مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۵، شماره ۲، تابستان ۱۴۰۰، صفحه ۳۲-۲۳

ردیابی مقاوم آرایش متغیر با زمان برای سیستم چند عاملی خطی با در نظر گرفتن اغتشاش خارجی و رویکرد نامساوی ماتریسی خطی

سعید خان کلانتری[۱]، ایمان ایزدی[۲]، فرید شیخ الاسلام[۳]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی اصفهان، s.khan@ec.iut.ac.ir

[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی اصفهان، iman.izadi@ iut.ac.ir

[۳] استاد، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی اصفهان، sheikh@ iut.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۸/۰۵/۰۴ ویرایش: ۱۳۹۹/۰۲/۱۳ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۳/۲۲

چکیده: در این مقاله به موضوع ردیابی آرایش برای سامانه چند عاملی پرداخته می‌شود. مدل هر عامل به‌صورت خطی با نامعینی‌هایی در پارامترهای آن و تاثیر اغتشاش در مدل سامانه در نظر گرفته شده است. برای تحقق آرایش متغیر با زمان از پیش طراحی شده، ورودی کنترلی مطلوب معرفی می‌گردد. با اعمال این ورودی، سامانه حلقه بسته شکل خواهد گرفت و با برقراری شروط مناسب به منظور تحقق آرایش متغیر با زمان، با استفاده از نظریه لیاپانوف و شاخص H_∞ برای کم کردن اثر اغتشاش به نامساوی ماتریسی خطی خواهیم رسید که در صورت برقراری این نامساوی، پارامتر طراحی که ضریب ورودی کنترلی است، محاسبه می‌گردد. در انتها کارایی استراتژی طراحی شده در یک شبیه‌سازی نشان داده شده است.

کلمات کلیدی: سامانه چند عاملی، ردیابی آرایش متغیر با زمان، کنترل مقاوم، نامساوی ماتریسی خطی.

Robust time-varying formation tracking for linear multi agent system with external disturbances using linear matrix inequalities

Saeed Khankalantary[1], Iman Izadi[1], Farid Sheikholeslam[1]

1- Department of Electrical and Computer Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan 84156-83111, Iran

Abstract: In this paper, the formation tracking of multi-agent systems is discussed. The model considered for each agent is linear with uncertain parameters. The effect of external disturbances is also considered in the model. To achieve predetermined time-varying formation, the required control input is presented. By applying this input, the closed-loop system will take the desired formation. Establishing the appropriate conditions for the realization of time-varying formation and using the Lyapunov theory and the H_∞ index to reduce the disturbance effect, results in some linear matrix inequalities. The designed parameter is then computed by solving those linear matrix inequalities. Finally, a simulation example is presented to illustrate the effectiveness of the designed strategy.

Keywords: Multi-agent systems, time-varying formation tracking, robust control, linear matrix inequalities.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.3.0]
[DOI: 10.52547/joc.15.2.23]

۱- مقدمه

مبحث سامانه‌های چند عاملی[1] امروزه به دلیل کاربردهای گسترده‌ای که در علوم مختلف از جمله رباتیک و مهندسی کنترل، کامپیوتر، علوم ریاضیات، زیست شناسی، اقتصاد و... دارد، مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. در سامانه‌های چند عاملی، هرعامل ضمن انجام دادن اهداف و مسئولیت‌های مستقل خود، با دیگر عامل‌ها نیز در ارتباط و همکاری بوده و عامل‌ها هدف مشترکی را دنبال می‌کنند. کنترل مشارکتی در سیستم‌های چند عاملی بدین معنی است که عامل ها در یک رفتار هماهنگ با یکدیگر و یا با توجه به یک رفتار از پیش طراحی شده به منظور دست یابی به هدفی مشترک همکاری کنند.

رفتار هماهنگ، جزء چالش‌های اساسی در یک سامانه چند عاملی است و در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه محققان بوده است. به ویژه طراحی کنترل کننده به‌شکل توزیع شده و محلی بیشترین توجه را به خود اختصاص داده است. از جمله دلایل این توجه، هزینه کم‌تر بهره برداری، مقاوم بودن سیستم و تطبیقی و منعطف بودن کنترل در شرایط مختلف است.

در زمینه کنترل مشارکتی، بیشترین مطالعات انجام گرفته مربوط به توافق بین عامل‌ها است [۱] [۲]. به عنوان اولین پژوهش جدی و موثر صورت گرفته در حوزه توافق جمعی می توان به [۳] اشاره کرد. در این مرجع مفهوم توافق جمعی و اثبات الگوریتم برای عامل‌های ساده با توپولوژی شبکه متغیر با زمان به همراه تأخیر بیان شده است. این دستاورد، در طول ده سال مبنای مطالعات پژوهشگران دیگر بوده است. پس از آن مقالات مرجع بسیاری در زمینه‌های نظری و عملی این مبحث ارائه شده‌اند.

در [۴] توافق جمعی با رهبر و بدون آن، با روند کنترل توزیع شده برای مدل خطی پیوسته زمان پیشنهاد شده است. در این مقاله‌ی تأثیر تأخیر ورودی ثابت و متغیر با زمان نیز مورد بررسی قرار گرفته است. توافق جمعی در عامل‌های با مدل خطی یا خطی شده با استفاده از بازخورد ایستای حالت در [۵] مطالعه شده است. در [۶]، مسئله ی توافق جمعی برای عامل‌های خطی با دینامیک یکسان، در حضور نامعینی در توپولوژی شبکه فرمول بندی شده است. علاوه بر منابع معرفی شده، مطالعات بسیار دیگری نیز در زمینه استخراج کنترل کننده جهت تضمین توافق جمعی برای عامل‌های کاملاً خطی، صورت پذیرفته است.

به جهت کاربرد فراوان دینامیک مرتبه دو که در آن عامل حرکتی با حالت‌های موقعیت و سرعت مدل می‌شوند، مطالعات بسیاری منحصر به توافق جمعی در این سامانه‌ها انجام شده است. از آن جمله می‌توان به [۷] اشاره کرد که در آن چند پروتکل جهت احقاق توافق جمعی در سامانه‌های مرتبه دو با دینامیک غیرخطی و توپولوژی شبکه ثابت ارائه شده است. در [۸] موضوع دنباله روی از رهبر، که نزدیکی زیادی با توافق جمعی دارد، برای سامانه‌های مرتبه دو غیرخطی مورد بررسی قرار گرفته است. علاوه بر این مرجع‌ها در [۹]، سامانه‌های مرتبه دو غیرخطی لیپشیتز با رویکرد کنترل تطبیقی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند و پروتکل تضمین توافق جمعی برای این دسته از عامل ها اثبات شده است. با این وجود، روشی سیستماتیک که هر دینامیک مرتبه بالایی برای عامل و جملات غیرخطی آن مفروض باشد، ارائه نشده است.

