrm{i}|^2 \le -\xi_i\Omega|s_\mathrm{i}|\, s_i\phi_i(u_i) \;\text{ with } i=1,2,\cdots,n. \qquad (۱-۲)$$

با توجه به مثبت بودن ترم $\xi_i\Omega|s_\mathrm{i}|$ و حذف این ترم از طرفین نامساوی (۱-۲)، نامساوی رابطه (۱-۳) حاصل می گردد.

$$s_i\phi_i(u_i) \le -\alpha_i\xi_i\Omega|s_\mathrm{i}| \;\text{ with } i=1,2,\cdots,n. \qquad (۱-۳)$$

بدیهی است که $(\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n}s_i\phi_i(u_i) \le -\Omega\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i|s_i|)$ از رابطه (۱-۳) به راحتی نتیجه می‌شود و اثبات پایان می‌پذیرد ■.

[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.1.5.3]

[DOI: 10.29252/joc.14.1.73]

پیوست ۲. اثبات نامساوی $(\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u}) \leq -\Omega\sum_{i=1}^{n}\beta_i^*\xi_i|s_i|)$ با درنظرگرفتن گشتاورهای (۳۵) و غیرخطی‌سازهای ناحیه مرده (۱۵).

با درنظر گرفتن $s_i < 0$ و استناد به گشتاورهای ورودی (۳۵)، نامساوی $u_i > u_{+i}$ نتیجه می‌شود. در ادامه با ارجاع به همین $u_i > u_{+i}$ و غیرخطی‌ساز ناحیه مرده (۱۵) و $\beta_i^* = \min\,(\beta_{+i},\beta_{-i})$، رابطه (۲–۱) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}&(u_i - u_{+i})\phi_i(u_i) = \\ &-\xi_i\Omega\mathrm{sign}(s_i)\phi_i(u_i) \geq \beta_{+i}\xi_i^2\Omega^2\mathrm{sign}^2(s_i) \geq \beta_i^*\xi_i^2\Omega^2\mathrm{sign}^2(s_i) \\ &\text{with } i = 1,2,\cdots,n.\end{aligned} \quad (۲–۱)$$

در ادامه با درنظر گرفتن $s_i > 0$ و استناد به گشتاورهای ورودی (۳۵)، نامساوی $u_i < u_{-i}$ نتیجه می‌گردد. در ادامه باتوجه به $u_i < u_{-i}$ و غیرخطی‌ساز ناحیه مرده (۱۵)، رابطه (۲–۲) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}&(u_i - u_{-i})\phi_i(u_i) = \\ &-\xi_i\Omega\mathrm{sign}(s_i)\phi_i(u_i) \geq \beta_{-i}\xi_i^2\Omega^2\mathrm{sign}^2(s_i) \geq \beta_i^*\xi_i^2\Omega^2\mathrm{sign}^2(s_i) \\ &\text{with } i = 1,2,\cdots,n.\end{aligned} \quad (۲–۲)$$

بنابراین برای هر دو حالت $s_i < 0$ و $s_i > 0$، همواره نامساوی $-\xi_i\Omega\mathrm{sign}(s_i)\phi_i(u_i) \geq \beta_i^*\xi_i^2\Omega^2\mathrm{sign}^2(s_i)$ برقرار خواهد بود. با ضرب ترم s_i^2 در طرفین همین نامساوی اخیر و درنظرگرفتن حقیقت $s_i\mathrm{sign}(s_i) = |s_i|$، به نامساوی رابطه (۲–۳) خواهیم رسید.

$$s_i\phi_i(u_i) \leq -\beta_i^*\xi_i\Omega|s_i| \quad \text{with } i = 1,2,\cdots,n. \quad (۲–۳)$$

بدیهی است که $(\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n}s_i\phi_i(u_i) \leq -\Omega\sum_{i=1}^{n}\beta_i^*\xi_i|s_i|)$ از رابطه (۲–۳) به راحتی بدست می‌آید و اثبات پایان می‌پذیرد ■.