

## کنترل مقاوم مبتنی بر روش کنترل بهینه یک عملگر الاستیکی مورد استفاده در مفصل زانو

هادی صباغی کندری<sup>۱</sup>، علی کارساز<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، موسسه آموزش عالی خراسان، hadi.sabbaghi@khorasan.ac.ir

<sup>۲</sup> استادیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، موسسه آموزش عالی خراسان، karsaz@khorasan.ac.ir

پذیرش: ۱۳۹۷/۰۴/۱۳

ویرایش دوم: ۱۳۹۷/۰۲/۱۸

ویرایش اول: ۱۳۹۶/۱۲/۲۲

دریافت: ۱۳۹۶/۰۹/۱۸

**چکیده:** سیستم‌های توانبخشی نظیر عملگرهای الاستیکی سری چرخشی باید بتوانند گشتاور دقیق مطلوب را تولید کنند. این مقاله به منظور توانبخشی در مفصل زانوی افراد معلول، به موضوع کنترل یک عملگر الاستیکی سری چرخشی پرداخته تا بتواند یک حرکت نرم در قدم زنی افراد را فراهم نماید. این عملگرها دارای مقاومت غیرخطی ذاتی و نیز با عدم قطعیت‌های دینامیک مدل روبرو بوده که چالش‌هایی در برابر کنترل دقیق آنها به وجود می‌آورند. به منظور کنترل دقیق این عملگرها، کنترل‌کننده علاوه بر کنترل گشتاور خروجی، می‌باید در برابر تغییرات پارامترها نیز مقاوم باشد. در این مقاله یک کنترل‌کننده مقاوم مبتنی بر نگرش بهینه طوری طراحی شده است که علاوه بر ارتقای عملکرد کنترلی در برابر عدم قطعیت‌ها نیز مقاوم باشد. مقایسه خروجی سیستم حلقه بسته با اعمال روش پیشنهادی نسبت به روش‌های مرسوم نظیر کنترل‌کننده مدل‌غزشی و کنترل‌کننده مدل‌غزشی-تطبیقی، به کمک شبیه‌سازی صورت گرفته است.

**کلمات کلیدی:** توانبخشی، کنترل بهینه، کنترل مقاوم، عدم قطعیت پارامتری.

## Optimal Robust Control for a Series Elastic Actuator assisting Knee Joint

Hadi Sabbaghi, Ali Karsaz

**Abstract:** Rehabilitation and assistive systems such as rotary series elastic actuators (RSEA) should provide the desired torque precisely. In this paper, to improve the life quality of those who suffer from weak knees, the control problem of a rotary series elastic actuator (RSEA) has been studied in order to generate soft human walking motion. These actuators produce the require torque, but the nonlinear resistive and inertia loads inherent in the actuators, set challenges to generate the desired torque accurately. The nonlinear resistive factors and uncertainties in plant dynamics which make the precise torque control difficult should be considered. In this paper, a robust controller based on an optimized control approach is designed to enhance control performance and provide the robustness for modeling uncertainties. The simulation is used to compare the output results of the proposed algorithm with the conventional methods such as sliding mode and adaptive-sliding mode controllers.

**Keywords:** Rehabilitation, Optimum control, Robust control, Uncertainty of parameter.

## ۱- مقدمه

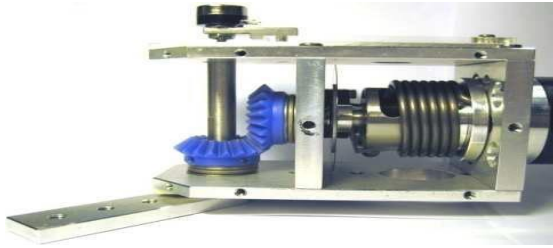
امروزه هم‌زمان با پیشرفت علم در توانبخشی انسان و ربات استفاده از عملگرهای الاستیکی و کنترل دقیق آن‌ها به منظور رفع نیاز در این زمینه مورد توجه قرار گرفته است. این عملگرها که در حالت گشتاور یا نیرو کنترل می‌گردند، دارای اصطکاک ذاتی در حرکت مکانیکی می‌باشند که چالش‌هایی در برابر کنترل دقیق آن‌ها ایجاد می‌کند. تاکنون عملگرهای الاستیکی سری به‌وسیله مدل‌های مختلفی معرفی شده‌اند. مدل‌های ارائه شده هم‌چنین دارای عدم قطعیت هستند که مانع دیگری در برابر کنترل آنها به شمار می‌رود. این عملگرها در مفصل انسان (کمر، زانو، مچ و...) کاربرد دارند. تعامل و تداخل فیزیکی در عملگرهای الاستیکی در نوعی خاص از ربات‌ها وجود دارد که بر متغیرهای کنترل-شونده و حتی عدم‌پایداری سیستم تأثیر گذارند [۱-۳]. در [۳] یک طرح کنترلی برای توانمندسازی عملگر الاستیکی جهت ایجاد امیدانس خروجی پایین پیشنهاد گردیده است، این طرح در حالت ردیابی نیروی دقیق و در وضعیت کنترل‌پذیری ایجاد شده و یک اثبات نظری پایداری به شکل حلقه بسته در آن‌جا ارائه گردیده است. سیستم استفاده شده در [۳] یک سیستم نامی است و هیچگونه عدم قطعیت و اغتشاش در سیستم مدل نشده و روش کنترلی آن PID می‌باشد که در سیستم‌های خطی کاربرد دارد. یک ضعف این مقاله در نظر نگرفتن عدم قطعیت یا اغتشاش مدل می‌باشد که در واقعیت وجود دارد و ما سعی کرده‌ایم در این مقاله تاحد زیادی این مشکل را در نظر بگیریم. در [۴] یک کنترل‌کننده جدید برای تعامل بین انسان و ربات در توانبخشی با استفاده از عملگر الاستیکی ارائه گردید که با ترکیب جبران‌ساز حرکت مفصل، جبران‌ساز اصطکاک، مشاهده‌گر اغتشاش و یک کنترل فیدبک سیستم حلقه بسته توانست نیروی لازم را فراهم و پایداری لازم را داشته باشد. اما به نظر ثابت فنر در این عملگر بالاست و راحتی لازم در آن لحاظ نگردیده است و عملاً تجهیزات آن سنگین وزن هستند حال آنکه در پژوهش ما ثابت فنر به کار رفته مقدار پایینی داشته و راحتی را نیز در نظر گرفته‌ایم. لقی در عملگرها نیز یکی از موضوعات مهم و مؤثر بر عملکرد ربات‌ها جهت دستیابی به نتایج مطلوب می‌باشد که دارای خاصیت غیرخطی است و به منظور جبران اثر آن یک معکوس لقی و کنترل تطبیقی فازی مقاوم پیشنهاد شده تا حرکت جسم و نیروهای داخلی را کنترل نماید و خروجی مقادیر مطلوب را دنبال کند [۵]. در این مقاله نیز از عدم قطعیت و اغتشاش بحثی صورت نگرفته و مدل، یک مدل نامی و فقط دارای خاصیت غیرخطی است.

امروزه بر روی حرکات ربات‌های انسان‌نما و تطابق هرچه بیشتر آن با حرکات انسان پژوهش‌های زیادی صورت گرفته است. این ربات‌ها دارای محدودیت‌هایی همچون دامنه حرکت، سرعت و غیره می‌باشند که بر روی دینامیک‌های سیستم اثرگذارند پس باید به دنبال استراتژی‌های کنترلی برای جبران این محدودیت‌ها بود. در مقاله [۶] یک طرح کنترلی

برای بهینه‌سازی گشتاور و منحنی امیدانس ارائه گردیده تا عملکرد سخت‌افزاری پیچیده که دارای محدودیت‌های تحریک هستند را به حداکثر برساند. مدل در نظر گرفته شده در [۶] نیز یک مدل نامی بوده و دقت کافی در اغتشاش را ندارد. در [۷] یک ربات دوپا با سه بازو که دارای دوفنر پیچشی یکسان می‌باشد مدل شده است. مدل ریاضی این ربات یک سیستم مکانیکی سه درجه آزادی است که هدف پایداری از طرف پای ربات چرخه حدی در حال حرکت، در هنگام ورود ضربات از طرف پای ربات می‌باشد. یک طرح کنترلی فیدبک نمایی غیرخطی پایدار به طور حلقه بسته ارائه گردیده و عملکرد سیستم که همان کنترل زوایای سیستم می‌باشد را به همراه مقاومت آن نسبت به اختلاف متغیرها و عدم قطعیت‌ها بهبود می‌بخشد اما خروجی این سیستم زاویه بازوها بود و گشتاور در اینجا کنترل نگردیده است. در [۸] به منظور جلوگیری از ضربه ناگهانی و صدمه نرسیدن به شخص، یک واسط بین موقعیت مطلوب و موقعیت جاری قرار می‌گیرد. عملکرد در اینجا واسط را به وسیله کنترل‌کننده مدل‌غزشی ردیابی می‌کند تا عدم قطعیت مدل و خاصیت غیرخطی را جبران نماید. هدف نهایی در [۸] طراحی الگوریتمی است که بتواند راحتی را تضمین کند. نقص کار این مقاله تست گشتاور مطلوب در فرکانس خیلی پایین است یعنی حتی کمتر از سرعت حرکت پای انسان که بین ۱ تا ۴ هرتز متغیر است ولی ما ورودی کنترل را در فرکانس بالاتری نسبت به [۸] در نظر گرفتیم تا به واقعیت حرکت نزدیک‌تر باشیم البته فاز کنترلی ما در فاز قدم زدن شخص می‌باشد.

