مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد۱۵، شماره ۱، بهار ۱۴۰۰، صفحه ۱۶۱-۱۴۹

کنترل ردیاب فازی سیستم‌های دینامیکی خطی فازی برای ورودی مرجع ثابت تحت مشتق ریزدانه‌ای

سید محمد مهدی عباسی[۱]، علی اکبر جلالی[۲]

[۱] فارغ‌التحصیل دکترا مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه علم وصنعت ایران، s_abasi@elec.iust.ac.ir

[۲] استاد، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه علم و صنعت ایران، drjalali@iust.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۸/۰۱/۱۳ ویرایش: ۱۳۹۸/۰۶/۱۳ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۹/۱۸

چکیده: در این مقاله به بررسی کنترل ردیاب فازی برای کلاسی از سیستم‌های دینامیکی خطی فازی پرداخته شده است. عدم قطعیت در این سیستم‌های دینامیکی خطی، به‌صورت اعداد فازی در نظر گرفته‌شده است. این نوع سیستم‌های دینامیکی خطی با عدم قطعیت تحت عنوان سیستم‌های دینامیکی خطی فازی نامیده می‌شوند که در قالب معادلات دیفرانسیل فازی بیان می‌شوند. برای حل معادلات دیفرانسیل فازی از رویکرد ریاضیات بازه‌ای اندازه فاصله نسبی و مفهوم مشتق ریزدانه‌ای استفاده‌شده است. هدف از طراحی کنترل ردیاب فازی پیدا کردن قانون کنترلی فازی می‌باشد که خروجی سیستم بتواند ورودی مرجع مورد نظر را ردیابی کند. برای این منظور قانون کنترل فازی در قالب یک قضیه ارائه‌شده است. قانون کنترل ارائه‌شده در قالب فیدبک حالت فازی با بهره‌های فازی و همچنین یک پیش جبران ساز فازی می‌باشد. ازآنجایی‌که اندازه‌گیری حالت‌های سیستم همواره امکان‌پذیر نمی‌باشد لازم است یک رویتگر فازی برای تخمین حالت‌های سیستم طراحی‌شود. در انتها مسئله کنترل ردیاب خروجی برای سیستم دو تانک سری و کنترل فرود هواپیما به‌منظور نشان دادن اثربخشی روش پیشنهادی آورده شده است.

کلمات کلیدی: تابع عضویت افقی، کنترل فازی، سیستم خطی فازی، ریاضیات ریزدانه‌ای، مشتق ریزدانه‌ای.

Fuzzy Tracking Control of Fuzzy Linear Dynamical Systems for a fixed reference input under granular derivative

Seyed Mohammad Mehdi Abbasi, Aliakbar Jalali

Abstract: This paper investigates the fuzzy tracking control problem of a class of uncertain linear dynamical systems. The uncertainty of linear dynamical system is considered as fuzzy numbers. This kind of uncertain linear dynamical systems is called fuzzy linear dynamical systems which are expressed in the form of a fuzzy differential equations system. The relative-distance-measure fuzzy interval arithmetic approach and the concept of granular derivatively are utilized to deal with the fuzzy differential equations system. The main aim of designed fuzzy tracking control is to find a fuzzy control law by which the output of the system tracks the reference input. To this end, the fuzzy control law is presented in the form of a theorem. The presented control law is in the form of fuzzy state feedback with fuzzy gains and a fuzzy pre-compensator. Since the system's states always cannot be measured, a fuzzy observer must be designed to estimate the system's states. At the end, fuzzy tracking control of output of a two tanks in series system and control of airplane landing are presented to show the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: Horizontal membership function, Fuzzy control, Fuzzy linear system, Granular arithmetic, Granular derivative.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]

[DOI: 10.52547/joc.15.1.149]

۱- مقدمه

مسئله کنترل ردیاب همواره یکی از موضوعات جذاب در حوزه کنترل می‌باشد. در مسئله کنترل ردیاب هدف طراحی کردن سیستم کنترلی می‌باشد که تضمین کند خروجی سیستم حلقه بسته، ورودی مرجع را ردیابی کند. تاکنون تحقیقات بسیاری در خصوص طراحی کنترل ردیاب با این فرض که پارامترها و شرایط اولیه سیستم دینامیکی مقادیر مشخصی دارند، انجام‌شده است. بااین‌حال، به دلایلی از قبیل تغییرات دمایی، اشتباه در شناسایی و اندازه‌گیری پارامترهای سیستم، مدل سیستم دینامیکی ممکن است همواره دقیق و مشخص نباشد. طراحی کنترل ردیاب برای سیستم‌های دینامیکی همراه با عدم قطعیت در این مقاله موردبررسی قرار می‌گیرد.

سیستم‌های دینامیکی همراه با عدم قطعیت به سیستم‌هایی گفته می‌شود که معادلات ریاضی حاکم بر آن‌ها معادلات دیفرانسیل با پارامترهای عدم قطعیت می‌باشد. اخیراً معادلات دیفرانسیل فازی[1] به‌عنوان نوعی از معادلات دیفرانسیل همراه با عدم قطعیت موردتوجه محققین قرارگرفته است. عدم قطعیت در این سیستم‌های دینامیکی خطی، به‌صورت اعداد فازی که در واقع نمایش ریاضی دانش فرد خبره می‌باشد، در نظر گرفته‌شده است. تاکنون تحقیقات گسترده‌ای بر روی معادلات دیفرانسیل فازی در حوزه‌های گوناگون از قبیل مسائل اقتصادی[۱]، ریاضیات[۲-۵]، تئوری کنترل[۶, ۷]، موضوعات پزشکی[۸]، فرآیندهای شیمیایی[۹] و غیره، انجام‌شده است.

معادلات دیفرانسیل فازی تحت نوع خاصی از ریاضیات با عنوان ریاضیات فازی شکل می‌گیرند. ریاضیات فازی تا حدی با ریاضیات کلاسیک متفاوت می‌باشد. به‌عنوان‌مثال بر اساس ریاضیات فازی $\tilde{u} - \tilde{u} \neq 0$ در این رابطه $\tilde{u}$ عدد فازی می‌باشد. در حوزه ریاضیات فازی دو رویکرد کلی برای معادلات فازی و ریاضیات فازی مورداستفاده قرار می‌گیرد که یکی از آن‌ها تحت عنوان ریاضیات بازه‌ای استاندارد فازی[2] (FSIA)است[۲, ۵, ۱۰, ۱۱] و دیگری ریاضیات بازه‌ای فازی اندازه فاصله نسبی[3] می‌باشد[۱۲-۱۶].

در سال‌های اخیر توجه محققین برای طراحی سیستم کنترل بر روی سیستم‌های دینامیکی فازی افزایش‌یافته است. طراحی کنترل بهینه برای سیستم دینامیکی فازی خطی با شرایط اولیه و پارامترهای فازی در[۱۰, ۱۱] ارائه‌شده است. در این مقالات از مفهوم مشتق هاکوهارای تعمیم‌یافته قوی[4] (SGH) و مشتق هاکوهارای تعمیم‌یافته[5] (GH)برای طراحی کنترل کننده استفاده شده است. البته مشتق SGH و GH دارای برخی محدودیت ها است. به عنوان نمونه جواب این مشتق‌ها همواره وجود ندارد. مشکل دیگر که در این روشها موجود می‌باشد، بروز پدیده رفتار غیرطبیعی در مدل‌سازی[6] (UBM)می‌باشد[۱۷]. در پدیده UBM معادلات دیفرانسل فازی که دارای شکل‌های مختلف با ساختار یکسان می‌باشند دارای جواب های متفاوت می‌باشند. به عنوان نمونه معادلات دیفرانسیل فازی $\dot{\tilde{x}}(t) - \tilde{b} = \tilde{x}(t)$ و $\dot{\tilde{x}}(t) - \tilde{x}(t) = \tilde{b}$ ، $\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{x}(t) + \tilde{b}$ که دارای شرایط اولیه یکسان هستند. و $\tilde{x}(t)$ مشتق پذیر SGH یا GH است، دارای جواب های متفاوت می باشد.

درمقاله [۱۸] شرایط ضروری بهینگی مسئله تغییرات مقید و غیر مقید فازی موردتحقیق قرار گرفت که در آن معادلات دیفرانسیل فازی و مشتقات موجود بر اساس تعریف مشتق GH در نظر گرفته‌شده است. در [۱۹] مسئله مدل‌سازی و طراحی کنترل‌کننده بهینه برای بیماری ایدز ارائه‌شده است. ساختار مدل بیماری ایدز بر اساس معادلات دیفرانسیل فازی ارائه‌شده است. در این مدل ضرایب و شرایط اولیه فازی و مشتقات بر اساس تعریف مشتق SGH در نظر گرفته‌شده است. در مقاله [۱۱] کنترل بهینه معادلات فضای حالت خطی با ضرایب فازی و شرایط اولیه قطعی موردبررسی قرار گرفت. در این معادلات از تعریف مشتق SGH استفاده‌شده است. تعمیم اصل بیشینه پونتریاگین به‌منظور دستیابی به یک کنترل‌کننده بهینه فازی در مرجع [۲۰] معرفی شده است. معادلات دیفرانسیل فازی بر اساس مشتق GH در این مقاله ارائه‌شده‌اند. در مقاله[۲۱] مسئله کنترل بهینه برای کلاسی از سیستم‌های فازی موردبررسی قرارگرفته است. در این معادلات از تعریف مشتق SGH استفاده‌شده است. همچنین در مقاله[۲۲] با استفاده از مشتق GH مسئله کنترل بهینه برای سیستم‌های فازی همراه با تأخیر موردبررسی قرارگرفته است.

کنترل زیر بهینه برای سیستم‌های دینامیکی خطی فازی تحت مشتق ریزدانه‌ای[7] بر اساس ریاضیات فازی RDM-FIA در [۲۳] حل‌شده است. مسئله کنترل بهینه زمانی در مقاله [۷] با استفاده از ریاضیات RDM-FIA موردبررسی قرارگرفته است.

در راستای کارهای انجام‌شده، در این مقاله هدف طراحی کنترل ردیاب فازی برای سیستم‌های دینامیکی فازی می‌باشد. برای حل مسئله کنترل ردیاب فازی در این مقاله از مفهوم مشتق ریزدانه‌ای و ریاضیات RDM-FIA استفاده می‌شود. با استفاده از قضیه بیان‌شده در این مقاله تضمین می‌شود که با استفاده از کنترل فیدبک حالت فازی و پیش جبران ساز استاتیکی سیستم حلقه بسته ورودی مرجع را ردیابی خواهد کرد. در حالت کلی لازم است که برای طراحی این کنترل‌کننده تمام متغیرهای حالت فازی در دسترس باشد. در بسیاری از کاربردهای واقعی، اندازه‌گیری تمامی متغیرهای حالت امکان‌پذیر نیست. در این موارد برای پیاده‌سازی فیدبک حالت، تخمین متغیرهای حالت الزامی است. برای این منظور یک رویتگر فازی برای تخمین حالت‌های سیستم فازی لازم است طراحی شود. لازم به ذکر است که متغیرهای ورودی رویتگردر هرلحظه مقادیر فازی می‌باشند.

در ادامه مقاله و در بخش دوم برخی از مفاهیم اساسی مربوط به حساب ریاضی فازی ارائه می‌شود. طراحی کنترل‌کننده و رویتگر فازی و ارائه قضایایی در این زمینه و اثبات آنها در بخش سوم آورده‌شده است. در بخش چهارم نتایج عددی و شبیه‌سازی و در بخش پنجم، نتیجه‌گیری بیان گردیده است.

