

طراحی کنترل کننده‌ی PID بهینه‌ی مقید: رویکرد بهینه‌سازی محدب - مقعر

بهروز یونسی^۱، اشکان سبغتی^۲، سعید شماغداری^۳

^۱ کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه علم و صنعت ایران، behroz_unasi@elec.iust.ac.ir

^۲ کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه علم و صنعت ایران، asebgathi@elec.iust.ac.ir

^۳ استادیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه علم و صنعت ایران، shamaghdari@iust.ac.ir

پذیرش: ۱۳۹۷/۰۹/۱۲

ویرایش دوم: ۱۳۹۷/۰۶/۱۵

ویرایش اول: ۱۳۹۷/۰۲/۳۰

دریافت: ۱۳۹۶/۰۶/۱۸

چکیده: در این مقاله الگوریتمی برای بهبود طراحی کنترل کننده‌ی PID مقید براساس بهینه‌سازی محدب - مقعر ارائه شده است. این روش طراحی مبتنی بر بهینه‌سازی یک تابع عملکرد با در نظر گرفتن قیود پایداری و کارایی با تحلیل در حوزه‌ی فرکانس می‌باشد که در آن از مفاهیم حساسیت و مکمل حساسیت استفاده شده است. با یک مثال نقض نشان داده می‌شود که روش‌های قبلی، برای دسته‌ای از سیستم‌ها کارایی ندارد و مسئله‌ی بهینه‌سازی، به صورت نامحدود از بالا شده و متوقف می‌شود. برای رفع این مشکل، به شرایطی که مسئله‌ی بهینه‌سازی، دارای جواب نیست پرداخته شده و با ارائه‌ی روش جدید طراحی، محدودیت‌های قبلی برطرف می‌گردد. کارایی روش پیشنهادی، با طراحی کنترل کننده‌ی PID برای مثال نقض نشان داده می‌شود. در انتها، کنترل کننده برای یک سیستم ناپایدار طراحی می‌شود.

کلمات کلیدی: طراحی کنترل کننده‌ی PID، بهینه‌سازی محدب - مقعر، پایداری، قیود حساسیت و مکمل حساسیت.

Constrained Optimal PID Controller Design: Convex-Concave Optimization Approach

Behrooz Yonesie, Ashkan Sebghati, Saeed Shamaghdari

Abstract: In this paper, an algorithm is proposed to improve the constrained PID control design based on the convex-concave optimization. The control system is designed by optimizing a performance cost function, taking into account the stability and efficiency constraints with frequency domain analysis in which the sensitivity and complementary sensitivity concepts are used. It is shown, using a counter example, the previous methods are not effective for some systems, the optimization problem becomes unbounded and interrupted. To solve the problem, conditions where the optimization problem fails to have a response are analyzed and the previous limitations are eliminated by representing a new designing method. The performance of the proposed scheme is shown by applying it to the counter example. Moreover, the control system is designed for an unstable system.

Keywords: PID control design, convex-concave optimization, stability, sensitivity and complementary sensitivity constraints.

۱- مقدمه

کنترل کننده‌های PID به علت سادگی، مقاوم بودن، دارا بودن طیف گسترده‌ای از کاربردها و قابلیت عملکرد نزدیک به بهینه، به عنوان پرکاربردترین کنترل کننده‌ها در صنعت استفاده می‌شوند. براساس یک پژوهش، نود درصد کنترل کننده‌ها در صنعت از نوع PID هستند [۱]. یکی از مهم ترین موضوعات، نحوه‌ی مناسب تنظیم نمودن پارامترهای کنترل کننده‌ی PID است به نحوی که سیستم حلقه بسته دارای پاسخ مقاوم نسبت به تغییر پارامترهای مدل، دارای بیشترین کاهش اثر نویز در خروجی و دارای قابلیت حداکثری از بین بردن اغتشاش در خروجی باشد. تاکنون روش های مختلفی برای تنظیم پارامترهای کنترل کننده‌ی PID ارائه شده است. از جمله، روش زیگلر-نیکولز است که از اولین روش های مطرح شده برای تنظیم پارامترهای کنترل کننده‌ی PID است [۲،۳،۴]. این روش به دلیل استفاده‌ی حداقلی از دینامیک سیستم، با تنظیم پارامترهای کنترل کننده، معمولاً پاسخ مناسبی را نتیجه نمی‌دهد. این گونه روش ها بر تضعیف اغتشاش خروجی تمرکز دارد اما در این کنترل کننده‌ها مقاوم بودن در برابر عدم قطعیت فرآیند و نویز اندازه گیری، لحاظ نشده و در نتیجه قانون های تنظیم مربوطه، کنترل کننده‌هایی با ضعف مقاوم بودن در برابر عدم قطعیت فرآیند و نویز اندازه گیری را ارائه می نمایند. روش کنترل مدل داخلی (IMC^1) یک روش عمومی برای طراحی است و می توان از آن برای طراحی کنترل کننده‌ی PID استفاده نمود [۵]. روش تنظیم پارامترهای کنترل کننده‌ی PID با استفاده از کنترل مدل داخلی که توسط نویسندگان [۶] انجام شد، ثابت زمانی سیستم حلقه بسته را به عنوان پارامتر تنظیم در نظر می گیرد تا میان عملکرد و مقاوم بودن، مصالحه برقرار نماید. Skogestad، اصلاحاتی بر این روش با هدف بهبود عملکرد فرآیندهای lag-dominant انجام داد که $SIMC^2$ نام دارد. این روش توسط Skogestad و Grimholt برای فرآیندهای delay-dominant بهبود یافت [۶]. روش هالمن و روش تنظیم پارامتر، دارای اساس مشترک حذف قطب ها و صفرهای سیستم با قطب ها و صفرهای کنترل کننده است. نقطه ضعف این روش، آن است که حذف قطب و صفر ممکن است به حالت غیر قابل کنترل در سیستم حلقه بسته منجر شود [۷]. در روش های گرافیکی که جزو روش های حسی هستند، هدف، به دست آوردن مراکز نواحی پلیدار در فضای پارامترهای کنترل کننده برای انتخاب نقطه‌ی مناسب است؛ به نحوی که به مقدار کافی از مرز نواحی پایداری فاصله داشته باشد [۸]. روش بهینه سازی ضریب انتگرالی مقید^۳، برای پیشینه نمودن ضریب انتگرالی با در نظر گرفتن حداکثر حساسیت می باشد.

عین این روش، محدب نبودن مسئله، پیچیدگی و محاسبات زیاد آن است [۹]. روش های ساده ای همانند زیگلر-نیکولز دارای پاسخ مناسب نمی باشند و نیز روش هایی همانند بهینه سازی ضریب انتگرالی مقید، در ضمن دارا بودن پاسخ مناسب، دارای محاسبات فراوان است. به همین علت، روش $AMIGO^4$ و روش تنظیم $Kappa-Tau$ ابداع شد [۱۰]. Astrom و Hagglund در قوانین تنظیم $AMIGO$ ، معیار IE^5 را با لحاظ قید مقاوم بر حساسیت ترکیبی، کمینه کرده بودند اما نویز اندازه گیری را لحاظ نمودند [۶].