همان طور که پیش‌تر عنوان شد، همانند مسائل کنترلی دیگر، همکاری در سامانه‌های چند عاملی و از جمله آن توافق جمعی با رویکردهای کنترلی متفاوت مورد مطالعه قرار گرفته است. شاید ساده ترین پروتکل کنترلی در این حوزه را بتوان طراحی کنترل کننده بازخورد ایستای حالت معرفی کرد که دلیل آن تعداد کم پارامترهای کنترلی و سادگی پیکربندی مسئله است. به طور مثال در [۱۰] توافق جمعی برای دسته‌ای از عامل‌های غیرخطی که در شبکه‌ای وابسته به زمان با یکدیگر در ارتباط هستند، با استفاده از کنترل کننده ایستای حالت پیکربندی شده است. کنترل کننده ایستای خروجی جهت توافق جمعی عامل‌های مرتبه بالا بر اساس اطلاعات خروجی دریافتی از همسایگان هر عامل در [۱۱] به طور کامل مورد بررسی واقع شده است. بیشترین تکنیک استفاده شده در مواجهه با طراحی کنترل‌کننده توافق جمعی، یافتن روش‌هایی برای تقلیل این مسئله به زیر مسئله پایدار سامانه حلقه بسته می‌باشد. بر این اساس کنترل کننده بازخورد ایستا و پویای خروجی، برای توافق جمعی دسته‌ای از عامل‌ها طراحی و فرمول بندی شده‌اند [۱۲]. در [۱۳] نیز طراحی مشابهی برای کنترل کننده بازخورد ایستای خروجی با رویکرد H_∞ برای رفع اغتشاش در حضور نامعینی مدل و اندازه‌گیری‌های مخدوش طراحی شده است.

امروزه بهره گیری از نامساوی‌های ماتریسی غیرخطی و خطی از ابزارهای مورد استفاده پژوهشگران و طراحان برای طراحی کنترل کننده است. با پیشرفت الگوریتم‌های بهینه سازی و ظهور حل کننده‌های[2] مختلف، تمایل به پیکربندی روش‌هایی که منجر به استخراج ضرایب کنترل کننده از درون یک ماتریس بلوکی مثبت معین یا منفی معین شود، افزایش یافته است. بر این اساس از بین مطالعات بسیاری که در زمینه بهینه سازی محدب و نامساوی‌های ماتریسی خطی صورت پذیرفته است می‌توان به [۱۴] اشاره کرد؛ جایی که توافق جمعی برای عامل‌های خطی با دینامیک عمومی با استفاده از کنترل ایستای بازخورد خروجی و حالت بررسی شده است. این روش در [۱۵] به طراحی کنترل کننده پویا با استفاده از بازخورد خروجی تعمیم داده شده است. هر چند دو روش فوق از لحاظ پیکربندی و فرم بندی مسئله از جامعیت کافی برخوردارند؛ اما تعیین ضرایب نهایی کنترل کننده‌های غیر متمرکز به حل نامساوی‌های ماتریسی غیرخطی منتهی و برای حل آن روش‌هایی تکرار شونده و غیر قابل اعتماد معرفی شده است. در [۱۶]، برای رفع مشکل ذکر شده و جلوگیری از مواجهه با نامساوی ماتریسی غیرخطی، شرایطی از پیش تعیین شده برای ضرایب کنترل کننده

[1] Multi Agent Systems

[2] solver

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.3.0]
[DOI: 10.52547/joc.15.2.23]

در نظرگرفته شده است تا با ساده سازی، روند دستیابی به ضرایب مناسب و پایدار با حل نامساوی ماتریسی خطی حاصل شود. در [۱۷] برای یک سیستم خطی به همراه عدم قطعیت و اغتشاش با استفاده از کنترل کننده پویا که پارامترهای آن نیز دارای نامعینی هستند، کنترل کننده طراحی شده است. در [۱۸] کنترل کننده مدلغزشی انتگرالی برای سیستم خطی به همراه اغتشاش ورودی و نامعینی معرفی شده و با رویکرد مبتنی برتخمین پارامترها طراحی شده است.

عمده پژوهش‌های صورت گرفته در زمینه کنترل مشارکتی در زمینه توافق است. اما یکی از زمینه‌های پرکاربرد دیگر مطرح در زمینه کنترل مشارکتی برای هماهنگی و همکاری عامل‌ها مربوط به کنترل آرایش است. کارهای صورت گرفته در این زمینه عمدتاً به دو بخش کلی تقسیم بندی می‌شوند. بخش اول کارهایی است که با تعریف از پیش تعیین شده‌ای برای عامل‌ها و تعریف آرایش مشخص، سعی بر رسیدن به این هدف دارند [۱۹][۲۰]. این پژوهش‌ها بدون در نظر گرفتن نظریه گراف و خواص مربوط به آن برای سیستم‌های چند عاملی بوده و عمدتاً با طراحی رفتار مشخص برای هر عامل همچون تعریف یک ساختار مجازی یا ساختار رهبر-پیرو سعی بر رسیدن عامل‌ها به آرایش مطلوب دارند. به عنوان مثال در [۲۱] برای پرنده بدون سرنشین و با توجه به نامعینی‌هایی که در اندازه‌گیری برخی عامل‌ها داریم روش مدلغزشی انتگرالی برای آرایش سیستم در نظر گرفته شده است و برای هر کدام از حالت‌های متناظر عامل‌ها سطح لغزشی معین در نظر گرفته می‌شود تا با رسیدن به این سطوح همزمان مسئله آرایش نیز برآورده گردد.

بخش دیگری از کارهای صورت گرفته مبتنی بر نظریه گراف است. به عنوان نمونه در [۲۲] مسئله ترکیبی کنترل آرایش و مهار عامل ها برای سامانه‌های با دینامیک مرتبه دوم به همراه تأخیر مورد بررسی قرار گرفته است. در [۲۳] مسئله ردیابی آرایش متغیر با زمان برای سامانه مرتبه دوم به همراه توپولوژی متغیر بررسی شده و با استفاده از روش لیاپانوف و حل معادله ریکاتی طراحی کنترل کننده انجام شده است. این کنترل روی پرنده‌های بدون سرنشین پیاده شده است. همچنین در برخی مقالات اخیر همچون [۲۴] و [۲۵] از روش‌های ابتکاری جهت مواجهه با نامعینی‌های پارامتری و اغتشاش خارجی در مسئله کنترل آرایش استفاده شده است. در این روش‌ها از یک کنترل کننده اولیّه برای مدل نامی و کنترل جبران‌ساز برای مواجهه با انحراف از مدل نامی استفاده شده است.

بر این اساس در این مقاله، مسئله ردیابی مقاوم آرایش متغیر با زمان در حضور اغتشاش و نامعینی پارامتری برای سامانه‌های چند عاملی بحث می‌شود. از روش کنترل H_∞ با در نظر گرفتن اغتشاش و نامعینی پارامتری، برای طراحی کنترل کننده استفاده شده است.

در بخش دوم مقاله مقدمات شامل نظریه گراف ارائه می‌گردد. در بخش سوم به طراحی کنترل کننده مورد نظر برای سیستم چند عاملی پرداخته خواهد شد. در بخش چهارم کارایی کنترل طراحی شده در یک شبیه سازی بررسی می‌گردد. جمع‌بندی مباحث نیز پایان بخش مقاله خواهد بود.

۲- مقدمات و فرمول‌بندی

۲-۱- نظریه گراف

در این قسمت به مروری کلی بر نظریه گراف‌ها که در نمایش سامانه‌های چند عاملی، اتصالات درونی و توپولوژی شبکه آن‌ها کارایی عمده دارد، می‌پردازیم.