۲- مفاهیم اساسی

در این مقاله مجموعه تمام اعداد در این مقاله مجموعه تمام اعداد حقیقی به‌صورت $\mathbb{R}$ نشان داده می‌شود و مجموع تمام اعداد فازی نوع-۱ به‌صورت E_1 نشان داده می‌شود؛ کران بالا و پایین $\alpha-$برش مجموعه فازی $\tilde{A}$ به ترتیب با $\bar{A}^{\alpha}$ و $\underline{A}^{\alpha}$ نشان داده می‌شود. ترانهاده یک

[1] Fuzzy Differential Equation (FDE)
[2] Fuzzy Standard Interval Arithmetic (FSIA)
[3] Relative- Distance- Measure Fuzzy Interval Arithmetic (RDM-FIA)
[4] Strongly Generalized Hukuhara (SGH)
[5] Generalized Hukuhara (GH)
[6] Uncertain Behavior in Modeling Phenomenon(UBM)
[7] Granular differentiability (gr- differentiability)

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.149]

ماتریس $Y = \left[y_{ij} \right]_{n\times n}\ i,j = 1,\ldots,n$ به‌صورت Y^{T} نشان داده می‌شود.

تعریف ۱: [۲۴] مجموعه فازی $\tilde{u}:\mathrm{R}\to[0,1]$ را عدد فازی می‌نامند اگر نرمال، محدب فازی، از بالا نیمه پیوسته باشد و بستار[1] مجموعه فازی در R فشرده باشد. عدد فازی میتواند همچنین به فرم پارامتری با جفت تابع $\left(\underline{u}^{\alpha},\overline{u}^{\alpha}\right)$، $0\le\alpha\le 1$ نشان داده شود اگر ویژگیهای زیر را داشته باشد.

۱. $\underline{u}^{\alpha}$ یک تابع غیر کاهشی، از راست پیوسته در بازه $(0,1]$ و در $\alpha=0$ از چپ پیوسته است.

۲. $\overline{u}^{\alpha}$ یک تابع غیر افزایشی، از چپ پیوسته در بازه $(0,1]$ و در $\alpha=0$ از راست پیوسته است.

۳. $\underline{u}^{\alpha}\le\overline{u}^{\alpha}$

تعریف۲: [۱۷, ۲۳] فرض کنید $\tilde{u}:[a,\ b]\subseteq\mathrm{R}\to[0,1]$ یک عدد فازی باشد. تابع عضویت افقی $u^{gr}=[0,1]*[0,1]\to[a,b]$ یک بازنمایشی از $\tilde{u}(x)$ است به‌طوری‌که $u^{gr}(\alpha,\beta_u)=x$. در اینجا gr ریزدانه اطلاعاتی است که در $x\in[a,\ b]$ وجود دارد و $\beta\in[0,1]$ درجه عضویت x در $\tilde{u}(x)$ است. $\beta_u\in[0,1]$ متغیر اندازه فاصله نسبی می‌باشد[2] و $u^{gr}(\alpha,\beta_u)=\underline{u}^{\alpha}+\left(\overline{u}^{\alpha}-\underline{u}^{\alpha}\right)\beta_u$.

نکته ۱: [۱۷, ۲۳] به دلیل سادگی تابع عضویت افقی به‌صورت زیر نشان داده می‌شود.

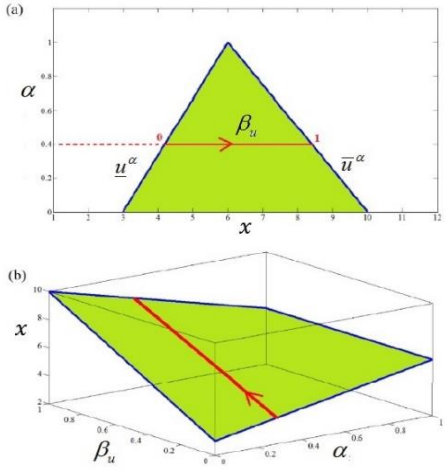
$$H(\tilde{u})\overset{\Delta}{=}u^{gr}(\alpha,\beta_u) \qquad (۱)$$

مطابق با تعریف (۲) تابع عضویت افقی عدد فازی مثلثی $\tilde{u}\in E_1$ که به‌صورت $(a,b,c),a\le b\le c$ نشان داده می‌شود، می‌توان به‌صورت $H(\tilde{u})=[a+(b-a)\alpha]+[(1-\alpha)(c-a)]\beta_u$ مشخص شود. به‌عنوان‌مثال در شکل(۱) عدد فازی مثلثی $\tilde{u}=(3,6,10)$ و تابع عضویت افقی آن نشان داده‌شده است. در مقاله [۱۷] شکل پارامتری تابع عضویت افقی عدد فازی ذوزنقه‌ای به‌صورت کلی نشان داده‌شده است.

نکته۲: [۱۷] برش‌های $-\alpha$ مجموعه $\tilde{u}\in E_1$ که درواقع گستره ریزدانه اطلاعات می‌باشد به‌صورت رابطه (۲) به دست می‌آید[۱۷].

$$H^{-1}\left(u^{gr}(\alpha,\beta_u)\right)=[\tilde{u}]^{\alpha}= \qquad (۲)$$
$$\left[\inf_{\lambda\ge\alpha}\min_{\beta_u} u^{gr}(\lambda,\beta_u),\ \sup_{\lambda\ge\alpha}\max_{\beta_u} u^{gr}(\lambda,\beta_u)\right]$$

در ادامه عملیات جبری با استفاده از شکل جدید توابع عضویت افقی تعریف می گردد.



شکل ۱: a) عدد فازی مثلثی $\tilde{u}=(3,6,10)$ b) تابع عضویت افقی مربوط به این عدد

تعریف ۳: [۱۷] فرض شود $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ اعداد فازی هستند که تابع عضویت افقی آن‌ها به ترتیب به‌صورت $u^{gr}(\alpha,\beta_u)$ و $v^{gr}(\alpha,\beta_v)$ باشد. همچنین فرض شود منظور از "$\otimes$" یکی از چهار عمل پایه‌ای حساب، جمع، تفریق، ضرب و یا تقسیم باشد. بنابراین $\tilde{u}\otimes\tilde{v}$ یک عدد فازی همچون $\tilde{m}$ است آن چنانکه

$$H(\tilde{m})=u^{gr}(\alpha,\beta_u)\otimes v^{gr}(\alpha,\beta_v) \qquad (۳)$$

فرض کنید $\tilde{m}=\tilde{u}\otimes\tilde{v}$ آنگاه $[\tilde{m}]^{\alpha}=H^{-1}\left(u^{gr}(\alpha,\beta_u)\otimes v^{gr}(\alpha,\beta_v)\right)$ بیان‌کننده $-\alpha$ برش عدد فازی $\tilde{m}$ می‌باشد.

باید توجه شودکه اگر $\otimes$ عملگر تقسیم باشد آنگاه $0\notin v^{gr}(\alpha,\beta_u)$.

باید توجه شود که تفاضل بین دو عدد فازی که در تعریف (۳) بیان‌شده است، تفاضل ریزدانه‌ای نامیده می‌شود.

تعریف ٤: [۱۷, ۲۳] دو عدد فازی $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ را معادل گویند اگر و تنها اگر $H(\tilde{u})=H(\tilde{v})$ برای تمام $\beta_u=\beta_v\in[0,1]$

نکته ۳: [۱۷] فرض کنید $\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}\in E_1$ با توجه به تعاریف(۳) و(۴) روابط زیر برقرار می‌باشد:

1. $\tilde{u}-\tilde{v}=-(\tilde{v}-\tilde{u})$
2. $\tilde{u}-\tilde{u}=0$
3. $\tilde{u}\div\tilde{u}=1$
4. $(\tilde{u}+\tilde{v})\tilde{w}=\tilde{u}\tilde{w}+\tilde{v}\tilde{w}$ (۴)

تعریف ۵: [۱۷] فرض شود $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ اعداد فازی هستند. $\tilde{u}\ge\tilde{v}$ اگر و تنها اگر $H(\tilde{u})\ge H(\tilde{v})$ برای تمام $\beta_u=\beta_v\in[0,1]$

[1] supported

[2] Relative- Distance- Measure (RDM)

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.149]

نکته ۵: فرض شود $\tilde{u}$ عدد فازی می باشد که تابع عضویت افقی آن به‌صورت $u^{gr}(\alpha,\beta_u)$ می باشد. $\tilde{u}$ عدد فازی منفی است اگر و تنها اگر $u^{gr}(\alpha,\beta_u)<0$ برای تمام $\beta_u\in[0,1]$

تعریف ٦: [۲۵] ماتریس $\tilde{A}=\left[\tilde{a}_{ij}\right]_{n\times n}\ i,j=1,...,n$ ماتریس فازی نامیده می‌شود اگر پارامترهای آن، $\tilde{a}_{ij}$، اعداد فازی باشند.

تعریف ۷: [۲۵] ماتریس فازی $\tilde{A}^{-1}$ معکوس ماتریس فازی $\tilde{A}=\left[\tilde{a}_{ij}\right]_{n\times n}\ i,j=1,...,n$ است، اگر و تنها اگر

$$H\left(\tilde{A}^{-1}\right)H\left(\tilde{A}\right)=I_{n\times n} \qquad (۵)$$

در این رابطه $I_{n\times n}$ ماتریس همانی می‌باشد.

تعریف ۸: [۲۵] دترمینان ماتریس فازی $\tilde{A}=\left[\tilde{a}_{ij}\right]_{n\times n}\ i,j=1,...,n$ که به‌صورت $\left|\tilde{A}\right|$ نشان داده می‌شود، معادل است با عدد فازی $\tilde{m}$ به‌طوری‌که $H(\tilde{m})=\left|H\left(\tilde{A}\right)\right|$.

تعریف ۹: [۲۵] ضرب ماتریس فازی $\tilde{A}_{n\times n}$ در ماتریس فازی $\tilde{B}_{n\times m}$ که به‌صورت $\tilde{A}\tilde{B}$ نشان داده می‌شود معادل ماتریس فازی $\tilde{M}_{n\times m}$ است. به‌طوری‌که $H\left(\tilde{M}\right)=H\left(\tilde{A}\right)H\left(\tilde{B}\right)$.

تعریف ۱۰: [۲۳] مقادیر ویژه فازی ماتریس فازی $\tilde{A}=\left[\tilde{a}_{ij}\right]_{n\times n}\ i,j=1,...,n$ که به‌صورت $\tilde{\lambda}_i$ نشان داده می‌شود. ریشه‌های چند جمله ای مشخصه فازی $\left|\tilde{\lambda}_i I_{n\times n}-\tilde{A}\right|$ می باشد.

تعریف ۱۱: [۱۷] تابع فازی $\tilde{f}:[a,b]\subseteq \mathrm{R}\to E_1$ که شامل n عدد فازی $\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\ldots,\tilde{u}_n$ می‌باشد را در نظر بگیرید. تابع عضویت افقی تابع فازی $\tilde{f}(t)$ به شکل $H\left(\tilde{f}\right)=f^{gr}(t,\alpha,\beta_f)$ نشان داده می‌شود و به‌صورت رابطه (۶) تعریف می‌گردد که در رابطه بالا $\beta_f\overset{\Delta}{=}\left(\beta_{u_1},\beta_{u_2},\ldots,\beta_{u_n}\right)$ متغیرهای اندازه فاصله نسبی مربوط به اعداد فازی $\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\ldots,\tilde{u}_n$ می‌باشند.

$$f^{gr}:[a,b]\times\underbrace{[0,1]\times[0,1]\times\ldots\times}_{n}[0,1]\to[c,d]\subseteq \mathrm{R} \qquad (۶)$$

تعریف ۱۲: [۱۷] فرض کنید $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ اعداد فازی هستند $\tilde{u},\tilde{v}\in E_1$ تابع زیر

$$D_{gr}:E_1\times E_1\to R^+\cup\{0\},D_{gr}(\tilde{u},\tilde{v})=\sup_{\alpha}\ \max_{\beta_u,\beta_v}\left\{u^{gr}(\alpha,\beta_u)-v^{gr}(\alpha,\beta_u)\right\}$$

فاصله بین دو عدد فازی $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ می‌باشد.

نکته ٤: تابع D_{gr} متر بر روی فضای اعداد فازی می‌باشد و متر ریزدانه‌ای نامیده می‌شود. علاوه بر آن فضای متر (E_1,D_{gr}) یک فضای متر کامل است. برای جزئیات بیشتر به مرجع [۱۷] رجوع شود.