امروزه روش های پیچیده تر، که علاوه بر طراحی پارامترهای کنترل کننده به بهینه سازی کنترل کننده هم می پردازند ارائه شده است. مرجع [۱۱] روشی برای طراحی تنظیم کننده‌ی تناسبی - انتگرالی برای دسته‌ی خاصی از سیستم های غیر خطی ارائه نموده است که در آن، طراحی به کمک بهینه سازی مجموع مربعات، انجام می گیرد. روش ارائه شده، بر مبنای تابعی به نام تابع چگالی، تبدیل به یک مسئله‌ی بهینه سازی محدب می گردد و مقاوم بودن آن در برابر عدم قطعیت، تضمین شده است. یکی از مزایای این روش، عدم نیاز به پایدار بودن سیستم مورد بررسی است. در [۱۲]، کنترل فرکانس بار^۶ در دو شبکه‌ی قدرت با استفاده از کنترل کننده‌ی PID، مورد مطالعه قرار می گیرد. روش های طراحی کنترل کننده در این مقاله، عبارتند از: بهینه سازی ازدحام ذرات^۷، بهینه سازی وزدن دار تطبیقی ازدحام ذرات^۸، AACPSO^۹ و ANFIS^{۱۰}. روشی که در [۱۳] ارائه شده است، با استفاده از الگوریتم آموزشی - یادگیری^{۱۱} مبتنی بر بهینه سازی، به طراحی کنترل کننده‌ی PID برای کنترل تولید نیروی خود کار^{۱۲} دو سیستم گرمایی متصل به هم با منطقه های متفاوت، می پردازد. در مثال بررسی شده در [۱۳]، نشان داده شده است که این روش نسبت به روش های $LCOA^{13}$ ، GA^{14} ، PS^{15} و SA^{16} که مبتنی بر PID هستند، از منظر زمان نشست، بالادستی و پایین زدگی، دارای عملکرد دینامیکی بهتری می باشد. همچنین نشان داده شده است که این کنترل کننده در برابر تغییرات وسیع پارامترهای سیستم، مقاوم بوده و نیاز به طراحی مجدد کنترل کننده نیست. روش دیگر، طراحی کنترل کننده های $IT2FPID^{17}$ ، مبتنی بر بهینه سازی برای مسئله‌ی کنترل فرکانس بار است. در الگوریتم $BB-BC^{18}$ برای تنظیم نمودن ضریب وزندهی و اثر عدم قطعیت، توابع عضویت کنترل کننده های $IT2FPID$ به کار برده می شود تا انحراف های فرکانسی سیستم در برابر اغتشاش های بار را کمینه نماید. $BB-BC$ ، یک الگوریتم بهینه سازی عمومی است و دارای بار محاسباتی کم و سرعت هم گرایی بالا می باشد و بنابراین هنگامی که تعداد پارامترهای بهینه سازی زیاد باشد، مناسب است [۱۴]. [۱۵] روشی در مورد طراحی

¹⁰ Adaptive Neuron Fuzzy Inference System¹¹ Teaching-Learning Based Optimization (TLBO)¹² Automatic Generation Control (AGC)¹³ Lozi Map Based Chaotic Optimization Algorithm¹⁴ Genetic Algorithm¹⁵ Pattern Search¹⁶ Simulated Algorithm¹⁷ Interval Type-2 Fuzzy PID (IT2FPID)¹⁸ Big-Bang Big-Crunch¹ Internal Model Control² Skogestad Internal Model Control³ Constrained Integral Gain Optimization⁴ Approximate Ms-Constrained Integral Gain Optimization⁵ Integral of Error⁶ Load Frequency Control (LFC)⁷ Particle Swarm Optimization⁸ Adaptive weight Particle Swarm Optimization⁹ Adaptive Acceleration Coefficients based PSO

بهینه‌نمودن یک معیار می‌پردازند؛ این روش‌ها با این که از روش‌های قبل، کاربردی‌تر می‌باشند، محدودیت‌های سیستم را در نظر نمی‌گیرند و از این جهت دارای ضعف می‌باشند. یکی از روش‌هایی که علاوه بر بهینه‌نمودن یک تابع هزینه، قیود سیستم را برای طراحی کنترل کننده‌ی PID در نظر می‌گیرد در سال ۲۰۱۳ در [۱۸] ارائه شد. در آن‌جا، روشی برای طراحی کنترل کننده‌ی PI و PID، به صورت حل یک مسئله‌ی بهینه‌سازی مقید برای سیستم‌های خطی ارائه شده است. یک محدودیت مهم و قابل توجه این روش، واگرا شدن الگوریتم ارائه شده برای برخی سیستم‌ها است. در این پژوهش، علاوه بر ارائه‌ی یک مثال برای نشان دادن وجود این محدودیت در الگوریتم مقاله [۱۸]، یک قضیه که بیان گر شرایط لازم برای همگرا شدن مسئله‌ی طراحی کنترل کننده است، آورده شده است. روشی که در این مقاله ارائه می‌شود، کنترل کننده‌ی PID با هدف کاهش خطای ردیابی با لحاظ نمودن قیود حساسیت است. تفاوت اصلی این پژوهش با [۱۸] اضافه نمودن یک قید محدب اضافه است تا الگوریتم حل مسئله، موفق به طراحی کنترل کننده با عملکرد مورد نظر شود.

در ادامه در بخش ۲، روش طراحی کنترل کننده‌ی PID مقید بر اساس بهینه‌سازی محدب - مقعر بیان می‌گردد. بخش ۳، محدودیت این روش را با یک مثال نقض نشان می‌دهد. در بخش ۴، روش پیشنهادی در این مقاله معرفی می‌شود و با ارائه‌ی چند مثال در بخش ۵، نشان داده می‌شود که روش پیشنهادی ضمن رفع مشکل نامحدود شدن الگوریتم، عملکرد مناسبی دارد.

۲- طراحی کنترل کننده‌ی PID مقید بر اساس بهینه‌سازی محدب - مقعر

هدف اصلی این پژوهش طراحی کنترل کننده‌ی PID با بهینه‌سازی کارایی در ضمن قیدهای حساسیت و مکمل حساسیت می‌باشد. ساختار کنترل کننده در رابطه‌ی زیر آمده است و ساختار سیستم حلقه بسته به صورت فیدبک واحد می‌باشد. $P(s)$ تابع تبدیل سیستم و $C(s)$ تابع تبدیل کنترل کننده می‌باشد.

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (1)$$

از آنجایی که هدف، کاهش خطای حالت ماندگار است، ابتدا رابطه‌ی

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (2)$$

PID بهینه برای سیستم‌های 1^{st} IPT، ارائه نموده است. این سیستم‌ها ذاتاً شبکه‌های نوسانی مرتبه بالا می‌باشند. به همین علت اگر مشخصات متنوعی از پاسخ سیستم مدنظر باشد، با یک مسئله‌ی چندهدفه روبه‌رو می‌شویم که بهینه‌سازی مستقیم ضرایب PID در این حالت، اغلب منجر به یک مسئله‌ی غیرمحدب می‌شود. برای رفع این مشکل، این مقاله، شیوه‌ی بهینه‌سازی آزاد از مشتق^۲ مبتنی بر الگوریتم ژنتیک را برای تعیین ضرایب بهینه‌ی PID، بیان نموده است. این روش، بار محاسباتی معقولی دارد و اغلب در نقطه‌ی کمینه‌ی محلی، متوقف نمی‌شود. در [۱۶]، برای طراحی بهینه‌ی کنترل کننده‌ی PID با استفاده از شیوه‌ی $TCGA^3$ ، برای سیستم AVR^4 ، یک روش ارائه شده است. در [۱۷]، یک طراحی با بهینه‌سازی چند هدفه، برای کمینه ساختن بیش‌ترین درصد بالازدگی، زمان اوج، زمان نشست و خطای حالت مانای ولتاژ انتهایی ژنراتور سنکرون، معرفی گردیده است. با این روش، پاسخ پله‌ی سیستم AVR می‌تواند بهبود یابد.