در گراف متناظر با شبکه عامل‌ها، هر عامل با یک گره[1] و ارتباط بین هر جفت عامل نیز با یک یال[2] نشان داده می‌شود. یک گراف جهت‌دار با N گره، با $G=(V,E,A)$ معرفی می‌شود که در آن $V=(v_1,v_2,...,v_N)$ مجموعه گره‌ها و $E\subseteq V\times V$ مجموعه یال‌هاست. وجود یال (v_i,v_j) در گراف، بیان‌گر دریافت اطلاعات عامل v_j توسط v_i است. در این مدل $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{N\times N}$ ماتریس مجاورت[3] می‌باشد. اگر عامل i اطلاعات عامل j را دریافت کند، به این معنی که یال جهت‌داری از j به i وجود داشته باشد، $a_{ij}>0$ و در غیر این صورت $a_{ij}=0$ فرض می‌شود؛ همچنین همواره $a_{ii}=0$ است.

پس از مدل سازی شبکه عامل‌ها با گراف‌های جهت دار، لازم است تعداد عامل‌ها و نحوه ارتباط آن‌ها در قالب ماتریسی بیان شود، تا بتوان آن را در معادلات ریاضی استفاده کرد. بدین منظور به معرفی ماتریس لاپلاسین متناظر با گراف یک شبکه، می‌پردازیم. ماتریس لاپلاسین $L=[l_{ij}]\in\mathbb{R}^{N\times N}$ مرتبط با گراف $G=(V,E,A)$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$l_{ii}=\sum_{j\in N_i}a_{ij}\qquad l_{ij}=-a_{ij}\quad \forall i\neq j\quad i,j\in 1,...,N$$

۲-۲- نمادگذاری

در تمام بخش‌های این نوشتار، عبارت $x\in\mathbb{R}^m$ معرف بردار ستونی حقیقی m عضوی، علامت $\otimes$ بیان‌گر ضرب کرونیکر بین دو ماتریس، عبارت I_N نشان دهنده ماتریس قطری واحد $n\times n$ و J_n ماتریس $n\times n$ با تمامی درایه ها برابر با واحد هستند. برای نمایش بردار ستونی $n\times 1$ که تمام اعضای آن واحد یا تمامی درایه‌های آن صفر می‌باشد، به ترتیب از 1_n و 0_n استفاده شده است. برای ماتریس متقارن A، نماد

[1] Node
[2] Edge
[3] Adjacency matrix

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.3.0]
[DOI: 10.52547/joc.15.2.23]

$A>0$ به معنی مثبت معین بودن آن است یا به بیان دقیق تر عبارت زیر برای آن صادق است:

$$x^T Ax>0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n$$

نماد $\|.\|$ معرف نرم ماتریسی و $diag(A,B)$ بیان‌گر ماتریس بلوکی قطری ساخته شده از A و B است.

۳-۲- تعریف مسئله

در سامانه چند عاملی با N عامل، دینامیک زیر برای عامل i ام ($i=1,2,...,N$) در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t)&=(A+\Delta A)x_i(t)+(B+\Delta B)u_i(t)+D\omega_i(t)\\ y_i(t)&=Cx_i(t)\end{aligned} \qquad (۱)$$

در این مدل $x_i(t)\in\mathbb{R}^n$ ، $u_i(t)\in\mathbb{R}^m$ و $y_i(t)\in\mathbb{R}^o$ به ترتیب حالت‌ها، ورودی کنترلی و خروجی اندازه‌گیری هستند. اغتشاش بیرونی وارد بر سامانه به صورت $\omega_i(t)\in\mathbb{R}^p$ و ماتریس‌های A,B,C,D با ابعاد مناسب، ماتریس‌های شناخته شده در مدل سامانه هستند. این ماتریس‌ها همراه با نامعینی‌هایی به شکل $\Delta A,\Delta B$ و با نوع نامعینی ساختار محدود زیر هستند:

$$\begin{aligned}\Delta A&=M_A F_A N_A \quad , \quad F_A{}^T F_A\le I\\ \Delta B&=M_B F_B N_B \quad , \quad F_B{}^T F_B\le I\end{aligned} \qquad (۲)$$

که $M_A\in\mathbb{R}^{n\times k_A}$ ، $N_A\in\mathbb{R}^{l_A\times n}$ ، $F_A\in\mathbb{R}^{k_A\times l_A}$ ، $M_B\in\mathbb{R}^{m\times k_B}$ ، $N_B\in\mathbb{R}^{l_B\times m}$ و $F_B\in\mathbb{R}^{k_B\times l_B}$ هستند. قبل از ادامه بیان مسئله به فرضیات و لم‌های زیر توجه کنید:

فرض ۱. (A,B) کنترل پذیر و $\text{rank}(B)=m$ است.

فرض ۲. (A,C) رویت پذیر است.

تابع تکه‌ای هموار مشتق‌پذیر $h_i(t)\in\mathbb{R}^n$ $(i=1,2,...,N)$ یک تابع آرایش متغیر با زمان به‌صورت زیر است:

$$h(t)=\begin{bmatrix}h_1^T(t) & h_2^T(t) & ... & h_N^T(t)\end{bmatrix}^T \qquad (۳)$$

تعریف ۱. ([۲۶]) سیستم چند عاملی رابطه ۱، به آرایش متغیر با زمان $h(t)$ برای هر شرط اولیه محدود خواهد رسید به شرطی که تابع $\vartheta(t)\in\mathbb{R}^m$ وجود داشته باشد به طوری که $\lim_{t\to\infty}\left(x_i(t)-h_i(t)-\vartheta(t)\right)=0$ برقرار شود. که در آن $\vartheta(t)$ تابع مرجع آرایش، نام‌گذاری شده و این تابع برای جبران طراحی کنترل کننده برای تحقق مسئله آرایش به‌کار می‌رود.

لم ۱ (حذفی[1]) ([۲۷]). برای هر $\varepsilon_i>0$، و هر مجموعه ماتریس‌های U_i,V_i,F با ابعاد مناسب، نامساوی زیر برقرار است:

$$U_iFV_i+V_i^TF^TU_i^T\le\varepsilon_i^{-1}U_iU_i^T+\varepsilon_iV_i^TF^TFV_i \qquad (۴)$$

لم ۲ (شر[2]) ([۲۷]). با در نظر گرفتن ماتریس‌های ثابت R، Q و S با ابعاد مناسب که R و Q متقارن نیز می‌باشند، سه عبارت زیر با یکدیگر معادل خواهند بود:

$$\begin{aligned}&Q(x)-S(x)R(x)^{-1}S(x)^T>0\\ &R(x)>0\end{aligned} \qquad (۵)$$

$$\begin{aligned}&R(x)-S(x)^TQ(x)^{-1}S(x)>0\\ &Q(x)>0\end{aligned} \qquad (۶)$$

$$\begin{bmatrix}Q(x) & S(x)\\ S(x)^T & R(x)\end{bmatrix}>0 \qquad (۷)$$

هدف طراحی کنترل کننده‌ای برای سامانه ۱ به منظور تحقق آرایش متغیر با زمان بر اساس روش H_∞ با شاخص دفع اغتشاش γ، می‌باشد به طوری که برای هر $\omega(t)=0$ سیستم حلقه بسته به هدف مطلوب رسیده و برای $\omega(t)\neq 0$ یکی از دو شرط زیر به ازای مقدار ثابت $\gamma>0$ برقرار گردد:

$$\begin{aligned}&\|T_{z\omega}(s)\|_\infty<\gamma\\ &\int_0^\infty\|z(t)\|^2dt<\gamma\int_0^\infty\|\omega(t)\|^2dt\end{aligned} \qquad (۸)$$