تعریف ۱۳: [۱۷] فرض کنید تابع $\tilde{f}:[a,b]\subseteq \mathrm{R}\to E_1$. حد تابع $\tilde{f}(t)$ عدد فازی $\tilde{L}\in E_1$ می‌باشد و به صورت $\lim_{t\to\infty}\tilde{f}(t)=\tilde{L}$ نشان داده می شود اگر

$$\forall\varepsilon>0\exists N\in R^+\,|\,t>N\to D_{gr}(\tilde{f}(t),\tilde{L})<\varepsilon \qquad (۷)$$

تعریف ١٤: [۱۷] تابع فازی پیوسته $\tilde{f}:[a,b]\subseteq \mathrm{R}\to E_1$ را در نقطه $t\in[a,b]$ مشتق‌پذیر ریزدانه‌ای گویند هرگاه عدد فازی مانند $^{gr}D\tilde{f}(t)\in E_1$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که حد زیر موجود باشد.

$$\lim_{h\to0}\frac{\tilde{f}(t+h)-\tilde{f}(t)}{h}=^{gr}D\tilde{f}(t) \qquad (۸)$$

قضیه ۱: [۱۷] تابع فازی $\tilde{f}:[a,b]\subseteq \mathrm{R}\to E_1$ در نقطه $t\in[a,b]$ مشتق‌پذیر ریزدانه‌ای گویند اگر و تنها اگر تابع عضویت افقی آن در همان نقطه نسبت به t مشتق‌پذیر باشد.

علاوه بر آن داریم $H\left(^{gr}D\tilde{f}(t)\right)=\dfrac{\partial f^{gr}(t,\alpha,\beta_f)}{\partial t}$.

تعریف ۱۵: [۱۷] فرض کنید $\tilde{X}(t)\overset{\Delta}{=}\left[\tilde{x}_1(t),\tilde{x}_2(t),\ldots,\tilde{x}_n(t)\right]^T$ به طوری که $\tilde{x}_i:[a,b]\subseteq \mathrm{R}\to E_1$ آنگاه $^{gr}D\tilde{X}(t)$ به صورت $^{gr}D\tilde{X}(t)\overset{\Delta}{=}\left[^{gr}D\tilde{x}_1(t),^{gr}D\tilde{x}_2(t),...,^{gr}D\tilde{x}_n(t)\right]^T$ تعریف می شود.

نکته ۵: فرض کنید که $\tilde{K}=\left[\tilde{k}_{ij}\right]_{n\times1}\ i=1,...,n;\ j=1$ یک ماتریس فازی است.آنگاه بر اساس تعریف $^{gr}D\tilde{K}=0$ که 0 یک ماتریس صفر $n\times1$ است.

تعریف ١٦: [۱۷] تابع فازی $\tilde{f}:[a,b]\subseteq R\to E_1$ به‌صورت $\tilde{f}(t)$ در نظر گرفته شود. و فرض شود که تابع عضویت افقی آن به‌صورت $f^{gr}(t,\alpha,\beta_u)$ نسبت به t بر بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد. تابع فازی $\tilde{f}$ را روی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریزدانه‌ای گویند و به‌صورت $\int_a^b\tilde{f}(t)dt$ نشان داده می‌شود و برابر عدد فازی $\tilde{m}$ است. آن چنانکه

$$H(\tilde{m})=\int_a^b H\left(\tilde{f}(t)\right)dt \qquad (۹)$$

۳- کنترل ردیاب فازی برای سیستم‌های دینامیکی فازی خطی

۳-۱ طراحی فیدبک حالت فازی برای سیستم‌های دینامیکی فازی خطی

سیستم دینامیکی خطی فازی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases}^{gr}D\tilde{X}(t)=\tilde{A}\tilde{X}(t)+\tilde{B}\tilde{u}(t)\\ \tilde{y}(t)=\tilde{C}\tilde{X}(t)\\ \tilde{X}(t_0)=\tilde{X}_0\end{cases} \qquad (۱۰)$$

در رابطه (۱۰) $\tilde{X}(t)\overset{\Delta}{=}\left[\tilde{x}_1(t),\tilde{x}_2(t),...,\tilde{x}_n(t)\right]^T,\tilde{X}:[t_0,t_f]\subseteq R^+\cup\{0,\infty\}\to E_1$ بردار حالت‌های فازی سیستم است، $\tilde{u}:[t_0,t_f]\subseteq R^+\cup\{0,\infty\}\to E_1$ ورودی کنترل است. خروجی

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.149]

فازی سیستم به‌وسیله $\tilde{y}:[t_0,t_f]\subseteq R^+\cup\{0,\infty\}\to E_1$ نشان داده می‌شود و

$$^{gr}D\tilde{X}(t)\overset{\Delta}{=}\left[^{gr}Dx_1(t),^{gr}Dx_2(t),\ldots,^{gr}Dx_n(t)\right]^T،$$

متغیرهای حالت مشتق‌پذیر ریزدانه‌ای در نظر گرفته می‌شوند. ماتریس‌های $\tilde{A}=\left[\tilde{a}_{ij}\right]_{n\times n},i,j=1,\ldots,n;\tilde{B}=\left[\tilde{b}_{ik}\right]_{n\times 1},i=1,\ldots,n;k=1$ ماتریس‌های فازی هستند. مسئله کنترل ردیاب فازی پیدا کردن سیگنال کنترلی $\tilde{u}$ است به‌طوری‌که خروجی مرجع ورودی از پیش تعیین‌شده را دنبال کند. قبل از بیان مسئله کنترل ردیاب فازی نیاز است ۲ لم بیان شود که در ادامه به بیان آن‌ها پرداخته می‌شود.

تعریف ۱۷: [۲۳] یک سیستم دینامیکی خطی فازی کنترل‌پذیر ریزدانه‌ای است اگر یک ورودی کنترل فازی $\tilde{u}(t)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که بتواند حالت‌های سیستم را از هر شرایط اولیه فازی $\tilde{X}(t_0)$ به هر شرایط نهایی فازی $\tilde{X}(t_f)$ در بازه زمانی محدود $[t_0,t_f]$ منتقل کند.

گزاره ۱: [۲۳]سیستم دینامیکی فازی (۱۰) را در نظر بگیرید و فرض کنید $A^{gr}(\alpha,\beta_A)$ و $B^{gr}(\alpha,\beta_B)$ توابع عضویت افقی ماتریس‌های $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ باشند. در این صورت سیستم (۱۰) و یا جفت $(\tilde{A},\tilde{B})$، کنترل‌پذیر ریزدانه‌ای است اگر و تنها اگر ماتریس ریزدانه‌ای (۱۱) به ازای هر $\alpha,\beta_A,\beta_B\in[0,1]$ رتبه کامل داشته باشد.

$$\begin{bmatrix}B^{gr}(\alpha,\beta_B) & A^{gr}(\alpha,\beta_A)B^{gr}(\alpha,\beta_B) & \\ \left(A^{gr}(\alpha,\beta_A)\right)^2B^{gr}(\alpha,\beta_B) & \ldots & \left(A^{gr}(\alpha,\beta_A)\right)^{n-1}B^{gr}(\alpha,\beta_B)\end{bmatrix} \quad (۱۱)$$

نکته ٦: در ادامه فرض می‌شود که سیستم دینامیکی خطی فازی (۱۰) کنترل‌پذیر ریزدانه‌ای باشد.

لم ۱: فرض کنید $^{gr}D\tilde{X}(t)=\tilde{A}\tilde{X}(t)$ و مقادیر ویژه فازی ماتریس فازی $\tilde{A}$ مقادیر فازی منفی باشند در این صورت $\lim_{t\to\infty}\tilde{X}(t)=0$.

اثبات: مطابق تعریف (۴) و قضیه (۱)، $^{gr}D\tilde{X}(t)=\tilde{A}\tilde{X}(t)$ معادل است با $\frac{\partial X^{gr}(t,\alpha,\beta_X)}{\partial t}=A^{gr}(\alpha,\beta_A)X^{gr}(t,\alpha,\beta_X)$ با در نظر گرفتن $\beta_A=\beta_{A_c},\beta_X=\beta_{X_c}$ و $\alpha=\alpha_c$ به‌طوری‌که β_{X_c},β_{A_c} و α_c مقادیر ثابت در بازه $[0,1]$ هستند آنگاه داریم $X^{gr}_{\alpha_c,\beta_{X_c}}(t)=A^{gr}_{\alpha_c,\beta_{A_c}}X^{gr}_{\alpha_c,\beta_{X_c}}(t)$ که یک سیستم دینامیکی قطعی[1] است که مقادیر ویژه ماتریس $A^{gr}_{\alpha_c,\beta_{A_c}}$ منفی هستند. بدین ترتیب سیستم دینامیکی قطعی $\dot{X}^{gr}_{\alpha_c,\beta_{X_c}}(t)=A^{gr}_{\alpha_c,\beta_{A_c}}X^{gr}_{\alpha_c,\beta_{X_c}}(t)$ پایدار مجانبی است به‌طوری‌که $\lim_{t\to\infty}X^{gr}_{\alpha_c,\beta_{X_c}}(t)=0$ و یا به‌طور معادل

$$\forall\varepsilon>0\exists N\in R^+\left|t>N\to\left\|X^{gr}_{\alpha_c,\beta_{X_c}}(t)\right\|<\varepsilon\right. \quad (۱۲)$$

بر طبق رابطه (۱۲) ما همچنین می‌توانیم بنویسیم

$$\forall\varepsilon>0\exists N\in R^+\left|t>N\to\max_{\beta_X}\left\|X^{gr}_{\alpha_c,\beta_{X_c}}(t)\right\|<\varepsilon\right. \quad (۱۳)$$

علاوه بر این رابطه (۱۴) نیز وجود دارد.

$$\forall\varepsilon>0\exists N\in R^+\left|t>N\to\sup_{\alpha}\max_{\beta_X}\left\|X^{gr}_{\alpha_c,\beta_{X_c}}(t)\right\|<\varepsilon\right. \quad (۱۴)$$

سپس مطابق با تعریف متر ریزدانه‌ای ما داریم

$$\forall\varepsilon>0\exists N\in R^+\left|t>N\to D_{gr}\left(\tilde{X}(t),0\right)<\varepsilon\right. \quad (۱۵)$$

درنهایت بر اساس تعریف (۱۳) اثبات کامل می‌شود.

□

لم ۲: سیستم دینامیکی خطی فازی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases}^{gr}D\tilde{X}(t)=\tilde{A}\tilde{X}(t)+K\\ \tilde{X}(t_0)=\tilde{X}_0\end{cases} \quad (۱۶)$$

در رابطه بالا $\mathrm{K}=\left[k_{i1}\right]_{n\times 1},i=1,\ldots,n$ یک ماتریس قطعی است. اگر مقادیر ویژه فازی ماتریس $\tilde{A}$ اعداد فازی منفی باشند آنگاه $\lim_{t\to\infty}{}^{gr}D\tilde{X}(t)=0$.

اثبات: فرض کنید $\tilde{X}^*(t)$ جواب (۱۶) باشد. مطابق آنچه در حالت قطعی انجام می‌شود، جواب مسئله می‌تواند به‌صورت $\tilde{X}^*(t)=\tilde{X}^*_h(t)+\tilde{X}^*_p(t)$ نوشته شود که در آن $\tilde{X}^*_h(t)$ و $\tilde{X}^*_p(t)$ به ترتیب جواب‌های همگن و غیر همگن (۱۶) هستند. به‌عبارت‌دیگر $\tilde{X}^*_h(t)$ جواب مسئله زیر است.

$$\begin{cases}^{gr}D\tilde{X}(t)=\tilde{A}\tilde{X}(t)\\ \tilde{X}(t_0)=\tilde{X}_0\end{cases} \quad (۱۷)$$

و $\tilde{X}^*_p(t)$ جواب مسئله سیستم فازی نشان داده‌شده زیر است.

$$\begin{cases}^{gr}D\tilde{X}(t)=\tilde{A}\tilde{X}(t)+K\\ \tilde{X}(t_0)=0\end{cases} \quad (۱۸)$$

با استفاده از نکته (۵) و تعریف (۷) می‌توان اثبات کرد که $\tilde{X}^*_p(t)=-\tilde{A}^{-1}K$ جواب سیستم فازی (۱۸) است. به‌عنوان یک نتیجه جواب سیستم خطی فازی (۱۶) به‌صورت $\tilde{X}^*(t)=\tilde{X}^*_h(t)-\tilde{A}^{-1}K$ مشخص می‌شود. با گرفتن حد از دو طرف تساوی و میل آن به سمت بی‌نهایت داریم $\lim_{t\to\infty}\tilde{X}^*(t)=\lim_{t\to\infty}\tilde{X}^*_h(t)-\lim_{t\to\infty}\tilde{A}^{-1}K$. با توجه به لم (۱) $\lim_{t\to\infty}\tilde{X}^*_h(t)=0$ بنابراین $\lim_{t\to\infty}\tilde{X}^*(t)=-\lim_{t\to\infty}\tilde{A}^{-1}K=\tilde{A}^{-1}K$ که درنتیجه $\lim_{t\to\infty}{}^{gr}D\tilde{X}(t)=0$.