در ادامه، روش‌های ارائه شده برای طراحی کنترل کننده‌ی PID بهینه در ضمن وجود قیدهایی بر سیستم آورده شده است. این روش‌ها به علت این که محدودیت‌های سیستم را در نظر می‌گیرند، نسبت به روش‌های قبل برای پیاده‌سازی مناسب‌تر می‌باشند. در [۱۷]، روشی برای طراحی کنترل کننده‌ی PID بر اساس بهینه‌سازی غیرمحدب، بیان شده است. این روش، روشی عددی است که هدف، حذف اغتشاش با قیود حساسیت و وزن دهی پاسخ به ورودی مرجع می‌باشد. مقاوم بودن در برابر عدم قطعیت سیستم، اغتشاش بار و سیگنال مرجع، در این روش لحاظ شده است. در این‌جا، یک مسئله‌ی بهینه‌سازی حل می‌شود. تابع هدف، کاهش اغتشاش خروجی است و قید روی حداکثر حساسیت می‌باشد و معادلات، به صورت جبری خواهند بود. رویکردهای جدید این مقاله عبارتند از: آنالیز قیود حساسیت و شیوه‌ی مشخص کننده‌ی وزن دهی به سیگنال مرجع. در [۱۸] روشی را برای طراحی کنترل کننده‌ی PI و PID، به صورت حل یک مسئله‌ی بهینه‌سازی مقید، ارائه نموده است. تابع هدف در نظر گرفته شده، بیشینه نمودن ضریب انتگرال گیر می‌باشد. این کار سبب می‌شود تا معیار IE، کمینه شود و چنانچه سیستم در حالت نوسانی قرار نگیرد، معیار IAE^5 نیز کمینه می‌گردد. همچنین افزایش ضریب انتگرال گیر k_i ، قدرت دفع اغتشاش را افزایش داده و زمان پاسخ سیستم را کاهش می‌دهد. دو قید حساسیت و مکمل حساسیت، برای مقاوم نمودن سیستم حلقه بسته و جلوگیری از بزرگ شدن بیش از حد k_i ، در نظر گرفته شده است.

به علت در نظر نگرفتن قیود موجود در سیستم‌های عملی، روش‌های ابتدایی، همانند [۲]، [۷] و [۸] که به طراحی پارامترهای PID می‌پردازند، پاسخ‌گوی نیازهای پژوهشگران نمی‌باشند. روش‌هایی که در مقالاتی نظیر [۱۴] و [۱۵] آمده است علاوه بر طراحی ضرایب کنترل کننده، به

⁴ Automatic Voltage Regulator

⁵ Integral of Absolute Error

¹ Inductive Power Transfer

² Derivative-Free

³ Taguchi Combined Genetic Algorithm

رابطه ی زیر را دارد که مسئله ی بهینه سازی محدب-مقعر، نام گذاری شده است.

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) - g_0(x) \\ \text{subject to} \quad & f_i(x) - g_i(x) \leq 0 \quad i=1, \dots, m \end{aligned} \quad (7)$$

در مسئله ی (۷)، x بردار ضرایب کنترل کننده و $f_0(x)$ ، $g_0(x)$ ، $f_i(x)$ ها و $g_i(x)$ ها، توابع محدب هستند. همچنین ملاحظه می شود که در مورد رابطه ی (۶) داریم:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 0, & g_0(x) &= k_i, \\ f_1(x) &= r_s, & f_2(x) &= k_i, \\ g_1(x) &= |L - c_s|, \\ g_2(x) &= |L - c_t| \end{aligned}$$

روشی که در ادامه استفاده می شود، بدین صورت است که بخش مقعر حول یک مقدار اولیه برای ضرایب PID خطی می شود. این مقدار اولیه که با X_0 نمایش داده می شود، بایستی پایدار ساز باشد. بنابراین یک مسئله ی محدب وجود دارد که تفاوت آن با مسئله ی اصلی، محافظه کارانه شدن قیود، می باشد. جواب به دست آمده نقطه ی جدید در نظر گرفته می شود و دوباره روش بر روی آن اجرا می گردد و همین طور تا همگرا شدن پاسخ، به صورت مرحله به مرحله ادامه می یابد. بنابراین:

$$\hat{h}(x) = f(x) - g(x_k) - \nabla g(x_k)^T (x - x_k) \quad (8)$$

باید دقت شود که در حل این مسئله، فرکانس زاویه ای متغیر نبوده بلکه تعدادی نمونه ی گسسته از آن در بازه ای که دارای اهمیت است در نظر گرفته می شود. این نمونه ها با دقت دلخواه و به صورت لگاریتمی انتخاب می شود. حداقل فواصل نقاط فرکانس زاویه ای انتخاب شده، بستگی به میزان پیچیدگی منحنی نایکوئیست دارد به طوری که اطلاعات سیستم از دست نرود. بنابراین به ازای هر ω ، یک قید خواهیم داشت.

قیود دایره را می توان به صورت رابطه ی زیر نمایش داد.

$$r - |L - c| \leq 0 \quad (9)$$

که در آن، L تابع تبدیل حلقه باز، c مرکز دایره ی مورد نظر و r شعاع دایره ی مربوطه می باشد. با اعمال رابطه ی (۸) بر رابطه ی (۹)، رابطه ی زیر به دست می آید.

$$r - \text{real} \left(\frac{(L_k - c)^*}{|L_k - c|} (L - c) \right) \leq 0 \quad (10)$$

در این رابطه، * نشان دهنده ی مزدوج شدن عبارت است.

را که بیان گر معیار IAE است، در نظر می گیریم. در رابطه ی فوق e ، سیگنال خطای سیستم حلقه بسته است. از طرفی حاصل معیار IE با استفاده از رابطه ی (۱) به ازای ورودی مرجع پله با دامنه ی k_r ، در رابطه ی

$$IE = \int_0^\infty e(t) dt = \frac{k_r}{P(0)k_i} = \frac{\gamma}{k_i}, \quad \gamma = \frac{k_r}{P(0)} \quad (3)$$

ملاحظه می شود. با توجه به رابطه ی (۲)، تابع هزینه بیشینه نمودن k_i انتخاب می شود. برای سیستمی با میرایی زیاد، رابطه ی (۲) و (۳) تقریباً برابر هستند؛ بنابراین معیار IE و به عبارتی دیگر بیشینه نمودن k_i را به عنوان تابع هزینه انتخاب می نماییم.