که $\|T_{z\omega}(s)\|_\infty$ به‌صورت $\sup_{0\neq\omega(t)\in L_2[0,\infty)}\frac{\|z(t)\|_2}{\|\omega(t)\|_2}$ تعریف می‌شود [۲۳]. بنابراین، یک راه طبیعی برای ترکیب اطلاعات نسبی، تعریف تابع خروجی $z_i(t)$ به نحوی است که از میانگین جابجایی‌های نسبی همه عامل‌ها محاسبه شده و به‌شکل زیر بیان شود [۲۴]:

$$\begin{aligned}z_i(t)&=\left(x_i(t)-h_i(t)\right)\\ &-\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\left(x_j(t)-h_j(t)\right)\end{aligned} \quad , \quad i=1,2,\cdots,N \qquad (۹)$$

با تعریف خروجی، سیستم ۱ را با بهره‌گیری از ضرب کرونیکر به‌شکل تجمیع‌شده‌ی زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=\left(I_N\otimes(A+\Delta A)\right)x(t)\\ &+\left(I_N\otimes(B+\Delta B)\right)u(t)+\left(I_N\otimes D\right)\omega(t)\\ z(t)&=\left(a\,L_C\,a^{-1}\otimes I_n\right)\left(x(t)-h(x)\right)\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

که:

[1] Elimination

[2] Shur

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.3.0]
[DOI: 10.52547/joc.15.2.23]

$$x(t)=\left[x_1^T(t),x_2^T(t),x_3^T(t),\cdots,x_N^T(t)\right]^T$$
$$u(t)=\left[u_1^T(t),u_2^T(t),u_3^T(t),\cdots,u_N^T(t)\right]^T$$
$$\omega(t)=\left[\omega_1^T(t),\omega_2^T(t),\omega_3^T(t),\cdots,\omega_N^T(t)\right]^T$$
$$z(t)=\left[z_1^T(t),z_2^T(t),z_3^T(t),\cdots,z_N^T(t)\right]^T$$

و

$$L_C=\left[l_{C_{ij}}\right]\in\mathbb{R}^{N\times N},\quad \begin{cases} l_{C_{ij}}=-1/N,\ i\neq j \\ l_{C_{ij}}=(N-1)/N,\ i=j \end{cases}$$

است. $a=diag\{a_1,...,a_N\}$ ، که $a_1,...,a_N$ اسکالر بوده و فرض می‌شوند که غیر صفر باشند و داشته باشیم: $a_{ij}=\frac{a_i}{a_j}$ [۲۸].

۳- ردیابی آرایش مقاوم توزیع شده با رویکرد نامساوی ماتریسی خطی

قانون کنترل برای تحقق آرایش متغیر با زمان را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$u_i(t)=B^TX\left(x_i(t)-h_i(t)\right)+B^TXe_i(t)+v_i(t) \quad (۱۱)$$

که X پارامتر طراحی و $v_i(t)$ ورودی جبران‌ساز آرایش بوده و خطای $e_i(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_i(t)=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\left(\left(x_i(t)-h_i(t)\right)-\left(x_j(t)-h_j(t)\right)\right) \quad (۱۲)$$

رابطه فوق خطای دستیابی به آرایش و a_{ij} درایه متناظر گراف ارتباطی عامل‌ها است. با جایگذاری ۱۱ در ۱۰ سامانه حلقه بسته به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=\left(I_N\otimes(A+\Delta A)\right)x(t)\\&+\begin{pmatrix} I_N\otimes\left((B+\Delta B)B^TX\right)\\ +L\otimes(B+\Delta B)B^TX\end{pmatrix}\left(x(t)-h(t)\right)\\&+\left(I_N\otimes D\right)\omega(t)\\&+\left(I_N\otimes(B+\Delta B)\right)v(t)\end{aligned} \quad (۱۳)$$

که $v(t)=\left[v_1(t)\ \ v_2(t)\ \ \dots\ \ v_N(t)\right]^T$ و L ماتریس لاپلاسین گراف ارتباطی بین عامل‌ها است. با فرض $\bar{z}(t)=x(t)-h(t)$ رابطه ۱۳ به‌صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{z}}(t)&=\left(I_N\otimes(A+\Delta A)\right)\left(\bar{z}(t)+h(t)\right)\\&+\begin{pmatrix} I_N\otimes\left((B+\Delta B)B^TX\right)\\ +L\otimes(B+\Delta B)B^TX\end{pmatrix}\left(\bar{z}(t)\right)\\&+\left(I_N\otimes D\right)\omega(t)\\&+\left(I_N\otimes(B+\Delta B)\right)v(t)-\dot{h}(t)\end{aligned} \quad (۱۴)$$

در رابطه فوق و جهت تحقق آرایش می‌بایست ورودی جبران‌ساز آرایش $v_i(t)$ به نحوی طراحی گردد که جملات شامل عبارات $h(t)$ و $\dot{h}(t)$ حذف گردند. با این حال و به دلیل وجود نامعینی‌های پارامتری در ماتریس‌های سامانه، امکان حذف کامل جملات فوق نیست و لذا شرط زیر را برای طراحی ورودی جبران‌ساز آرایش در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}\left(I_N\otimes(A+\Delta A)\right)h(t)-\dot{h}(t)\\&+\left(I_N\otimes(B+\Delta B)\right)v(t)=\bar{\Delta}\end{aligned} \quad (۱۵)$$

$\bar{\Delta}$ در عبارت فوق حالت‌های سامانه و به عبارتی ردیابی آرایش را دچار بایاس می‌کند. با این حال همان‌گونه که در تعریف مسئله آمد و در ادامه خواهیم دید، کنترل آرایش به روش H_∞ طراحی می‌شود که به اغتشاش بر روی سامانه از خود مقاومت نشان داده و پایداری سامانه را در حضور اغتشاش تضمین می‌کند. در اینجا نیز می‌توان $\bar{\Delta}$ را به‌عنوان اغتشاش در نظر گرفته رابطه ۱۴ را به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{z}}(t)&=\begin{pmatrix} I_N\otimes(A+\Delta A)\\ +I_N\otimes\left((B+\Delta B)B^TX\right)\\ +L\otimes(B+\Delta B)B^TX\end{pmatrix}\bar{z}(t)\\&+\left(I_N\otimes D\right)\omega(t)\end{aligned} \quad (۱۶)$$

با تعریف

$$\tilde{z}(t)=\bar{z}(t)-1_N\otimes\frac{\sum_{i=1}^{N}\int_0^{t_0}Ae^{A(t-s)}D\omega_i(s)ds}{N}$$

و

$$\begin{bmatrix}\sigma(t)\\ \bar{\sigma}(t)\end{bmatrix}=\left(U^T\otimes I_n\right)\tilde{z}(t)$$

که $U=\left[U_1,U_2\right]\in\mathbb{R}^{N\times N}$ با $U_2=\frac{1_N}{\sqrt{N}}$، ماتریس یکامتعامدی است که

$$U^TL_CU=\begin{bmatrix}I_{n-1} & 0\\ * & 0\end{bmatrix},\quad U^TLU=\begin{bmatrix}\bar{L} & 0\\ {U_2}^TLU_1 & 0\end{bmatrix}$$

و $\bar{L}={U_1}^TLU_1\in\mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$ [۲۹].