در [۹] و [۱۰] به منظور کنترل گشتاور، از الگوریتم‌های کنترل مقاوم و یا مدل‌غزشی استفاده می‌گردد که نقش این کنترل‌کننده‌ها به عنوان مشاهده‌گر اغتشاش می‌باشد، نکته قابل توجه در [۹] و [۱۰] آن است که برخلاف [۸] و کار ما در اینجا این کنترل‌کننده‌ها فقط به منظور تولید گشتاور دقیق و مطلوب، بدون توجه به راحتی به کار رفته‌اند. در [۱۱] روش مشاهده‌گر اغتشاش به کار برده شده است تا گشتاور مطلوب عملگر، به طور سریع در وضعیت‌های مختلف خروجی تولید گردد. همچنین از یک کنترل‌کننده PD با اعمال روش بهینه‌سازی درجه دوم استفاده گردیده است، ولی روش اصلی مقاله، کنترل پسخور نیرو می‌باشد که به‌وسیله آن گشتاور خروجی را کنترل می‌نماید. ضعف این روش استفاده از مدل نامی و بدون در نظر گرفتن عدم قطعیت در مدل و سیستم است. در [۱۲] یک ساختار کنترلی به منظور کنترل نیروی خروجی عملگرهای الاستیکی ارائه گردیده است. این کنترل، براساس یک مدل خطی از عملگر الاستیکی بنا شده است که اگر شامل یک جبران‌ساز اغتشاش باشد، می‌تواند مدل سیستم به مدل تعمیم‌یافته عملگر الاستیکی که شامل دو ورودی اغتشاش است، تقلیل یابد. این روش این اجازه را می‌دهد که یک کنترل‌کننده در فضای حالت به همراه پارامترهای آن به-طور مستقیم طراحی شود. اما طبق نتایج بدست آمده خروجی گشتاور موتور دارای جهش بالا در برابر دامنه آن می‌باشد یعنی لازم بود یک

زاویه پا در مفصل زانو، گشتاور مطلوب با توجه به انحراف درست فنر تولید می‌شود.

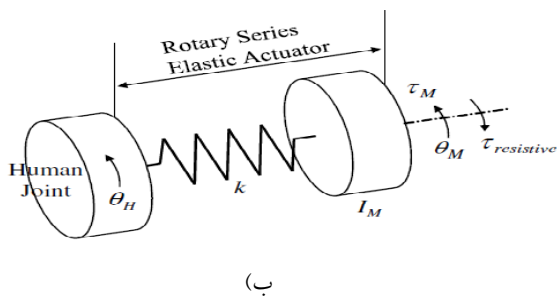
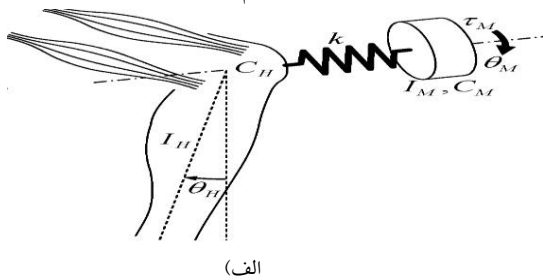


شکل ۱: نمای داخلی یک عملگر الاستیکی چرخشی [۱۵]



شکل ۲: نمای بیرونی یک عملگر الاستیکی چرخشی [۱۵]

گشتاور خروجی عملگر، به وسیله موتور  $DC$  و گشتاور مقاومتی غیرخطی، به وسیله گیربکس کاهنده متصل به موتور تولید می‌گردد. این گشتاور مقاومتی غیرخطی برای عملگر در تعامل با پای انسان، مشخصه غیرقابل قبولی بوده که در خلاف جهت گشتاور تولیدی موتور است و باید آن را جبران نمود [۱۱] و [۱۵]. در شکل ۳ شماتیکی از عملگر الاستیکی سری به کار رفته در مفصل زانو (در این شکل زاویه حرکت پا به طور دقیق مشخص شده است) و به طور جداگانه نشان داده شده است. طبق شکل ۳.ب که شماتیکی از این عملگر الاستیکی سری به طور جداگانه می‌باشد، معادله ریاضی سیستم به صورت (۱) بیان می‌گردد:



شکل ۳. الف) شماتیکی از عملگر بکار رفته در محل زانو (ب) شماتیک عملگر الاستیکی

کنترل دیگر جهت کاهش بالازدگی‌ها اعمال گردد. عملگرها زمانی که در تعامل با انسان و یا حتی در موقعیت‌های غیرمنتظره قرار می‌گیرند باید انعطاف‌پذیری داشته باشند [۱۳]. این شرایط مناسب در صورت وجود امپدانس پایین در تمامی فرکانس‌های کاری عملگر، فراهم می‌گردد. در [۱۳] راه‌هایی به منظور انعطاف‌پذیری نیروی عملگرهای الاستیکی به وسیله حلقه‌های پسخور داخلی و با استفاده از سنسورهای خاص موقعیت، مورد آزمایش قرار گرفته است.

در [۱۴] شماتیکی از یک آشکارساز خطا و به همراه کنترل تطبیقی برای یک مفصل انعطاف‌پذیر ربات سه بازو که دارای عدم قطعیت مدل و خطاهای چند عملگر مختلف می‌باشد ارائه شده است. در ابتدا یک آشکارساز خطا طراحی می‌شود تا خطاهای عملگر آنالیز گردد. سپس شماتیک کنترل تطبیقی خطا با باندهای عملکردی مشخص طراحی می‌شود. سرعت و بیشترین بالازدگی برای خطاهای ردیابی شده مشخص می‌شود و نهایتاً یک کنترل‌کننده تطبیقی اثرات آن را جبران خواهد نمود. ولی کنترل بر روی زاویه خروجی بوده و صحبتی از گشتاور و نیرو در عملگر نشده است.

در این مقاله، کنترل مقاوم مبتنی بر روش کنترل بهینه جهت جبران عدم قطعیت‌های پارامتری و به منظور بهبود پاسخ خروجی پیشنهاد می‌گردد تا گشتاور خروجی مقدار مطلوب گشتاور ورودی را به طور دقیق‌تری ردیابی نماید و این درحالی است که برخی مقالات قبلی به عدم قطعیت‌ها و برخی دیگر گشتاور را به عنوان خروجی در نظر نگرفته‌اند. این کنترل در دو سناریوی مختلف یک‌بار با یک پارامتر دارای عدم قطعیت در سیستم و بار دیگر با سه پارامتر دارای عدم قطعیت که مدل، دقیق‌تر و به واقعیت نیز نزدیک‌تر است طراحی شده که تا به حال در این نوع سیستم‌ها عدم قطعیت‌ها فقط با یک پارامتر در نظر گرفته می‌شدند. در بخش ۲ این مقاله مسئله موردنظر را تعریف و مدل آن را بیان می‌نمایم. کنترل مدلفزشی و بیان پارامترهای آن در بخش ۳ و روش کنترل مدلفزشی تطبیقی را در بخش ۴ ارائه می‌دهیم. همچنین روش پیشنهادی (کنترل مقاوم مبتنی بر روش بهینه) در بخش ۵ بحث خواهد شد. نتیجه شبیه‌سازی‌های انجام شده و مقایسه آن‌ها نیز در دو سناریو در بخش ۶ و نتیجه‌گیری در بخش ۷ ارائه خواهد گردید.

