مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد۱۵، شماره ۱، بهار ۱۴۰۰، صفحه ۶۶-۵۱

طراحی کنترل‌کننده مقاوم H_∞ بر پایه رؤیت‌گر دینامیکی توسعه‌یافته برای سیستم‌های تکین نامعین در حضور اغتشاش

سید محسن سعید جلالی[۱]، علی اکبرزاده کلات[۲]

[۱]دانشجوی دکتری برق-کنترل، دانشکده مهندسی برق و رباتیک- دانشگاه صنعتی شاهرود، msjalali@shahroodut.ac.ir

[۲]دانشیار، دانشکده مهندسی برق و رباتیک- دانشگاه صنعتی شاهرود، akbarzadeh@shahroodut.ac.ir

دریافت: ۹۸/۰۵/۱۳ ویرایش اول: ۹۸/۱۰/۲۴ ویرایش دوم: ۹۹/۰۱/۲۴ پذیرش: ۹۹/۰۳/۱۶

چکیده: در این مقاله یک طراحی کنترل‌کننده مقاوم H_∞ بر پایه رؤیت‌گر دینامیکی توسعه‌یافته برای سیستم‌های تکین نامعین، در حضور اغتشاش ارائه‌شده است تا سیستم حلقه بسته را مجاز کند. ویژگی مهم این روش در این است که نامعینی می‌تواند در ماتریس سیستم، ماتریس ورودی و ماتریس خروجی وجود داشته باشد و اینکه برای تخمین حالت‌های سیستم از رؤیت‌گر دینامیکی توسعه‌یافته استفاده‌شده است. این نوع رؤیت‌گر به دلیل وجود بخش انتگرالی تضمین می‌کند که خطای تخمین به صفر خواهد رسید و همچنین به دلیل وجود بخش دینامیکی، سرعت تخمین بالاتری نسبت به رؤیت‌گرهای تناسبی- انتگرالی دارد. ابتدا برای سیستم یک رؤیت‌گر دینامیکی توسعه‌یافته مقاوم طراحی‌شده و شرایط وجود جواب برای آن موردبررسی قرارگرفته است. همچنین محاسبه بعضی از ضرایب رؤیت‌گر به‌صورت پارامتری به‌گونه‌ای انجام می‌شود که خطای تخمین به سمت صفر میل کند. سپس با استفاده از فیدبک حالت، کنترل‌کننده تناسبی H_∞ برای مجاز بودن سیستم تکین به آن اعمال می‌شود. شرایط وجود هم‌زمان جواب برای رؤیت‌گر و کنترل‌کننده با انتخاب تابع لیاپانوف مناسب برآورده می‌شود. نامعادلات موجود توسط مجموعه‌ای از روابط جبر خطی به نامعادلات ماتریسی خطی تبدیل می‌شوند و با حل این نامعادلات ضرایب مربوط به رؤیت‌گر و کنترل‌کننده به دست می‌آید. در انتها با ارائه یک الگوریتم روش محاسبه به‌صورت منظم بیان خواهد شد و با ذکر یک مثال کارایی آن بررسی می‌شود و نتایج با یک رؤیت‌گر تناسبی مقایسه خواهد شد.

کلمات کلیدی: سیستم‌های تکین نامعین، رؤیت‌گر دینامیکی توسعه‌یافته مقاوم، کنترل‌کننده بر پایه رؤیت‌گر، کنترل‌کننده مقاوم H_∞، نامعادلات ماتریسی خطی.

Robust H_∞ Controller design based on Generalized Dynamic Observer for Uncertain Singular system with Disturbance

Seyed Mohsen Saeed Jalali, Ali Akbarzade kalat

Abstract: This paper presents a robust H_∞ controller design, based on a generalized dynamic observer for uncertain singular systems in the presence of disturbance. The controller guarantee that the closed loop system be admissible. The main advantage of this method is that the uncertainty can be found in the system, the input and the output matrices. Also the generalized dynamic observer is used to estimate the states of system. This type of observer increases the steady state accuracy because of the integral term, and because of the dynamic term, it has a higher estimation speed than proportional-integral observers. First, the necessary condition for existence a generalized dynamic robust observer is presented and some coefficients matrices of observer are computed that the estimation error asymptotically converges to zero. The robust H_∞ controller is then designed using state feedback in order to guarantee that the closed loop system is admissible. The existence conditions of the observer and the controller are given simultaneously using suitable Lyapunov function. Moreover, existing inequalities are transformed into linear matrix inequalities (LMI) using a set of algebraic relationships, and by solving these LMIs, the coefficients of the observer and the controller are obtained. Finally, by presenting an algorithm, the computational method will be expressed in a systematic way, and a numerical example demonstrates the efficiency of proposed method.

Keywords: Uncertain singular systems, generalized dynamic observer, Observer based controller, Robust H_∞ controller, Linear matrix inequalities.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.6.1]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.51]

۱- مقدمه

سیستم‌های تکین (Singular Systems) یا سیستم‌های فضای حالت توسعه‌یافته (Generalized state space)در دهه‌های اخیر اهمیت زیادی بین محققان پیداکرده است. این سیستم‌ها حالت کلی‌تری از نمایش فضای حالت سیستم‌های معمولی (Normal) را ارائه می‌کنند[۱]. تفکیک بیان محدودیت‌های جبری و محدودیت‌های دیفرانسیلی بین متغیرهای فیزیکی سیستم (متغیرهای حالت سیستم) در بسیاری از سیستم‌ها مانند سیستم‌های مقیاس بزرگ بسیار مشکل است. همچنین در بسیاری از موارد شرایط خاصی بر سیستم حاکم می‌شود که برخی از معادلات دیفرانسیلی به معادلات جبری تبدیل می‌شوند. به‌عنوان‌مثال عملکرد یک بازوی ربات موازی در قالب معادلات دیفرانسیلی مدل می‌شود، ولی در بعضی حالت‌ها و شرایط، سیستم ربات تکین می‌شود و در این شرایط مدل سیستم در قالب معادلات جبری قرار می‌گیرد. به‌طورکلی مزایای سیستم‌های تکین را می‌توان به این صورت بیان کرد: سادگی مدل‌سازی به روش تکین، حفظ ماهیت فیزیکی متغیرها، دسترسی به اطلاعات کامل سیستم، تسهیل در مسئله شناسایی سیستم. با توجه به این مزیت‌ها کاربرد سیستم‌های توصیفی یا سیستم‌های تکین در تئوری و عمل رو به افزایش است. این نوع سیستم‌ها به‌طور گسترده در فرآیندهای الکتریکی، شیمیایی، معدن، اقتصاد و همچنین در سیستم‌های مقیاس بزرگ مورداستفاده قرارگرفته‌اند[۸-۲].

فیدبک حالت یکی از پرکاربردترین روش‌های طراحی سیستم‌های کنترل است[۷]. با فیدبک حالت می‌توان قطب‌های سیستم را در هر مکان دلخواه جانمایی کرد و پیرو آن رفتار سیستم را به‌دلخواه کنترل نمود. ولی مشکل در اینجاست که متغیرهای حالت سیستم همواره در دسترس نیستند و یا حس‌گر لازم برای اندازه‌گیری آن گران‌قیمت است[۹]. بنابراین لازم است با استفاده از روش‌های تخمین، حالت‌های سیستم را به دست آوریم. به همین دلیل تخمین حالت‌های سیستم یا طراحی رؤیت‌گرهای حالت از موضوعاتی است که مطالعات زیادی روی آن انجام‌شده است[۱۳-۱۰]. با توجه به نکات بالا، طراحی رؤیت‌گرهای حالت برای سیستم‌های تکین مطرح می‌شود و تحقیقات زیادی روی آن صورت گرفته است. در صورت تخمین مناسب حالت‌های سیستم تکین، می‌توان با استفاده از فیدبک حالت، جانمایی قطب را برای تأمین ویژگی‌های خاصی که در سیستم کنترل موردنظر است اعمال کرد[۱۴]. در مورد سیستم‌های تکین یکی از مهم‌ترین مسائل، مجاز (Admissible) بودن سیستم است که نیازمند شرایطی بیشتر از پایداری نسبت به سیستم‌های معمولی است. این کار توسط کنترل‌گرهای مبتنی بر رؤیت‌گر انجام می‌شود[۱۷-۱۵].

طراحی رؤیت‌گرهای تناسبی (Proportional Observer) به‌طور گسترده برای سیستم‌های تکین موردمطالعه قرارگرفته‌اند[۱۹-۱۸]. در[۲۰] نویسندگان رؤیت‌گر تناسبی (PO) را توسعه دادند و رؤیت‌گر تناسبی انتگرالی (Proportional Integral Observer) را تعریف کردند. این رؤیت‌گر علاوه بر اینکه خطای حالت مانای تخمین را کاهش می‌دهد، حساسیت رؤیت‌گر نسبت به نامعینی در پارامترها را نیز کم می‌کند. مانند سیستم‌های معمولی، با توجه به اهمیت بخش انتگرالی در رؤیت‌گرها، در سیستم‌های تکین نیز مطالعات بیشتری روی آن انجام شد[۲۲-۲۱].

رؤیت‌گرهای دینامیکی توسعه‌یافته (Generalized Dynamic Observer) ابتدا توسط گودوین و میدلتون ارائه گردید. آن‌ها این ایده را مطرح کردند که با افزایش یک بخش دینامیکی به رؤیت‌گر، می‌توان به درجه آزادی بیشتری در طراحی رؤیت‌گر دست‌یافت[۲۴-۲۳]. سپس این ایده برای سیستم‌های تکین نیز توسعه یافت و رؤیت‌گرهای دینامیکی توسعه‌یافته (GDO) برای سیستم‌های تکین طراحی شد که حالت کلی‌تری نسبت به PO و PIO داشت[۲۵]. تحقیقات بیشتری توسط داروچ و همکارانش بر روی رؤیت‌گرهای دینامیکی توسعه‌یافته انجام‌شده است. در [۲۶] رؤیت‌گر دینامیکی توسعه‌یافته برای سیستم‌های تکین خطی و در [۲۷] طراحی رؤیت‌گر برای سیستم‌های غیرخطی بدون در نظر گرفتن نامعینی در ماتریس‌ها انجام‌شده است. همچنین در [۲۸] یک کنترل‌گر بر پایه رؤیت‌گر برای سیستم تکین طراحی‌شده است که ماتریس‌های آن معلوم هستند.

در سیستم‌های واقعی در بیشتر موارد شاهد وجود عدم قطعیت در پارامترهای سیستم و یا نامعینی در ساختار سیستم هستیم[۳۰-۲۹]. وجود این نامعینی‌ها و یا پارامترهای نامعلوم، تخمین حالت‌های سیستم را با مشکل مواجه می‌کند. بنابراین مطالعات زیادی بر روی تخمین حالت در سیستم‌های معمولی و تکین دارای نامعینی و یا نامعلومی انجام‌شده است. نتیجه آن طراحی رؤیت‌گرهای تطبیقی و یا مقاوم برای سیستم‌های معمولی و تکین است[۲۵] [۳۸-۳۱]. در [۳۹] یک رؤیت‌گر تطبیقی برای سیستم‌های تکین یک ورودی و یک خروجی با پارامترهای نامعلوم طراحی شد، به‌طوری‌که علاوه بر تخمین حالت‌ها سیستم، پارامترهای نامعلوم سیستم را نیز تعیین می‌کرد. از سوی دیگر ورودی نامعلوم و یا اغتشاش در سیستم‌های کنترل امری اجتناب‌ناپذیر است. سیستم‌های تحت اغتشاش عملکرد رؤیت‌گرها را دچار اشکال می‌کنند و تخمین حالت‌های سیستم با افزایش زمان تخمین و خطای حالت مانا همراه می‌شوند. بنابراین محققان روش‌هایی را برای غلبه بر این مشکل ابداع کردند که نمونه‌هایی از آن را می‌توان در [۴۲-۴۰] دید.