داریم

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.3.0]
[DOI: 10.52547/joc.15.2.23]

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{\sigma}(t)\\ \dot{\bar{\sigma}}(t)\end{bmatrix}&=\left(U^T\otimes I_n\right)\dot{\tilde{z}}(t)\\&=\left(U^T\otimes I_n\right)\left(\dot{\bar{z}}(t)-1_N\otimes\frac{\sum_{i=1}^{N}\int_0^{t_0}Ae^{A(t-s)}D\omega_i(t)\,ds+\sum_{i=1}^{N}D\omega_i(t)}{N}\right)\\&=\left(U^T\otimes I_n\right)\Big(\left(I_N\otimes\left((A+\Delta A)+(B+\Delta B)B^TX\right)+L\otimes(B+\Delta B)B^TX\right)\bar{z}(t)\\&+(I_N\otimes D)\omega(t)-\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{\sum_{i=1}^{N}\int_0^{t_0}Ae^{A(t-s)}D\omega_i(t)\,ds+\sum_{i=1}^{n}D\omega_i(t)}{\sqrt{N}}\end{bmatrix}\Big)\\&=\left(I_N\otimes\left((A+\Delta A)+(B+\Delta B)B^TX\right)+U^TLU\otimes(B+\Delta B)B^TX\right)\begin{bmatrix}\sigma(t)\\ \bar{\sigma}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\left(U_1{}^T\otimes D\right)\omega(t)\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned}\qquad(۱۷)$$

و

$$\begin{aligned}z(t)&=\left(L_C\otimes I_n\right)\left(x(t)-h(t)\right)\\&=\left(L_C\otimes I_n\right)\bar{z}(t)\\&=\left(L_C\otimes I_n\right)\tilde{z}(t)\\&=(L_CUU^T\otimes I_n)\tilde{z}(t)\\&=\left(\begin{bmatrix}U_1 & 0\end{bmatrix}\otimes I_n\right)\begin{bmatrix}\sigma(t)\\ \bar{\sigma}(t)\end{bmatrix}\\&=\left(U_1\otimes I_n\right)\sigma(t)\end{aligned}\qquad(۱۸)$$

حال داریم:

$$\dot{\bar{\sigma}}(t)=\begin{pmatrix}\left((A+\Delta A)+(B+\Delta B)B^TX\right)\\ +U_2{}^TLU_1\otimes(B+\Delta B)B^TX\end{pmatrix}\sigma(t)\qquad(۱۹)$$

این بدان معناست که حالت $\bar{\sigma}(t)$ کاملا به حالت‌های $\sigma(t)$ وابسته است. در نتیجه می‌توان رابطه ۱۶ و ۱۷ را به‌صورت کاسته‌شده زیر در نظر گرفت و از دینامیک $\bar{\sigma}$ صرفنظر کرد:

$$\begin{cases}\dot{\sigma}(t)=\begin{pmatrix}I_{N-1}\otimes\begin{pmatrix}(A+\Delta A)\\ +(B+\Delta B)B^TX\end{pmatrix}\\ +\bar{L}\otimes(B+\Delta B)B^TX\end{pmatrix}\sigma(t)\\ \qquad+\left(U_1{}^T\otimes D\right)\omega(t)\\ z(t)=\left(U_1\otimes I_n\right)\sigma(t)\end{cases}\qquad(۲۰)$$

با برقراری شرط $\lim_{t\to\infty}(\sigma(t))=0$ برقرار شود طبق ۱۸، $\lim_{t\to\infty}(\bar{z}(t))=0$ خواهد بود و این بدان معناست که مسئله تحقق آرایش متغیر با زمان قابل دستیابی است. همچنین به منظور تحقق هدف دفع اغتشاش، رابطه ۸ باید برقرار شود. به این منظور قضیه زیر مطرح می‌شود

قضیه ۱. با فرض اینکه گراف G جهت‌دار و دارای درخت پوشا باشد ردیابی آرایش متغیر با زمان به روش H_∞ با تضعیف اغتشاش $\gamma>0$ در سامانه چند عاملی رابطه ۱ قابل تحقق است اگر $X>0$ وجود داشته باشد به طوری که نامساوی ماتریسی خطی زیر قابل تحقق باشد:

$$\begin{bmatrix}I_{N-1}\otimes\left(XA+A^TX+\varepsilon_1N_A^TN_A\right) & \left(I_{N-1}+\bar{L}\right)\otimes XM_B & I_{N-1}\otimes XM_A & \left(I_{N-1}+\bar{L}\right)\otimes XBN_B^T & \left(I_{N-1}+\bar{L}\right)\otimes XB & U_1^T\otimes XD\\ * & -I_{N-1}\otimes\varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & -I_{N-1}\otimes\varepsilon_3 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -I_{N-1}\otimes\varepsilon_4 & 0 & 0\\ * & * & * & * & -I_{N-1}\otimes 0.5I_m & 0\\ * & * & * & * & * & -\gamma^2I_N\otimes I_p\end{bmatrix}\le 0\qquad(۲۱)$$

اثبات. با تعریف تابع لیاپانوف $V(t)=\sigma^T(t)\left(I_{n-1}\otimes X\right)\sigma(t)$ و مشتق‌گیری از آن و استفاده از رابطه ۲۰ خواهیم داشت:

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.3.0]
[DOI: 10.52547/joc.15.2.23]

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)&=\sigma^T(t)\left(I_{N-1}\otimes X\right)\left(\left(I_{N-1}\otimes\left((A+\Delta A)+(B+\Delta B)B^TX\right)+\bar{L}\otimes(B+\Delta B)B^TX\right)\right)\sigma(t)\\&+\sigma^T(t)\left(\left(I_{N-1}\otimes\left((A+\Delta A)+(B+\Delta B)B^TX\right)+\bar{L}\otimes(B+\Delta B)B^TX\right)\right)^T\left(I_{N-1}\otimes X\right)\sigma(t)\\&+\sigma^T(t)\left(I_{N-1}\otimes X\right)\left(\left(U_1^T\otimes D\right)\right)\omega(t)+\omega^T(t)\left(\left(U_1^T\otimes D\right)\right)^T\left(I_{N-1}\otimes X\right)\sigma(t)\end{aligned}\qquad(۲۲)$$

و تعریف می‌کنیم:

$$J=\int_0^{\tau}\left(z(t)^Tz(t)-\gamma^2\omega(t)^T\omega(t)\right)dt\qquad(۲۳)$$