## ۲- تعریف مسئله و مدل ریاضی سیستم:

شکل (۱) ساختار یک عملگر الاستیکی چرخشی سری را نشان می‌دهد. عملگر موردنظر دارای یک موتور  $DC$ ، یک فنر پیچشی و دو انکدر است که یکی در زانوی پای انسان و دیگری در کنار موتور نصب می‌گردند تا زاویه حرکت پا و زاویه حرکت موتور را در هر لحظه اندازه‌گیری کنند. فنر پیچشی به عنوان یک رابط به طور مستقیم بین موتور و پای انسان در محل مفصل زانو نصب گردیده و وظیفه انتقال گشتاور از موتور به پا را برعهده دارد. با کنترل زاویه حرکت موتور و اندازه‌گیری

در نظر گرفته می‌شوند که  $x_1 = \theta_M$  به عنوان زاویه حرکت موتور،  $x_2 = \dot{\theta}_M$  سرعت زاویه‌ای موتور و  $u = \tau_M$  گشتاور ورودی موتور می‌باشد. لذا مدل فضای حالت سیستم به صورت معادله (۳) خواهد بود:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{I_M}x_1 + \frac{1}{I_M}u - \frac{\tau_{res}}{I_M} + \frac{k}{I_M}\theta_H \end{aligned} \quad (3)$$

طبق رابطه (۲)،  $\tau_{res}$  اصطکاک ذاتی، تابعی غیرخطی از سرعت زاویه‌ای موتور  $(\dot{\theta}_M)$  است، بنابراین:

$$\tau_{res} = f(x_2) \quad (4)$$

می‌باشد. چنانچه مشاهده می‌شود رابطه (۳) به علت وجود  $\tau_{res}$  یک مدل فضای حالت غیرخطی است. گشتاور خروجی توسط عملگر الاستیکی چرخشی تولید می‌گردد که به صورت معادله (۵) می‌باشد:

$$\tau = k(\theta_M - \theta_H) \quad (5)$$

حال با توجه به معادله (۵) و گشتاور مطلوب ورودی  $(\tau_d)$ ، زاویه مطلوب موتور به صورت معادله (۶) بدست می‌آید:

$$\theta_{Md} = \frac{\tau_d}{k} + \theta_H \quad (6)$$

پس اگر کنترل کننده طوری طراحی شود که  $\theta_M = \theta_{Md}$  گردد در این صورت گشتاور خروجی (تولیدی)، گشتاور مطلوب را ردیابی خواهد کرد یعنی  $\tau = \tau_d$ .

### ۳- کنترل مد لغزشی [۱۵]:

در صورت وجود عدم قطعیت یا دینامیک‌های مدل نشده در پارامترهای سیستم و مدل، بر روی خروجی تأثیر گذار خواهد بود و امکان ایجاد ناپایداری سیستم خواهد شد که باید خروجی را در مقابل این عدم قطعیت‌ها مقاوم کرد [۱۶]. در [۱۵] طراحی یک کنترل کننده مد لغزشی جهت کنترل و افزایش مقاومت خروجی در مقابل عدم قطعیت‌ها پیشنهاد شده است که به بررسی اجمالی از آن می‌پردازیم. با تعریف رابطه خطا به صورت  $E = \theta_M - \theta_H$  داریم:

$$\dot{E} = E - E_d = (\theta_M - \theta_H) - (\theta_{Md} - \theta_H) \Rightarrow \dot{E} = \theta_M - \theta_{Md} \quad (7)$$

در صورتی که  $\theta_M = \theta_{Md}$  شود خطا به صفر میل می‌کند. صفحه لغزش به صورت معادله (۸) تعریف می‌گردد:

$$S = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)\dot{E} \quad (8)$$

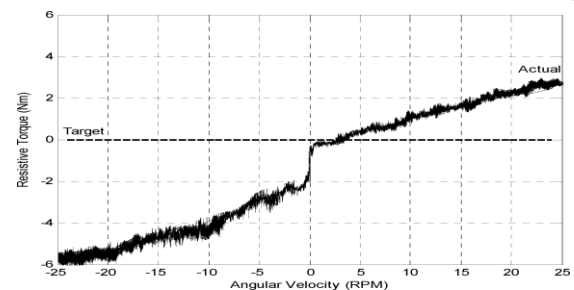
$$I_M \ddot{\theta}_M = \tau_M - k(\theta_M - \theta_H) - \tau_{res} \quad (1)$$

در رابطه (۱) اینرسی موتور،  $\theta_M$  و  $\theta_H$  به ترتیب زوایای موتور و پای انسان که توسط انکدرها اندازه‌گیری می‌شوند و همچنین  $k$  ثابت فنر به کار رفته بین موتور و پا می‌باشد. کنترل و مدل‌سازی این سیستم در فاز راه رفتن شخص بوده و در این حالت چون پای مصنوعی در هنگام راه رفتن از زمین جدا می‌شود و در حال حرکت است جرم شخص بر اینرسی اعمالی بر عملگر، تأثیری ندارد و فقط جرم پای طراحی شده به همراه جرم موتور، در اینرسی کلی سیستم لحاظ می‌گردد. در فاز قدم زنی<sup>۱</sup> وزن شخص به علت قرارگیری پا در هوا، در نحوه عملکرد عملگر الاستیکی موثر نبوده و تنها در حالت ایستاده، تمام وزن شخص به طور مستقیم به پا وارد می‌گردد. همچنین خواص دمپری و فنی عضلات چهارسر ران و عقب ران و ... در گشتاور غیرخطی لحاظ گردیده است.

معادله گشتاور مقاومتی غیرخطی، برحسب سرعت زاویه‌ای موتور به صورت معادله (۲) مدل گردیده است [۱۱] و [۱۵]:

$$\tau_{res} = a_1 + a_2 \text{sign}(\dot{\theta}_M) + a_3 \dot{\theta}_M \quad (2)$$

که  $a_1$ ،  $a_2$  و  $a_3$  به ترتیب ضرایب بایاس، اصطکاک غیرخطی و ضربه گیر خطی می‌باشند. نمودار گشتاور مقاومتی غیرخطی کولمب بر حسب سرعت زاویه‌ای موتور در شکل ۴ رسم شده است. لازم به ذکر است صحت سنجی مدل دینامیکی (۱) و (۲) مبتنی بر مراجع [۱۱] و [۱۵] بوده به عنوان مثال معادله گشتاور دینامیکی غیر خطی بدست آمده (۲) برای عملگر استاتیکی با ضرایب عددی در مرجع [۱۵] در شرایط آزمایشگاهی خاص، مورد بحث قرار گرفته که در این مقاله به عنوان پیش فرض از آن ضرایب استفاده خواهد شد.



شکل ۴: گشتاور مقاومتی غیرخطی موتور [۱۵]

گشتاور فنر با اختلاف زاویه بین موتور  $(\theta_M)$  و پا  $(\theta_H)$ ، رابطه مستقیم دارد، که در اینجا هدف ما ردیابی یک گشتاور دلخواه مطلوب توسط فنر می‌باشد که گشتاور را از موتور به پا جهت حرکت مطلوب انتقال دهد. سیستم را با نوع دیگری از مدل‌سازی یعنی توصیف فضای حالت بیان می‌نماییم. با توجه به مدل سیستم، متغیرهای حالت به گونه‌ای

هدف از طراحی پسخورد حالت، پایدارسازی سیستم برای تمام  $q$  های ممکن در کران داده شده است. جواب مساله کنترل مقاوم فوق بستگی به برقراری شرط سازگاری برای عدم قطعیت دارد که بدین منظور لازم است عدم قطعیت پارامتری  $q$  معادله (۱۳) در فضای برد  $B$  باشد. اکنون با توجه به معادله (۳) که معادله اصلی سیستم است و خطی-سازی فیدبکی آن، مدل فضای حالت سیستم خطی شده به صورت معادله (۱۴) می باشد:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -qk & -qa_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix} u \quad (14)$$

در صورتی که در سیستم فقط پارامتر  $q$  دارای عدم قطعیت باشد مثلکاری که در [۱۵] بیان شده عدم قطعیت سازگار است و در صورتی که  $k$  و  $a_3$  نیز دارای عدم قطعیت باشند، عدم قطعیت ناسازگار بوده و کنترل آن نسبت به حالت سازگار سخت تر خواهد بود. در اینجا  $q = \frac{1}{I_M}$  پارامتر دارای عدم قطعیت سیستم و محدوده تغییرات آن  $[q_{\min} \quad q_{\max}]$  است. در ابتدا سیستم را سازگار فرض کرده و مسئله را حل می نمایم.

#### الف) سیستم با عدم قطعیت سازگار:

اگر عدم قطعیت شرط سازگاری را دارا باشد، همیشه جواب مساله کنترل مقاوم وجود داشته و به راحتی با حل مسئله کنترل بهینه قابل دستیابی است. حل مسئله کنترل بهینه با اعمال محدودیت هایی بر روی تابع هزینه بدست می آید. بر اساس ویژگی های کنترل بهینه اثبات می شود که جواب مساله کنترل بهینه که توسط معادله همیلتن-ژاکوبی-بلمن ( $HJB$ )<sup>۱</sup> توصیف می گردد، همان جواب مسئله کنترل مقاوم است. اکنون فرض کنید عدم قطعیت در ماتریس ورودی وجود داشته باشد. فرض اینکه عدم قطعیت پارامتری  $q$  از طریق ماتریس ورودی  $B$  وارد سیستم گردد و عدم قطعیت در  $A(q)$  نیز در شرط سازگاری صدق کند داریم:

$$\dot{x} = A(q)x + BD(q)u \quad (15)$$

ماتریس ورودی که یک ماتریس مربعی  $m \times m$  و دارای عدم-قطعیت می باشد با  $D(q)$  نشان داده شده است.

ابتدا فرضیات زیر را در نظر بگیرید:

**فرض ۱:** مقدار نامی  $q_0 \in [q_{\min} \quad q_{\max}]$  وجود دارد به قسمی که سیستم  $(A(q_0), B)$  پایدارپذیر باشد، که در اینجا  $q_0$  میانگین بازه آن انتخاب می شود.