اما این هدف، به تنهایی کافی نیست زیرا می تواند با افزایش زیاد k_i منجر به نوسانی شدن شدید پاسخ شود. بنابراین، از قیود حساسیت و مکمل حساسیت استفاده شده است. این قیود، در صفحه ی مختلط حوزه ی فرکانس، بیان گر مفاهیم خاصی از نظر مکان هندسی می باشد [۸]. برای نشان دادن این موضوع، توابع حساسیت $S(s)$ و مکمل حساسیت $T(s)$ در رابطه ی

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)}, T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}, L(s) = P(s)C(s) \quad (4)$$

تعریف می شوند. در این روابط، $P(s)$ و $C(s)$ به ترتیب تابع تبدیل سیستم و کنترل کننده می باشد. پارامترهای طراحی هم که مطابق رابطه ی (۴) به سیستم حلقه بسته مربوط می شوند، در رابطه ی زیر تعریف شده اند.

$$M_s = \max_{\omega} |S(i\omega)|, M_t = \max_{\omega} |T(i\omega)| \quad (5)$$

در این حالت، قید حساسیت بیان می دارد که منحنی نایکوئیست تابع تبدیل حلقه باز $(L(s))$ ، خارج از دایره ای به مرکز -1 و شعاع $r_s = \frac{1}{M_s}$ قرار گیرد. همچنین قید مکمل حساسیت، بیان می دارد که منحنی نایکوئیست تابع تبدیل حلقه باز، خارج از دایره ای به مرکز

$$c_t = -\frac{M_t^2}{M_t^2 - 1} \text{ و شعاع } r_t = \left| \frac{M_t}{M_t^2 - 1} \right| \text{ قرار گیرد [۱۰].}$$

با توجه به [۱۸] مسئله ی بهینه سازی بیشینه نمودن ضریب انتگرال گیر با قیود حساسیت و مکمل حساسیت به صورت زیر می باشد.

$$\begin{aligned} \min \quad & -k_i \\ \text{subject to} \quad & r_s - |L - c_s| \leq 0 \\ & r_t - |L - c_t| \leq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

چالشی که در این روش وجود دارد، این است که مسئله ی بهینه سازی مقید توصیف شده ی فوق، غیر محدب می شود، اما قابلیت تبدیل شدن به فرم

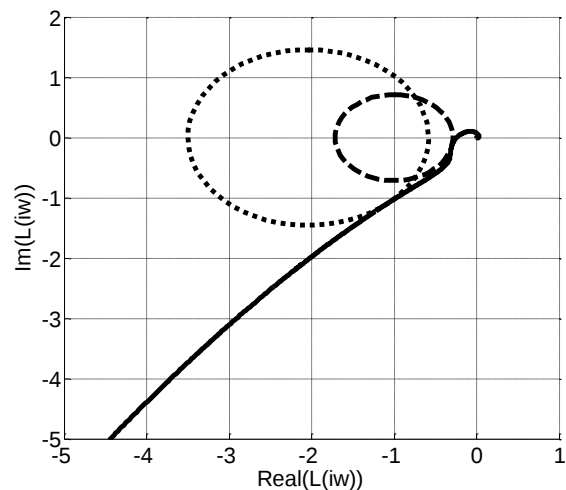
۳- ارزیابی روش و بیان مثال نقض

صحت روش بیان شده در بخش ۲ برای برخی از سیستم‌ها با ۴ مثال در [۱۸] بررسی شده است. روش فوق، روش بهینه‌سازی ضریب انتگرالی با قید M را بازنویسی نموده است. این مقاله با اضافه نمودن قیود دایره‌ای یا قیود حساسیت و مکمل حساسیت، به یک رابطه‌ی محدب برای طراحی کنترل کننده‌ی PID رسیده است. محدودیتی که در این روش وجود دارد، آن است که نوع سیستم‌هایی را که می‌توان براساس آن برایشان کنترل کننده طراحی نمود، آورده نشده است. مثلاً برای سیستم $P(s) = e^{-\sqrt{s}}$ ، کنترل کننده به صورت

$$C(s) = 7.40 + \frac{48.25}{s} + 0.46s$$

سیستم به همراه قیده‌ها، در شکل ۱ رسم شده است. در این شکل، نایکوئیست سیستم بر قیده‌های دایره‌ای مماس می‌باشد؛ یعنی بیش‌ترین مقدار k_i با لحاظ نمودن قیده‌ها به دست آمده است.

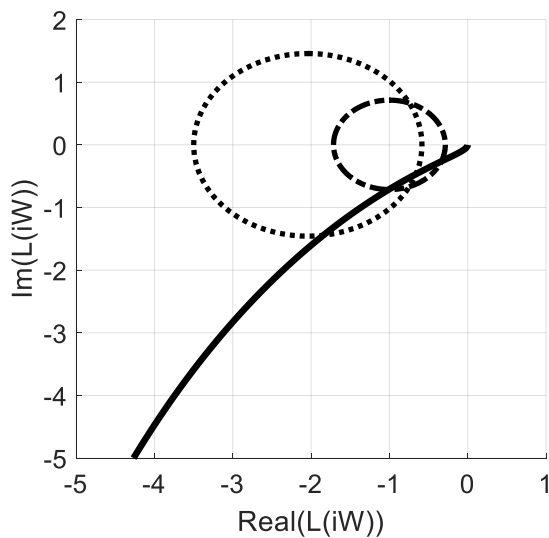
اکنون به عنوان مثال، حالتی را در نظر بگیرید که منحنی نایکوئیست با افزایش k_i ، از مرز قیود دایره، فاصله بگیرد. در این صورت، k_i نامحدود به دست می‌آید و الگوریتم متوقف می‌گردد. در ادامه، سیستمی را که چنین شرایطی داشته باشد، به عنوان مثال نقض این روش، بیان می‌نمایم.



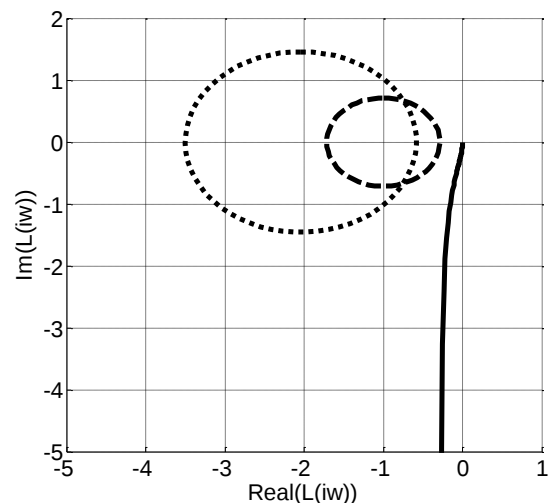
شکل ۱: نایکوئیست تابع تبدیل حلقه‌باز با کنترل کننده‌ی PID (منحنی مشکی) به همراه قیده‌های دایره‌ای (دایره‌های نقطه‌چین و خط‌چین با $M_s = M_t = 1.4$)

مثال نقض: سیستم $P(s) = \frac{1}{s+1}$ را در نظر بگیرید. اگر کنترل کننده‌ی PID با مقدار اولیه‌ی دلخواه برای ضرایب کنترل کننده به نحوی که سیستم پایدار باشد، طراحی شود، حل مسئله‌ی بهینه‌سازی نامحدود از بالا^۱ می‌شود. ضرایب اولیه‌ی کنترل کننده برای این سیستم عبارتند از $k_p = 1, k_i = 10, k_d = 0$ و نتیجه در شکل ۲ رسم شده است. علت این که یک جواب بهینه‌ی محلی یک جواب شدنی با کارایی نامناسب را نتیجه می‌دهد، نحوه‌ی تغییر منحنی نایکوئیست سیستم

حلقه‌بسته با افزایش k_i می‌باشد. با توجه به این که روش توصیف شده با حل چند مسئله‌ی بهینه‌سازی به طور متوالی، بایستی به جواب مسئله‌ی بهینه‌سازی اصلی همگرا شود، در یکی از مراحل اولیه‌ی این الگوریتم، قیود دایره، قادر به جلوگیری از افزایش بیش‌ازحد k_i نمی‌باشند و در نتیجه الگوریتم متوقف می‌شود. با متوقف شدن الگوریتم، حل کننده‌ی مسئله مقدار ضریب انتگرال گیر را برابر ۱ قرار می‌دهد. این موضوع، حاکی از ضعف روش فوق است. در این حالت، منحنی نایکوئیست سیستم جدید به همراه قیده‌ها در شکل ۳ با ضرایب $k_p = 0.7, k_i = 10, k_d = 0$ رسم شده است.