برای هر $\tau>0$، با فرض شرایط اولیه صفر برای رابطه ۲۰، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}J_\tau&=\int_0^{\tau}\begin{pmatrix}z(t)^Tz(t)\\-\gamma^2\omega(t)^T\omega(t)\\+\dot{V}(t)\end{pmatrix}dt-V(\tau)\\&\le\int_0^{\tau}\begin{bmatrix}\sigma(t)^T & \omega(t)^T\end{bmatrix}\Theta\begin{bmatrix}\sigma(t)^T & \omega(t)^T\end{bmatrix}^T dt\\&-V(\tau)\end{aligned}\qquad(۲۴)$$

که در این رابطه

$$\Theta=\begin{bmatrix}\Phi & \left(I_{N-1}\otimes X\right)\left(\left(U_1^T\otimes D\right)\right)\\ * & -\gamma^2I_N\otimes I_p\end{bmatrix}$$

$$\Phi=\left(I_{N-1}\otimes X\right)\left(\begin{pmatrix}I_{N-1}\otimes\begin{pmatrix}(A+\Delta A)\\+(B+\Delta B)B^TX\end{pmatrix}\\+\bar{L}\otimes(B+\Delta B)B^TX\end{pmatrix}\right)+\left(\begin{pmatrix}I_{N-1}\otimes\begin{pmatrix}(A+\Delta A)\\+(B+\Delta B)B^TX\end{pmatrix}\\+\bar{L}\otimes(B+\Delta B)B^TX\end{pmatrix}\right)^T\left(I_{N-1}\otimes X\right)\qquad(۲۵)$$

با برقراری شرط $\Theta\le 0$ خواهیم داشت $J_\tau\le 0$. بنابراین برای $\tau\to\infty$، رابطه ۸ قابل دستیابی است. به منظور تبدیل این نامساوی ماتریسی به نامساوی ماتریسی خطی باید درایه Φ ماتریس که ترم‌هایی غیرخطی در آن وجود دارند به‌صورت خطی ظاهر شوند. برای این کار Φ به سه بخش تقسیم شده و طبق لم ۱ به رابطه‌های ۲۶ تا ۲۸ می‌رسیم:

$$\begin{aligned}&\left(I_{N-1}\otimes X(A+\Delta A)\right)+\left(I_{N-1}\otimes\left((A+\Delta A)^TX\right)\right)\\&=\left(I_{N-1}\otimes\left(XA+A^TX\right)\right)+\left(I_{N-1}\otimes\left(XM_AF_AN_A+N_A^TF_A^TM_A^TX\right)\right)\\&\le\left(I_{N-1}\otimes\left(XA+A^TX\right)\right)+\left(I_{N-1}\otimes\left(\varepsilon_1XM_AM_A^TX+\varepsilon_1^{-1}N_A^TN_A\right)\right)\\&\le\left(I_{N-1}\otimes\left(XA+A^TX+\varepsilon_1^{-1}N_A^TN_A\right)\right)+\left(I_{N-1}\otimes\left(\varepsilon_1XM_AM_A^TX\right)\right)\end{aligned}\qquad(۲۶)$$

$$\begin{aligned}&I_{N-1}\otimes\left(X\Delta BB^TX+XB\Delta B^TX\right)+\bar{L}\otimes\left(X\Delta BB^TX+XB\Delta B^TX\right)\\&=(I_{N-1+\bar{L}})\otimes\left(XM_BF_BN_BB^TX+XBN_B^TF_B^TM_B^TX\right)\\&\le(I_{N-1+\bar{L}})\otimes\left(\varepsilon_2XM_BM_B^TX+\varepsilon_2^{-1}XBN_B^TN_BB^TX\right)\end{aligned}\qquad(۲۷)$$

$$I_{N-1}\otimes\left(XBB^TX+XBB^TX\right)+\bar{L}\otimes XBB^TX+\bar{L}^T\otimes XBB^TX=\left(I_{N-1}+\bar{L}\right)\otimes XB(2I_m)B^TX\qquad(۲۸)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\Phi&=\left(I_{N-1}\otimes X\right)\left(\left(I_{N-1}\otimes\left((A+\Delta A)+(B+\Delta B)B^TX\right)+\bar{L}\otimes(B+\Delta B)B^TX\right)\right)\\&+\left(\left(I_{N-1}\otimes\left((A+\Delta A)+(B+\Delta B)B^TX\right)+\bar{L}\otimes(B+\Delta B)B^TX\right)\right)^T\left(I_{N-1}\otimes X\right)\\&\le\left(I_{N-1}\otimes\left(XA+A^TX+\varepsilon_1^{-1}N_A^TN_A\right)\right)+\left(I_{N-1}\otimes\left(\varepsilon_1XM_AM_A^TX\right)\right)\\&+\left(I_{N-1}+\bar{L}\right)\otimes\left(\varepsilon_2XM_BM_B^TX+\varepsilon_2^{-1}XBN_B^TN_BB^TX\right)\\&+\left(I_{N-1}+\bar{L}\right)\otimes XB(2I_m)B^TX\end{aligned}\qquad(۲۹)$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.3.0]
[DOI: 10.52547/joc.15.2.23]

با تعریف سمت راست رابطه بالا به‌صورت Φ_1، رابطه ۲۴ به‌صورت $\Phi \le \Phi_1$ در می‌آید و خواهیم داشت:

$$\Theta \le \begin{bmatrix} \Phi_1 & \left(I_{N-1}\otimes X\right)\left(\left(U_1^T\otimes D\right)\right) \\ * & -\gamma^2 I_N \otimes I_p \end{bmatrix} \qquad (۳۰)$$

حال با استفاده مکرر از لم شر می‌توان به فرم نامساوی خطی ماتریسی رابطه ۲۱ دست یافت

٤- شبیه‌سازی

برای بیان نتایج ارائه شده در بالا و ارزش گذاری آن‌ها از یک مثال شبیه سازی استفاده می‌شود. در این مثال یک مسئله کنترل آرایش برای گروهی از روبات‌ها در نظر گرفته می‌شود. دینامیک هر عامل مطابق [۳۰] و به صورت زیر است $(i=1,2,3)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_{Xi}(t)=\bar{v}_i(t)\cos\left(\beta_i(t)\right) \\ \dot{x}_{Yi}(t)=\bar{v}_i(t)\sin\left(\beta_i(t)\right) \\ \dot{\beta}_i(t)=p_i(t) \end{cases}$$

در این رابطه $x_{Xi}(t)$ و $x_{Yi}(t)$ موقعیت عامل iام را در صفحه x و y نشان می‌دهد. همچنین $\beta_i(t)$ زاویه راس[1] و $\bar{v}_i(t)$ و $p_i(t)$ نیز به ترتیب سرعت خطی و شتاب زاویه‌ای می‌باشند. با استفاده از خطی سازی حول نقطه کار دینامیک خطی به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{\xi}_i(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\xi_i(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u_i(t)+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}w_i(t)$$

که در آن $\xi_i(t)=\begin{bmatrix}x_{Xi}(t) & v_{Xi}(t)\end{bmatrix}$ و $u_i(t)=u_{Xi}(t)$ بوده و $v_{Xi}(t)$ سرعت زاویه‌ای و $u_{Xi}(t)$ ورودی کنترلی می‌باشند. در این سیستم مقدار نامعینی برای درایه‌های واحد در ماتریس‌های A و B عددی در بازه‌ی $[0.8\ 1.2]$ در نظر گرفته می‌شود. باتوجه به رابطه ۲، مقادیر نامعینی به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$M_A=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad N_A=\begin{bmatrix}10 & 10\end{bmatrix}$$

$$M_B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad N_A=-0.1$$

بردار اغتشاش به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\omega(t)=\begin{bmatrix}\omega_1 & \omega_2 & \omega_3\end{bmatrix},\ \omega_i=0.5\sin(t),\ i=1,2,3$$

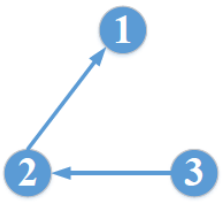
گراف ارتباطی عامل‌ها در شکل ۱ مشخص شده است.