**فرض ۲:** برای هر  $q \in [q_{\min} \quad q_{\max}]$ ، ماتریس ثابت  $D(q)$  وجود دارد به طوری که:

$$0 < D_0 < D(q) \quad (16)$$

برای اطمینان از اینکه خطای  $\tilde{E}$  به صفر میل می کند، متغیر لغزش باید به صفر میل کند که این شرط، معادل باقی ماندن بر روی صفحه  $S$  می باشد. معادله کنترل مدلغزشی همراه با روش کنترل مدلغزشی-تطبیقی در بخش ۴ بیان می گردد.

#### ۴- کنترل گشتاور خروجی به روش کنترل مدلغزشی-تطبیقی [۱۷]:

کنترل کننده تطبیقی ابزاری با پارامترهای قابل تنظیم، همراه با مکانیزمی برای تنظیم و تخمین پارامترها می باشد [۱۸]. کنترل تطبیقی فقط به منظور تخمین پارامترهای دارای عدم قطعیت استفاده شده و مقدار تخمینی آن ها به یک کنترل کننده مدلغزشی اعمال می گردد. فیدبک های حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$v = v_1 + k(\theta_H - \theta_M) - \tau_{res} \quad (9)$$

$$u = v - k(\theta_H - \theta_M) + \tau_{res} \quad (10)$$

در [۱۷] اینرسی موتور ( $I_M$ )، پارامتر دارای عدم قطعیت است. با اعمال کنترل های فوق و با توجه به معادله (۳) و در نظر گرفتن  $p = \frac{1}{I_M}$ ، می توان  $p$  را تخمین زد. با فرض  $\tilde{p} = \hat{p} - p$ ، که  $\tilde{p}$  اختلاف مقدار واقعی پارامتر  $p$  و تخمین آن یعنی  $\hat{p}$  می باشد و ورودی کنترل  $v$ ، قانون تطبیق به صورت معادله (۱۱) بدست می آید [۱۷]:

$$\dot{\hat{p}} = -g\tilde{p}v^2 \quad (11)$$

که در آن  $g$  پارامتر صحیح و مثبت تطبیق است. با توجه به صفر قرار دادن مشتق صفحه لغزش بخش ۳ و اعمال  $\hat{p}$  تخمین زده شده، قانون کنترل مدلغزشی به صورت معادله (۱۲) بدست می آید [۱۰].

$$v_1 = \frac{1}{\hat{p}(x)} [-\hat{f}(x) - CE(x) - k \text{sat}(\frac{S}{\phi})] \quad (12)$$

در کنترل کننده مدلغزشی به جای استفاده از تابع علامت ( $\text{sign}(S)$ ) از تابع اشباع ( $\text{sat}(S)$ ) استفاده شده است به همین دلیل به آن کنترل کننده مدلغزشی هموار گفته می شود.

#### ۵- کنترل بهینه و کنترل مقاوم با رهیافت بهینه (روش پیشنهادی):

در این مقاله تاکید اصلی بر مبنای کنترل بهینه در طراحی کنترل مقاوم است [۱۹]. این موضوع به همراه ارائه روش کنترل بهینه برای سیستم های خطی توصیف می گردد. سیستم کنترل شده به صورت زیر بیان می شود:

$$\dot{x} = A(q)x + Bu \quad (13)$$

<sup>1</sup> Hamilton-Jacobi-Belman

$$\phi(q)^T \phi(q) \leq F \quad (25)$$

می‌باشد. در اینجا طبق معادله (۱۸) برای  $F$  خواهیم داشت:

$$F = \max(\phi^T \phi) \\ = \max \begin{bmatrix} (k\Delta q)^2 & ka_3(\Delta q)^2 \\ ka_3(\Delta^2 q) & (a_3\Delta q)^2 \end{bmatrix} \quad (26) \\ = \begin{bmatrix} (k(q_{\max} - q_0))^2 & ka_3(q_{\max} - q_0)^2 \\ ka_3(q_{\max} - q_0)^2 & (a_3(q_{\max} - q_0))^2 \end{bmatrix}$$

برای حل مساله کنترل بهینه ابتدا معادله جبری ریکاتی:

$$A(q_0)^T W + WA(q_0) + F + I - WBDD^T B^T W = 0 \quad (27)$$

را بر حسب  $W$  حل می‌کنیم ( $R = R^{-1} = I$ ). لذا جواب مسئله

کنترل بهینه  $u = -D^T B^T W x$  خواهد بود که در آن

$$k = -D^T B^T W \text{ می‌باشد.}$$

از آنجا که  $(A(q_0), B)$  پایدارپذیر و  $F \geq 0$ ، جواب مسئله

کنترل بهینه وجود دارد. فرض کنید جواب به صورت  $u = kx$  باشد.

اثبات می‌شود که این جواب، جواب مسئله کنترل مقاوم نیز می‌باشد که در

اینجا از اثبات آن صرف نظر شده است.

در واقع با اعمال کنترل کننده  $u = Kx$  سیستم در نقطه پایدار

صفر قرار خواهد گرفت و ما به منظور ردیابی یک نقطه خاص می‌بایست

قطب‌های سیستم را در مکان مطلوب جایابی نماییم.

حال در صورتی که پارامترهای  $k$  و  $a_3$  نیز علاوه بر  $q$ ، عدم قطعیت

داشته باشند سیستم با عدم قطعیت ناسازگار بوده و حل مسئله کمی

پیچیده‌تر خواهد شد.

### ب) سیستم با عدم قطعیت ناسازگار:

در اینجا عدم قطعیت هم در ماتریس ورودی ( $B$ ) و هم در ماتریس

حالت ( $A$ ) وجود دارد ولی در شرط سازگاری صدق نمی‌کند. در این

صورت برای فضای حالت سیستم داریم:

$$\dot{x} = A(q, k, a_3) + BD(q)u \quad (28)$$

به دلیل اینکه  $q$  دارای عدم قطعیت است پس باید

$a_{3_0} \in [a_{3_{\min}} \quad a_{3_{\max}}]$  و  $q_0 \in [q_{\min} \quad q_{\max}]$  و

$k_0 \in [k_{\min} \quad k_{\max}]$  وجود داشته باشد تا سیستم پایدار گردد و

همچنین یک ماتریس ثابت  $D_0$  طوری انتخاب گردد

که  $0 < D_0 < D(q)$  باشد که در اینجا مقادیر  $q_0$ ،  $k_0$  و  $a_{3_0}$  و

همچنین  $D_0$ ، میانگین مقادیر حداقل و حداکثر کران‌ها انتخاب شده‌اند.

ابتدا عدم قطعیت در  $A$  را به دویخس سازگار و ناسازگار تبدیل می-

نماییم به طوری که در فضای برد  $BD$  وجود داشته باشد. با فرض:

$$\Delta A = A(q, k, a_3) - A(a_0, k_0, a_{3_0}) \quad (29)$$

با توجه به معادله (۱۵) و (۱۶) چنانچه  $q_0 = 1$  لحاظ

شود،  $D_0 = 1$  و  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  بدست می‌آید.

**فرض ۳:** برای هر  $q \in [q_{\min} \quad q_{\max}]$ ، ماتریس  $\phi(q)$  که

عدم قطعیت را نشان می‌دهد با ابعاد  $m \times n$  وجود دارد به طوری که:

$$A(q) - A(q_0) = BD_0 \phi(q) \quad (17)$$

که  $\phi(p)$  محدود است. طبق معادله (۱۷) و فرض ۲ خواهیم

داشت:

$$\phi(q) = [-k \Delta q \quad -a_3 \Delta q] \quad (18)$$

پس هدف ما حل مسئله کنترل مقاوم به منظور پایدارسازی سیستم با

عدم قطعیت پارامتری می‌باشد.

### مساله کنترل مقاوم و تبدیل آن به مسئله کنترل بهینه:

اگر سیستم غیرخطی زیر را در نظر بگیریم:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (19)$$

هدف یافتن قانون کنترل است به طوری که تابعی زیر حداقل گردد:

$$j(x, t) = \int_t^{t_f} L(x, u) d\tau \quad (20)$$

که در آن  $t$  زمان فعلی،  $t_f$  زمان نهایی،  $x = x(t)$  حالت

فعلی و  $L(x, u)$  تابع هدف است.

تابع هزینه درجه دوم با در نظر گرفتن

$$L(x, u) = x^T x + u^T R u_0$$

$$j(x, t) = \int_t^{t_f} f(x^T Q x + u^T R u) d\tau \quad (21)$$

اگر  $j(x, t)$  را حداقل هزینه تحت کنترل باشد [۱۹]. معادله

همیلتن-ژاکوبی-بلمن به صورت زیر ساده می‌گردد:

$$\min_{u \in R^m} \left\{ L(x, u) + \left( \frac{\delta j}{\delta x} \right)^T f(x, u) \right\} = 0 \quad (22)$$

قانون کنترل پس‌خورده  $u = kx$  باید چنان تعیین شود که سیستم

حلقه بسته پایدار گردد.