شکل ۲: نایکوئیست تابع تبدیل حلقه‌باز با کنترل کننده‌ی PID اولیه‌ی پایدار (منحنی توپر) به همراه قیده‌های دایره‌ای (دایره‌های نقطه‌چین و خط‌چین با $M_s = M_t = 1.4$)



شکل ۳: نایکوئیست تابع تبدیل حلقه‌باز با کنترل کننده‌ی PID محاسبه‌شده توسط روش محدب مقعر (منحنی توپر)، قیده‌های دایره‌ای (دایره‌های نقطه‌چین و خط‌چین با $M_s = M_t = 1.4$)

¹ Unbounded Above

۴- بهبود طراحی کنترل کننده‌ی PID مقید بر اساس بهینه‌سازی محدب - مقعر

در این پژوهش طراحی کنترل کننده‌ی PID با بهینه‌سازی کارایی در ضمن قیدهای حساسیت و مکمل حساسیت انجام می‌شود. معیار کارایی در این مقاله کمینه نمودن IAE می‌باشد. در سیستم‌های با میرایی زیاد برای سهولت می‌توان از معیار IAE به جای معیار ISE استفاده نمود. در این مسئله‌ی بهینه‌سازی، قیود حساسیت و مکمل حساسیت به منظور جلوگیری از افزایش بی‌رویه‌ی k_i استفاده شده‌است که در مورد بعضی از سیستم‌ها همانند مثال نقض فوق، کافی نمی‌باشد. به منظور رفع مشکل واگرایی الگوریتم، ابتدا کنترل کننده‌ای طراحی می‌شود که پایدار ساز بوده و منحنی نایکوئیست تابع تبدیل حلقه‌باز، بیرون از دو دایره قرار گیرد. مطابق رابطه‌ی زیر به ازای تمام فرکانس‌های انتخاب شده، فاصله‌ی منحنی نایکوئیست تابع تبدیل حلقه‌باز از هریک از دو دایره، محاسبه می‌گردد:

$$d_{ij} = \left| L(j\omega_j) - c_i \right| - r_i, \quad \text{for } j=1, \dots, N, i=s, t \quad (11)$$

سپس در

$$LB_i = \alpha \sqrt{\sum_{j=1}^N d_{ij}^2}, \quad \text{for } j=1, \dots, N, i=s, t \quad (12)$$

معیار جذر جمع مربعات^۱ تعریف می‌شود. که در آن $\alpha \geq 1$ ضریب تنظیم و d_{ij} فاصله‌ی منحنی نایکوئیست از دایره‌های حساسیت می‌باشد و نیز: $LB_i \geq d_{ij}$, for $j=1, \dots, N, i=s, t$ سپس $-LB_i$ به عنوان کران پایین $f_i(x) - g_i(x)$ در نظر گرفته می‌شود. بنابراین:

$$g_i(x) - f_i(x) \leq LB_i \quad \text{for } i=s, t \quad (13)$$

این دو دسته قید، بیان‌گر داخل قرار گرفتن منحنی نایکوئیست تابع تبدیل حلقه‌باز، درون دو دایره به شعاع $LB_i + r_i$ و به مرکز c_i است. اکنون فرض می‌نمایم دو قید حساسیت و مکمل حساسیت محدب بوده و به عبارتی نیازی به تقریب زدن آن‌ها و استفاده از الگوریتم مرحله‌ای نباشد. با توجه به قضیه‌ی زیر اگر کنترل کننده‌ی طراحی شده‌ی اولیه، به عنوان مقدار اولیه‌ی مسئله‌ی بهینه‌سازی جدید، وارد الگوریتم گردد، این مسئله حتماً شدنی^۲ خواهد بود زیرا در بدترین شرایط، فقط یک جواب خواهد داشت که همان کنترل کننده‌ی طراحی شده‌ی اولیه می‌باشد.

قضیه: در مسئله‌ی بهینه‌سازی زیر

$$\begin{aligned} & \max_x x_j \\ & \text{s.t.:} \\ & a \leq f_i(x) \leq b \quad \text{for } i=1, \dots, m; \quad a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

که در آن، a و b مقادیر ثابت و محدود، $\mathbb{R}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی، m یک عدد طبیعی و x_j یکی از درایه‌های بردار x هستند. اگر مجموعه‌ی شدنی فوق، وجود داشته و بسته باشد و $f_i(x)|_{x_j=0}$ محدود و $|f_i(x) - f_i(x)|_{x_j=0}|$ نامحدود شعاعی^۳ باشد) و $\lim_{x_j \rightarrow \infty} |f_i(x)| \rightarrow \infty$ آن‌گاه جواب این مسئله حتماً محدود خواهد بود.

اثبات- با استفاده از برهان خلف، قضیه‌ی فوق اثبات می‌گردد. فرض می‌شود مقدار تابع هدف، نامحدود باشد. به دلیل خاصیت نامحدود شعاعی بودن، $|f_i(x) - f_i(x)|_{x_j=0}|$ نیز نامحدود خواهد شد. و بنابراین باید $f_i(x)$ نامحدود باشد که با فرض مسئله یعنی ثابت بودن مقادیر a و b در تناقض است.

مسئله‌ی اصلاح شده‌ی طراحی کنترل کننده PID مطابق رابطه‌ی زیر می‌باشد.

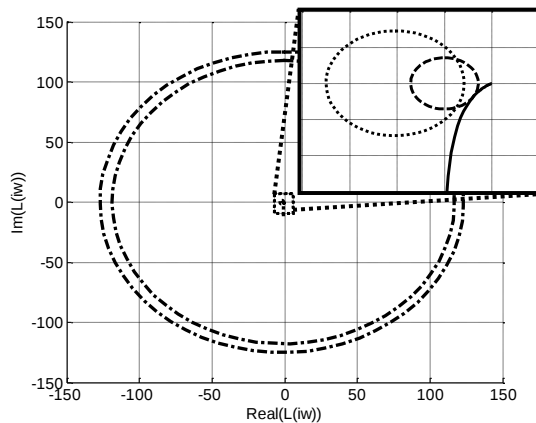
$$\begin{aligned} & \max k_i \\ & \text{s.t.:} \\ & \hat{h}_{1i}(x) \leq 0 \quad \text{for } i=1, \dots, N \\ & -f_{1i}(x) \leq LB_1 \quad \text{for } i=1, \dots, N \\ & \hat{h}_{2i}(x) \leq 0 \quad \text{for } i=1, \dots, N \\ & -f_{2i}(x) \leq LB_2 \quad \text{for } i=1, \dots, N \end{aligned} \quad (14)$$