هدف اصلی در این مقاله طراحی یک کنترل‌کننده مقاوم H_∞ بر اساس حالت‌های تخمین زده‌شده توسط یک رؤیت‌گر دینامیکی توسعه‌یافته است تا در حضور اغتشاش سیستم حلقه بسته را مجاز کند. مهم‌ترین ویژگی در این مقاله وجود داشتن نامعینی در سه ماتریس سیستم، ورودی و خروجی است.

ادامه مقاله به‌صورت زیر بیان‌شده است:

در بخش دوم صورت‌مسئله فرمول‌بندی شده است. چند تعریف و فرض که در ادامه مقاله به آن‌ها نیاز داریم در این بخش بیان می‌شود، قالب کلی رؤیت‌گر برای تخمین حالت‌های سیستم معرفی خواهد شد و تعدادی

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.6.1]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.51]

از ضرایب رؤیت‌گر به‌صورت پارامتری تعیین می‌شود. در بخش سوم کنترل‌کننده تعریف‌شده و سیستم حلقه بسته در حضور اغتشاش فرموله خواهد شد. با انتخاب تابع لیاپانوف مناسب شرط لازم و کافی برای وجود هم‌زمان رؤیت‌گر و کنترل‌کننده بررسی خواهد شد و محدودیت‌های لازم برای پایدار بودن رؤیت‌گر و مجاز شدن سیستم حلقه بسته به نامعادلات ماتریسی خطی (LMI) تبدیل می‌شوند. با حل نامعادلات ماتریسی خطی می‌توان به ضرایب کنترل‌کننده و باقیمانده ضرایب رؤیت‌گر دست‌یافت. در پایان الگوریتمی برای محاسبه پارامترهای رؤیت‌گر و کنترل‌گر ارائه‌شده است. در بخش چهارم با ارائه یک مثال و مقایسه نتایج آن با یک رؤیت‌گر تناسبی، عملکرد روش پیشنهادی موردبررسی قرار خواهد گرفت.

۲- تعریف مسئله و طراحی رؤیت‌گر

سیستم تکین خطی غیر متغیر بازمان زیر را که دارای نامعینی در ماتریس سیستم، ماتریس ورودی و ماتریس خروجی است در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (A+\Delta A)x(t)+(B+\Delta B)u(t)+D_i w(t)\\ y(t) &= (C+\Delta C)x(t)+D_o w(t)\\ z(t) &= C_z x(t)+D_z w(t) \end{aligned} \qquad (۱)$$

به‌طوری‌که $x(t)\in\mathbb{R}^n$ بردار نیمه حالت (Semi- State)، $u(t)\in\mathbb{R}^m$ بردار ورودی معلوم، $w(t)\in\mathbb{R}^d$ بردار ورودی اغتشاش، $y(t)\in\mathbb{R}^p$ بردار خروجی قابل‌اندازه‌گیری (Measured Output) ، $z(t)\in\mathbb{R}^s$ بردار خروجی کنترل‌شده (Controlled Output) ، $E\in\mathbb{R}^{n\times n}$، $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$، $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$، $D_i\in\mathbb{R}^{n\times d}$، $C\in\mathbb{R}^{p\times n}$، $D_o\in\mathbb{R}^{p\times d}$، $C_z\in\mathbb{R}^{s\times n}$ و $D_z\in\mathbb{R}^{s\times d}$ ماتریس‌های معلوم وثابت، و $\Delta B,\Delta A$ و ΔC ماتریس‌های نامعینی با ابعاد مناسب هستند. ماتریس مربعی E می‌تواند تکین باشد یعنی $Rank(E)\le n$. همچنین فرض می‌کنیم $det\ (sE-A)\not\equiv 0$، این فرض به این معناست که سیستم (۱) منظم است یعنی یک پاسخ منحصربه‌فرد دارد[۱] و نامعینی به‌گونه‌ای است که این فرض را نقض نمی‌کند. اکنون چند فرض که در ادامه به آن‌ها نیاز داریم را موردبررسی قرار میدهیم.

فرض ۱: نامعینی‌های $\Delta B,\Delta A$ و ΔC از نوع نامعینی محدود ساختاریافته *(Structured Bounded Uncertainty)* هستند*[۴۳]*، یعنی $\Delta A=M_A.\Lambda_A(t).N_A$ ، $\Delta B=M_B.\Lambda_B(t).N_B$ و $\Delta C=M_C.\Lambda_C(t).N_C$ بطوریکه $M_A\ ,M_B\ ,M_C$ و $N_A\ ,N_B\ ,N_C$ ماتریس‌های ثابت و معلوم با ابعاد مناسب هستند. همچنین $\Lambda_A^T(t).\Lambda_A(t)\le I$ ، $\Lambda_B^T(t).\Lambda_B(t)\le I$ و $\Lambda_C^T(t).\Lambda_C(t)\le I$ می باشد.

فرض ۲: فرض می‌کنیم سیستم (۱) رؤیت پذیر ضربه *(Impulse observable)* باشد، به این معنی که توانایی تشخیص رفتار ضربه در حالت‌های سیستم، از روی رفتار ضربه در خروجی سیستم، به‌صورت منحصربه‌فرد تضمین‌شده است [۱] . به‌عبارت‌دیگر[۴۴-۴۵]:

$$rank\begin{bmatrix}E & A\\ 0 & E\\ 0 & C\end{bmatrix}=n+rank(E) \qquad (۲)$$

و یا معادل آن رابطه زیر برقرار باشد:

$$rank\begin{bmatrix}E\\ \emptyset A\\ C\end{bmatrix}=n \qquad (۳)$$

که در آن $\emptyset\in\mathbb{R}^{r\times n}$ یک ماتریس با رتبه کامل سطری است که در رابطه $\emptyset[E\quad M_B]=0$ صدق می‌کند و $r=n-rank([E\quad M_B])$ خواهد بود.

اکنون با ضرب کردن $\emptyset$ از سمت چپ در اولین معادله از (۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\emptyset\big(E\dot{x}(t)-\Delta Bu(t)\big)=\emptyset(Ax(t)+\Delta Ax(t)+Bu(t)+D_i w(t))\\ &\Rightarrow\\ &\emptyset(E\dot{x}(t)-M_B\Lambda_B N_B u(t))\\ &\qquad=\emptyset Ax(t)+\emptyset\Delta Ax(t)+\emptyset Bu(t)\\ &\qquad+\emptyset D_i w(t)\Rightarrow\\ &\emptyset[E\quad M_B]\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \Lambda_B N_B u(t)\end{bmatrix}\\ &\qquad=\emptyset Ax(t)+\emptyset\Delta Ax(t)+\emptyset Bu(t)\\ &\qquad+\emptyset D_i w(t)\Rightarrow\\ &0=\emptyset Ax(t)+\emptyset\Delta Ax(t)+\emptyset Bu(t)+\emptyset D_i w(t)\Rightarrow\\ &-\emptyset Bu(t)=\emptyset Ax(t)+\emptyset\Delta Ax(t)+\emptyset D_i w(t) \end{aligned} \qquad (۴)$$

این رابطه در بخش‌های بعدی در طراحی رؤیت‌گر مورداستفاده قرار خواهد گرفت.

فرض ۳: سیستم (۱) یا سه‌تایی (E,A,B) کنترل‌پذیر کامل (Completely Controllable)است. به‌عبارت‌دیگر:

$$rank[sE-A\ \ B]=n.\forall s\in\mathbb{C}.s\ finite \qquad (۵)$$

و همچنین $rank\begin{bmatrix}E & 0 & 0\\ A & E & B\end{bmatrix}=n+rank(E)$ [۴۳].

حال رؤیت‌گر مقاوم دینامیکی توسعه‌یافته (Generalized Dynamic Robust Observer) با درجه q که در آن $0\le q\le n$ است به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= N\xi(t)+Hv(t)+F\begin{bmatrix}-\emptyset Bu(t)\\ y(t)\end{bmatrix}+Ju(t)\\ \dot{v}(t) &= S\xi(t)+Lv(t)+M\begin{bmatrix}-\emptyset Bu(t)\\ y(t)\end{bmatrix}\\ \hat{x}(t) &= P\xi(t)+Q\begin{bmatrix}-\emptyset Bu(t)\\ y(t)\end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (۶)$$

به‌طوری‌که $\xi(t)\in\mathbb{R}^q$ بردار حالت رؤیت‌گر، $\hat{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ بردار تخمین حالت‌های $x(t)$ و $v(t)\in\mathbb{R}^{q_1}$ یک بردار کمکی هستند. همچنین $P\in\mathbb{R}^{n\times q}$, $M\in\mathbb{R}^{q_1\times(r+p)}$, $L\in\mathbb{R}^{q_1\times q_1}$, $S\in\mathbb{R}^{q_1\times q}$, $J\in$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.6.1]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.51]

$Q \in \mathbb{R}^{n\times(r+p)}$ و $\mathbb{R}^{q\times m}, F \in \mathbb{R}^{q\times(r+p)}, H \in \mathbb{R}^{q\times q_1}, N \in \mathbb{R}^{q\times q}$ ماتریس‌های ثابتی هستند که باید از روی ورودی $u(t)$ و خروجی $y(t)$ به‌گونه‌ای تعیین شوند که به ازای هر شرط اولیه برای $x(0)$ و $\xi(0)$ و هر ورودی $u(t)$ خطای تخمین به‌صورت مجانبی به صفر میل کند، یا $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty}(x(t) - \hat{x}(t)) = 0$ و کنترل‌کننده $\kappa \in \mathbb{R}^{m\times n}$ به شکلی محاسبه شود تا سیستم حلقه بسته مجاز باشد، یعنی $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

تذکر: در مقالات دیگری مانند [۴۷] و [۴۸] طراحی کنترل‌کننده بر پایه رؤیت‌گر برای سیستم تکین با حضور نامعینی و اغتشاش موردبررسی قرارگرفته‌اند. تفاوت عمده روش ارائه‌شده در این مقاله نوع و ساختار رؤیت‌گر پیشنهادشده در (۶) است. رؤیت‌گر دینامیکی توسعه‌یافته که در این مقاله پیشنهادشده است دارای برتری‌هایی در مقایسه با رؤیت‌گر تکین ارائه‌شده در تحقیقات قبلی است که به چند مورد آن اشاره می‌شود. ۱- در رؤیت‌گر دینامیکی توسعه‌یافته به دلیل وجود بخش انتگرالی، تضمین می‌شود که خطای تخمین در حضور اغتشاش ثابت صفر خواهد شد و سرعت همگرایی خطا به صفر، در مقایسه با رؤیت‌گر تناسبی بیشتر است. ۲- رؤیت‌گر دینامیکی توسعه‌یافته می‌تواند درجه دینامیک پایین‌تری در مقایسه با رؤیت‌گر تکین تناسبی داشته باشد. ۳- در رؤیت‌گر دینامیکی توسعه‌یافته قابلیت انعطاف در انتخاب نوع رؤیت‌گر وجود دارد و با انتخاب ضرایب می‌توان یک رؤیت‌گر تناسبی و یا تناسبی–انتگرالی داشته باشیم. بنابراین دقت و سرعت تخمین در رؤیت‌گر پیشنهادشده در این مقاله در مقایسه با [۴۷] و [۴۸] می‌تواند بهتر باشد.