برای سیستم کمکی

$$\dot{x} = A(q_0)x + BDu \quad (23)$$

قانون کنترل پس‌خورده  $u = kx$  را چنان می‌یابیم که تابعی هزینه

$$\int_0^{\infty} (x^T F x + x^T x + u^T u) dt = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (24)$$

حداقل گردد که در آن  $F$  حد بالای عدم-

قطعیت  $\phi(q)^T \phi(q)$  است. یعنی برای هر  $q \in [q_{\min} \quad q_{\max}]$ :

داریم:  $V(x) =$  (۳۷)

$$\min_{u \in R^m} \int_0^\infty (x^T (G + \rho^2 H + \beta^2 I)x + u^T u + \rho^2 v^T v) dt$$

که این معادله به صورت معادله (۳۸) تبدیل می گردد:

$$\min_{u,v} (x^T (G + \rho^2 H + \beta^2 I)x + u^T u + \rho^2 v^T v) + V_x^T (A(q_0)x + BDu) + \alpha(I - (BD)(BD)^+)V = 0$$
 (۳۸)

این تابع باید در معادله همیلتن-ژاکوبی-بلمن صدق کند و مشتق آن نیز نسبت به  $u$  باید صفر باشد یعنی:

$$x^T (G + \rho^2 H + \beta^2 I)x + x^T k^T kx + \rho^2 x^T L^T Lx + V_x^T (A(q_0, k_0, a_{3_0})x + BDKx + \alpha(I - (BD)(BD)^+)Lx) = 0$$
 (۳۹)

و همچنین

$$2x^T k^T + V_x^T BD = 0$$
 (۴۰)
$$2\rho^2 x^T L^T + V_x^T \alpha(I - (BD)(BD)^+) = 0$$

که در آن  $(BD)^+ = ((BD)^T BD)^{-1} (BD)^T$  است. بدیهی است که برای یک تابع لیاپانوف رابطه (۴۱) برقرار خواهد بود:

$$\begin{cases} V(x) > 0 & x \neq 0 \\ V(x) = 0 & x = 0 \end{cases}$$
 (۴۱)

حال نشان می دهیم که  $\dot{V}(x) < 0$  به ازای تمام  $x \neq 0$  است.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= V_x^T \dot{x} \\ &= V_x^T (A(p)x + BD(Kx + E(p)Kx)) \\ &= V_x^T (A(p_0)x + BDKx + \alpha(I - (BD)(BD)^+)Lx) \\ &\quad + V_x^T (A(p) - A(p_0))x - V_x^T \alpha(I - (BD)(BD)^+)Lx \\ &\quad + V_x^T BDE(p)Kx = V_x^T (A(p_0)x + BDKx \\ &\quad + \alpha(I - (BD)(BD)^+)Lx) + V_x^T BD(BD)^+(A(p) - A(p_0))x \\ &\quad + V_x^T \alpha(I - (BD)(BD)^+)(A(p) - A(p_0))x \\ &\quad - V_x^T \alpha(I - (BD)(BD)^+)Lx + V_x^T BDE(p)Kx \end{aligned}$$
 (۴۲)

از رابطه (۳۹) داریم:

$$V_x^T (A(q_0)x + BDKx + \alpha(I - (BD)(BD)^+)Lx) = -x^T (G + \rho^2 H + \beta^2 I)x - x^T K^T Kx - \rho^2 x^T L^T Lx$$
 (۴۳)

و همچنین از رابطه (۴۰):

$$V_x^T (BD)(BD)^+ (A(q) - A(q_0))x = -2x^T K^T (BD)^+ (A(q) - A(q_0))x$$
 (۴۴)

$$V_x^T (BD)E(q)Kx = -2x^T K^T E(q)Kx$$

و از رابطه (۴۱)

$$\Delta A = (BD)(BD)^+ \Delta A + (I - (BD)(BD)^+) \Delta A$$
 (۳۰)

با انتخاب دو پارامتر  $G$  و  $H$  به صورت زیر به عنوان پارامترهای کمکی که کرانهای بالای عدم قطعیتها را معرفی می نمایند مسئله را به یک مسئله کنترل بهینه تبدیل می نمایم.

$$\alpha^{-2} (\Delta A)^T \Delta A \leq H$$
 (۳۱)
$$(\Delta A)^T (BD)^T (BD) (\Delta A) \leq G$$

سیستم نامی کمکی را به صورت:

$$\dot{x} = A(q_0, k_0, a_{3_0})x + BD_0 u + \alpha(I - (BD)(BD)^+)v$$
 (۳۲)

در نظر می گیریم. این سیستم دارای یک ورودی مجازی اضافه می - باشد که در حل مسئله به ما کمک می نماید.

قانون کنترل  $u = Kx$  و  $v = Lx$  را چنان باید تعیین نمود که تابعی هزینه معادله (۳۳) کمینه گردد.

$$\int_0^\infty (x^T (G + \rho^2 H + \beta^2 I)x + u^T u + \rho^2 v^T v) dt$$
 (۳۳)

$$= \int_0^\infty (x^T \tilde{Q}x + u^T \tilde{R}u) dt$$

که در این صورت جواب مسئله کنترل بهینه

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = -\tilde{R}^{-1} \tilde{B}^T Sx$$

ریکاتی که جواب یکتایی دارد بدست می آید:

$$S\tilde{A} + \tilde{A}^T S + \tilde{Q} - S\tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^T S = 0$$
 (۳۴)

که در آن:

$$\tilde{A} = A(q_0, k_0, a_{3_0}), \tilde{B} = \begin{bmatrix} BD_0 & \alpha(I - (BD)(BD)^+) \end{bmatrix}$$
 (۳۵)
$$\tilde{Q} = G + \rho^2 H + \beta^2 I \quad \tilde{R} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \rho^2 I \end{bmatrix}$$

می باشد. قانون کنترل با فرض این تغییرات به صورت معادله (۳۶) بدست می آید:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(BD)^T S \\ -\alpha^2 \rho^2 (I - (BD)(BD)^+) S \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} K \\ L \end{bmatrix} x$$
 (۳۶)

در اینجا سه پارامتر  $\alpha, \beta, \rho$  باید طوری انتخاب گردند که با فرض  $u = Kx$  و  $v = Lx$  شرط  $\beta^2 I - 2\rho^2 L^T L > 0$  برقرار باشد تا  $u = Kx$  جواب مسئله کنترل مقاوم گردد.

**اثبات:** تابع لیاپانوف را به صورت زیر تعریف می نمایم:

بنابراین برای تمام  $q \in [q_{\min} \quad q_{\max}]$  و  $k \in [k_{\min} \quad k_{\max}]$  و  $a_3 \in [a_{3\min} \quad a_{3\max}]$  سیستم پایدار بوده و  $u = Kx$  جواب مسئله کنترل مقاوم است. جهت ردیابی گشتاور مطلوب توسط گشتاور خروجی باید قطب‌های سیستم حلقه بسته در مکان مطلوبی جایابی گردند.

**۶- نتایج شبیه‌سازی:**

شبیه‌سازی‌ها در دوسناریوی مختلف، که در سناریوی اول شبیه‌سازی‌ها با همان پارامترهای [۱۵] که فقط یک پارامتر آن دارای عدم قطعیت است، اجرا می‌گردد. و خطای ناشی از کنترل‌کننده مقاوم با رویکرد بهینه (روش پیشنهادی) با خطاهای ناشی از اعمال دو کنترل‌کننده دیگر یعنی کنترل‌کننده مدل‌گزشی- تطبیقی و مدل‌گزشی به‌تنهایی به سیستم، مقایسه می‌گردند. در سناریوی دوم شبیه‌سازی‌ها با وجود عدم قطعیت در سه پارامتر که ناسازگار با سیستم هستند و با کمک کنترل پیشنهادی و کنترل‌کننده‌های بیان‌شده یعنی کنترل‌کننده‌های مدل‌گزشی تطبیقی و مدل‌گزشی به‌تنهایی اجرا می‌گردد که نوآوری مقاله نیز در آن برجسته‌تر گردیده است.

**تعریف خطا:**

با تعریف معیارهای خطا به صورت زیر می‌توان نتایج حاصل را مقایسه نمود.

**میانگین قدرمطلق خطا (Mean Absolute Error):**

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - \hat{x}_i| = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |e_i| \quad (51)$$

که  $\hat{x}_i$  مقدار تخمین  $x_i$  و  $e_i = x_i - \hat{x}_i$  است.

**میانگین مربع خطا (Mean Square Error):**

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (e_i)^2 \quad (52)$$

که در اینجا نیز  $\hat{x}_i$  مقدار تخمین  $x_i$  و  $e_i = x_i - \hat{x}_i$  است.

**انحراف معیار خطا (Standard Deviation of error):**

$$STD = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x_i - \bar{x}_i]^2} \quad (53)$$

$\bar{x}_i$  مقدار متوسط  $x_i$  می‌باشد.