□

قضیه ۲: سیستم دینامیکی خطی فازی (۱۰) را در نظر بگیرید. فرض کنید یک ماتریس فازی $\tilde{K}=\left[\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,\ldots,\tilde{k}_n\right]$ وجود دارد به‌طوری‌که مقادیر ویژه فازی ماتریس فازی $\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{K}$ مقادیر فازی منفی هستند. خروجی سیستم ورودی مرجع r را ردیابی می‌کند یعنی $\lim_{t\to\infty}\tilde{y}(t)=r$، اگر ورودی کنترل فازی به شکل زیر باشد.

$$\begin{aligned}&\tilde{u}(\mathrm{t})=-\tilde{K}\tilde{X}(\mathrm{t})-\left[C\left(\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{K}\right)^{-1}\tilde{B}\right]^{-1}r\\ &G_{cl}(0)^{-1}=\left[\tilde{C}\left(\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{K}\right)^{-1}\tilde{B}\right]^{-1}\end{aligned} \quad (۱۹)$$

اثبات: فرض کنید $\tilde{N}+\tilde{K}M\overset{\Delta}{=}-\left[C\left(\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{K}\right)^{-1}\tilde{B}\right]^{-1}r$ به‌طوری‌که $M\in R^n$ و $\tilde{N}\in E_1$ آنگاه ما می‌توانیم رابطه زیر را بنویسیم.

[1] crisp

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.149]

$$\begin{cases} 0 = \tilde{A}M + \tilde{B}\tilde{N} \\ r = CM \end{cases} \quad (۲۰)$$

با استفاده از رابطه (۱۰) و نکته (۳) بنابراین

$$\begin{cases} {}^{gr}D\tilde{X}(t) = \tilde{A}\left(\tilde{X}(t) - M\right) + \tilde{B}\left(\tilde{u}(t) - \tilde{N}\right) \\ \tilde{y}(t) - r = \tilde{C}\left(\tilde{X}(t) - M\right) \end{cases} \quad (۲۱)$$

با استفاده از قضیه (۱) و این نکته که ${}^{gr}D\left(\tilde{X}(t) - M\right) = {}^{gr}D\tilde{X}(t)$ بنابراین رابطه بالا می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود.

$$\begin{cases} {}^{gr}D\tilde{X}'(t) = \tilde{A}\tilde{X}'(t) + \tilde{B}\tilde{u}'(t) \\ \tilde{y}'(t) = \tilde{C}\tilde{X}'(t) \end{cases} \quad (۲۲)$$

با این شرط که $\tilde{u}'(t) = \tilde{u}(t) - \tilde{N}, \tilde{X}'(t) = \tilde{X}(t) - M$ و $\tilde{y}'(t) = \tilde{y}(t) - r$ با توجه به قانون کنترل $\tilde{y}'(t) = \tilde{y}(t) - r$ در سیستم دینامیکی فازی (۱۹) و استفاده از نکته (۳) ما داریم

$$\begin{cases} {}^{gr}D\tilde{X}'(t) = \left(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}\right)\tilde{X}'(t) \\ \tilde{y}'(t) = \tilde{C}\tilde{X}'(t) \end{cases} \quad (۲۳)$$

با توجه به اینکه مقادیر ویژه فازی ماتریس فازی $\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}$ مقادیر فازی منفی هستند آنگاه بر اساس لم (۱) می‌تواند نتیجه شود که $\lim_{t\to\infty}\tilde{X}'(t) = 0$ بنابراین $\lim_{t\to\infty}\tilde{X}(t) = M$ که همچنین معنی می‌دهد که $\lim_{t\to\infty}{}^{gr}D\tilde{X}'(t) = 0$ بر اساس تعریف (۱۴) سپس با جایگزینی ورودی کنترل فازی $\tilde{u}(t) = -\tilde{K}\tilde{X}(t) - \left[C\left(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}\right)^{-1}\tilde{B}\right]^{-1} r$ در سیستم فازی (۱۰) ما داریم

$$\begin{cases} {}^{gr}D\tilde{X}(t) = \left(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}\right)C^{-1}\left(C\tilde{X}(t) - r\right) \\ \tilde{y}(t) = \tilde{C}\tilde{X}(t) \end{cases} \quad (۲۴)$$

با گرفتن حد از دو طرف ما داریم

$$\begin{cases} 0 = \lim_{t\to\infty}\left[\left(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}\right)C^{-1}\left(C\tilde{X}(t) - r\right)\right] \\ \lim_{t\to\infty}\tilde{y}(t) = \lim_{t\to\infty}\tilde{C}\tilde{X}(t) \end{cases} \quad (۲۵)$$

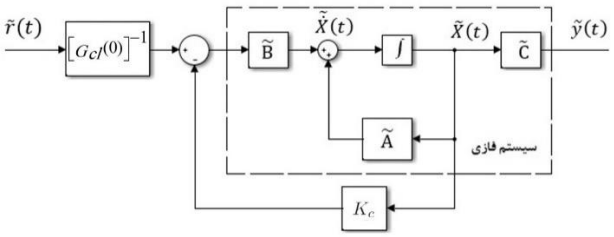
ازآنجاکه $\left(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}\right)C^{-1} \neq 0$ پس $\lim_{t\to\infty}\left(C\tilde{X}(t) - r\right) = 0$ که نتیجه می‌دهد درنتیجه $\lim_{t\to\infty}C\tilde{X}(t) = r$ و اثبات کامل می‌شود. $\lim_{t\to\infty}\tilde{y}(t) = \lim_{t\to\infty}\tilde{C}\tilde{X}(t) = r$

□

نکته ۷: به‌منظور اعمال کنترل‌کننده فازی (۱۹) ماتریس بهره فیدبک فازی $\tilde{K} = \left[\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \ldots \tilde{k}_n\right]$ باید تعیین شود. بر اساس فرض در نظر گرفته‌شده در قضیه (۲) ماتریس بهره فیدبک فازی $\tilde{K}$ باعث می‌شود مقادیر ویژه فازی ماتریس فازی $\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}$ مقادیر فازی منفی داشته باشند. سپس با در نظر گرفتن مقادیر ویژه فازی منفی $\tilde{\lambda}_i^*; i = 1, \ldots, n$. بهره فیدبک فازی $\tilde{k}_i$ با استفاده از حل معادله $\left|\tilde{\lambda}_i^* I_{n\times n} - \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}\right| = 0$ به دست می‌آید. حل این معادله که تحت عنوان حل سیستم های خطی فازی شناخته می شود در مقاله [۲۵] مورد بررسی قرار گرفته است.

نکته ۸: برای اعمال ماتریس بهره فیدبک فازی $\tilde{K} = \left[\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \ldots \tilde{k}_n\right]$ به سیستم دینامیکی فازی نیاز است $\tilde{K}$ دیفازی[1] شود. ماتریس بهره فیدبک دیفازی شده به‌صورت $K_c = \left[k_{ci}\right]; i = 1, \ldots, n$ نشان داده می‌شود.

شمایی کلی از سیستم کنترل فازی در شکل (۲) آورده شده است.



شکل ۲: ساختار سیستم ردیاب فازی با پیش جبران ساز

۲-۳ طراحی رویتگرهای فازی برای سیستم‌های دینامیکی فازی خطی

در بخش قبل طراحی سیستم‌های کنترل با فیدبک حالت ارائه گردید. همان‌طور که در آن بخش گفته شد با فرض کنترل‌پذیری کامل حالت و انتخاب مناسب بهره‌های فیدبک، قطب‌های حلقه بسته سیستم در مکان‌های موردنظر جایابی می‌شوند. در حالت کلی لازم است که تمام متغیرهای حالت برای فیدبک در دسترس باشد. در بسیاری از کاربردهای واقعی اندازه‌گیری تمامی متغیرهای حالت امکان‌پذیر نیست. در این موارد برای پیاده‌سازی فیدبک حالت، تخمین متغیرهای حالت الزامی است. برای این منظور یک رویتگر فازی برای تخمین حالت‌های سیستم فازی لازم است طراحی شود. لازم به ذکر است که متغیرهای ورودی رویتگردر هرلحظه مقادیر فازی می‌باشند.

فرض کنید سیستم دینامیکی فازی به‌صورت (۲۶) داده‌شده است.

$${}^{gr}D\tilde{X}(t) = \tilde{A}\tilde{X}(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t) \quad (۲۶)$$

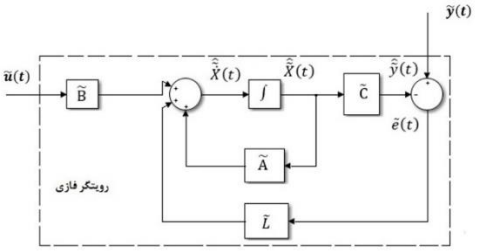
سیستم کنترل‌کننده فیدبک حالت $\tilde{u}(t) = -\tilde{K}\tilde{X}(t)$ در بخش قبل با فرض در دسترس بودن $\tilde{X}(t)$ طراحی‌شده است ولی فرض شود به‌جای آنکه بتوان حالت‌های سیستم را اندازه گرفت، تنها می‌توان خروجی سیستم را به‌صورت زیر اندازه‌گیری کرد.

$$\tilde{y}(t) = \tilde{C}\tilde{X}(t) \quad (۲۷)$$

اکنون سیستم دینامیکی فازی را همانند شکل (۳) در نظر بگیرید که ورودی‌های آن $\tilde{u}$، $\tilde{y}$ و خروجی آن $\tilde{X}$ است.