قضیه زیر شرایط وجود جواب و پایداری رؤیت‌گر (۶) را ارائه می‌کند.

قضیه ۱: درصورتی‌که فرض ۲ و ۳ وجود داشته باشند، معادلات (۶) یک رؤیت‌گر پایدار برای سیستم تکین (۱) است به‌طوری‌که $\hat{x}(t)$ به‌طور مجانبی به $x(t)$ همگرا می‌شود اگر ماتریس با ابعاد مناسب T وجود داشته باشد تا شرایط زیر را برآورده کند:

۱) $NTE + F\begin{bmatrix}\phi A\\ C\end{bmatrix} - TA = 0$

۲) $TB - J = 0$

۳) $STE + M\begin{bmatrix}\phi A\\ C\end{bmatrix} = 0$

۴) $PTE + Q\begin{bmatrix}\phi A\\ C\end{bmatrix} = I_n$

۵) ماتریس $\begin{bmatrix}N & H\\ S & L\end{bmatrix}$ در شرایط $w(t) = 0$ و $\begin{bmatrix}\Lambda_A(t) & 0 & 0\\ 0 & \Lambda_B(t) & 0\\ 0 & 0 & \Lambda_C(t)\end{bmatrix} = 0$، هرویتز باشد.

اثبات: سیگنال $\varepsilon(t)$ به‌صورت $\varepsilon(t) = \xi(t) - TEx(t)$ تعریف می‌شود که در آن $T \in \mathbb{R}^{q\times n}$ ماتریس ثابت طراحی است. با مشتق‌گیری از $\varepsilon(t)$ روی مسیر اولین سطر از معادلات (۱) و (۶) داریم:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(t) &= \dot{\xi}(t) - TE\dot{x}(t)\\ &= N\xi(t) + Hv(t) + F\begin{bmatrix}-\emptyset Bu(t)\\ y(t)\end{bmatrix} + Ju(t)\\ &\quad - T((A+\Delta A)x(t) + (B+\Delta B)u(t)\\ &\quad + D_i w(t))\end{aligned}$$

با اضافه و کم کردن $NTEx(t)$ به سمت راست معادله بالا و استفاده از (۴) روابط زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(t) &= N\varepsilon(t) + Hv(t) + \left(NTE - TA + F\begin{bmatrix}\phi A\\ C\end{bmatrix}\right)x(t)\\ &\quad + (J - TB)u(t)\\ &\quad + \left(F\begin{bmatrix}\phi\Delta A\\ \Delta C\end{bmatrix} - T\Delta A\right)x(t)\\ &\quad - T\Delta Bu(t)\\ &\quad + \left(F\begin{bmatrix}\phi D_i\\ D_o\end{bmatrix} - TD_i\right)w(t)\end{aligned} \qquad (۷)$$

اکنون با اعمال شرایط ۱ و ۲ به (۷)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(t) &= N\varepsilon(t) + Hv(t) + \left(F\begin{bmatrix}\phi\Delta A\\ \Delta C\end{bmatrix} - T\Delta A\right)x(t)\\ &\quad - T\Delta Bu(t)\\ &\quad + \left(F\begin{bmatrix}\phi D_i\\ D_o\end{bmatrix} - TD_i\right)w(t)\end{aligned} \qquad (۸)$$

از طرف دیگر با اضافه و کم کردن $STEx(t)$ به سطر دوم (۶) و اعمال (۴) به آن داریم:

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= S\varepsilon(t) + Lv(t) + \left(STE + M\begin{bmatrix}\phi A\\ C\end{bmatrix}\right)x(t) + M\begin{bmatrix}\phi\Delta A\\ \Delta C\end{bmatrix}x(t)\\ &\quad + M\begin{bmatrix}\phi D_i\\ D_o\end{bmatrix}w(t)\end{aligned}$$

که با شرط ۳ می‌توان آن را به‌صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= S\varepsilon(t) + Lv(t) + M\begin{bmatrix}\phi\Delta A\\ \Delta C\end{bmatrix}x(t)\\ &\quad + M\begin{bmatrix}\phi D_i\\ D_o\end{bmatrix}w(t)\end{aligned} \qquad (۹)$$

معادلات (۸) و (۹) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{\varepsilon}(t)\\ \dot{v}(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}N & H\\ S & L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon(t)\\ v(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}F\begin{bmatrix}\phi\Delta A\\ \Delta C\end{bmatrix} - T\Delta A\\ M\begin{bmatrix}\phi\Delta A\\ \Delta C\end{bmatrix}\end{bmatrix}x\\ &\quad + \begin{bmatrix}-T\Delta B\\ 0\end{bmatrix}u(t)\\ &\quad + \begin{bmatrix}F\begin{bmatrix}\phi D_i\\ D_o\end{bmatrix} - TD_i\\ M\begin{bmatrix}\phi D_i\\ D_o\end{bmatrix}\end{bmatrix}w(t)\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

به‌طور مشابه برای سطر سوم (۶) می‌توانیم رابطه زیر را به دست آوریم:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= P\varepsilon(t) + \left(PTE + Q\begin{bmatrix}\phi A\\ C\end{bmatrix}\right)x(t) + Q\begin{bmatrix}\phi\Delta A\\ \Delta C\end{bmatrix}x(t)\\ &\quad + Q\begin{bmatrix}\phi D_i\\ D_o\end{bmatrix}w(t)\end{aligned}$$

و با بهره‌گیری از شرط ۴ معادله فوق به‌صورت زیر خواهد شد:

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.6.1]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.51]

$$\hat{x}(t)-x(t)=P\varepsilon(t)+Q\begin{bmatrix}\phi\Delta A\\ \Delta C\end{bmatrix}x(t)+Q\begin{bmatrix}\phi D_i\\ D_o\end{bmatrix}w(t) \quad (۱۱)$$

که معادل خطای تخمین رؤیت‌گر است. اکنون اگر شرط ۵ وجود داشته باشد، یعنی $w(t)=0$ و $\begin{bmatrix}\Lambda_A(t) & 0 & 0\\ 0 & \Lambda_B(t) & 0\\ 0 & 0 & \Lambda_C(t)\end{bmatrix}=0$ و $\begin{bmatrix}N & H\\ S & L\end{bmatrix}$ هرویتز باشد، در (۱۰) خواهیم داشت $\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)\to 0$ و همان‌طور که در (۱۱) دیده می‌شود نتیجه این است که خطای تخمین رؤیت‌گر به‌طور مجانبی به صفر میل خواهد کرد. به‌عبارت‌دیگر $\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{t\to\infty}\big(x(t)-\hat{x}(t)\big)=0$ و اثبات کامل می‌شود.

□

در ادامه بر اساس شرط‌های ۱ تا ۴ قضیه ۱ می‌توان یک حل پارامتری برای تعدادی از ماتریس‌های رؤیت‌گر به دست آورد. در قضیه فوق شرط ۵ در شرایط $w(t)=0$ و $\begin{bmatrix}\Lambda_A(t) & 0 & 0\\ 0 & \Lambda_B(t) & 0\\ 0 & 0 & \Lambda_C(t)\end{bmatrix}=0$ بررسی گردید، درحالی‌که سیستم هم دارای نامعینی و هم دارای اغتشاش در نظر گرفته‌شده است. بنابراین باید محاسبات به‌گونه‌ای انجام شود که معادله دینامیکی (۱۰) در هر شرایطی پایدار مقاوم باشد و بر اساس آن باقیمانده ضرایب رؤیت‌گر و کنترل‌گر محاسبه خواهند شد. پیش از آن چند تعریف و لم را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱: (معکوس انتزاعی(Generalized Inverse) [۴۹]) ماتریس $\Omega\in\mathbb{R}^{n\times m}$ مفروض است. اگر $rank(\Omega)=m$ باشد آنگاه $\Omega^\dagger$ وارون از چپ Ω است اگر رابطه $\Omega^\dagger\Omega=I$ را برآورده کند. همچنین اگر $rank(\Omega)=n$ باشد، آنگاه $\Omega^\dagger$ وارون از راست Ω است اگر $\Omega\,\Omega^\dagger=I$ باشد. در هر دو حالت وارون از راست و وارون از چپ رابطه $\Omega\Omega^\dagger\Omega=\Omega$ صادق است.

لم ۱[۵۰]: معادله $\tilde{A}X=\tilde{B}$ مفروض است که در آن $\tilde{A}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ ، $\tilde{B}\in\mathbb{R}^{n\times p}$ ماتریس‌های ثابت و $X\in\mathbb{R}^{m\times p}$ برداری است که باید مشخص شود. این معادله دارای جواب است اگر و فقط اگر $\tilde{B}$ عضو فضای رنج $\tilde{A}$ باشد. به‌عبارت‌دیگر $rank(\tilde{A})=rank[\tilde{A}\quad\tilde{B}]$ در این صورت جواب عمومی معادله فوق به‌صورت $X=\tilde{A}^\dagger\tilde{B}-(I-\tilde{A}^\dagger\tilde{A})Z$ خواهد بود. همچنین به‌طور مشابه پاسخ عمومی برای معادله $X\tilde{A}=\tilde{B}$ به‌صورت $X=\tilde{B}\tilde{A}^\dagger-Y(I-\tilde{A}\tilde{A}^\dagger)$ می‌باشد که Z و Y ماتریس‌های دلخواه با ابعاد مناسب هستند.

لم ۲ [۳۳]: ماتریس‌های ثابت D,H و ماتریس متقارن و ثابت S با ابعاد مناسب مفروض هستند. همچنین فرض می‌کنیم ماتریس ثابت و نامعلوم $\Lambda(t)$ با ابعاد مناسب به‌گونه‌ای وجود داشته باشد که شرط $\Lambda(t)^T\Lambda(t)\leq I$ را برآورده کند. در این صورت دو رابطه زیر معادل یکدیگر هستند:

$$S+D\Lambda(t)H+H^T\Lambda(t)^TD^T<0 \quad (۱۲)$$

$$S+\alpha DD^T+\alpha^{-1}H^TH<0\quad for\ some\ \alpha>0 \quad (۱۳)$$

لم ۳ [۵۱]: لم حذف (Elimination Lemma) بیان می‌کند که اگر ماتریس‌های $\mathcal{D}=\mathcal{D}^T,\mathcal{C},\mathcal{B}$ با ابعاد مناسب وجود داشته باشند، آنگاه دو جمله زیر باهم معادل هستند:

الف) ماتریس $\mathcal{K}$ با ابعاد مناسب وجود دارد که رابطه $\mathcal{B}\mathcal{K}\mathcal{C}+(\mathcal{B}\mathcal{K}\mathcal{C})^T+\mathcal{D}<0$ را برآورده می‌کند.

ب) دو شرط $\mathcal{C}^{T\perp}\mathcal{D}\mathcal{C}^{T\perp T}<0$ و $\mathcal{B}^\perp\mathcal{D}\mathcal{B}^{\perp T}<0$ هم‌زمان باهم وجود دارند.

در لم ۳ $(\cdot)^\perp$ نماد یک ماتریس با بیشترین رتبه سطری است که $(\cdot)(\cdot)^\perp=0$ را ارضاء می‌کند و به آن مکمل متعارف (Orthogonal Complement) میگویند.