در مسئله‌ی بهینه‌سازی (۱۴)، N تعداد نقاط انتخاب شده از بازه‌ی فرکانسی، $f_{1i}(x)$ و $f_{2i}(x)$ به ترتیب فاصله‌ی نقطه‌ی متناظر با فرکانس i ام منحنی نایکوئیست تابع تبدیل حلقه‌باز از دایره‌های حساسیت و مکمل حساسیت و $\hat{h}_{1i}(x)$ و $\hat{h}_{2i}(x)$ به ترتیب محدب شده‌ی توابع $f_{1i}(x)$ و $f_{2i}(x)$ توسط رابطه‌ی (۸) می‌باشند. در این مسئله‌ی بهینه‌سازی، منحنی نایکوئیست، بین دو دایره‌ی اولیه و دو دایره‌ی ثانویه قرار می‌گیرد. بنابراین جواب مسئله‌ی بهینه‌سازی هیچ‌وقت نامحدود نمی‌شود مگر در حالت خاصی که با نامحدود شدن k_i ، $L(j\omega_j)$ محدود بماند؛ اما در این‌جا، این اتفاق نمی‌افتد. زیرا توابع قید، مربعی هستند. اما از آنجایی که قیود حساسیت و مکمل حساسیت، محدب نیستند و به صورت محافظه‌کارانه تقریب خطی آن‌ها در نظر گرفته می‌شود، نمی‌توان مستقیماً از قضیه‌ی فوق استفاده نمود. برای رفع این مشکل، بایستی حد بالایی برای خطای ناشی از تقریب این دو دسته قید در تمامی مراحل الگوریتم یافت. سپس هنگام طراحی کنترل کننده‌ی اولیه، علاوه بر این که منحنی‌های نایکوئیست باید بیرون از دایره‌های حساسیت و مکمل

³ Radially Unbounded

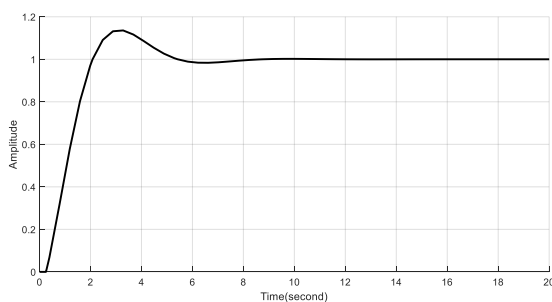
¹ RSS: Root of Sum of Squares

² feasible

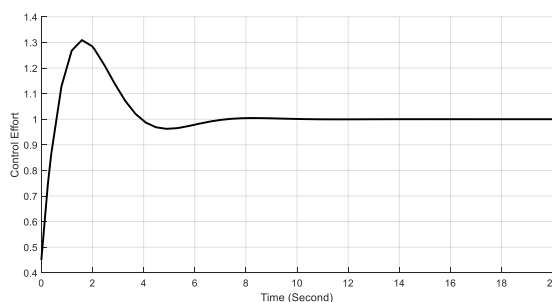


شکل ۶: نایکوئیست تابع تبدیل حلقه‌باز با کنترل کننده‌ی PI جدید و پایدارساز (منحنی توپر)، قیده‌های دایره‌ای (دایره‌های نقطه‌چین و خط‌چین با $M_s = M_t = 1.4$) و قیده‌های RSS (دایره‌های نقطه‌خط با $\alpha = 1$)

مثال ۲) در این مثال برای سیستم با تأخیر زمانی $P(s) = \frac{e^{-0.25s}}{(s+1)}$ کنترل کننده‌ی PI طراحی شده است. کنترل کننده‌ی اولیه به صورت $C_0(s) = 5$ در نظر گرفته می‌شود. با اضافه نمودن قیده‌های RSS با $\alpha = 1$ و $M_s = M_t = 1.4$ و شرایط اولیه‌ی $x_0 = [5 \ 0]$ ، در مرحله الگوریتم به مقدار $x^* = [k_p \ k_i] = [7.7419 \ 1.4925]$ همگرا می‌شود. برای این مسئله ω از ۰.۰۱ تا ۱۰۰ و به تعداد ۱۰۰۰ نقطه به صورت لگاریتمی انتخاب شده است. توجه شود که تغییر شرط اولیه، می‌تواند منجر به همگرا شدن به نقطه‌ی کمینه‌ی محلی دیگری شود. نتایج پاسخ سیستم حلقه‌بسته به ورودی پله واحد، در شکل‌های ۴ و ۵ رسم شده است. همچنین شکل ۶، نایکوئیست تابع تبدیل حلقه‌باز با کنترل کننده‌ی PI حاصل از الگوریتم را نشان می‌دهد. درواقع در تعدادی از مسائل بهینه‌سازی مرحله‌ای، قیود اضافه شده فعال گردیده تا مانع متوقف شدن الگوریتم گردد. برای این مثال $IE = 0.849$ ، $IAE = 1.482$ به دست آمده است.



شکل ۷: پاسخ خروجی سیستم حلقه‌بسته به ورودی پله واحد با کنترل کننده‌ی PI



شکل ۸: سیگنال کنترلی سیستم حلقه‌بسته به ورودی پله واحد با کنترل کننده‌ی PI

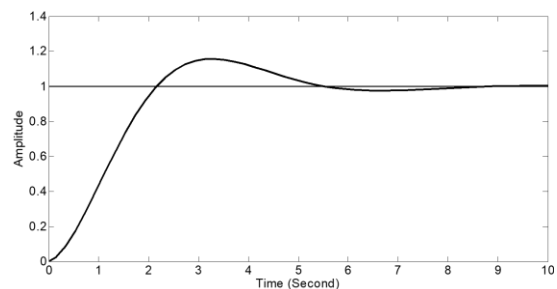
حساسیت قرار داشته باشند، هم چنین باید به مقدار حد بالای محاسبه شده از دایره‌ها، فاصله داشته باشند.

۵- ارزیابی روش با چند مثال عددی

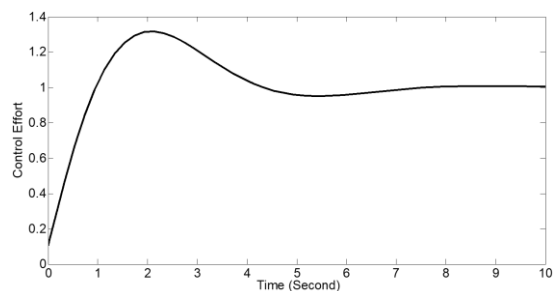
در ادامه نشان داده می‌شود چگونه روش معرفی شده، برای مثال نقض بخش قبل، کنترل کننده‌ی مناسب را طراحی می‌نماید.

مثال ۱) الگوریتم روش طراحی کنترل کننده‌ی PID مقید براساس بهینه‌سازی محدب - مقعر، قادر به طراحی کنترل کننده‌ی PI و PID برای سیستم $\frac{1}{s+1}$ نمی‌باشد و علت آن، برقرار نبودن فرض‌های قضیه‌ی بیان

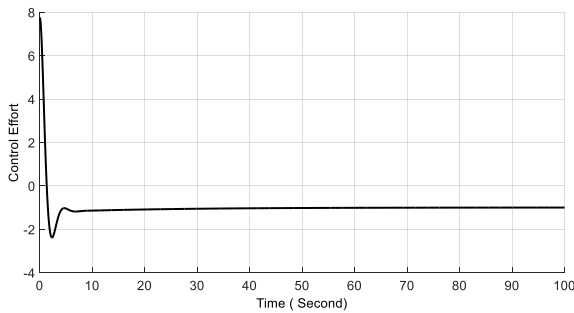
شده در مورد حل یکی از مسائل بهینه‌سازی مرحله‌ای برای رسیدن به پاسخ مسئله‌ی بهینه‌سازی اصلی است. با الگوریتم اصلاح شده‌ی این مقاله، می‌توان کنترل کننده‌ی PI با عملکرد مطلوب را طراحی نمود. با شرایط اولیه‌ی $x_0 = [5 \ 0]$ و $\alpha = 1$ ، الگوریتم پس از مرحله‌ی ۶، به $x^* = [k_p \ k_i] = [0.1033 \ 1.1779]$ همگرا می‌شود. برای این مسئله ω از ۰.۰۱ تا ۱۰۰ و به تعداد ۱۰۰۰ نقطه به صورت لگاریتمی انتخاب شده است. توجه شود که تغییر شرط اولیه، می‌تواند منجر به همگرا شدن به نقطه‌ی کمینه‌ی محلی دیگری شود. نتایج پاسخ سیستم حلقه‌بسته به ورودی پله واحد، در شکل‌های ۴ و ۵ رسم شده است. همچنین شکل ۶، نایکوئیست تابع تبدیل حلقه‌باز با کنترل کننده‌ی PI حاصل از الگوریتم را نشان می‌دهد. درواقع در تعدادی از مسائل بهینه‌سازی مرحله‌ای، قیود اضافه شده فعال گردیده تا مانع متوقف شدن الگوریتم گردد. برای این مثال $IE = 0.849$ ، $IAE = 1.482$ به دست آمده است.