[1] defuzzify

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.149]



شکل ۳: شمای کلی رویتگر خطی فازی

معادله فضای حالت این سیستم دینامیکی که درواقع رویتگر سیستم می‌باشد عبارت است از

$$^{gr}D\hat{\tilde{X}}(t)=\hat{\tilde{A}}\hat{\tilde{X}}(t)+\hat{\tilde{B}}\tilde{u}(t)+\tilde{L}\tilde{y}(t) \quad (۲۸)$$

که در آن $\hat{\tilde{X}}$ برداری n-بعدی است و ماتریس‌های $\hat{\tilde{A}}$، $\hat{\tilde{B}}$ و $\tilde{L}$ را باید چنان انتخاب کرد که خطای رویتگر زیر به‌طور مجانبی به صفر میل کند.

$$\tilde{e}(t)=\tilde{X}(t)-\hat{\tilde{X}}(t) \quad (۲۹)$$

با به‌کارگیری معادلات (۲۶) الی (۲۹) می‌توان یک معادله دینامیکی برای خطا به‌صورت زیر به دست آورد.

$$\begin{aligned}^{gr}D\tilde{e}(t)&=^{gr}D\tilde{X}(t)-^{gr}D\hat{\tilde{X}}(t) \quad (۳۰)\\&=\tilde{A}\tilde{X}(t)+\tilde{B}\tilde{u}(t)-\hat{\tilde{A}}\left[\tilde{X}(t)-\tilde{e}(t)\right]-\hat{\tilde{B}}\tilde{u}(t)+\tilde{L}\tilde{C}\tilde{X}(t)\\&=\hat{\tilde{A}}\tilde{e}(t)+\left(\tilde{A}-\tilde{L}\tilde{C}-\hat{\tilde{A}}\right)\tilde{X}(t)+\left(\tilde{B}-\hat{\tilde{B}}\right)\tilde{u}(t)\end{aligned}$$

اگر بخواهیم که خطای رویتگر مستقل از $\tilde{X}(t)$ و $\tilde{u}(t)$ به‌طور مجانبی صفر گردد، باید ضرایب $\tilde{X}(t)$ و $\tilde{u}(t)$ را در معادله (۳۰) برابر صفر قرار دهیم و $\hat{\tilde{A}}$ متناظر با یک سیستم دینامیکی پایدار باشد؛ بنابراین

$$\hat{\tilde{A}}=\tilde{A}-\tilde{L}\tilde{C} \quad (۳۱)$$

و

$$\hat{\tilde{B}}=\tilde{B} \quad (۳۲)$$

ازاین‌رو، انتخاب $\hat{\tilde{A}}$، $\hat{\tilde{B}}$ و $\tilde{L}$ دلخواه نیست. درواقع هیچ انتخابی در گزینش $\hat{\tilde{B}}$ وجود ندارد و باید برابر با ماتریس کنترل $\tilde{B}$ قرار داده شود. $\hat{\tilde{A}}$ نیز پس از انتخاب $\tilde{L}$ تعیین می‌گردد. تنها ماتریسی که می‌توان انتخاب نمود ماتریس $\tilde{L}$ است. با واردکردن معادلات (۳۱) و (۳۲) در معادله (۲۸) داریم

$$\begin{aligned}^{gr}D\hat{\tilde{X}}(t)&=\left(\tilde{A}-\tilde{L}\tilde{C}\right)\hat{\tilde{X}}(t)(t)+\tilde{B}\tilde{u}(t)+\tilde{L}\tilde{y}(t) \quad (۳۳)\\&=\left(\tilde{A}-\tilde{L}\tilde{C}\right)\hat{\tilde{X}}(t)(t)+\left[\tilde{B}\;\tilde{L}\right]\begin{bmatrix}\tilde{u}(t)\\\tilde{y}(t)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

معادله توصیف‌کننده رویتگر (۳۳) به‌صورت معادله حالت سیستم (۲۶) است. این معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$^{gr}D\hat{\tilde{X}}(t)=\tilde{A}\hat{\tilde{X}}(t)+\tilde{B}\tilde{u}(t)+\tilde{L}\left[\tilde{y}(t)-\tilde{C}\hat{\tilde{X}}(t)\right] \quad (۳۴)$$

ماتریس حالت سیستم $\hat{\tilde{A}}=\tilde{A}-\tilde{L}\tilde{C}$ است که در معادله (۳۰) معادله دینامیکی خطا نیز ظاهر می‌شود. با برآورده ساختن معادله‌های (۳۱) و (۳۲) معادله (۳۰) به‌صورت زیر خواهد بود.

$$^{gr}D\tilde{e}(t)=\hat{\tilde{A}}\tilde{e}(t) \quad (۳۵)$$

برای آنکه خطا به‌طور مجانبی به صفر نزدیک شود، لازم است که $\hat{\tilde{A}}$ ماتریسی پایدار باشد؛ یعنی آنکه مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\hat{\tilde{A}}=\tilde{A}-\tilde{L}\tilde{C}$ در سمت چپ محور موهومی قرار گیرند.

تعریف ۱۸: فرض کنید $\tilde{y}\left(t,t_0,\tilde{X}_0,\tilde{u}\right)$ پاسخ متغیر خروجی سیستم دینامیکی خطی فازی (۳۶) را به ازای ورودی $\tilde{u}(t)$ و حالت اولیه $\tilde{X}(t_0)=\tilde{X}_0$ نشان دهد. آنگاه سیستم داده‌شده با معادلات (۳۶) را رویت پذیر ریزدانه‌ای گویند اگر بتوان با در دسترس داشتن اطلاعات $\tilde{u}(t)$ و $\tilde{y}(t)$ در بازه‌ای از زمان، $\tilde{X}(t_0)$ را به‌طور یکتا محاسبه نمود.

$$\begin{aligned}^{gr}D\tilde{X}(t)&=\tilde{A}\tilde{X}(t)+\tilde{B}\tilde{u}(t) \quad (۳۶)\\\tilde{y}(t)&=\tilde{C}\tilde{X}(t)\end{aligned}$$

گزاره ۲: سیستم دینامیکی فازی (۳۶) را در نظر بگیرید و فرض کنید $A^{gr}(\alpha,\beta_A)$ و $C^{gr}(\alpha,\beta_C)$ توابع عضویت افقی ماتریس‌های $\tilde{A}$ و $\tilde{C}$ باشند. در این صورت سیستم (۳۶) و یا جفت $\left(\tilde{A},\tilde{C}\right)$، رویت پذیر ریزدانه‌ای است اگر و تنها اگر ماتریس ریزدانه‌ای (۳۷) به ازای هر $\alpha,\beta_A,\beta_C\in[0,1]$ رنگ کامل داشته باشد.

$$\begin{bmatrix}C^{gr}(\alpha,\beta_C) & C^{gr}(\alpha,\beta_C)A^{gr}(\alpha,\beta_A)\\C^{gr}(\alpha,\beta_C)\left(A^{gr}(\alpha,\beta_A)\right)^2 & \dots\; C^{gr}(\alpha,\beta_C)\left(A^{gr}(\alpha,\beta_A)\right)^{n-1}\end{bmatrix}^T \quad (۳۷)$$

۳-۳ کنترل ردیاب فازی برای سیستم‌های دینامیکی فازی خطی با رویتگر فازی

سیستم کنترل‌پذیر و رویت پذیر توصیف‌شده با معادلات حالت و خروجی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}^{gr}D\tilde{X}(t)&=\tilde{A}\tilde{X}(t)+\tilde{B}\tilde{u}(t) \quad (۳۸)\\\tilde{y}(t)&=\tilde{C}\tilde{X}(t)\end{aligned}$$

کنترل‌کننده فیدبک حالت را به‌صورت زیر در نظر گرفتیم

$$\tilde{u}(t)=-\tilde{K}\tilde{X}(t) \quad (۳۹)$$

که در آن فرض شده است می‌توان بردار حالت را اندازه‌گیری و فیدبک کرد. اگر بردار حالت سیستم در دسترس نباشد، راه‌حل آن استفاده از رویتگر به‌صورت زیر است.

$$^{gr}D\hat{\tilde{X}}(t)=\tilde{A}\hat{\tilde{X}}(t)+\tilde{B}\tilde{u}(t)+\tilde{L}\left[\tilde{y}(t)-\tilde{C}\hat{\tilde{X}}(t)\right] \quad (۴۰)$$

و سپس کنترل‌کننده را باحالت تخمین زده‌شده ترکیب کنیم

$$\tilde{u}(t)=-\tilde{K}\hat{\tilde{X}}(t) \quad (۴۱)$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.149]

جایگزینی معادله (۴۱) در معادله (۴۰) رابطه زیر را نتیجه می‌دهد.

$$^{gr}D\hat{\tilde{X}}(t)=\left[\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{K}-\tilde{L}\tilde{C}\right]\hat{\tilde{X}}(t)+\tilde{L}\tilde{y}(t) \quad (۴۲)$$

از معادلات(۳۸)، (۴۱) و(۴۲) معادله حلقه بسته سیستم به‌صورت (۴۳) به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix}^{gr}D\tilde{X}(t)\\ ^{gr}D\hat{\tilde{X}}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{A} & -\tilde{B}\tilde{K}\\ \tilde{L}\tilde{C} & \tilde{A}-\tilde{B}\tilde{K}-\tilde{L}\tilde{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{X}(t)\\ \hat{\tilde{X}}(t)\end{bmatrix} \quad (۴۳)$$

خطای تخمین را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{e}(t)=\tilde{X}(t)-\hat{\tilde{X}}(t) \quad (۴۴)$$

معادله دینامیکی حاکم بر خطا، با مشتق‌گیری از معادله (۴۴) و جایگذاری از(۳۸) و(۴۰) به دست می‌آید.

$$^{gr}D\tilde{e}(t)=\left[\tilde{A}-\tilde{L}\tilde{C}\right]\tilde{e}(t) \quad (۴۵)$$

جایگزینی $\hat{\tilde{X}}(t)=\tilde{X}(t)-\tilde{e}(t)$ در معادله (۴۱) و به‌کارگیری معادله (۳۸) خواهد داد

$$^{gr}D\tilde{X}(t)=\left[\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{K}\right]\tilde{X}(t)+\tilde{B}\tilde{K}\tilde{e}(t) \quad (۴۶)$$

با در نظر گرفتن معادله (۴۵) مشاهده می‌شود که با انتخاب مناسب ماتریس بهره $\tilde{L}$ معادله (۴۵) پایدار است و $\tilde{e}(t)$ به صفر میل خواهد کرد.

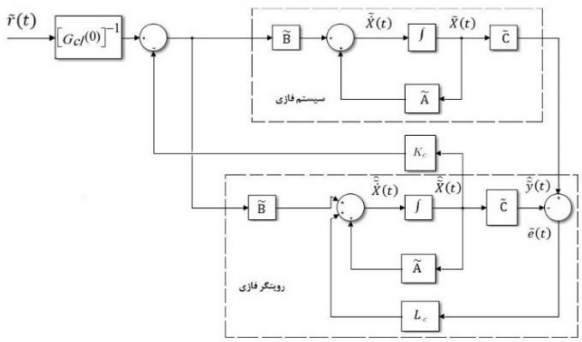
اکنون معادله(۳۶) را در نظر می‌گیریم. اگر $\tilde{e}(t)\to 0$ برای $t\to\infty$ آنگاه درصورتی‌که سیستم زیر پایدار باشد، $\tilde{X}(t)$ به صفر میل خواهد کرد.

$$^{gr}D\tilde{X}(t)=\left[\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{K}\right]\tilde{X}(t) \quad (۴۷)$$

با فرض کنترل‌پذیری حالت، همواره می‌توان $\tilde{K}$ را به‌گونه‌ای تعیین کرد که سیستم داده‌شده با معادله (۴۷) پایدار باشد.

۱-۳-۳ ساختار سیستم کنترل فیدبک حالت با رویتگر برای ردیابی ورودی‌های مرجع ثابت

در این بخش ساختار کلی سیستم‌های ردیاب ورودی‌های مرجع ثابت بر اساس فیدبک حالت با رویتگر ارائه می‌شود. شمای کلی سیستم ردیاب با فیدبک حالت و رویتگر مبتنی بر جبران ساز استاتیکی در مسیر ورودی مرجع در شکل (۴) نشان داده‌شده است.