روابط قسمت (ب) در لم ۳ را در نظر بگیرید و فرض کنید r_b و r_c به ترتیب رتبه ماتریس‌های $\mathcal{B}$ و $\mathcal{C}$ باشد و $\mathcal{B}_l,\mathcal{B}_r$ و $\mathcal{C}_l,\mathcal{C}_r$ فاکتورهایی با رتبه کامل از $\mathcal{B}$ و $\mathcal{C}$ باشند به‌گونه‌ای که $\mathcal{B}=\mathcal{B}_l\mathcal{B}_r$ و $\mathcal{C}=\mathcal{C}_l\mathcal{C}_r$، آنگاه ماتریس $\mathcal{K}$ در جمله (الف) از رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$\mathcal{K}=\left(\mathcal{B}_r^\dagger X\mathcal{C}_l^\dagger+Z-\mathcal{B}_r^\dagger\mathcal{B}_r Z\mathcal{C}_l\mathcal{C}_l^\dagger\right)^T \quad (۱۴)$$

که در آن Z یک ماتریس دلخواه است و

$$X=-\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}_l^T\mathcal{V}\mathcal{C}_r^T(\mathcal{C}_r\mathcal{V}\mathcal{C}_r^T)^{-1}+\mathcal{S}^{1/2}\mathcal{L}(\mathcal{C}_r\mathcal{V}\mathcal{C}_r^T)^{-1/2}$$

$$\mathcal{S}=\mathcal{R}^{-1}-\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}_l^T[\mathcal{V}-\mathcal{V}\mathcal{C}_r^T(\mathcal{C}_r\mathcal{V}\mathcal{C}_r^T)^{-1}\mathcal{C}_r\mathcal{V}]\mathcal{B}_l\mathcal{R}^{-1}$$

و $\mathcal{L}$ نیز یک ماتریس دلخواه است که شرط $\|\mathcal{L}\|_2<1$ را برآورده می‌کند و همچنین $\mathcal{R}$ یک ماتریس دلخواه مثبت معین است که رابطه زیر را تأمین می‌کند:

$$\mathcal{V}=(\mathcal{B}_r\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}_l^T-\mathcal{D})^{-1}>0$$

اکنون می‌خواهیم تعدادی از ماتریس‌های رؤیت‌گر را به‌صورت پارامتری تعیین کنیم تا شرایط ۱ تا ۴ قضیه ۱ برآورده شود[۲۵].

لم ٤ [۲۵ و ۵۲]: فرض کنید $R\in\mathbb{R}^{q\times n}$ یک ماتریس با رتبه کامل سطری باشد که $\Sigma=\begin{bmatrix}R\\ \emptyset A\\ C\end{bmatrix}$ را تبدیل به ماتریسی با رتبه کامل ستونی می‌کند؛ همچنین $\Omega=\begin{bmatrix}E\\ \emptyset A\\ C\end{bmatrix}$ تعریف‌شده است. اکنون اگر فرض ۳ وجود داشته باشد و شرایط ۱ تا ۴ از قضیه ۱ برقرار باشد آنگاه فرم کلی ماتریس‌های T,N,F,S,M,P,Q و J به‌صورت زیر به دست خواهد آمد:

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.6.1]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.51]

$$T = T_1 - Z_1 T_2 \quad (۱۵)$$

$$T_1 = R\Omega^\dagger \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, T_2 = (I_{n+r+p} - \Omega\Omega^\dagger)\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N = N_1 - Z_1 N_2 - Y_1 N_3 \quad (۱۶)$$

$$N_1 = T_1 A \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}, N_2 = T_2 A \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}, N_3 = (I_{q+r+p} - \Sigma\Sigma^\dagger)\begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F = F_1 - Z_1 F_2 - Y_1 F_3 \quad (۱۷)$$

$$F_1 = T_1 A \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} K \\ I_{r+p} \end{bmatrix}, F_2 = T_2 A \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} K \\ I_{r+p} \end{bmatrix}, F_3 = \left(I_{q+r+p} - \Sigma\Sigma^\dagger\right)\begin{bmatrix} K \\ I_{r+p} \end{bmatrix}$$

$$K = K_1 - Z_1 K_2$$

$$K_1 = R\Omega^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ I_{r+p} \end{bmatrix}, K_2 = (I_{n+r+p} - \Omega\Omega^\dagger)\begin{bmatrix} 0 \\ I_{r+p} \end{bmatrix}$$

$$S = -Y_2 N_3 \quad (۱۸)$$

$$M = -Y_2 F_3 \quad (۱۹)$$

$$P = P_1 - Y_3 N_3 \quad (۲۰)$$

$$P_1 = \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = Q_1 - Y_3 F_3 \quad (۲۱)$$

$$Q_1 = \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} K \\ I_{r+p} \end{bmatrix}$$

$$J = TB \quad (۲۲)$$

که در آن‌ها Z، Y_1، Y_2 و Y_3 ماتریس‌های ثابت دلخواه با ابعاد مناسب هستند که با انتخاب آن‌ها می‌توان ماتریس‌های رؤیت‌گر را تعیین کرد. برای ساده شدن محاسبات و با توجه به اینکه Z_1 و Y_3 تأثیری در محاسبات بعدی ندارند آن‌ها را صفر در نظر می‌گیریم. ماتریس‌های Y_1 و Y_2 در روابط (۱۵) تا (۱۹) می‌توانند به‌طور دلخواه انتخاب شوند ولی همان‌طور که بعداً ملاحظه خواهد شد این ماتریس‌ها به همراه ماتریس‌های H و L در تحقق شرط ۵ قضیه ۱ و مجاز بودن سیستم حلقه بسته مؤثر هستند و باید به گونه‌ای تعیین شوند تا این خواسته‌ها را برآورده کنند.

۳- طراحی کنترل‌کننده مبتنی بر رؤیت‌گر

اکنون هدف طراحی کنترل‌کننده مقاوم H_∞ است که با استفاده از حالت‌های تخمین زده‌شده توسط رؤیت‌گر به‌گونه‌ای عمل کند که سیستم تکین(۱) در حالت حلقه بسته مجاز (Admissible) باشد. مجاز بودن در سیستم‌های تکین حالت کلی‌تری از پایداری را شامل می‌شود، به این معنی که سیستم (۱) مجاز است اگر سه ویژگی داشته باشد: الف) منظم باشد. ب) پاسخ آن بدون ضربه باشد. ج) تمامی قطب‌های محدود آن در LHP باشد[۷و۱].

لم ۵ [۵۳]: زوج (E, A) مجاز است اگر و فقط اگر ماتریس ناویژه P وجود داشته باشد تا $E^T P = P^T E \geq 0$ و $P^T A + A^T P < 0$ باشد.

اکنون فیدبک حالت $u(t) = -\kappa\hat{x}(t)$ را برای سیستم تکین (۱) در نظر بگیرید:

$$u(t) = -\kappa\hat{x}(t) = -\kappa(P\varepsilon(t) + x(t) + Q\begin{bmatrix} \phi\Delta A \\ \Delta C \end{bmatrix}x(t) + Q\begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix}w(t))$$

با جاگذاری آن در (۱) و استفاده از (۴) سیستم حلقه بسته به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &E\dot{x}(t) \\ &= [A - B\kappa \quad -B\kappa P]\begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} \\ &+ \left[\Delta A - \Delta B\kappa - B\kappa Q\begin{bmatrix} \phi\Delta A \\ \Delta C \end{bmatrix} - \Delta B\kappa Q\begin{bmatrix} \phi\Delta A \\ \Delta C \end{bmatrix} \quad -\Delta B\kappa P\right]\begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} \\ &+ \left(D_i - B\kappa Q\begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} - \Delta B\kappa Q\begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix}\right)w(t) \end{aligned}$$

با استفاده از تعاریف موجود در فرض ۱ و روابط (۲۰) و (۲۱) معادله فوق را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) = [A - B\kappa \quad -B\kappa P_1]\begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} + \\ \left([\Pi_1 \quad \Pi_2]\tau(t)\begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} + (D_i - \\ B\kappa Q_1\begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix})w(t) - M_B \Lambda_B N_B \kappa Q_1 \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} w(t) \end{aligned} \quad (۲۳)$$

که در آن:

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} M_A - (B + M_B N_B)\kappa Q_1 \begin{bmatrix} \phi M_A \\ 0 \end{bmatrix} \\ -(B + M_B N_B)\kappa Q_1 \begin{bmatrix} 0 \\ M_C \end{bmatrix} \\ M_B \end{bmatrix}^T \quad (۲۴)$$

$$\Pi_2 = -M_B \quad (۲۵)$$

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} N_A \\ N_C \\ N_B\kappa \end{bmatrix} \quad , \varphi_2 = N_B \kappa P_1 \quad (۲۶)$$

و $\tau(t)$ یک ماتریس نامعین متغیر بازمان است که در شرط $\tau^T(t)\tau(t) \leq I$ صدق می‌کند. به‌عبارت‌دیگر در بازنویسی بالا سعی شده است بخش‌های معلوم و بخش‌های دارای نامعینی در معادلات به‌طور جداگانه دسته‌بندی شوند.

از سوی دیگر با جاگذاری فیدبک حالت در (۸) و فرض ۱ و نتایج لم ۴ داریم:

$$\begin{aligned} &\dot{\varepsilon}(t) \\ &= N\varepsilon(t) + Hv(t) \\ &+ \left([\Pi_3 \quad \Pi_4]\tau(t)\begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} \\ &+ TM_B \Lambda_B N_B \kappa Q_1 \begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} w(t) \\ &+ \left(F\begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} - TD_i\right)w(t) \end{aligned} \quad (۲۷)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} &\Pi_3 \\ &= \begin{bmatrix} -T_1 M_A + (F_1 - Y_1 F_3 + T_1 M_B N_B \kappa Q_1)\begin{bmatrix} \phi M_A \\ 0 \end{bmatrix} \\ (F_1 - Y_1 F_3 + T_1 M_B N_B \kappa Q_1)\begin{bmatrix} 0 \\ M_C \end{bmatrix} \\ T_1 M_B \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (۲۸)$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.6.1]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.51]

و

$$\Pi_4 = T_1 M_B \qquad (۲۹)$$

همچنین با انجام عملیات مشابه و دسته‌بندی بخش‌های معلوم و بخش‌های دارای نامعینی روی (۹) داریم:

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) = S\varepsilon(t) + Lv(t) + (\Pi_5\tau(t)\varphi_2)x(t) \\ + M\begin{bmatrix}\phi D_i \\ D_o\end{bmatrix}w(t)\end{aligned} \qquad (۳۰)$$

که

$$\Pi_5 = \begin{bmatrix}-Y_2F_3\begin{bmatrix}\phi M_A \\ 0\end{bmatrix} & -Y_2F_3\begin{bmatrix}0 \\ M_C\end{bmatrix} & 0\end{bmatrix} \qquad (۳۱)$$

حال سه معادله (۲۳)، (۲۷) و (۳۰) را می‌توان به‌صورت یک سیستم حلقه بسته با ورودی اغتشاش به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\dot{\mathbb{X}}(t) &= (\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})\mathbb{X}(t) + (\mathbb{B} + \Delta\mathbb{B})w(t) \\ z(t) &= \mathbb{C}\mathbb{X}(t) + \mathbb{D}w(t)\end{aligned} \qquad (۳۲)$$

که در آن $\mathbb{X}(t) = \begin{bmatrix}x(t) \\ \varepsilon(t) \\ v(t)\end{bmatrix}$ ، $\mathbb{E} = \begin{bmatrix}E & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I\end{bmatrix}$ ، $\mathbb{A} = \begin{bmatrix}A - B\kappa & -B\kappa P_1 & 0 \\ 0 & N & H \\ 0 & S & L\end{bmatrix}$ ،

$\Delta\mathbb{A} = M_{\mathbb{A}}\Gamma(t)N_{\mathbb{A}}$ ، $M_{\mathbb{A}} = \begin{bmatrix}\varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ ، $N_{\mathbb{A}} = \begin{bmatrix}\Pi_1 & \Pi_2 & 0 \\ \Pi_3 & \Pi_4 & 0 \\ \Pi_5 & 0 & 0\end{bmatrix}$ ،

$\mathbb{B} = \begin{bmatrix}D_i - B\kappa Q_1\begin{bmatrix}\phi D_i \\ D_o\end{bmatrix} \\ -TD_i + F\begin{bmatrix}\phi D_i \\ D_o\end{bmatrix} \\ M\begin{bmatrix}\phi D_i \\ D_o\end{bmatrix}\end{bmatrix}$ ،

$\Delta\mathbb{B} = M_{\mathbb{B}}\Gamma(t)N_{\mathbb{B}}$ ، $M_{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix}-M_B \\ TM_B \\ 0\end{bmatrix}$ ، $N_{\mathbb{B}} = N_B\kappa Q_1\begin{bmatrix}\phi D_i \\ D_o\end{bmatrix}$ ، $\mathbb{C} = \begin{bmatrix}C_Z & 0 & 0\end{bmatrix}$ ، $\mathbb{D} = D_Z$ و $\Gamma(t)$ یک ماتریس نامعین متغیر بازمان است با ابعاد مناسب است که در شرط $\Gamma^T(t)\Gamma(t) \le I$ صدق می‌کند.