در این شبیه سازی هدف این است که سه عامل به یک آرایش سینوسی دست یابند. این آرایش به شکل زیر تعریف می‌گردد:

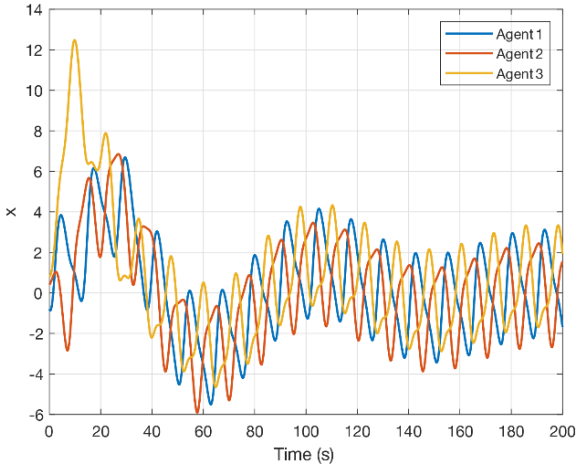
$$h_i(t)=\begin{bmatrix}2\cos\left(0.5t+\dfrac{2(i-1)\pi}{3}\right)\\ -\sin\left(0.5t+\dfrac{2(i-1)\pi}{3}\right)\end{bmatrix}$$

که در آن $(i=1,2,3)$ و $h(t)=[h_1^T(t)\ ,h_2^T(t)\ ,h_3^T(t)]^T$ می‌باشد. مطابق مرحله اول الگوریتم معرفی شده، تابع جبران‌ساز آرایش برای برقراری شرط مذکور به‌شکل $v_i(t)=0.5\cos\left(0.5t+\dfrac{2(i-1)\pi}{3}\right)$ و شرایط اولیه برای هر عامل به‌صورت $\xi_i(0)=\begin{bmatrix}-0.8 & 0.4 & 0.8\\ -0.4 & 0.2 & 0.1\end{bmatrix}^T$ در نظر گرفته می‌شود.

همانگونه که در شکل‌های ۲ و ۳ مشاهده می‌شود، موقعیت و سرعت عامل‌ها پس از گذشت مدت زمان محدود به آرایش مورد نظر همگرا می‌شوند. با این حال، همانطور که پیش‌تر نیز بیان شد، این همگرایی به دلیل وجود اغتشاش‌ها و نامعینی‌ها، مجانبی نیست و دارای بایاس می‌باشد. شکل ۴ ورودی کنترلی عامل‌ها را مشخص می‌کند که رنج قابل قبولی دارد. شکل ۵ خطای حالت‌های موقعیت و سرعت سه عامل را نشان می‌دهد که نشان می‌دهد عامل‌ها به ردیابی آرایش رسیده‌اند اما دارای یک بایاس می‌باشند.



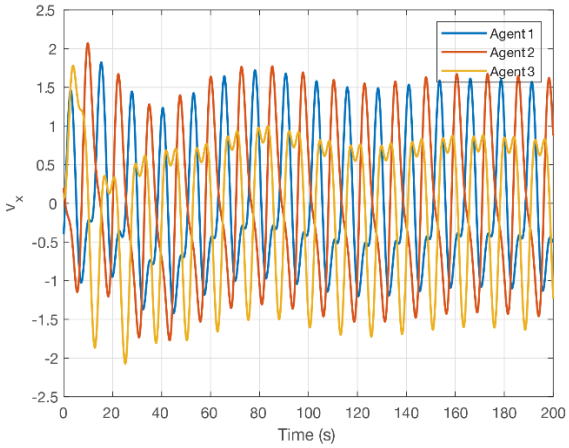
شکل ۱: گراف ارتباطی با سه عامل



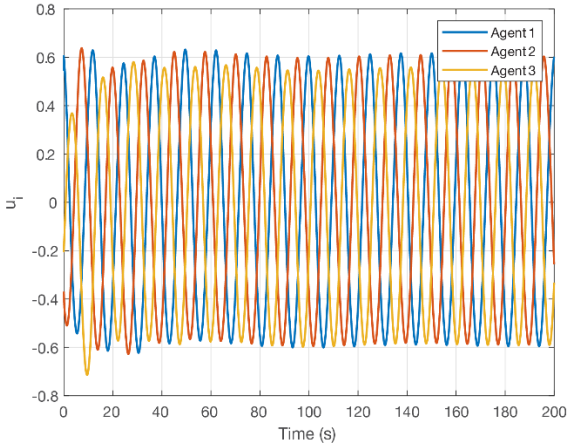
شکل ۲: موقعیت عامل‌ها

[1] heading angle

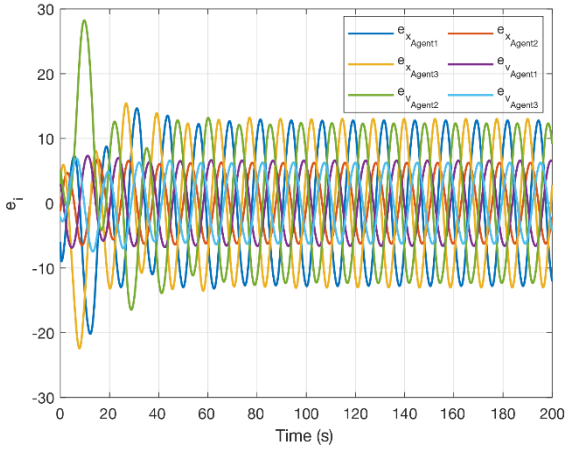
[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.3.0]
[DOI: 10.52547/joc.15.2.23]



شکل ۳: سرعت عامل‌ها



شکل ۴: سیگنال کنترلی عامل‌ها



شکل ۵: خطای آرایش عامل‌ها

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله به چالش مسئله ردیابی مقاوم آرایش متغییر با زمان پرداخته شد. ابتدا با تعریف مفاهیم اولیه و طرح مقدمات ریاضی، مدلی خطی به همراه وجود نامعینی در برخی پارامترهای سسیستم و اغتشاش خارجی فرض شد. برای این نوع سامانه چند عاملی طی اعمال ورودی مطلوب با بهره نامشخص و تشکیل سامانه حلقه بسته، با فرض شروطی در ادامه مسیر و تبدیلاتی، مسئله به‌شکل مناسب درآمد. با بهره‌گیری از تئوری لیاپانوف و شاخص مقاوم بودن در مقابل اغتشاش، مسئله به نامساوی ماتریسی خطی منتهی شد که با حل آن و مشخص شدن بهره نامعلوم، ردیابی آرایش متغیر با زمان محقق گردید. در ادامه با ذکر یک مثال، کارایی روش ارائه شده مشخص گردید.