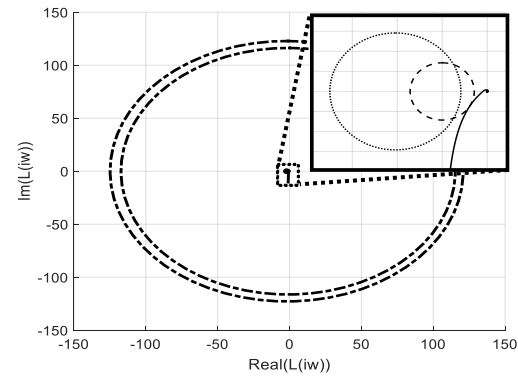
شکل ۴: پاسخ خروجی سیستم حلقه‌بسته به ورودی پله واحد با کنترل کننده‌ی PI



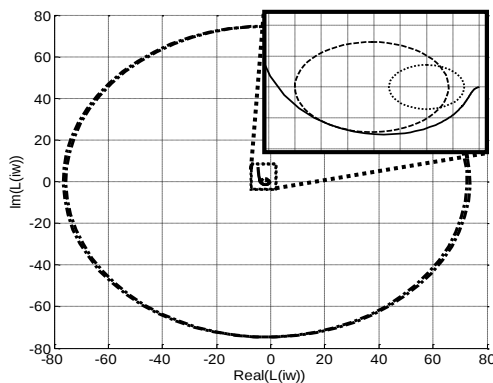
شکل ۵: سیگنال کنترلی سیستم حلقه‌بسته به ورودی پله واحد با کنترل کننده‌ی PI



شکل ۱۱: سیگنال کنترلی سیستم حلقه‌بسته به ورودی پله‌ی واحد با کنترل کننده‌ی PI

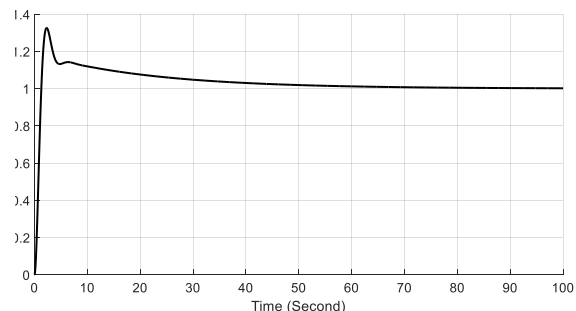


شکل ۹: نایکوئیست تابع تبدیل حلقه‌باز با کنترل کننده‌ی PID (منحنی توپر)، قیدهای دایره‌ای (دایره‌های نقطه‌چین و خط‌چین با $M_s = M_t = 1.4$)



شکل ۱۲: نایکوئیست تابع تبدیل حلقه‌باز با کنترل کننده‌ی PI جدید و پایدارساز (منحنی توپر)، قیدهای دایره‌ای (دایره‌های نقطه‌چین و خط‌چین با $M_s = M_t = 1.4$ و قیدهای RSS (دایره‌های نقطه‌خط با $\alpha = 0.1$)

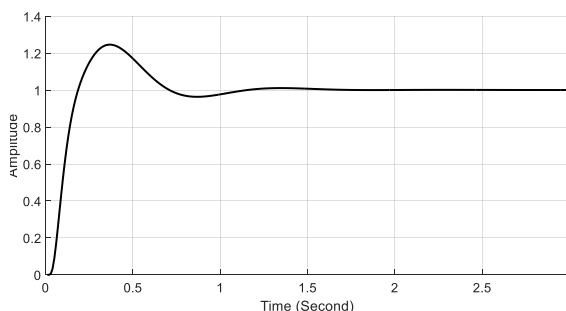
مثال ۳) هدف در این مثال طراحی کنترل کننده‌ی PI برای سیستم ناپایدار $P(s) = \frac{10}{(s+20)(s-1)}$ می‌باشد. برای فرآیندهای ناپایدار باید، مقدار اولیه‌ی کنترل کننده را به نحوی قرارداد که سیستم حلقه‌بسته پایدار گردد. کنترل کننده‌ی پایدارساز اولیه به صورت $C_0(s) = 5 + \frac{1}{s}$ در نظر گرفته می‌شود. در صورت استفاده از الگوریتم محدب - مقعر بدون قیدهای RSS الگوریتم واگرا می‌شود و علت آن، برقرار نبودن فرض‌های قضیه‌ی بیان شده در مورد حل یکی از مسائل بهینه‌سازی مرحله‌ای برای رسیدن به پاسخ مسئله‌ی بهینه‌سازی اصلی است. با اضافه نمودن قیدهای RSS با $\alpha = 0.1$ و $M_s = M_t = 1.4$ و شرایط اولیه‌ی $x_0 = [5 \ 1]$ در ۵ مرحله الگوریتم به مقدار $x^* = [k_p \ k_i] = [7.7419 \ 1.4925]$ همگرا می‌شود. برای این مسئله ω از ۰.۰۱ تا ۱۰۰ و به تعداد ۱۰۰۰ نقطه به صورت لگاریتمی انتخاب شده است. شکل‌های ۱۰ و ۱۱ به ترتیب پاسخ پله‌ی سیستم حلقه‌بسته و سیگنال کنترلی و شکل ۱۲، نایکوئیست تابع تبدیل حلقه‌باز و قیدهای دایره‌ای مربوطه را برای کنترل کننده‌ی جدید نشان می‌دهد. برای این مثال $IE = -1.34$ ، $IAE = 1.736$ به دست آمده است.



شکل ۱۰: پاسخ خروجی سیستم حلقه‌بسته به ورودی پله‌ی واحد با کنترل کننده‌ی PI

مثال ۴) هدف در این مثال طراحی کنترل کننده‌ی PID برای سیستم انتقال حرارتی^۱ با تابع تبدیل $P(s) = e^{-\sqrt{s}}$ می‌باشد. کنترل کننده‌ی اولیه به صورت $C_0(s) = 1 + \frac{3}{s}$ در نظر گرفته می‌شود. در صورت استفاده از الگوریتم محدب - مقعر با پارامترهای طراحی $\alpha = 3$ ، $M_s = M_t = 1.4$ و شرایط اولیه‌ی $x_0 = [1 \ 3 \ 0]$ در ۵ مرحله الگوریتم به مقدار $x^* = [k_p \ k_i \ k_d] = [7.37 \ 48.25 \ 0.46]$ همگرا می‌شود. برای این مسئله ω از ۰.۰۱ تا ۱۰۰ و به تعداد ۱۰۰۰ نقطه به صورت لگاریتمی انتخاب شده است. پاسخ پله‌ی خروجی سیستم حلقه‌بسته و سیگنال کنترلی مربوط به آن در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ رسم شده‌اند. شکل ۱۵، نایکوئیست تابع تبدیل حلقه‌باز و قیدهای دایره‌ای مربوطه را برای کنترل کننده‌ی جدید نشان می‌دهد. برای این مثال $IE = 0.0181$ ، $IAE = 0.1821$ به دست آمده است.