در (۳۲) تعدادی از ضرایب رؤیت‌گر و همچنین بهره فیدبک حالت کنترل‌گر κ مجهول هستند. از سوی دیگر با توجه به لم ۴ ملاحظه می‌شود که ضرایب رؤیت‌گر به‌صورت پارامتری برحسب ماتریس‌های ثابت دلخواه Y_1 و Y_2 قابل‌محاسبه هستند. اکنون با بازنویسی ضرایب (۳۲) سعی می‌کنیم تمامی مجهولات را برحسب ماتریس‌های Y_1 و Y_2 و کنترل‌گر κ به‌صورت زیر مرتب کنیم.

$$\begin{bmatrix}N & H \\ S & L\end{bmatrix} = \mathbb{A}_1 - \mathbb{Y}\mathbb{A}_2 \qquad (۳۳)$$

به‌طوری‌که $\mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix}N_1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$ ، $\mathbb{A}_2 = \begin{bmatrix}N_3 & 0 \\ 0 & -I\end{bmatrix}$ و $\mathbb{Y} = \begin{bmatrix}Y_1 & H \\ Y_2 & L\end{bmatrix}$ است.

همچنین

$$\begin{bmatrix}\Pi_3 \\ \Pi_5\end{bmatrix} = [\Theta_1 - \mathbb{Y}\Theta_2 \quad \Theta_3 - \mathbb{Y}\Theta_4 \quad \Theta_5] \qquad (۳۴)$$

که $\Theta_1 = \begin{bmatrix}-T_1M_A + (F_1 + T_1M_BN_B\kappa Q_1)\begin{bmatrix}\phi M_A \\ 0\end{bmatrix} \\ 0\end{bmatrix}$ ، $\Theta_2 = \begin{bmatrix}F_3\begin{bmatrix}\phi M_A \\ 0\end{bmatrix}\end{bmatrix}$ ،

$\Theta_3 = \begin{bmatrix}(F_1 + T_1M_BN_B\kappa Q_1)\begin{bmatrix}0 \\ M_C\end{bmatrix} \\ 0\end{bmatrix}$ ، $\Theta_4 = \begin{bmatrix}F_3\begin{bmatrix}0 \\ M_C\end{bmatrix} \\ 0\end{bmatrix}$

و $\Theta_5 = \begin{bmatrix}T_1M_B \\ 0\end{bmatrix}$ با تعریف $\mathbb{B}_1 = \begin{bmatrix}-T_1D_i + F_1\begin{bmatrix}\phi D_i \\ D_o\end{bmatrix} \\ 0\end{bmatrix}$ و $\mathbb{B}_2 = \begin{bmatrix}F_3\begin{bmatrix}\phi D_i \\ D_o\end{bmatrix} \\ 0\end{bmatrix}$ و با کمک (۳۳) و (۳۴) ضرایب سیستم دینامیکی (۳۲) به‌صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}\mathbb{A} &= \begin{bmatrix}A - B\kappa & [-B\kappa P_1 \quad 0] \\ \begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix} & \mathbb{A}_1 - \mathbb{Y}\mathbb{A}_2\end{bmatrix}, M_{\mathbb{A}} \\ &= \begin{bmatrix}\Pi_1 & \Pi_2 & 0 \\ [\Theta_1 - \mathbb{Y}\Theta_2 \quad \Theta_3 - \mathbb{Y}\Theta_4 \quad \Theta_5] & \Pi_4 & 0 \\ & 0 & 0\end{bmatrix}, \mathbb{B} \\ &= \begin{bmatrix}D_i - B\kappa Q_1\begin{bmatrix}\phi D_i \\ D_o\end{bmatrix} \\ \mathbb{B}_1 - \mathbb{Y}\mathbb{B}_2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

و ضرایب دیگر مانند روابط بعد از (۳۲) باقی می‌مانند. ملاحظه می‌شود که ضرایب برحسب دو مجهول $\mathbb{Y}$ و κ دسته‌بندی شده‌اند.

اکنون مسئله طراحی کنترل‌گر بر پایه رؤیت‌گر به مسئله یافتن دو مجهول $\mathbb{Y}$ و κ تبدیل‌شده است تا:

الف) سیستم (۳۲) در حالتی که $w(t) = 0$ است پایدار مجانبی باشد و حالت‌های آن یعنی $\mathbb{X}(t)$ به سمت صفر میل کند که درنتیجه آن خروجی کنترل‌شده سیستم $z(t)$ به سمت صفر میل کند.

ب) سیستم (۳۲) در حالتی که $w(t) \neq 0$ است پایدار مقاوم باشد و $\sup_{u\neq 0}\frac{\|z\|}{\|w\|} = \|G_{zw}\|_\infty < \lambda$ که در آن G_{zw} تابع انتقال از ورودی اغتشاش به خروجی کنترلی سیستم و $\lambda > 0$ یک اسکالر است. این شرط معادل این است که تابع هزینه زیر به ازای تمامی $w(t) \in \mathcal{L}_2[0.\infty)$ دارای مقدار منفی باشد[۵۵-۵۴] یعنی:

$$J = \int_0^\infty [z(t)^Tz(t) - \lambda^2 w(t)^Tw(t)]dt < 0 \qquad (۳۵)$$

قضیه زیر راه‌حل این مسئله را ارائه می‌دهد.

قضیه ۲: درصورتی‌که فرض‌های ۱، ۲ و ۳ برقرار باشند، مجموعه معادلات

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= N\xi(t) + Hv(t) + F\begin{bmatrix}-\emptyset Bu(t) \\ y(t)\end{bmatrix} + Ju(t) \\ \dot{v}(t) &= S\xi(t) + Lv(t) + M\begin{bmatrix}-\emptyset Bu(t) \\ y(t)\end{bmatrix} \\ \hat{x}(t) &= P\xi(t) + Q\begin{bmatrix}-\emptyset Bu(t) \\ y(t)\end{bmatrix} \\ u(t) &= -\kappa\hat{x}(t)\end{aligned} \qquad (۳۶)$$

یک کنترل‌گر بر پایه رؤیت‌گر مقاوم توسعه‌یافته برای سیستم تکین (۱) است که (۳۲) را مجاز می‌کند اگر و فقط اگر ماتریس نا ویژه $\mathbb{P}_1$ و ماتریس مثبت متقارن $\mathbb{P}_{21} = (\mathbb{P}_{21})^T$ که در آن $\mathbb{P}_2 = \begin{bmatrix}\mathbb{P}_{21} & \mathbb{P}_{21} \\ \mathbb{P}_{21} & \mathbb{P}_{22}\end{bmatrix}$ است وجود داشته باشد تا نامعادلات ماتریسی خطی زیر برقرار باشند.

$$\mathbb{P}_1E^T = E\mathbb{P}_1^T \ge 0 \qquad (۳۷)$$

و

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.6.1]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.51]

$$\mathcal{C}^{T^\perp}\begin{bmatrix} \mathcal{D}_{11} & (*) & (*) \\ \mathcal{D}_{21} & -\alpha_1 I & 0 \\ \mathcal{D}_{31} & 0 & -\alpha_1^{-1} I \\ \mathcal{D}_{41} & 0 & 0 \quad \dots \\ ([D_i]^T \quad \Sigma_5^T) & 0 & 0 \\ (C_Z \mathbb{P}_1^T \quad [0 \quad 0]) & 0 & 0 \\ (0 \quad 0) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (*) & (*) & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots -\alpha_2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 I & (*) & 0 \\ 0 & \mathbb{D} & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2^{-1} \end{bmatrix} \mathcal{C}^{T^{\perp T}} < 0 \quad (۳۸)$$

و

$$\mathcal{B}^{\perp}\begin{bmatrix} \mathcal{D}_{11} & (*) & (*) \\ \mathcal{D}_{21} & -\alpha_1 I & 0 \\ \mathcal{D}_{31} & 0 & -\alpha_1^{-1} I \\ \mathcal{D}_{41} & 0 & 0 \quad \dots \\ ([D_i]^T \quad \Sigma_5^T) & 0 & 0 \\ (C_Z \mathbb{P}_1^T \quad [0 \quad 0]) & 0 & 0 \\ (0 \quad 0) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (*) & (*) & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots -\alpha_2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 I & (*) & 0 \\ 0 & \mathbb{D} & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2^{-1} \end{bmatrix} \mathcal{B}^{\perp T} < 0 \quad (۳۹)$$

که در آن‌ها:

$$\mathcal{D}_{11} = \begin{pmatrix} A\mathbb{P}_1^T + \mathbb{P}_1 A^T & 0 \\ 0 & \Sigma_1 \end{pmatrix} \quad (۴۰)$$

$$\mathcal{D}_{21} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} M_A{}^T \\ 0 \\ M_B^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Sigma_2^T \\ \Sigma_3^T \\ \Sigma_4^T \end{bmatrix} \\ -M_B^T & [\Theta_5]^T \end{pmatrix} \quad (۴۱)$$

$$\mathcal{D}_{31} = \begin{pmatrix} \varphi_{1S}\mathbb{P}_1^T & [0 \quad 0] \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (۴۲)$$

$$\mathcal{D}_{41} = \begin{pmatrix} -M_B^T & [0 \quad 0] \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Sigma_4^T \\ 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (۴۳)$$

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{21}N_1 + N_1^T\mathbb{P}_{21} & N_1^T\mathbb{P}_{21} \\ \mathbb{P}_{21}N_1 & 0 \end{bmatrix} - \mathbb{P}_{\mathbb{Y}}\begin{bmatrix} N_3 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_3^T & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}^T \quad (۴۴)$$