مراجع

[1] C. Song, J. Cao, and Y. Liu, “Robust consensus of fractional-order multi-agent systems with positive real uncertainty via second-order neighbors information,” Neurocomputing, vol. 165, pp. 293–299, 2015.

[2] L. Zhao and Y. Jia, “Neural network-based adaptive consensus tracking control for multi-agent systems under actuator faults,” Int. J. Syst. Sci., vol. 47, no. 8, pp. 1931–1942, 2016.

[3] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, “Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays,” IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 49, no. 9, pp. 1520–1533, 2004.

[4] Z. Li, W. Ren, X. Liu, and L. Xie, “Distributed consensus of linear multi-agent systems with adaptive dynamic protocols,” Automatica, vol. 49, no. 7, pp. 1986–1995, Jul. 2013.

[5] Z. Li, Z. Duan, and G. Chen, “Dynamic consensus of linear multi-agent systems,” IET Control Theory Appl., vol. 5, no. 1, pp. 19–28, Jan. 2011.

[6] J. Wang, D. Cheng, and X. Hu, “Consensus of multi-agent linear dynamic systems,” Asian J. Control, vol. 10, no. 2, pp. 144–155, 2008.

[7] W. Yu, G. Chen, M. Cao, and J. Kurths, “Second-Order Consensus for Multiagent Systems With Directed Topologies and Nonlinear Dynamics,” IEEE Trans. Syst. Man, Cybern. Part B Cybern., vol. 40, no. 3, pp. 881–891, Jun. 2010.

[8] Q. Song, J. Cao, and W. Yu, “Second-order leader-following consensus of nonlinear multi-agent systems via pinning control,” Syst. Control Lett., vol. 59, no. 9, pp. 553–562, Sep. 2010.

[9] Z. Li, W. Ren, X. Liu, and M. Fu, “Consensus of Multi-Agent Systems With General Linear and Lipschitz Nonlinear Dynamics Using Distributed Adaptive Protocols,” IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 58, no. 7, pp. 1786–1791, Jul. 2013.

[10] Y. Zhao, Z. Duan, G. Wen, and G. Chen, “Robust consensus tracking of multi-agent systems with uncertain lur’e-type non-linear dynamics,” IET Control Theory Appl., vol. 7, no. 9, pp. 1249–1260, Jun. 2013.

[11] D. Zhang, X. Wang, and L. Meng, “Consensus problems for high-order LTI systems: a decentralized static output feedback method,” Int. J. Innov. Comput. Inf. Control, vol. 9, no. 5, pp. 2143–2154, 2013.

[12] Y. Hu, P. Li, and J. Lam, “Brief paper - Consensus of multi-agent systems: a simultaneous stabilisation approach,” IET Control Theory Appl., vol. 6, no. 11, pp. 1758–1765, Jul. 2012.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.3.0]
[DOI: 10.52547/joc.15.2.23]

[13] Z. Wang, D. Ding, H. Dong, and H. Shu, "consensus control for multi-agent systems with missing measurements: The finite-horizon case," Syst. Control Lett., vol. 62, no. 10, pp. 827–836, Oct. 2013.

[14] G. Zhai, S. Okuno, J. Imae, and T. Kobayashi, "Consensus algorithms for multi-agent systems: a matrix inequality based approach," in Networking, Sensing and Control, 2009. ICNSC'09. International Conference on, 2009, pp. 891–896.

[15] G. Zhai, S. Okuno, J. Imae, and T. Kobayashi, "A new consensus algorithm for multi-agent systems via decentralized dynamic output feedback," J. Intell. Robot. Syst., vol. 63, no. 2, pp. 309–322, 2011.

[16] Y. Liu and Y. Jia, "Consensus problem of high-order multi-agent systems with external disturbances: An H∞ analysis approach," Int. J. Robust Nonlinear Control, vol. 20, no. 14, pp. 1579–1593, 2010.

[17] A. Amini, A. Azarbahram, and M. Sojoodi, "H_∞ Consensus of nonlinear multi-agent systems using dynamic output feedback controller: an LMI approach," Nonlinear Dyn., vol. 85, no. 3, pp. 1865–1886, 2016.

[18] S. Yu and X. Long, "Finite-time consensus for second-order multi-agent systems with disturbances by integral sliding mode," Automatica, vol. 54, pp. 158–165, 2015.

[19] A. Mahmood and Y. Kim, "Decentralized formation flight control of quadcopters using robust feedback linearization," J. Franklin Inst., vol. 354, no. 2, pp. 852–871, 2017.

[20] S. M. Kang and H. S. Ahn, "Design and Realization of Distributed Adaptive Formation Control Law for Multi-Agent Systems with Moving Leader," IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 63, no. 2, pp. 1268–1279, 2016.

[21] M. A. Dehghani and M. B. Menhaj, "Integral sliding mode formation control of fixed-wing unmanned aircraft using seeker as a relative measurement system," Aerosp. Sci. Technol., vol. 58, pp. 318–327, 2016.

[22] L. Han, X. Dong, Q. Li, and Z. Ren, "Formation-containment control for second-order multi-agent systems with time-varying delays," Neurocomputing, vol. 218, pp. 439–447, 2016.

[23] X. Dong, Y. Zhou, Z. Ren, and Y. Zhong, "Time-Varying Formation Tracking for Second-Order Multi-Agent Systems Subjected to Switching Topologies With Application to Quadrotor Formation Flying," IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 64, no. 6, pp. 5014–5024, 2017.

[24] H. Liu, T. Ma, F. L. Lewis, and Y. Wan, "Robust Formation Control for Multiple Quadrotors With Nonlinearities and Disturbances" IEEE Trans. Cybern., vol. 50, no. 4, pp. 1362 – 1371, 2020.

[25] J. Chen, Z. Shi, and Y. Zhong, "Robust formation control for uncertain multi-agent systems" J. Franklin Inst. vol. 356, no. 15, p. 8273-8254, 2019.

[26] X. Dong, J. Xi, G. Lu, and Y. Zhong, "Formation control for high-order linear time-invariant multiagent systems with time delays," IEEE Trans. Control Netw. Syst., vol. 1, no. 3, pp. 232–240, 2014.

[27] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, Linear matrix inequalities in system and control theory, vol. 15. Siam, 1994.

[28] D. Meng , Y. Jia , "Robust consensus algorithms for multi-scale coordination control of multi-vehicle systems with disturbances", IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 62, no. 2, pp. 1107–1119, 2015.

[29] P. Lin, Y. Jia, and L. Li, "Distributed robust H∞ consensus control in directed networks of agents with time-delay," Syst. Control Lett., vol. 57, no. 8, pp. 643–653, 2008.

[30] T. Liu and Z.-P. Jiang, "Distributed formation control of nonholonomic mobile robots without global position measurements," Automatica, vol. 49, no. 2, pp. 592–600, 2013.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.3.0]
[DOI: 10.52547/joc.15.2.23]