**۷-۱- سناریوی اول:**

در این سناریو سیستم جبران‌شده با سه کنترل‌کننده مدل‌گزشی، مدل‌گزشی-تطبیقی و روش کنترلی پیشنهادی (مقاوم با رویکرد بهینه) برای عملگر با توجه به مقادیر پارامتری که به‌طور عملی در [۱۱] و [۱۵] مورد آزمایش قرار گرفته و تعیین شده‌اند، شبیه‌سازی می‌گردد.

$$\begin{aligned} V_x^T \alpha (I - (BD)(BD)^+) Lx &= -2\rho^2 x^T L^T Lx \\ V_x^T (I - (BD)(BD)^+) (A(q) - A(q_0))x & \\ &= -2\alpha^{-1} \rho^2 x^T L^T (A(q) - A(q_0))x \end{aligned} \quad (45)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= V_x^T (A(q_0)x + BDKx \\ &+ \alpha(I - (BD)(BD)^+)Lx) \\ &+ V_x^T (BD)(BD)^+ (A(q) - A(q_0))x \\ &+ V_x^T (I - (BD)(BD)^+) (A(q) - A(q_0))x \\ &- V_x^T \alpha (I - (BD)(BD)^+) Lx + V_x^T BDE(q)Kx \\ &= -x^T (G + \rho^2 H + \beta^2 I)x - x^T K^T Kx \\ &- \rho^2 x^T L^T Lx - 2x^T K^T (BD)^+ (A(q) \\ &- A(q_0))x - 2\alpha^{-1} \rho^2 x^T L^T (A(q) \\ &- A(q_0))x + 2\rho^2 x^T L^T Lx - 2x^T K^T E(q)Kx \end{aligned} \quad (46)$$

از رابطه (۳۱):

$$\begin{aligned} &-x^T K^T Kx - 2x^T K^T (BD)^+ (A(q) - A(q_0))x \\ &= -x^T (K - (BD)^+ (A(q) - A(q_0)))^T (K^T - (BD)^+ (A(q) - A(q_0)))x \\ &+ x^T ((BD)^+ (A(q) - A(q_0)))^T ((BD)^+ (A(q) - A(q_0)))x \\ &\leq x^T ((A(q) - A(q_0))^T (BD)^+ (BD)^+ (A(q) - A(q_0)))x \\ &\leq x^T Gx \end{aligned} \quad (47)$$

و همچنین:

$$\begin{aligned} &-2\alpha^{-1} \rho^2 x^T L^T (A(q) - A(q_0))x \\ &\leq \rho^2 x^T L^T Lx + \alpha^{-2} \rho^2 x^T (A(q) - A(q_0))^T (A(q) - A(q_0))x \\ &\leq \rho^2 x^T L^T Lx + \rho^2 x^T Hx \end{aligned} \quad (48)$$

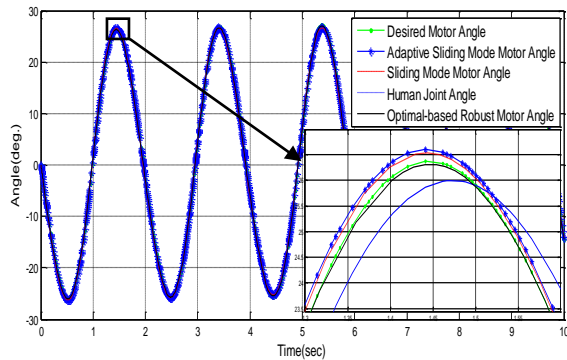
بنابراین

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= -x^T (G + \rho^2 H + \beta^2 I)x - x^T K^T Kx - \rho^2 x^T L^T Lx \\ &- 2x^T K^T (BD)^+ (A(q) - A(q_0))x \\ &- 2\alpha^{-1} \rho^2 x^T L^T (A(q) - A(q_0))x \\ &+ 2\rho^2 x^T L^T Lx - 2x^T K^T E(q)Kx \\ &\leq -x^T (G + \rho^2 H + \beta^2 I)x - \rho^2 x^T L^T Lx + x^T Gx \\ &+ \rho^2 x^T L^T Lx + \rho^2 x^T Hx + 2\rho^2 x^T L^T Lx - 2x^T K^T E(q)Kx \\ &= -x^T (\beta^2 I - 2\rho^2 L^T L)x - 2x^T K^T E(q)Kx \\ &\leq -x^T (\beta^2 I - 2\rho^2 L^T L)x \end{aligned} \quad (49)$$

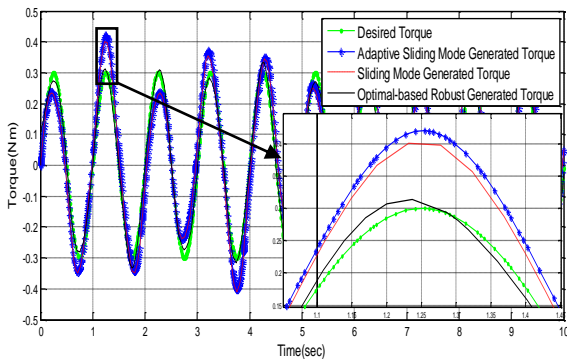
اگر شرط کافی  $\beta^2 I - 2\rho^2 L^T L > 0$  برقرار باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &< 0 \quad x \neq 0 \\ \dot{V}(x) &= 0 \quad x = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

نماید را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌گردد ردیابی زاویه مطلوب موتور با کمک روش پیشنهادی به‌خوبی صورت گرفته است. این زاویه مطلوب اگر با ردیابی دقیق‌تری توسط موتور صورت گیرد گشتاور خروجی دقیق‌تری را به دنبال خواهد داشت. در شکل ۶ که ردیابی گشتاورها را نشان می‌دهد می‌توان مشاهده کرد که گشتاور خروجی به کمک روش پیشنهادی، ورودی مطلوب را با دقت بالایی ردیابی کرده و علاوه بر این که سرعت بالایی در ردیابی داشته است بالازدگی‌ها در روش‌های دیگر در شکل مشهود است در حالی که گشتاور خروجی با روش پیشنهادی از همان ابتدا بدون بالازدگی بوده و به‌طور دقیق‌تری ورودی مطلوب را دنبال کرده است. تصدیق این ردیابی در شکل ۷ نیز مشخص است که دامنه خطای ردیابی به‌طور قابل توجهی کاهش یافته است و سرعت ردیابی نیز به‌طور چشمگیری افزایش می‌یابد. به‌خاطر وضوح بیشتر بعضی از شکل‌ها، قسمتی از آن‌ها بزرگنمایی شده است.



شکل ۵: نمودار زوایای سیستم (سناریوی اول): زوایای حرکت موتور با سه کنترل‌کننده و زاویه مطلوب موتور جهت ردیابی، مقدار نامی پارامتر  $I_M = 1(kgm^2)$  به همراه ۲۰٪ عدم قطعیت.



شکل ۶: نمودار گشتاورهای سیستم (سناریوی اول): گشتاورهای موتور با سه کنترل‌کننده و گشتاور مطلوب موتور جهت ردیابی، مقدار نامی پارامتر  $I_M = 1(kgm^2)$  به همراه ۲۰٪ عدم قطعیت.

یعنی  $I_M = 1(kgm^2)$  ،  $k = 0.23(Nm/deg)$  ،  $a_3 = 0.1414(Nm/red^{-1})$  و همچنین ضرایب گشتاور مقاومتی  $a_1 = -1.509 \times 10^0(Nm)$  ،  $a_2 = 9.572 \times 10^{-1}(Nm)$  می‌باشند. پارامتر  $I_M$  دارای مقدار متوسط گفته شده بوده و با ۲۰٪ عدم قطعیت در نظر گرفته شده است که در [۱۵] نیز همین یک پارامتر با عدم قطعیت لحاظ گردیده است. در اینجا طبق معادله (۲۳) و متغیرهای کمکی معادله (۳۰) داریم:

$$F = \begin{bmatrix} (k(q_{max} - q_0))^2 & ka_3(q_{max} - q_0)^2 \\ ka_3(q_{max} - q_0)^2 & (a_3(q_{max} - q_0))^2 \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$Q = F + I \quad (55)$$

$$R = I = 1$$

با توجه به معادلات (۲۷) و (۵۴) و (۵۵) و حل مسئله ریکاتی، ورودی کنترل مقاوم مبتنی بر روش کنترل بهینه به صورت معادله (۵۶) بدست می‌آید:

$$u = [-0.9013 \quad -1.2805]x \quad (56)$$

با تغییر کوچکی در معادله (۵۶) و به‌منظور ردیابی نقطه دلخواه، کنترل‌کننده را به صورت زیر تغییر می‌دهیم تا قطب‌های سیستم حلقه بسته در مکان مطلوبی جایابی گردند.

$$u = [-0.9013C_0 \quad -1.2805C_1]x + C_0\theta_{Md} + C_1\dot{\theta}_{Md} + \ddot{\theta}_{Md} \quad (57)$$

که با انتخاب قطب‌ها در  $-50$  و  $-70$ ،  $C_0$  و  $C_1$  انتخاب می‌گردند.