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{21}(-T_1 M_A + F_1\begin{bmatrix} \phi M_A \\ 0 \end{bmatrix}) \\ \mathbb{P}_{21}(-T_1 M_A + F_1\begin{bmatrix} \phi M_A \\ 0 \end{bmatrix}) \end{bmatrix} - \mathbb{P}_{\mathbb{Y}}\left[\begin{bmatrix} F_3\begin{bmatrix} \phi M_A \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix}\right] \quad (۴۵)$$

$$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{21}(F_1\begin{bmatrix} 0 \\ M_C \end{bmatrix}) \\ \mathbb{P}_{21}(F_1\begin{bmatrix} 0 \\ M_C \end{bmatrix}) \end{bmatrix} - \mathbb{P}_{\mathbb{Y}}\left[\begin{bmatrix} F_3\begin{bmatrix} 0 \\ M_C \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix}\right] \quad (۴۶)$$

$$\Sigma_4 = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{21}(T_1 M_B) \\ \mathbb{P}_{21}(T_1 M_B) \end{bmatrix} \quad (۴۷)$$

$$\Sigma_5 = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{21}(-T_1 D_i + F_1\begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix}) \\ \mathbb{P}_{21}(-T_1 D_i + F_1\begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix}) \end{bmatrix} - \mathbb{P}_{\mathbb{Y}}\left[\begin{bmatrix} F_3\begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix}\right] \quad (۴۸)$$

$$\mathcal{C}^{T^\perp} = \begin{bmatrix} (\mathcal{C}^{T^\perp})_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\mathcal{C}^{T^\perp})_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (N_B^T)^\perp \end{bmatrix} \quad (۴۹)$$

$$(\mathcal{C}^{T^\perp})_{11} = \left(\begin{bmatrix} -B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -M_B N_B & 0 \\ 0 & T_1 M_B N_B \end{bmatrix}\right)^\perp \quad (۵۰)$$

$$(\mathcal{C}^{T^\perp})_{33} = \left(\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_B^T \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} N_B^T \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}\right)^\perp \quad (۵۱)$$

$$\mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} (\mathcal{B}^\perp)_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\mathcal{B}^\perp)_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\mathcal{B}^\perp)_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (۵۲)$$

$$(\mathcal{B}^\perp)_{11} = \begin{pmatrix} 0 & \begin{bmatrix} (P_1)^T \\ 0 \end{bmatrix}^\perp \end{pmatrix} \quad (۵۳)$$

$$(\mathcal{B}^\perp)_{22} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1\begin{bmatrix} \phi M_A \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} Q_1\begin{bmatrix} 0 \\ M_C \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T \end{bmatrix}^\perp & 0 \end{pmatrix} \quad (۵۴)$$

$$(\mathcal{B}^\perp)_{55} = \left(\begin{bmatrix} Q_1\begin{bmatrix} \phi D_i \\ D_o \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T\right)^\perp \quad (۵۵)$$

همچنین $\mathbb{P}_{\mathbb{Y}} = \mathbb{P}_2\mathbb{Y}$ است. در این حالت کنترل‌گر $\mathcal{K}$ را می‌توان از رابطه (۱۴) در لم ۳ به دست آورد، که در آن:

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{11} & (*) & (*) \\ \mathcal{D}_{21} & -\alpha_1 I & 0 \\ \mathcal{D}_{31} & 0 & -\alpha_1^{-1} I \\ \mathcal{D}_{41} & 0 & 0 \quad \dots \\ ([D_i]^T \quad \Sigma_5^T) & 0 & 0 \\ (C_Z \mathbb{P}_1^T \quad [0 \quad 0]) & 0 & 0 \\ (0 \quad 0) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۵۶)$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.6.1]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.51]

$$\begin{bmatrix} (*) & (*) & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots -\alpha_2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 I & (*) & 0 \\ 0 & \mathbb{D} & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2^{-1} \end{bmatrix}$$

اثبات: تابع لیاپانوف مثبت معین زیر را در نظر بگیرید:

$$V(\mathbb{X}(t)) = \mathbb{X}^T(t)\mathbb{E}^T\overline{\mathbb{P}}\mathbb{X}(t) \qquad (۵۷)$$

که $\overline{\mathbb{P}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbb{P}}_1 & 0 \\ 0 & \mathbb{P}_2 \end{bmatrix}$ ، $\mathbb{P}_2 = (\mathbb{P}_2)^T = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{21} & \mathbb{P}_{21} \\ \mathbb{P}_{21} & \mathbb{P}_{22} \end{bmatrix}$ است. فرض شده است $\mathbb{E}^T\overline{\mathbb{P}} = \overline{\mathbb{P}}^T\mathbb{E} \geq 0$ ، بنابراین به‌راحتی می‌توان از آن نتیجه گرفت $\mathbb{P}_1 = (\overline{\mathbb{P}}_1)^{-T}$ که در آن $\mathbb{P}_1E^T = E(\mathbb{P}_1)^T \geq 0$ است. اکنون از تابع لیاپانوف (۵۷) در مسیر سیستم حلقه بسته (۳۲) مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbb{X}(t)) &= \dot{\mathbb{X}}^T(t)\mathbb{E}^T\overline{\mathbb{P}}\mathbb{X}(t) + \mathbb{X}^T(t)\mathbb{E}^T\overline{\mathbb{P}}\dot{\mathbb{X}}(t) \\ &= \mathbb{X}^T(t)(\mathbb{A}^T\overline{\mathbb{P}} + \overline{\mathbb{P}}^T\mathbb{A})\mathbb{X}(t) + \mathbb{X}^T(t)\overline{\mathbb{P}}^T\Delta\mathbb{A}\mathbb{X}(t) \\ &\quad + \mathbb{X}^T(t)\Delta\mathbb{A}^T\overline{\mathbb{P}}\mathbb{X}(t) + \mathbb{X}^T(t)\overline{\mathbb{P}}^T\mathbb{B}w(t) \\ &\quad + w^T(t)\mathbb{B}^T\overline{\mathbb{P}}\mathbb{X}(t) + \mathbb{X}^T(t)\overline{\mathbb{P}}^T\Delta\mathbb{B}w(t) \\ &\quad + w^T(t)\Delta\mathbb{B}^T\overline{\mathbb{P}}\mathbb{X}(t) \\ &= \mathbb{X}^T(t)(\mathbb{A}^T\overline{\mathbb{P}} + \overline{\mathbb{P}}^T\mathbb{A})\mathbb{X}(t) \\ &\quad + \mathbb{X}^T(t)\overline{\mathbb{P}}^TM_{\mathbb{A}}\Gamma(t)N_{\mathbb{A}}\mathbb{X}(t) \\ &\quad + \mathbb{X}^T(t)N_{\mathbb{A}}^T\Gamma^T(t)M_{\mathbb{A}}^T\overline{\mathbb{P}}\mathbb{X}(t) \\ &\quad + \mathbb{X}^T(t)\overline{\mathbb{P}}^T\mathbb{B}w(t) + w^T(t)\mathbb{B}^T\overline{\mathbb{P}}\mathbb{X}(t) \\ &\quad + \mathbb{X}^T(t)\overline{\mathbb{P}}^TM_{\mathbb{B}}\Gamma(t)N_{\mathbb{B}}w(t) \\ &\quad + w^T(t)N_{\mathbb{B}}^T\Gamma^T(t)M_{\mathbb{B}}^T\overline{\mathbb{P}}\mathbb{X}(t) \end{aligned}$$

می دانیم برای پایداری سیستم حلقه بسته باید مشتق تابع لیاپانوف انتخاب‌شده منفی باشد. با این فرض و با استفاده از لم ۲ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\dot{V}(\mathbb{X}(t)) < 0 \\ &\Rightarrow \mathbb{X}^T(t)(\mathbb{A}^T\overline{\mathbb{P}} + \overline{\mathbb{P}}^T\mathbb{A})\mathbb{X}(t) + 2\mathbb{X}^T(t)\overline{\mathbb{P}}^T\mathbb{B}w(t) \\ &+ \alpha_1^{-1}\mathbb{X}^T(t)\overline{\mathbb{P}}^TM_{\mathbb{A}}M_{\mathbb{A}}^T\overline{\mathbb{P}}\mathbb{X}(t) \\ &+ \alpha_1\mathbb{X}^T(t)N_{\mathbb{A}}^TN_{\mathbb{A}}\mathbb{X}(t) \\ &+ \alpha_2^{-1}\mathbb{X}^T(t)\overline{\mathbb{P}}^TM_{\mathbb{B}}M_{\mathbb{B}}^T\overline{\mathbb{P}}\mathbb{X}(t) \\ &+ \alpha_2w^T(t)N_{\mathbb{B}}^TN_{\mathbb{B}}w(t) < 0 \end{aligned} \qquad (۵۸)$$

که در آن $\alpha_1 > 0$ و $\alpha_2 > 0$ است.

برای اینکه معادله (۳۵) و (۵۸) هم‌زمان اتفاق بیفتند باید:

$$\begin{aligned} J &< \int_0^\infty \left[z(t)^Tz(t) - \lambda^2w(t)^Tw(t) + \dot{V}(\mathbb{X}(t))\right]dt \\ &< 0 \end{aligned} \qquad (۵۹)$$

و شرط لازم برای اینکه $J < 0$ باشد این است که:

$$\begin{aligned} &\left[z(t)^Tz(t) - \lambda^2w(t)^Tw(t) + \dot{V}(\mathbb{X}(t))\right] \\ &< 0 \quad \forall t \in [0,\infty) \end{aligned} \qquad (۶۰)$$

اکنون با جاگذاری از (۳۲) و (۵۸) در (۶۰) داریم:

$$\begin{aligned} &\mathbb{X}^T(t)(\mathbb{A}^T\overline{\mathbb{P}} + \overline{\mathbb{P}}^T\mathbb{A} + \alpha_1^{-1}\overline{\mathbb{P}}^TM_{\mathbb{A}}M_{\mathbb{A}}^T\overline{\mathbb{P}} + \alpha_1N_{\mathbb{A}}^TN_{\mathbb{A}} \\ &\quad + \alpha_2^{-1}\overline{\mathbb{P}}^TM_{\mathbb{B}}M_{\mathbb{B}}^T\overline{\mathbb{P}} \\ &\quad + \mathbb{C}^T\mathbb{C})\mathbb{X}(t) \\ &\quad + \mathbb{X}^T(t)(\mathbb{C}^T\mathbb{D} \\ &\quad + \overline{\mathbb{P}}^T\mathbb{B})w(t) \\ &\quad + w^T(\mathbb{D}^T\mathbb{C} + \mathbb{B}^T\overline{\mathbb{P}})\mathbb{X}(t) \\ &\quad + w^T(t)(\mathbb{D}^T\mathbb{D} - \lambda^2I \\ &\quad + \alpha_2N_{\mathbb{B}}^TN_{\mathbb{B}})w(t) < 0 \end{aligned} \qquad (۶۱)$$

سمت راست معادله (۶۱) را می‌توان با استفاده از مکمل شر (Schur Complement) [۵۶] به‌صورت زیر به شکل ماتریسی نوشت:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{X}(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbb{G} & \mathbb{C}^T\mathbb{D} + \overline{\mathbb{P}}^T\mathbb{B} \\ \mathbb{D}^T\mathbb{C} + \mathbb{B}^T\overline{\mathbb{P}} & \mathbb{D}^T\mathbb{D} - \lambda^2I + \alpha_2N_{\mathbb{B}}^TN_{\mathbb{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{X}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{aligned} \mathbb{G} = \mathbb{A}^T\overline{\mathbb{P}} + \overline{\mathbb{P}}^T\mathbb{A} + \alpha_1^{-1}\overline{\mathbb{P}}^TM_{\mathbb{A}}M_{\mathbb{A}}^T\overline{\mathbb{P}} + \alpha_1N_{\mathbb{A}}^TN_{\mathbb{A}} \\ + \alpha_2^{-1}\overline{\mathbb{P}}^TM_{\mathbb{B}}M_{\mathbb{B}}^T\overline{\mathbb{P}} + \mathbb{C}^T\mathbb{C} \end{aligned}$$

که نتیجه خواهد داد:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}^T\overline{\mathbb{P}} + \overline{\mathbb{P}}^T\mathbb{A} & (*) & (*) & \\ M_{\mathbb{A}}^T\overline{\mathbb{P}} & -\alpha_1 I & 0 & \\ N_{\mathbb{A}} & 0 & -\alpha_1^{-1}I & \\ M_{\mathbb{B}}^T\overline{\mathbb{P}} & 0 & 0 & \dots \\ \mathbb{B}^T\overline{\mathbb{P}} & 0 & 0 & \\ \mathbb{C} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (*) & (*) & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots -\alpha_2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 I & (*) & (*) \\ 0 & \mathbb{D} & -I & 0 \\ 0 & N_{\mathbb{B}} & 0 & -\alpha_2^{-1} \end{bmatrix} < 0 \qquad (۶۲)$$

(*) نشان‌دهنده ترانهاده درآیه ای است که در موقعیت قرینه قرار دارد.