شکل ۴: شمای کلی سیستم ردیاب فازی مبتنی بر فیدبک حالت فازی، رویتگر فازی و پیش جبران ساز

با در نظر گرفتن یک رویتگر با بردار حالت $\hat{\tilde{X}}(t)$ و بردار حالت سیستم $\tilde{X}(t)$ و تعریف خطای تخمین $\tilde{e}(t)=\tilde{X}(t)-\hat{\tilde{X}}(t)$، معادله حالت سیستم حلقه بسته$2n$- بعدی پیش از واردکردن جبران ساز استاتیکی همانند معادله(۴۳) به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix}^{gr}D\tilde{X}(t)\\ ^{gr}D\hat{\tilde{X}}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{A} & -\tilde{B}\tilde{K}\\ \tilde{L}\tilde{C} & \tilde{A}-\tilde{B}\tilde{K}-\tilde{L}\tilde{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{X}(t)\\ \hat{\tilde{X}}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\tilde{B}\\ \tilde{B}\end{bmatrix}r(t) \quad (۴۸)$$

$$\tilde{y}(t)=\begin{bmatrix}\tilde{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{X}(t)\\ \hat{\tilde{X}}(t)\end{bmatrix}$$

با اعمال تبدیل همانندی زیر

$$\begin{bmatrix}\tilde{X}(t)\\ \tilde{e}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & 0\\ I & -I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{X}(t)\\ \hat{\tilde{X}}(t)\end{bmatrix} \quad (۴۹)$$

در معادله (۴۸) داریم

$$\begin{bmatrix}^{gr}D\tilde{X}(t)\\ ^{gr}D\tilde{e}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{A}-\tilde{B}\tilde{K} & \tilde{B}\tilde{K}\\ 0 & \tilde{A}-\tilde{L}\tilde{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{X}(t)\\ \tilde{e}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\tilde{B}\\ 0\end{bmatrix}\tilde{r}(t) \quad (۵۰)$$

$$\tilde{y}(t)=\begin{bmatrix}\tilde{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{X}(t)\\ \tilde{e}(t)\end{bmatrix}$$

تابع تبدیل حلقه بسته سیستم توصیف‌شده با معادله (۵۰) عبارت است از

$$G_{cl}(s)=\begin{bmatrix}\tilde{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}sI-\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{K} & -\tilde{B}\tilde{K}\\ 0 & sI-\tilde{A}+\tilde{L}\tilde{C}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\tilde{B}\\ 0\end{bmatrix}= \quad (۵۱)$$

$$\begin{bmatrix}\tilde{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(sI-\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{K}\right)^{-1} & \left(sI-\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{K}\right)^{-1}\tilde{B}\tilde{K}\left(sI-\tilde{A}+\tilde{L}\tilde{C}\right)^{-1}\\ 0 & \left(sI-\tilde{A}+\tilde{L}\tilde{C}\right)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{B}\\ 0\end{bmatrix}$$

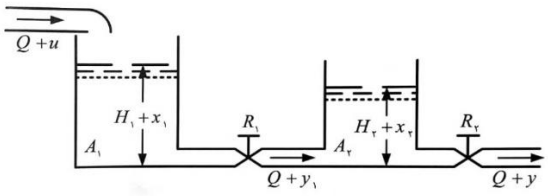
$$=\tilde{C}\left(sI-\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{K}\right)^{-1}\tilde{B}$$

لذا برای ایجاد ردیابی ورودی‌های مرجع ثابت داریم

$$G_{cl}(0)^{-1}=\left[\tilde{C}\left(-\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{K}\right)^{-1}\tilde{B}\right]^{-1} \quad (۵۲)$$

٤- شبیه سازی

با مثال ۴-۱ در این بخش کنترل خروجی دو تانک سری در نظر گرفته‌شده است که در شکل (۵) نمایی کلی از آن نشان داده‌شده است.



شکل ۵: دو مخزن به هم پیوسته

در شرایط پایدار نرخ فلو ورودی و خروجی برابر Q می‌باشد و ارتفاع مایع در دو مخزن به ترتیب H_1 و H_2 می‌باشد. با تغییر نرخ فلو ورودی از Q به $Q+u$ ارتفاع مایع و فلو خروجی در تانک اول به ترتیب به H_1+x_1 و $Q+y_1$ و ارتفاع مایع و فلو خروجی در تانک دوم به ترتیب به H_2+x_2 و $Q+y$ تغییر می‌کند. مقاومت خروجی به‌صورت اعداد فازی $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ در نظر

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.149]

گرفته‌شده است. با در نظر گرفتن شرایط اولیه و مقاومت خروجی که دارای عدم قطعیت فازی می‌باشند، مدل ریاضی سیستم دو تانک به‌صورت زیر می‌باشد.

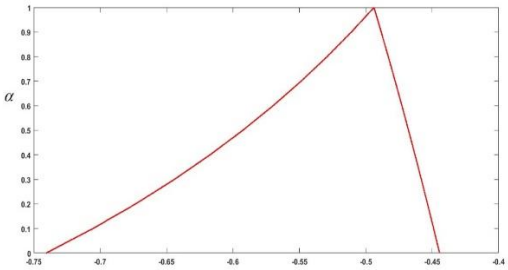
$$\begin{bmatrix} {}^{gr}D\tilde{x}_1(t) \\ {}^{gr}D\tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A_2\tilde{R}_2} & \frac{1}{A_1\tilde{R}_1} \\ \frac{1}{A_2\tilde{R}_1} & -\frac{1}{A_2\tilde{R}_1}-\frac{1}{A_2\tilde{R}_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u}$$
$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} \qquad (۵۳)$$

در رابطه بالا $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ به ترتیب حدوداً ۰.۹ و ۰.۸ می باشند و شرایط اولیه حدوداً ۰.۱ در نظر گرفته می‌شود؛ که این عدم دقیق بودن‌ها به‌صورت اعداد فازی مثلثی به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$0.\tilde{9} = (0.6, 0.9, 1) \quad , 0.\tilde{8} = (0.7, 0.8, 1) \qquad (۵۴)$$
$$0.\tilde{1} = (0, 0.1, 0.15)$$

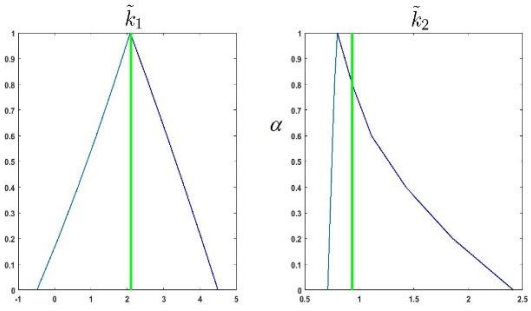
فرض کنید که ورودی مرجع $r=1$ می باشد. هدف پیدا کردن کنترل‌کننده فازی $\tilde{u}$ می‌باشد به‌طوری‌که خروجی $\tilde{y}(t)$ ورودی مرجع را دنبال کند.

مقدار درمینان ماتریس ریزدانه ای (۱۱) حدوداً ۰.۴۹ می‌باشد که در شکل (۶) تابع عضویت آن آورده شده است، همان‌طور که در شکل دیده می‌شود و بر اساس گزاره (۱)، ماتریس ریزدانه‌ای (۱۱) به ازای هر $\alpha, \beta_A, \beta_B \in [0,1]$ مقدار درمینان آن مخالف صفر می‌باشد و ماتریس رتبه کامل دارد و بنابراین سیستم کنترل پذیر ریزدانه‌ای می‌باشد.



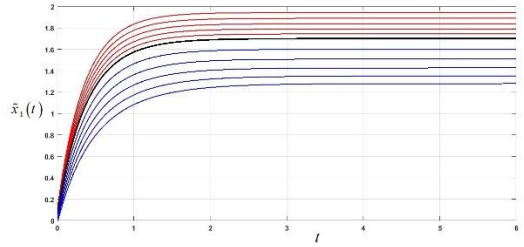
شکل ۶: درمینان ماتریس ریزدانه‌ای کنترل پذیری

مطابق با قضیه (۲)کنترل‌کننده مطابق رابطه (۱۹) می‌باشد. با در نظر گرفتن مقادیر ویژه فازی $\tilde{\lambda}_1 = (-1.7, -2, -2.5)$ و $\tilde{\lambda}_2 = (-3.5, -3, -2.5)$ بر اساس نکته (۷) ماتریس بهره فیدبک فازی $\tilde{K} = [\tilde{k}_1, \tilde{k}_2]$ مطابق شکل (۷) به دست می‌آید. مقدار دیفازی بدست آمده نیز در شکل (۷) نشان داده‌شده است.

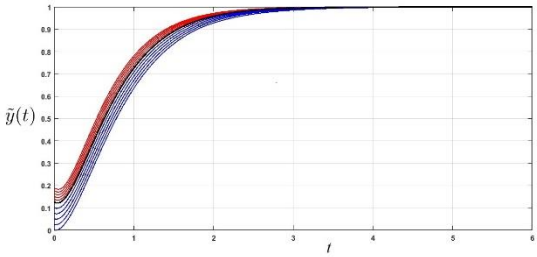


شکل ۷: بهره فیدبک حالت فازی.خطوط سبز مقادیر دیفازی می باشند

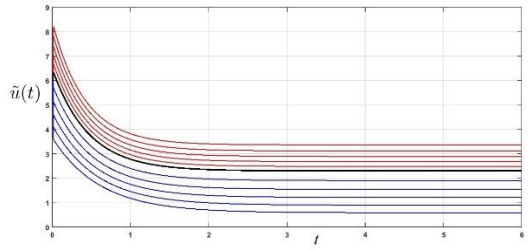
در شکل (۸) حالت فازی $\tilde{x}_1(t)$ و شکل (۹) مسیر فازی خروجی $\tilde{y}(t)$ سیستم نشان داده‌شده است که با اعمال سیگنال کنترل فازی نشان داده‌شده در شکل(۱۰) به‌دست‌آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود خروجی ورودی مرجع را به‌خوبی ردیابی می کند.



شکل ۸: مسیر فازی متغیر حالت $\tilde{x}_1(t)$

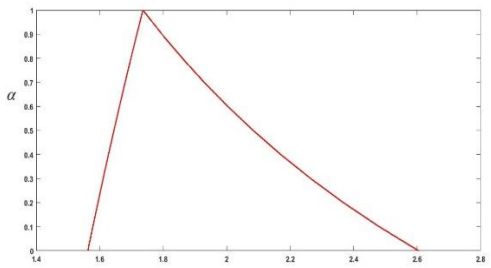


شکل ۹: مسیر فازی خروجی $\tilde{y}(t)$



شکل ۱۰: سیگنال کنترل فازی $\tilde{u}(t)$

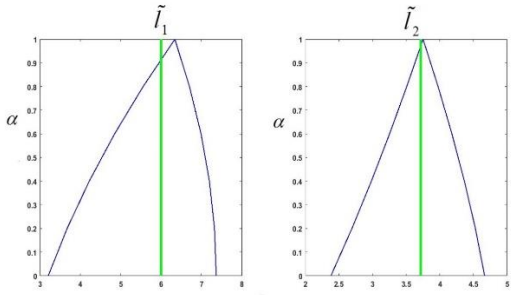
در ادامه فرض می شود که حالتهای سیستم در دسترس نیستند و تنها خروجی سیستم قابل اندازه گیری می باشد. مقدار درمینان ماتریس ریزدانه ای (۳۷) حدوداً ۱.۷۴ می باشد که در شکل (۱۱) تابع عضویت آن آورده شده است، همان‌طور که در شکل دیده می شود و بر اساس گزاره (۲)، ماتریس ریزدانه‌ای (۳۷) به ازای هر $\alpha, \beta_A, \beta_C \in [0,1]$ مقدار درمینان آن مخالف صفر می‌باشد و ماتریس رتبه کامل دارد و بنابراین سیستم رویت پذیر ریزدانه‌ای می‌باشد.



شکل ۱۱: درمینان ماتریس ریزدانه‌ای رویت پذیری

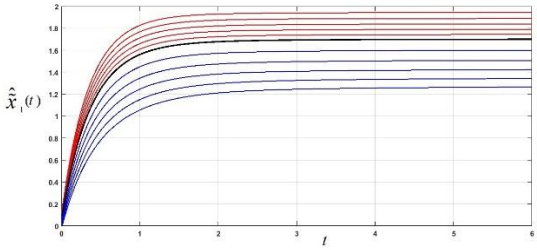
مقادیر ویژه فازی رویتگر $\tilde{\lambda}_1 = (-4, -3.5, -3)$ و $\tilde{\lambda}_2 = (-5.5, -4.8, -4.5)$ در نظر گرفته می شود و ماتریس بهره رویتگر فازی $\tilde{L} = [\tilde{l}_1, \tilde{l}_2]$ مطابق شکل (۱۲) به دست می‌آید. مقدار دیفازی بدست آمده نیز در شکل (۱۲) نشان داده‌شده است.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.149]

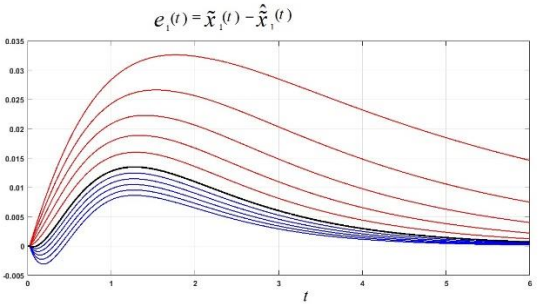


شکل ۱۲: بهره رویتگر فازی،خطوط سبز مقادیر دیفازی می باشند

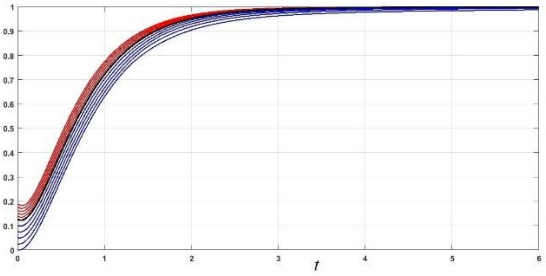
در شکل (۱۳) حالت فازی $\hat{x}_1(t)$ و شکل (۱۴) تفاضل خطای بین $\tilde{x}_1(t)$ و $\hat{x}_1(t)$ نشان داده شده است و در شکل‌های (۱۵) و(۱۶) مسیر فازی خروجی $\tilde{y}(t)$ و تفاضل آن با $\hat{y}(t)$ نشان داده‌شده است.