به دلیل در دسترس نبودن پروفایل دقیق گشتاور ورودی به عملگرهای زانو از طرف مغز انسان جهت ایجاد یک قدم زنی استاندارد، گشتاور مطلوب به شکل متغیر با زمان و در محدوده فرکانس کاری پای انسان در نظر گرفته می‌شود. در این مقاله گشتاور مطلوب ورودی یک موج سینوسی با دامنه  $3 Nm$  و فرکانس  $1 Hz$  می‌باشد که در شکل ۶ نشان داده شده است همچنین با یک تبدیل کوچک مطابق روابط ذکر شده می‌توان زاویه حرکت مفصل را به عنوان خروجی مدل نیز در نظر گرفت سیگنال در نظر گرفته شده برای گشتاور مطلوب به شکل سینوسی در واقع شبیه سازی از فرامین مغز انسان به ماهیچه‌های پا در اشخاص سالم جهت بکارگیری در افراد معلول است همچنین  $\theta_H$  نیز به‌عنوان ورودی دوم یک موج سینوسی با دامنه  $26 deg$  و فرکانس  $0.5 Hz$  در نظر گرفته می‌شود بازه حرکت زانو را حدود  $523$  و به صورت مثبت و منفی در نظر گرفته‌ایم تا فتر زیاد جمع و یا باز نشود و از حالت خطی خارج نگردد [۱۱]. در شکل ۵ رسم شده است. شکل ۵ شبیه‌سازی زوایای موتور با کمک سه کنترل‌کننده بیان شده را به همراه زوایای مطلوب ورودی موتور که باید موتور این زاویه را با الگوریتم‌های کنترلی ردیابی

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q_0 k_0 & -q_0 a_{3_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix} v \quad (58)$$

در اینجا  $q_0 = 1$ ،  $k_0 = 0.23$  و  $a_{3_0} = 1414$  همان مقادیر متوسط پارامترهای مورد نظر می‌باشد. تابعی هزینه نیز برای این سیستم با انتخاب  $\beta = 10$ ،  $\rho = 1$  و  $\alpha = 0.05$  نیز به صورت معادله (59) است:

$$j_{u,v} = \int_0^{\infty} \left[ \begin{array}{cc} (\Delta k q)^2 & (\Delta k q)(\Delta k a_3) \\ (\Delta k q)(\Delta k a_3) & (\Delta k a_3)^2 \end{array} \right] + \begin{bmatrix} 400(\Delta k q)^2 & 400(\Delta k q)(\Delta k a_3) \\ 400(\Delta k q)(\Delta k a_3) & 400(\Delta k a_3)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} + u^T u + v^T v \quad (59)$$

که در آن داریم:

$$\begin{aligned} \Delta k q &= k_{\max} q_{\max} - k_0 q_0 \\ \Delta k a_3 &= k_{\max} a_{3_{\max}} - k_0 a_{3_0} \end{aligned} \quad (60)$$

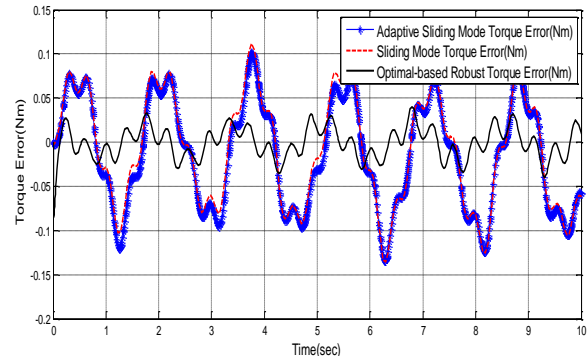
با حل مسأله جبری ریگاتی  $S\tilde{A} + \tilde{A}^T S + \tilde{Q} - S\tilde{B}\tilde{R}^{-1}\tilde{B}^T S = 0$  که در آن

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q_0 k_0 & -q_0 a_{3_0} \end{bmatrix} & \tilde{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.05 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{Q} &= \begin{bmatrix} 104.1068 & 2.5248 \\ 2.5248 & 101.5521 \end{bmatrix} & \tilde{R} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (61)$$

می‌باشند. در این صورت  $u = kx$  و  $v = Lx$  به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} u &= -[8.74 \quad 10076.09]x \\ v &= -\begin{bmatrix} 4.8682 & 0.4370 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x \end{aligned} \quad (62)$$

این جواب‌ها اگر در شرط  $\beta^2 I - 2\rho^2 L^2 L > 0$  صدق کند  $u = kx$  جواب کنترل است، که در زیر تصدیق این شرط بیان شده است.



شکل ۷: نمودار خطاهای گشتاور سیستم (سناریوی اول): خطاهای گشتاور خروجی با روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های کنترل مدل‌غزشی و روش کنترل مدل‌غزشی تطبیقی.

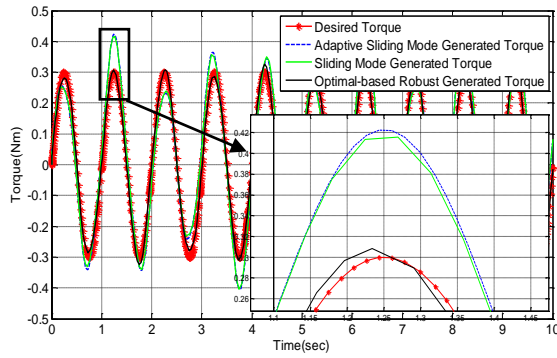
میزان خطای گشتاورها با اعمال این کنترل‌کننده‌ها در جدول ۱ نیز مشاهده می‌گردد. با مشاهده درصد بهبود کنترل‌کننده پیشنهادی نسبت به دو کنترل‌کننده دیگر از صحت عملکرد این روش اطمینان حاصل می‌گردد.

جدول ۱: مقادیر خطای گشتاور خروجی در ۱۰ ثانیه عملکرد سیستم (سناریوی اول):

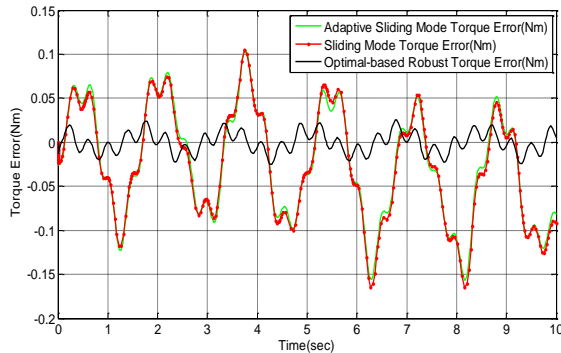
MAE (Nm)	MSE (Nm)	STD (Nm)	معیار خطا کنترل‌کننده
۰/۰۱۹۴	۰/۰۰۰۷۹	۰/۰۲۰۶	مدل‌غزشی هموار [۱۵]
۰/۰۱۵۴	۰/۰۰۰۷۲	۰/۰۲۲۰	مدل‌غزشی-تطبیقی هموار [۱۷]
۰/۰۰۶۵	۰/۰۰۰۲۵	۰/۰۱۵۳	پیشنهادی (بهینه مقاوم)
%۶۶/۵۸	%۶۷/۶۶	%۲۵/۶۵	درصد بهبود (روش بهینه مقاوم نسبت به روش لغزشی هموار)
%۵۷/۸۸	%۶۴/۳۲	%۳۰	درصد بهبود (روش بهینه مقاوم نسبت به روش لغزشی-تطبیقی هموار)

## ۲-۷. سناریوی دوم:

در این سناریو با فرض اینکه سه پارامتر  $I_M$  و  $k$  و  $a_3$  دارای مقادیر متوسط  $I_M = 1(kgm^2)$ ،  $k = 0.23(\frac{NM}{rad})$  و  $a_3 = 1414(\frac{NM}{rad^{-1}})$  و  $\alpha = 20\%$  عدم قطعیت باشند شبیه‌سازی اجرا شده است. سیستم به دلیل وجود سه عدم قطعیت، یک سیستم دارای عدم قطعیت ناسازگار است. با توجه به معادله (۱۸) و مقادیر متوسط گفته شده برای سیستم کمکی داریم:



شکل ۹: نمودار گشتاورهای سیستم (سناریوی دوم): گشتاورهای موتور با سه کنترل کننده و گشتاور مطلوب موتور جهت ردیابی، مقادیر نامی پارامترها  
 $I_M = 1(kgm^2)$ ،  $k = 0.23(\frac{NM}{rad})$  و  $a_3 = 1414(\frac{NM}{rad^{-1}})$  به همراه ۲۰٪ عدم قطعیت در هر سه پارامتر.



شکل ۱۰: نمودار خطاهای ردیابی گشتاور مطلوب سیستم (سناریوی دوم) توسط روش پیشنهادی و مقایسه با دو کنترل کننده دیگر  
 میزان خطا و بهبود روش پیشنهادی نسبت به دیگر روش های بیان شده در جدول زیر مشخص شده است. طبق این جدول روش پیشنهادی درصد بهبود بالایی در ردیابی گشتاور خروجی را نشان می دهد.