اکنون با جاگذاری روابط قبلی در (۶۲) و ضرب آن از سمت چپ در $\begin{bmatrix} \overline{\mathbb{P}}_1^{-T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ و از سمت راست در $\begin{bmatrix} \overline{\mathbb{P}}_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ و همچنین یادآوری این‌که $\mathbb{P}_1 = (\overline{\mathbb{P}}_1)^{-T}$ ، (۶۲) به نامعادله زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & (*) & (*) & \\ \Psi_{21} & -\alpha_1 I & 0 & \\ \Psi_{31} & 0 & -\alpha_1^{-1}I & \\ \Psi_{41} & 0 & 0 & \dots \\ \Psi_{51} & 0 & 0 & \\ \Psi_{61} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (*) & (*) & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots -\alpha_2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 I & (*) & (*) \\ 0 & \mathbb{D} & -I & 0 \\ 0 & N_{\mathbb{B}} & 0 & -\alpha_2^{-1} \end{bmatrix} < 0 \qquad (۶۳)$$

$$\Psi_{11} = \begin{pmatrix} (A - B\kappa)\mathbb{P}_1^T + \mathbb{P}_1(A - B\kappa)^T & \dots \\ \begin{bmatrix} (-B\kappa P_1)^T \\ 0 \end{bmatrix} & \\ (*) & \\ \dots \mathbb{P}_2(\mathbb{A}_1 - \mathbb{Y}\mathbb{A}_2) + (\mathbb{A}_1 - \mathbb{Y}\mathbb{A}_2)^T\mathbb{P}_2 & \end{pmatrix},$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.6.1]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.51]

$$\Psi_{21}=\left(\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}M_A-(B+M_BN_B)\kappa Q_1\begin{bmatrix}\phi M_A\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}^T\\ \begin{bmatrix}-(B+M_BN_B)\kappa Q_1\begin{bmatrix}0\\M_C\end{bmatrix}\end{bmatrix}^T\\ M_B^T\\ -M_B^T\end{bmatrix}\cdots \begin{bmatrix}[\Theta_1-\mathbb{Y}\Theta_2]^T\\ [\Theta_3-\mathbb{Y}\Theta_4]^T\\ [\Theta_5]^T\\ [\Theta_5]^T\end{bmatrix}\mathbb{P}_2\right),$$

$$\Psi_{31}=\begin{pmatrix}\varphi_1\mathbb{P}_1^T & [0\quad 0]\\ \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\varphi_2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\end{pmatrix},$$

$$\Psi_{41}=\begin{pmatrix}-M_B^T & [0\quad 0]\\ \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}(T_1M_B)^T & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\mathbb{P}_2\end{pmatrix},$$

$$\Psi_{51}=\left(\begin{bmatrix}D_i-B\kappa Q_1\begin{bmatrix}\phi D_i\\D_o\end{bmatrix}\end{bmatrix}^T \quad [\mathbb{B}_1-\mathbb{Y}\mathbb{B}_2]^T\mathbb{P}_2\right),$$

$$\Psi_{61}=(C_Z\mathbb{P}_1^T\quad [0\quad 0]),$$

حال برای استفاده از لم ۳، (۶۳) را به فرم $\mathcal{B}\mathcal{K}^T\mathcal{C}+(\mathcal{B}\mathcal{K}^T\mathcal{C})^T+\mathcal{D}<0$ تبدیل می‌کنیم به طوری که:

$$\mathcal{D}=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}A\mathbb{P}_1^T+\mathbb{P}_1A^T & 0\\ 0 & \mathbb{P}_2(\mathbb{A}_1-\mathbb{Y}\mathbb{A}_2)+(\mathbb{A}_1-\mathbb{Y}\mathbb{A}_2)^T\mathbb{P}_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\begin{bmatrix}M_A\end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix}[\Theta_{1S}-\mathbb{Y}\Theta_2]^T\\ [\Theta_{3S}-\mathbb{Y}\Theta_4]^T\end{bmatrix}\mathbb{P}_2\\ M_B^T & [\Theta_5]^T\\ -M_B^T & [\Theta_5]^T\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\varphi_{1S}\mathbb{P}_1^T & [0\quad 0]\\ \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\end{pmatrix}\quad\cdots\\ \begin{pmatrix}-M_B^T & [0\quad 0]\\ \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}(T_1M_B)^T & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\mathbb{P}_2\end{pmatrix}\\ ([D_i]^T\quad [\mathbb{B}_1-\mathbb{Y}\mathbb{B}_2]^T\mathbb{P}_2)\\ (C_Z\mathbb{P}_1^T\quad [0\quad 0])\\ (0\quad 0)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}(*) & (*) & (*) & (*) & (*) & 0\\ -\alpha_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\alpha_1^{-1}I & 0 & 0 & 0 & 0\\ \cdots\ 0 & 0 & -\alpha_2 I & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^2 I & (*) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{D} & -I & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_2^{-1}I\end{bmatrix}\qquad(۶۴)$$

که در آن $\Theta_{1S}=\begin{bmatrix}-T_1M_A+(F_1)\begin{bmatrix}\phi M_A\\0\end{bmatrix}\\0\end{bmatrix}$ ، $\Theta_{3S}=\begin{bmatrix}(F_1)\begin{bmatrix}0\\M_C\end{bmatrix}\\0\end{bmatrix}$ و $\varphi_{1S}=\begin{bmatrix}N_A\\N_C\\0\end{bmatrix}$ بخش‌های از توابع Θ_1 ، Θ_3 و φ_1 هستند که متغیر κ در آن‌ها وجود ندارند. به‌عبارت‌دیگر سعی شده است تمام بخش‌هایی از ماتریس سمت راست (۶۳) که پارامتر κ در آن‌ها دخالتی ندارد در ماتریس $\mathcal{D}$ دسته‌بندی شوند. با استفاده از $\mathbb{A}_1=\begin{bmatrix}N_1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ ، $\mathbb{A}_2=\begin{bmatrix}N_3 & 0\\0 & -I\end{bmatrix}$، $\mathbb{Y}=\begin{bmatrix}Y_1 & H\\Y_2 & L\end{bmatrix}$ و تعریف $\mathbb{P}_2=\begin{bmatrix}\mathbb{P}_{21} & \mathbb{P}_{21}\\ \mathbb{P}_{21} & \mathbb{P}_{22}\end{bmatrix}$، $\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}=\mathbb{P}_2\mathbb{Y}$

در ماتریس (۶۴) و عملیات ساده‌سازی، ماتریس $\mathcal{D}$ را می‌توان به‌صورت زیر به دست آورد:

$$\mathcal{D}=\begin{bmatrix}\mathcal{D}_{11} & (*) & (*) & (*) & (*) & 0\\ \mathcal{D}_{21} & -\alpha_1 I & 0 & 0 & 0 & 0\\ \mathcal{D}_{31} & 0 & -\alpha_1^{-1}I & 0 & 0 & 0\\ \mathcal{D}_{41} & 0 & 0 & -\alpha_2 I & 0 & 0\\ ([D_i]^T\quad \Sigma_5^T) & 0 & 0 & 0 & -\lambda^2 I & (*)\\ (C_Z\mathbb{P}_1^T\quad [0\quad 0]) & 0 & 0 & 0 & \mathbb{D} & -I\\ (0\quad 0) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_2^{-1}\end{bmatrix}\qquad(۶۵)$$

که $\mathcal{D}_{11}$، $\mathcal{D}_{21}$، $\mathcal{D}_{31}$، $\mathcal{D}_{41}$ و Σ_5 در روابط (۴۰) تا (۴۳) و (۴۸) ارائه‌شده‌اند. بنابراین باقیمانده ماتریس سمت چپ نامعادله (۶۳) باید در قالب $\mathcal{B}\mathcal{K}^T\mathcal{C}+(\mathcal{B}\mathcal{K}^T\mathcal{C})^T$ قرار گیرد. انتخاب‌های زیر خواسته موردنظر را تأمین می‌کند.

$$\mathcal{B}=\begin{bmatrix}\mathcal{B}_{11} & 0 & \mathcal{B}_{13} & 0\\ \mathcal{B}_{21} & \mathcal{B}_{22} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \mathcal{B}_{31} & 0 & 0 & \mathcal{B}_{34}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\qquad(۶۶)$$

که درآیه های آن به‌صورت $\mathcal{B}_{11}=\begin{pmatrix}\mathbb{P}_1 & (*)\\ \begin{bmatrix}(P_1)^T\\0\end{bmatrix} & 0\end{pmatrix}$ ، $\mathcal{B}_{21}=$

$\mathcal{B}_{31}=\left(\begin{bmatrix}-Q_1\begin{bmatrix}\phi D_i\\D_o\end{bmatrix}\end{bmatrix}^T \quad 0\right)$ ، $\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1\begin{bmatrix}\phi M_A\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}^T\\ \begin{bmatrix}Q_1\begin{bmatrix}0\\M_C\end{bmatrix}\end{bmatrix}^T\\0\\0\end{bmatrix} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ،$\mathcal{B}_{13}=$

$\mathcal{B}_{34}=\left(\begin{bmatrix}Q_1\begin{bmatrix}\phi D_i\\D_o\end{bmatrix}\end{bmatrix}^T\right)$ ، $\begin{pmatrix}[\mathbb{P}_1[0\quad 0\quad I]] & [0\quad 0]\\ \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}P_1^T & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\end{pmatrix}$ و با استفاده از $\mathbb{P}_2$ و انجام چند عملیات ساده $\mathcal{B}_{22}$ را به این شکل خواهیم داشت:

$$\mathcal{B}_{22}=\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1\begin{bmatrix}\phi M_A\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}^T\\ \begin{bmatrix}Q_1\begin{bmatrix}0\\M_C\end{bmatrix}\end{bmatrix}^T\\0\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}(Q_1)\begin{bmatrix}\phi M_A\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}^T\\ \begin{bmatrix}(Q_1)\begin{bmatrix}0\\M_C\end{bmatrix}\end{bmatrix}^T\\0\\0\end{bmatrix}\mathbb{P}_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1\begin{bmatrix}\phi M_A\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}^T\\ \begin{bmatrix}Q_1\begin{bmatrix}0\\M_C\end{bmatrix}\end{bmatrix}^T\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{P}_{21}Q_1\begin{bmatrix}\phi M_A\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}^T\\ \begin{bmatrix}\mathbb{P}_{21}Q_1\begin{bmatrix}\phi M_A\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}^T\\ \begin{bmatrix}\mathbb{P}_{21}Q_1\begin{bmatrix}0\\M_C\end{bmatrix}\end{bmatrix}^T\\ \begin{bmatrix}\mathbb{P}_{21}Q_1\begin{bmatrix}0\\M_C\end{bmatrix}\end{bmatrix}^T\\0\\0\end{bmatrix}\\ 0 & \end{pmatrix}$$

و

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.6.1]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.51]

$$\mathcal{C}=\begin{bmatrix}\mathcal{C}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \mathcal{C}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathcal{C}_{33} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{C}_{47}\end{bmatrix} \quad (۶۷)$$

که $\mathcal{C}_{11}=\begin{pmatrix}-B^T & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$، $\mathcal{C}_{21}=\begin{pmatrix}-(M_BN_B)^T & 0\\ 0 & (T_1M_BN_B)^T\end{pmatrix}$، $\mathcal{C}_{33}=$ و $\mathcal{C}_{47}=(N_B^T)\left(\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\N_B^T\end{bmatrix} & 0\\ 0 & \begin{bmatrix}N_B^T\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}\right)$

است. و

$$\mathcal{K}=diag(\kappa) \quad (۶۸)$$

اکنون می‌توانیم از لم ۳ استفاده کنیم و نامعادله (۶۳) را به دو نامعادله ماتریسی خطی (LMI) زیر تبدیل کنیم.

$$\mathcal{B}^{\perp}\mathcal{D}\mathcal{B}^{\perp T}<0 \quad (۶۹)$$

$$\mathcal{C}^{T^{\perp}}\mathcal{D}\mathcal{C}^{T^{\perp T}}<0 \quad (۷۰)$$

که در آن $\mathcal{B}^{\perp}$ ، $\mathcal{D}$ و $\mathcal{C}^{T^{\perp}}$ به ترتیب در (۵۲)، (۴۹) و (۵۶) تعریف‌شده‌اند.