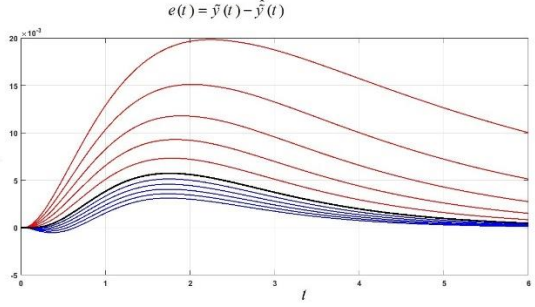
شکل ۱۳: مسیر فازی متغیر حالت $\hat{x}_1(t)$



شکل ۱۴: تفاضل دو متغیر فازی $\tilde{x}_1(t)$ و $\hat{x}_1(t)$



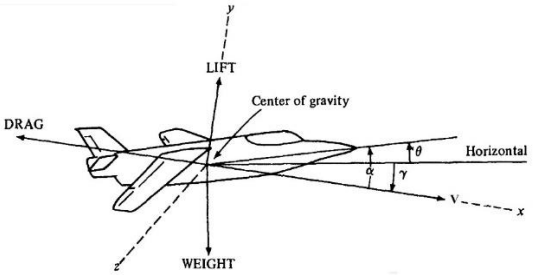
شکل ۱۵: مسیر فازی خروجی $\hat{y}(t)$



شکل ۱۶: تفاضل دو متغیر فازی $\tilde{y}(t)$ و $\hat{y}(t)$

مثال ۴-۲ کنترل فرود هواپیما

در این بخش هدف کنترل فرود هواپیما می باشد. هواپیمای جت در شکل (۱۷) نشان داده شده است. جهت x در امتداد بردار سرعت هواپیما و y و z مطابق شکل می باشند. α زاویه حمله، θ زاویه اوج و γ زاویه مسیر پرواز است.



شکل۱۷: محور ها و زوایای هواپیما

برای سادگی مسئله فرضیات زیر در نظر گرفته شده است.

۱- از حرکت افقی صرفه نظر شده است و حرکت فقط در صفحه x-y در نظر گرفته می‌شود.

۲- سرعت هواپیما در هنگام فرود تقریباً ثابت در نظر گرفته شده است. به دلیل وزش باد در هنگام فرود کنترل سرعت در یک مقدار دقیق ممکن نمی‌باشد و این مقدار تقریبی بوسیله عدد فازی نمایش داده شده است.

۳- زاویه مسیر پرواز γ کوچک در نظر گرفته شده است به طوریکه $\cos\gamma = 1$ و $\sin\gamma = \gamma$ وقتی که زاویه برحسب رادیان اندازه گیری شده باشد.

۴- حرکت طولی هواپیما کاملاً توسط انحراف زاویه بالک بالابر $\delta_e(t)$ که در شکل(۱۸) نشان داده شده است کنترل می‌شود.

۵- معادلات دینامیکی حاکم بر هواپیما توسط دستگاه معادلات دیفرانسیل که حول شرایط تعادل پرواز خطی شده است بیان می‌شود.



شکل۱۸: انحراف زاویه بالابر

ارتفاع سطح پرواز از باند فرود h، سرعت تغییرات ارتفاع $\dot{h}$، زاویه اوج θ و سرعت تغییرات زاویه اوج $\dot{\theta}$، به عنوان متغیرهای حالت انتخاب شده اند. اگر $X_1 \overset{\Delta}{=} h$, $X_2 \overset{\Delta}{=} \dot{h}$, $X_3 \overset{\Delta}{=} \theta$, $X_4 \overset{\Delta}{=} \dot{\theta}$ و $U \overset{\Delta}{=} \delta_e$ تعریف شوند، معادلات دینامیکی حرکت هواپیما در حوالی شرایط تعادل پرواز به صورت (۵۵) می باشد.

$$\begin{bmatrix} {}^{gr}D\tilde{x}_1(t) \\ {}^{gr}D\tilde{x}_2(t) \\ {}^{gr}D\tilde{x}_3(t) \\ {}^{gr}D\tilde{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \tilde{a}_{42} & \tilde{a}_{43} & \tilde{a}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{b}_4 \end{bmatrix} \tilde{U}(t) \qquad (۵۵)$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]

[DOI: 10.52547/joc.15.1.149]

$$\tilde{y}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_1(t)\\ \tilde{x}_2(t)\\ \tilde{x}_2(t)\\ \tilde{x}_2(t)\end{bmatrix}$$

ضرایب $\tilde{a}_{ij}$ و $\tilde{b}_4$ مربوط به پارامترهای هواپیما هستند که به صورت (۵۶) می‌باشند.

$$\tilde{a}_{22}=-\frac{1}{\tilde{T}_s},\quad \tilde{a}_{23}=\frac{\tilde{V}}{\tilde{T}_s} \qquad (۵۶)$$

$$\tilde{a}_{42}=\frac{1}{\tilde{V}\tilde{T}_s{}^2}-\frac{2\xi\omega_s}{\tilde{V}\tilde{T}_s}+\frac{\omega_s{}^2}{\tilde{V}}$$

$$\tilde{a}_{43}=\frac{2\xi\omega_s}{\tilde{T}_s}-\omega_s{}^2+\frac{1}{\tilde{T}_s{}^2},\quad \tilde{a}_{44}=\frac{1}{\tilde{T}_s}-2\xi\omega_s$$

$$\tilde{b}_4=\omega_s{}^2K_s\tilde{T}_s$$

در ضرایب بالا پارامتر های K_s، $\tilde{T}_s$، ω_s و ξ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$K_s=$ بهره ثابت

$\tilde{T}_s=$ ثابت زمانی

$\omega_s=$ فرکانس طبیعی نا میرا

$\xi=$ ضریب میرایی

$\tilde{V}=$ سرعت

مقادیر عددی در نظر گرفته شده برای این پارامترها به صورت (۵۷) می باشد.

$$K_s=-0.95\sec^{-1} \qquad (۵۷)$$

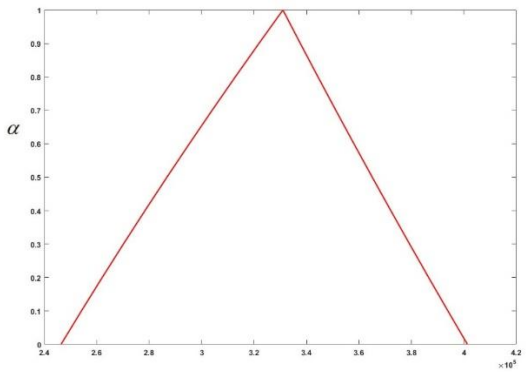
$$\tilde{T}=2.5\sec=(2.2,2.5,2.7)$$

$$\omega_s=1\,radian/\sec$$

$$\xi=0.5$$

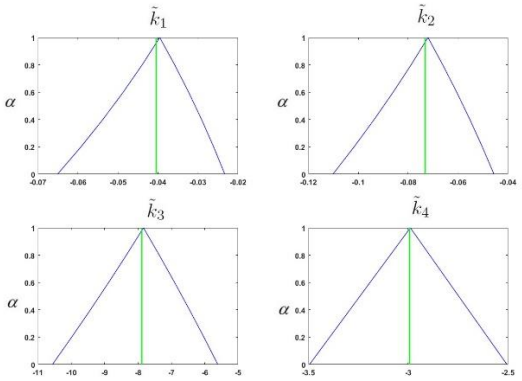
$$\tilde{V}=255ft/\sec=(250,255,260)$$

سرعت هواپیما حدوداً $\tilde{V}=255ft/\sec$ است که به دلیل وزش باد می‌باشد، ارتفاع هواپیما قبل از فرود حدوداً $\tilde{h}=110(ft)=(105,110,115)$ است. هواپیما در حالت حلقه باز و بدون کنترل ناپایدار می‌باشد. تابع عضویت مقدار دترمینان ماتریس ریزدانه ای (۱۱) در شکل (۱۹) آورده شده است، همان‌طور که در شکل دیده می‌شود و بر اساس گزاره (۱)، ماتریس ریزدانه‌ای (۱۱) به ازای هر $\alpha,\beta_A,\beta_B\in[0,1]$ مقدار دترمینان آن مخالف صفر می‌باشد و ماتریس رتبه کامل دارد و بنابراین سیستم کنترل پذیر ریزدانه‌ای می‌باشد.



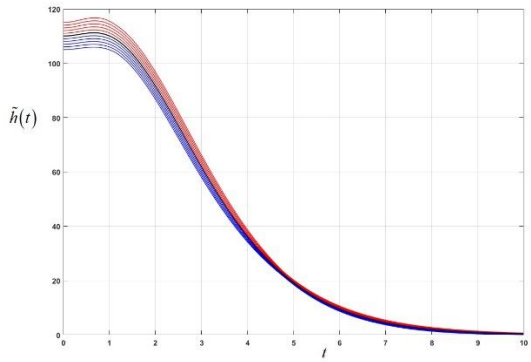
شکل ۱۹: دترمینان ماتریس ریزدانه‌ای کنترل پذیری

هدف طراحی کنترل کننده ای با ضرایب فیدبک $\tilde{K}=\left[\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,\tilde{k}_3,\tilde{k}_4\right]$ است که مقادیر ویژه سیستم را به $\tilde{\lambda}_1=(-1.1,-1,-0.9)$، $\tilde{\lambda}_2=(-1.2,-1.1,-1.05)$، $\tilde{\lambda}_3=(-3,-2.5,-2)$ و $\tilde{\lambda}_4=(-4,-3.5,-3)$ تغییر دهد. مقادیر ضرایب فازی فیدبک حالت در شکل (۲۰) آورده شده است.

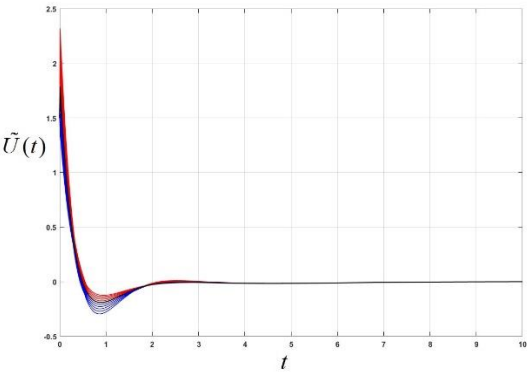


شکل ۲۰: بهره فیدبک حالت فازی.خطوط سبز مقادیر دیفازی می باشند

در شکل (۲۱) مسیر فازی خروجی $\tilde{h}(t)$ سیستم نشان داده‌شده است که با اعمال سیگنال کنترل فازی $\tilde{U}(t)$ نشان داده‌شده در شکل(۲۲) به‌دست‌آمده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود خروجی، ورودی مرجع را به‌خوبی ردیابی می‌کند.