جدول ۲: مقادیر خطای گشتاور خروجی در ۱۰ ثانیه عملکرد سیستم، سناریوی دوم

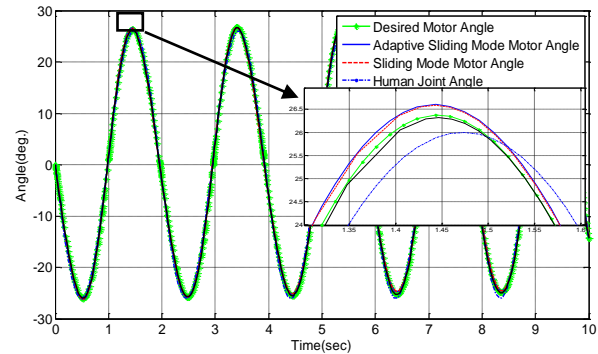
MAE (Nm)	MSE (Nm)	STD (Nm)	معیار خطا / کنترل کننده
۰/۰۴۸۸	۰/۰۰۳۸	۰/۰۵۷	مدلغزشی هموار [۱۵]
۰/۰۵۱۹	۰/۰۰۴۰	۰/۰۵۸۹	مدلغزشی-تطبیقی هموار [۱۷]
۰/۰۳۱۰	۰/۰۰۲۵	۰/۰۳۶۱	پیشنهادی (بهینه مقاوم)
٪ ۳۶	٪ ۳۷/۶۴	٪ ۳۷/۵	درصد بهبود (روش بهینه مقاوم نسبت به روش لغزشی هموار)
٪ ۴۰/۲۱	٪ ۳۴	٪ ۳۸	درصد بهبود (روش بهینه مقاوم نسبت به روش لغزشی-تطبیقی هموار)

$$\begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}^{-2} \begin{bmatrix} 4.8682 & 0.4370 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4.8682 & 0.4370 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52.6013 & -4.2548 \\ -4.25 & 99.6181 \end{bmatrix} > 0 \quad (63)$$

پس  $u = kx$  جواب مسأله کنترل مقاوم است. با تغییر کوچکی در معادله (۶۲) و به منظور ردیابی نقطه دلخواه، کنترل کننده را به صورت زیر تغییر می دهیم تا قطب های سیستم حلقه بسته در مکان مطلوبی جایابی گردند. که با انتخاب قطب ها در  $-10$  و  $-20$ ،  $C_0$  و  $C_1$  انتخاب می-گردند.

$$u = [-8.74C_0 \quad -10076C_1]x + C_0\theta_{Md} + C_1\dot{\theta}_{Md} + \ddot{\theta}_{Md} \quad (64)$$

شکل ۸ شبیه سازی زوایای موتور با کمک سه کنترل کننده بیان شده را به همراه زوایای مطلوب موتور که باید توسط موتور ردیابی شود را نشان می دهد. همان طور که در این شکل مشاهده می گردد ردیابی زاویه به کمک کنترل کننده پیشنهادی به خوبی صورت گرفته است. شکل ۹ نیز ردیابی گشتاور خروجی را نشان می دهد. بالازدگی ها در روش های دیگر در شکل مشهود است در حالی که روش پیشنهادی بالازدگی خیلی باینی دارد. شکل ۱۰ نیز که خطای این ردیابی را نشان می دهد تصدیق می نماید که کنترل کننده پیشنهادی بهبود قابل توجهی را در دامنه خطا به وجود آورده و سرعت ردیابی بهتری را دارد.



شکل ۸: نمودار زوایای سیستم (سناریوی دوم): زوایای حرکت موتور با سه کنترل کننده و زاویه مطلوب موتور جهت ردیابی، مقادیر نامی پارامترها  $I_M = 1(kgm^2)$ ،  $k = 0.23(\frac{NM}{rad})$  و  $a_3 = 1414(\frac{NM}{rad^{-1}})$  به همراه ۲۰٪ عدم قطعیت در هر سه پارامتر.

- [9] Kong. K., Bae. J., Tomizuka. M., 2010, " A Compact Rotary Series Elastic Actuator for Knee Joint Assistive System," proceedings of the IEEE International Conference on Robotica and Automation (ICRA), pp. 2940-2945.
- [10] Bae. J., Kong. K., Tomizuka. M., 2010, " Gait Phase-Based Smoothed Sliding Mode Control for a Rotary Series Elastic Actuator Installed on the Knee Joint," Proceeding on American Control Conference (ACC), pp. 6030-6035.
- [11] Kong, K., Bae, J., and Tomizuka, M., 2009, "Control of Rotary Series Elastic Actuator for Ideal Force-Mode Actuation in Human-Robot Interaction Applications," IEEE/ASME Trans. Mechatron., vol. 14, pp. 105-118.
- [12] Grun. M., Moller, R., Konigorski, U., 2012, " Model Based Control of Series Elastic Actuators," The Fourth IEEE RAS/EMBS Int. Conf. on Biomedical Robotics and Biomechanics, pp. 538- 543.
- [13] W. Sensinger. J, F.ff. Weir. W., 2006, "Improvements to Series Elastic Ectuator," MESA-2006-108.
- [14] Yoo. S.J, 2012," Actuator fault detection and adaptive accommodation control of flexible-joint robots, 'IET Control Theory Appl., vol. 6, no. 10, pp. 1497-1507.
- [15] Bae. J., Kong. K., Tomizuka. M., 2011 "Gait Phase-Based Control for a Rotary Series Elastic Actuator Assisting the Knee Joint," J. Med. Devices, vol.5, no. 3. pp. 310-316.
- [16] Slotin. J., and Li. W, "Applied Nonlinear Control," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [17] Sabbaghi. H., Karsaz, A., Mahdavi Majd. M., 2016, " Adaptive Sliding Mode Control for Series Elastic Actuator Assisting Rehabilitation System," 1st Int. Conf. on New Research Achievements in Electrical and Computer Engineering.
- [18] Astrom, karl. and Wittenmark. B., "Adaptive control "Addison-Wesley, 1934.
- [19] Lin, F. Robust control Design an Optimal Control Approach, John Wiley& Sons Ltd.

## ۷- نتیجه گیری:

در این مقاله کنترل دقیق یک عملگر الاستیکی سری مورد کاربرد در توانبخشی انسان مورد توجه قرار گرفت. عملگر مورد نظر به دلیل دارا بودن خاصیت غیرخطی و همچنین عدم قطعیت در برخی پارامترهای آن، کنترل دقیق آن را با مشکل مواجه کرده بود. به همین دلایل بالازدگی‌هایی در دامنه خروجی گشتاور سیستم مشاهده گردید. در اینجا به منظور کنترل گشتاور سیستم و مقابله با تغییرات ناخواسته خروجی در اثر تغییر پارامترها، کنترل مقاوم مبتنی بر روش کنترل بهینه طراحی گردید این کنترل کننده علاوه بر بهینه بودن، در برابر تغییرات پارامترها نیز مقاوم است و با اعمال آن به سیستم بهبودهای قابل توجهی در گشتاور خروجی نسبت به اعمال دیگر کنترل کننده‌ها مشاهده گردید تا جاییکه در حالت ناسازگار حدود ۴۰٪ بهبود در یکی از معیارها و در حالت سازگار هم تا ۶۶٪ بهبود در روش پیشنهادی مشهود گردید.

## مراجع

- [1] Paluska. D, and herr. H, 2006, "Series elasticity and actuator power output," in IEEE international conference on Robotics and Automation (ICRA), pp. 1830-1833.
- [2] pratt. J, kupp. B, and Morse. C., 2002, " Series Elastic actuators for high fidelity force control, "Industrial Robot: An International journal, 29, pp. 234-241.
- [3] pratt. G, and Williamson. M, 1995, "Series Elastic Actuators," in IEEE International conference on Intelligent Robots and Systems, pp. 399-406.
- [4] Yu. H, Huang. S, Chen.G, Pan. G, 2015, " Human-robot interaction control of rehabilitation robot with series elastic actuator," IEEE Trans. Robot, pp. 1552-3098.
- [5] Liu. Z, Chen. C, and Zhang. Y, 2013, "Decentralized Robust Fuzzy Adaptive Control of Humanoid Robot Manipulation with Unknown Actuator backlash, "IEEE Trans. fuzzy sys., pp, 1063 6706.
- [6] J. Braun. D, Petit. F, Huber. F, Smaget, p.v.d., Albu-Schaffer, A., Vijayakumar, S, 2013, " Robots Driven by Compliant Actuators: Optimal Control Under Actuation Constraints," IEEE Trans. Robot, vol. 29, NO. 5, pp. 1552-3098.
- [7] X. Miranda La Hera, P., S. Sheriaev, A., B. Freidovich, L., Metin, U., and V. Gusev, S., 2013, " Stable Walking Gaits for a Tree-Link Planar Biped Robot With One Actuator," IEEE Trans. Robot, vol. 29, NO. 3, 1552-3098.
- [8] Bae, J., Kong, K., Tomizuka, M., 2011, " Control algorithms for prevention of impact in rehabilitation systems," IEEE/ASME International conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM2011), pp. 128- 133.