فرم اصلاح شده الگوریتم محدب - مقعر با قیود حساسیت و مکمل حساسیت ارائه گردید. با ارائه مثال نقضی برای نشان دادن محدودیت روش های قبلی طراحی کنترل کننده PID مقید، عدم کارایی آنها بررسی شد. در انتها با انجام طراحی براساس روش پیشنهادی برای مثال نقض و یک سیستم ناپایدار، نشان داده شد که این محدودیت رفع شده است.



شکل ۱۳: پاسخ خروجی سیستم حلقه بسته به ورودی پله واحد با

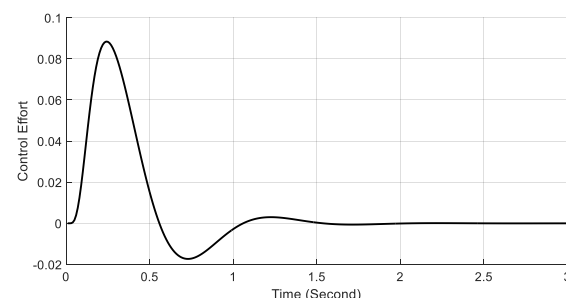
کنترل کننده PID

مراجع

- [1] Wu, Hang, Weihua Su, and Zhiguo Liu, "PID controllers Design and tuning methods," In Industrial Electronics and Applications (ICIEA), 2014 IEEE 9th Conference, Hangzhou, China, pp. 808-813, 2014.
- [2] J. G. Ziegler, N. B. Nichols, "Optimum settings for automatic controllers," Journal of trans. ASME vol. 64, no. 11, pp. 759-765, 1942.
- [3] X. Hea, T. Cuia, D. Zhanga, J. Weib, M. Wanga, Y. Yua, Q. Liua, B. Yana, D. Zhaoa, L. Yanga, "Development of an electric-driven control system for a precision planter based on a closed-loop PID algorithm" journal of Computers and Electronics in Agriculture, vol. 136, pp. 184-192, 15 April 2017.

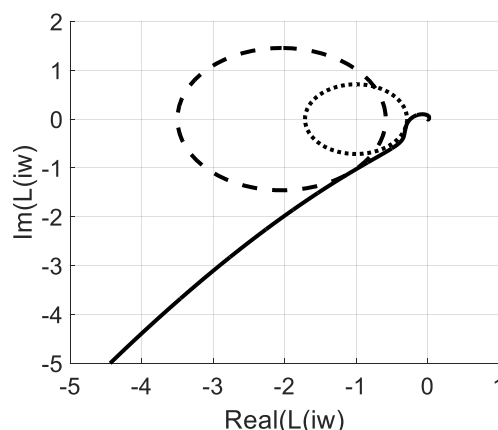
[۴] سیدکمال الدین موسوی مشهدی، حمید یدالهی، "طراحی و ساخت سیستم اندازه گیری و کنترل TDS آب در سیستم های تصفیه آب اسمز معکوس به روش PID کلاسیک، با توانایی جبران سازی اثر دما بر روی اندازه گیری"، مجله کنترل، ۱۳۹۱.

- [5] C. E. Garcia, M. Morari, "Internal model control. 3. Multivariable control law computation and tuning guidelines," Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development, vol. 24, no. 2, pp. 484-494, 1985.
- [6] O. Garpinger, T. Häggglund, and K. J. Åström, "Criteria and trade-offs in PID design. IFAC Conference on Advances in PID Control", Brescia, Italy, P 47-52, March 2012.
- [7] K. J. Åström, T. Häggglund, PID controllers: theory, design and tuning, Instrument Society of America, 2nd ed., 1995.
- [8] M. S. Bahavarnia, M. S. Tavazoei, "A new view to Ziegler-Nichols step response tuning method: Analytic non-fragility justification," Journal of Process Control, vol. 23, no. 1, pp. 23-33, 2012.
- [9] K. J. Åström, T. Häggglund, Advanced PID control, Isa, 2006.
- [10] T. Häggglund, K. J. Åström, "REVISITING THE ZIEGLERNICHOLS TUNING RULES FOR PI CONTROL PART II THE FREQUENCY RESPONSE METHOD," Asian Journal of Control, vol. 6, pp. 469-482, 2004.



شکل ۱۴: سیگنال کنترلی سیستم حلقه بسته به ورودی پله واحد با

کنترل کننده PID



شکل ۱۵: نایکوئیست تابع تبدیل حلقه باز با کنترل کننده PID (منحنی توپر)،

قیدهای دایره ای ($M_s = M_t = 1.4$)

قیودی که با معیار RSS به مسئله بهینه سازی اضافه شد، سبب شده است منحنی نایکوئیست در هر یک از مراحل بهینه سازی بخواهد با زیاد شدن k_f از مرزهای دایره حساسیت و مکمل حساسیت فاصله بگیرد، از نامحدود شدن ضریب انتگرال گیر جلوگیری شود. بنابراین الگوریتم مرحله ای تا همگرا شدن به نقطه ی بهینه ادامه پیدا خواهد نمود.

۸- نتیجه گیری

در این مقاله بهبودی بر روش طراحی کنترل کننده PID براساس حل یک مسئله بهینه سازی مقید ارائه شد. این مسئله طراحی ابتدا به یک مسئله غیرمحدب تبدیل شد. برای حل این مسئله غیرمحدب،

[۱۱] حسن ذاکری، سجاد ازگلی؛ "روش طراحی کنترلر PI برای دسته ای از سیستم های غیر خطی دارای عدم قطعیت به کمک تجزیه ی مجموع مربعات"، مجله کنترل، ۱۳۹۱.

[12] N. K. Bahgaat, M. A. M. Hassan, Load Frequency Control in Power System via Improving PID Controller Based on Particle Swarm Optimization and ANFIS Techniques, International Journal of System Dynamics Applications (IJSDA), 2014.

[13] B. K. Sahu, S. Pati, P. K. Mohanty, and S. Panda, "Teaching-learning based optimization algorithm based fuzzy-PID controller for automatic generation control of multi-area power system," Journal of Applied Soft Computing, vol. 27, pp. 240-249, 2014.

[14] E. Yesil, "Interval type-2 fuzzy PID load frequency controller using BigBang-Big Crunch optimization," Applied Soft Computing, vol. 15, pp. 100-112, 2014.

[15] M. J. Neath, A. K. Swain, U. K. Madawala, and D. J. Thrimawithana, "An Optimal PID Controller for a Bidirectional Inductive Power Transfer System Using Multiobjective Genetic Algorithm," IEEE TRANSACTIONS ON POWER ELECTRONICS, vol. 29, no. 3, pp. 1523-1531, 2014.

[16] H. M. Hasanien, "Design Optimization of PID Controller in Automatic Voltage Regulator System Using Taguchi Combined Genetic Algorithm Method," IEEE SYSTEMS JOURNAL, vol. 7, pp. 825-831, 2013.

[17] K. J. Åström, H. Panagopoulos, and T. Häggglund, "Design of PI controllers based on non-convex optimization," Automatica, vol. 34, pp. 585-601, 1998.

[18] M. Hast, K.J. Åström, B. Bernhardsson, and S. Boyd, "PID Design by Convex-Concave Optimization," European Control Conference (ECC), Zürich, Switzerland, July 17-19, 2013.