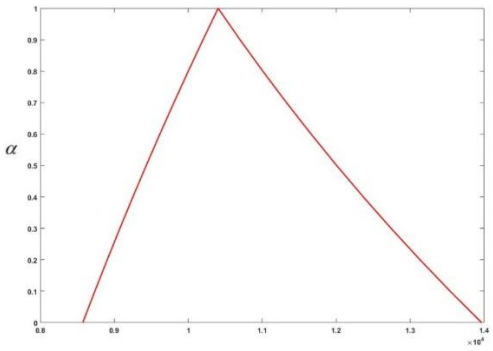
شکل ۲۱: مسیر فازی خروجی $\tilde{h}(t)$



شکل ۲۲: سیگنال کنترل فازی $\tilde{U}(t)$

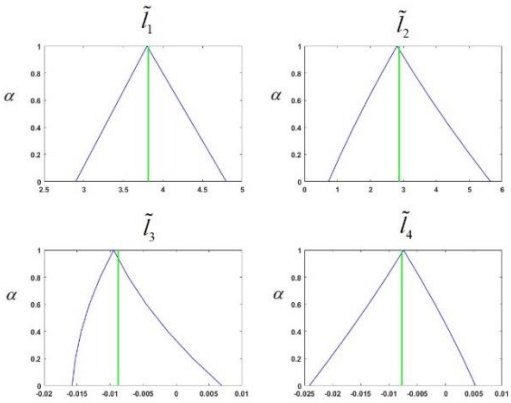
[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.149]

در ادامه فرض می شود که حالتهای سیستم در دسترس نیستند و تنها خروجی سیستم قابل اندازه گیری می‌باشد. . تابع عضویت مقدار درمینان ماتریس ریزدانه ای (۳۷) در شکل (۲۳) آورده شده است، همان‌طور که در شکل دیده می شود و بر اساس گزاره (۲)، ماتریس ریزدانه‌ای (۳۷) به ازای هر $\alpha, \beta_A, \beta_C \in [0,1]$ مقدار درمینان آن مخالف صفر می‌باشد و ماتریس رتبه کامل دارد و بنابراین سیستم رویت پذیر ریزدانه‌ای می‌باشد.



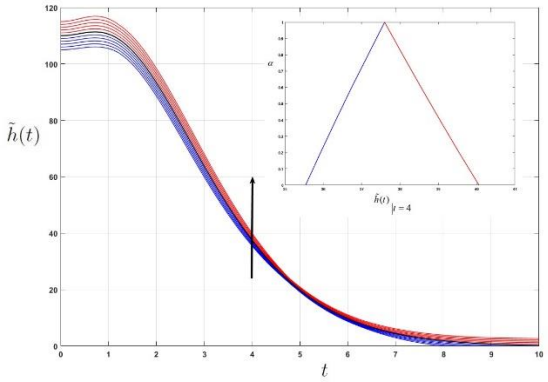
شکل ۲۳: درمینان ماتریس ریزدانه‌ای رویت پذیری

مقادیر ویژه فازی رویتگر $\tilde{\lambda}_1 = (-0.5, -0.3, -0.1)$، $\tilde{\lambda}_2 = (-1, -0.8, -0.5)$، $\tilde{\lambda}_3 = (-1.8, -1.5, -1.3)$ و $\tilde{\lambda}_4 = (-2.5, -2.2, -2)$ در نظر گرفته می شود و ماتریس بهره رویتگر فازی $\tilde{L} = [\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \tilde{l}_3, \tilde{l}_4]$ مطابق شکل (۲۴) به دست می‌آید. مقدار دیفازی بدست آمده نیز در شکل (۲۴) نشان داده‌شده است.



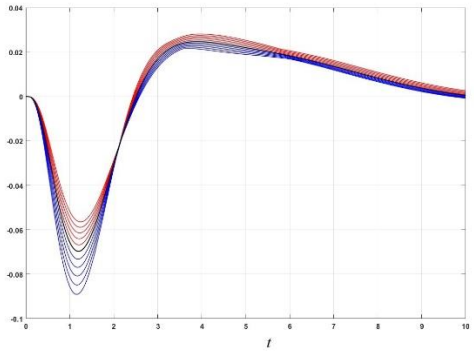
شکل ۲۴: بهره رویتگر فازی،خطوط سبز مقادیر دیفازی می باشند

در شکل‌های (۲۵) و(۲۶) مسیر فازی خروجی $\tilde{h}(t)$ و تفاضل آن با $\hat{\tilde{h}}(t)$ نشان داده‌شده است. حرکات فازی هواپیمای با در نظر گرفتن شرایط فازی در شکل (۲۷) نشان داده شده است. نتایج نشان می دهد که ، کنترل کننده و رویتگر با موفقیت فرود هواپیما را کنترل می کند.

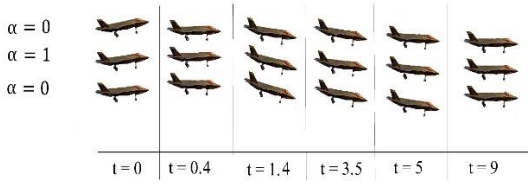


شکل ۲۵: مسیر فازی خروجی $\hat{\tilde{h}}(t)$

$$e(t) = \tilde{h}(t) - \hat{\tilde{h}}(t)$$



شکل ۲۶: تفاضل دو متغیر فازی $\tilde{h}(t)$ و $\hat{\tilde{h}}(t)$



شکل ۲۷: حرکات مورد انتظار هواپیماها در حضور کنترل کننده و رویتگر

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله بر اساس مفاهیم مشتق ریزدانه ای و ریاضیات بازه‌ای فازی اندازه فاصله نسبی، مسئله کنترل ردیاب فازی برای سیستم‌های دینامیکی خطی فازی مورد بررسی قرار گرفت است. در این سیستم ها عدم قطعیت به‌صورت اعداد فازی که در واقع نمایش ریاضی دانش فرد خبره می‌باشد، در نظر گرفته‌شده است. با استفاده از قضیه (۲) نشان داده شد که خروجی سیستم که دارای پارامترهای غیر قطعی می‌باشد ورودی مرجع را ردیابی می کند. ورودی کنترل فازی به فرم فیدبک حالت فازی سیستم می‌باشد. به دلیل اینکه همواره امکان اندازه‌گیری حالت‌های سیستم وجود ندارد در این مقاله برای تخمین حالت‌های سیستم یک رویتگر فازی طراحی گردید وشرط لازم برای طراحی رویتگرفازی که همان رویت پذیری ریزدانه ای می باشد، ارائه گردید. به دلیل اینکه اعداد فازی موجود در معادلات دیفرانسیل فازی از دانش فرد خبره بدست می‌آید، هرچه اطلاعات و دانش فرد خبره بیشتر باشد مقدار عدم قطعیت در اعداد فازی وبه طبع آن عدم قطعیت در بهره فیدبک حالات کمتر شده و نتایج بدست آمده دقیق‌تر می‌باشد. در این مقاله به دلیل استفاده از رویکرد ریاضیات بازه‌ای فازی اندازه فاصله نسبی مشکلات موجود در روش‌های SGH و GH مانند عدم وجود داشتن جواب مشتق و پدیده رفتار غیرطبیعی در

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.149]

مدل‌سازی را ندارد. در انتها با استفاده از دو مثال اثر بخشی کنترل‌کننده فازی طراحی شده مورد بررسی قرار گرفته است.

مراجع

[1] M. Mazandarani and M. Najariyan, "Differentiability of type-2 fuzzy number-valued functions," Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 19, no. 3, pp. 710-725, 2014.

[2] N. Hoa, "Fuzzy fractional functional differential equations under Caputo gH-differentiability," Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, vol. 22, pp. 1134–1157, 2015.

[3] H. V. Long, N. T. K. Son, and N. V. Hoa, "Fuzzy fractional partial dierential equations in partially ordered metric spaces," Iranian Journal of Fuzzy Systems, vol. 14, pp. 107-126, 2017.

[4] V. Lupulescu, L. Dong, and N. V. Hoa, "Existence and uniqueness of solutions for random fuzzy fractional integral and dierential equations," Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, vol. 29, pp. 27-42, 2015.

[5] H. V. Long, N. T. KimSon, and H. T. ThanhTam, "The solvability of fuzzy fractional partial dierential equations under Caputo gH-dierentiability," Fuzzy Sets and Systems, vol. 309, pp. 35-63, 2017.

[6] M. Najariyan and M. Farahi, "A new approach for solving a class of fuzzy optimal control systems under generalized Hukuhara differentiability.," J Franklin Inst, pp. 1836–1849, 2015.

[7] M. Mazandarani and Y. Zhao, "Fuzzy Bang-Bang control problem under granular differentiability," Journal of the Franklin Institute, vol. 355, no. 12, pp. 4931-4951, 2018.

[8] M. Mazandarani and M. Najariyan, "Type-2 Fuzzy Fractional Derivatives," Communications in nonlinear science and numerical simulation, vol. 19, pp. 1-48, 2014.

[9] F. Ghaemi, R. Yunus, A. Ahmadian, and S. Salahshour, "Application of fuzzy fractional kinetic equations to modelling of the acid hydrolysis reaction," Abstract and Applied Analysis, 2013.

[10] M. Najariyan and M. Farahi, "optimal control of fuzzy linear controlled system with fuzzy initial conditions," Iranian journal of fuzzy systems vol. 10, pp. 21-35, 2013.

[11] M. Najariyan and M. Farahi, "A new approach for the optimal fuzzy linear time invariant controlled system with fuzzy coefficients," Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 259, Part B, pp. 682-694, 2014.

[12] A. Piegat and M. Landowski, "Horizontal Membership Function and Examples of its Applications," Int. J. Fuzzy Syst, vol. 17, pp. 22-30, 2015.

[13] A. Piegat and M. PluciNski, "Fuzzy Number Addition with the Application of Horizontal Membership Functions," Hindawi Publishing Corporation Scientific World Journal, vol. 1, pp. 1-16, 2015.

[14] A. Piegat and M. Landowski, "Fuzzy Arithmetic Type 1 with Horizontal Membership Functions, Uncertainty Modeling part of Studies in Computational Intelligence," Springer, Cham, vol. 683, pp. 233-250, 2017.

[15] M. Landowski, "Comparison of RDM Complex Interval Arithmetic and Rectangular Complex Arithmetic," Intelligent Systems and Computing, vol. 534 pp. 49-57, 2016.

[16] A. Piegat and M. Landowski, "Two interpretations of multidimensional RDM interval arithmetic-multiplication and division," Int. J. Fuzzy Syst., vol. 15, pp. 488-496, 2013.

[17] M. Mazandarani, N. Pariz, and A. V. Kamyad, "Granular Differentiability of Fuzzy-Number-Valued Functions," Journal Of IEEE Transactions On Fuzzy Systems, vol. 99, pp. 1-14, 2018.

[18] B. Farhadinia, "Necessary optimality conditions for fuzzy variational problems," Information Sciences, vol. 181, pp. 1348-1357, 2011.

[19] H. Zarei, A. V. Kamyad, and A. A. Heydari, "FuzzyModeling and Control of HIV Infection," Computational and Mathematical Methods in Medicine, vol. 2012, pp. 1-17, 2012.

[20] B. Farhadinia, "Pontryagin's Minimum Principle for Fuzzy Optimal Control Problems," Iranian Journal of Fuzzy Systems, vol. 11, pp. 27-43, 2014.

[21] M. H. F. M. Najariyan, "A new approach for solving a class of fuzzy optimal control systems under generalized Hukuhara differentiability," Journal of the Franklin Institute,, vol. 352, pp. 1836-1849, 2015.

[22] W. Witayakiattilerd, "Nonlinear Fuzzy Differential Equation with Time Delay and Optimal Control Problem," Hindawi Publishing Corporation, vol. 1, pp. 1-14, 2015.

[23] M. Mazandarani and N. Pariz, "Sub-optimal control of fuzzy linear dynamical systems under granular differentiability concept," ISA Transactions, vol. 76, pp. 1-17, 2018.

[24] Z. H. J., Fuzzy set theory and its applications. Springer Business Economics, 2001.

[25] S. abbasi and A. jalali, "A Novel Approach for Solving Fully Fuzzy Linear Systems and their Duality," Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, vol. 37, pp. 2609-2619, 2019.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]

[DOI: 10.52547/joc.15.1.149]