با حل نامعادله‌های ماتریسی خطی(۳۷)، (۶۹) و (۷۰)، $\mathbb{P}_1$، $\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}$ و $\mathbb{P}_{21}$ به دست می‌آیند. سپس با توجه به اینکه $\mathbb{P}_2$ یک ماتریس مثبت معین انتخاب‌شده است، و به‌کارگیری رابطه $\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}=\mathbb{P}_2\mathbb{Y}$ می‌توان $\mathbb{P}_2$ و $\mathbb{Y}$ را تعیین کرد. با توجه به تعریف ماتریس $\mathbb{Y}=\begin{bmatrix}Y_1 & H\\ Y_2 & L\end{bmatrix}$ ماتریس‌های دلخواه Y_1 و Y_2 و همچنین باقیمانده ماتریس‌های رؤیت‌گر تعیین می‌شوند. با مشخص شدن ماتریس‌های دلخواه می‌توان با استفاده از نتایج لم ۴ کلیه ماتریس‌های ضرایب رؤیت‌گر را تعیین نمود. در انتها با به‌کارگیری (۱۴) و (۶۸) می‌تواند کنترل‌گر مناسب را برای اینکه سیستم حلقه بسته پایدار مقاوم شود را تعیین نمود. با توجه به برقراری (۶۲) می‌توان نتیجه گرفت که $\mathbb{A}^T\overline{\mathbb{P}}+\overline{\mathbb{P}}^T\mathbb{A}<0$ است و ازآنجاکه $\mathbb{E}^T\overline{\mathbb{P}}=\overline{\mathbb{P}}^T\mathbb{E}\geq 0$ است، با استفاده از لم ۵ می‌توان نتیجه گرفت که سیستم حلقه بسته مجاز خواهد شد و در این مرحله اثبات کامل شده است.

الگوریتم زیر مراحل طراحی رؤیت‌گر و کنترل‌گر را برای یک سیستم تکین نشان می‌دهد.

الگوریتم:

گام اول: بر مبنای تعریف موجود در فرض ۱ ماتریس‌های M_A ,M_B ,N_A ,N_B ,M_C و N_C را تعیین کنید و برقراری فرض‌های ۲ و ۳ را بررسی کنید.

گام دوم: ماتریس $\emptyset\in\mathbb{R}^{r\times n}$ با رتبه کامل سطری را به دست آورید تا در رابطه $\emptyset\begin{bmatrix}E & M_B\end{bmatrix}=0$ صدق کند.

گام سوم: ماتریس $R\in\mathbb{R}^{q\times n}$ که یک ماتریس با رتبه کامل سطری است را محاسبه کنید تا $\Sigma=\begin{bmatrix}R\\ \emptyset A\\ C\end{bmatrix}$ را تبدیل به ماتریسی با رتبه کامل ستونی کند؛ همچنین $\Omega=\begin{bmatrix}E\\ \emptyset A\\ C\end{bmatrix}$ را به دست آورید.

گام چهارم: ماتریس‌های Q ,P ,T و J را با استفاده از روابط (۱۵) و (۲۰) تا (۲۲) به دست آورید.

گام پنجم: با حل نامعادلات ماتریسی خطی (۳۷) تا (۳۹) ماتریس‌های $\mathbb{P}_1$ ، $\mathbb{P}_{21}$ و $\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}$ را به دست آورید.

گام ششم: $\mathbb{P}_2$ با توجه به $\mathbb{P}_2=\mathbb{P}_2^T>0$، محاسبه کنید و از روی آن $\mathbb{Y}=\mathbb{P}_2^{-1}.\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}$ را تعیین کنید.

گام هفتم: با تجزیه $\mathbb{Y}=\begin{bmatrix}Y_1 & H\\ Y_2 & L\end{bmatrix}$، دو ماتریس دیگر از ضرایب رؤیت‌گر یعنی H ، L و همچنین دو ماتریس دلخواه Y_1 و Y_2 را مشخص کنید.

گام هشتم: باقیمانده ماتریس‌های ضرایب رؤیت‌گر را که ماتریس‌های N ,F ,S و M هستند را با استفاده از روابط (۱۶) تا (۱۹) به دست آورید.

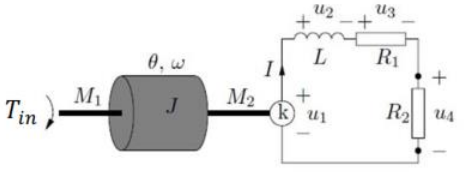
گام نهم: با استفاده از (۱۴) در لم ۳ و رابطه (۶۸) بهره کنترل‌گر را به دست آورید و سیستم حلقه بسته با کنترل‌گر تناسبی را پیاده‌سازی کنید.

٤- مثال عددی

در این بخش با ارائه یک مثال روش پیشنهادی را بررسی می‌کنیم.

مثال: سیستم درنظرگرفته‌شده مدل یک ژنراتور DC است که در شکل ۱ دیده می‌شود. این مدل به این صورت تشریح می‌شود: ورودی سیستم گشتاور T_{in} است که در سمت چپ محور به آن اعمال می‌شود. به محور جرم دوار با اینرسی J_m و ضریب اصطکاک B_m متصل است که با سرعت زاویه‌ای ω_m می‌چرخد. گشتاور الکتریکی T_e به ژنراتور اعمال می‌شود و طبق رابطه $T_e=kI$ جریان I را تولید می‌کند. در مدل تکین از این سیستم فرض شده است که $x_1=\theta$ ، $x_2=\omega_m$ ، $x_3=I$ و $x_4=u_4$ حالت‌های سیستم باشند.

مدل نمایش فضای حالت برای این سیستم به‌صورت زیر خواهد بود:



شکل ۱) مدل یک ژنراتور DC

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.6.1]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.51]

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&\frac{-B_m}{J_m}&\frac{-k}{J_m}&0\\0&\frac{k}{L}&\frac{-(R_1+R_2)}{L}&0\\0&0&-R_2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{J_m}\\0\\0\end{bmatrix}T_{in}$$

$$y=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&R_2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

مقادیر نامی پارامترهای سیستم در جدول ۱ مشاهده می‌شود[۵۷].

همچنین فرض می‌کنیم که پارامترهای J_m و R_2 به‌طور کامل معلوم نیستند و هرکدام می‌تواند 5% نامعینی داشته باشند. در این شرایط ماتریس سیستم، ماتریس ورودی و ماتریس خروجی دارای نامعینی هستند که به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\Delta A=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0.1&5.9&0\\0&0&3600&0\\0&0&10&0\end{bmatrix},\Delta B=\begin{bmatrix}0\\21.35\\0\\0\end{bmatrix},\Delta C=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&10&0\end{bmatrix}$$

باقیمانده ضرایب برای سیستم (۱) به‌صورت زیر در نظر گرفته‌شده‌اند:

$$D_i=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},D_o=\begin{bmatrix}0.5\\0.1\end{bmatrix},C_z=[0\quad 0\quad 1\quad 0],D_z=0.2$$

که ماتریس‌های $\Delta A, \Delta B$ و ΔC حداکثر نامعینی ماتریس‌های سیستم، ورودی و خروجی هستند. با محاسبه مقادیر ویژه سیستم مشاهده می‌شود که سیستم دارای یک قطب نامحدود و سه قطب محدود است که همه قطب‌های محدود آن در سمت چپ محور $j\omega$ قرار ندارند و سیستم مجاز نیست. اکنون هدف طراحی رؤیت‌گر و سپس کنترل‌کننده‌ای است تا سیستم حلقه بسته را مجاز نماید. ابتدا با استفاده از فرض ۱ و اینکه نامعینی‌ها

جدول ۱) مقادیر نامی ژنراتور DC

Parameters with symbols	Numerical values (units)
: moment of J_m inertia the motor	3.23×10^{-3} $(kg.m^2)$
: motor viscus B_m friction constant	3.5×10^{-3} $(N.m.s/rad)$
: electromotive k force constant	0.0274 (V.rad/sec)
: electric R_1 resistance of motor	40 (Ω)
electric L: insuctance of motor	2.75×10^{-3} (H)
electric R_2: resistance of load	200 (Ω)

از نوع محدود ساختاریافته هستند، می‌توان ماتریس‌های زیر را به دست آورد:

$$M_A=\begin{bmatrix}0\\5.9\\3.6\times10^3\\10\end{bmatrix},N_A=[0\quad 0.02\quad 1\quad 0],M_B=\begin{bmatrix}0\\21.35\\0\\0\end{bmatrix},N_B=1,M_C=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},N_C=[0\quad 0\quad 10\quad 0]$$
$$\Lambda_A=\Lambda_B=\Lambda_C=sin2t$$

ماتریس $\phi=[0\quad 0\quad 0\quad 1]$ را با توجه به روابط فرض ۲ به دست می‌آوریم. بدیهی است که روابط (۲)، (۳) و (۵) برآورده می‌شود. با توجه به لم ۴ ماتریس $R=[1\quad 0\quad 0\quad 0]$ را انتخاب می‌کنیم. اکنون با استفاده از روابط (۱۵) و (۲۰) تا (۲۲) ضرایب زیر را به دست خواهیم آورد:

$$P=\begin{bmatrix}0.25\\-0.17\\0.43\\0.06\end{bmatrix},Q=\begin{bmatrix}-0.23&0.02&0.23\\-0.65&-0.07&-0.65\\0.22&0.87&0.52\\0.27&-0.39&0.46\end{bmatrix},J=[4]$$

سپس با حل نامعادلات ماتریسی خطی (۳۷) تا (۳۹) توسط نرم‌افزار YALMIP [۵۸] ماتریس‌های $\mathbb{P}_1$، $\mathbb{P}_{21}$، $\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}$ و $\mathbb{P}_2$ را به دست می‌آوریم و با بهره‌گیری از رابطه $\mathbb{Y}=\mathbb{P}_2^{-1}.\mathbb{P}_{\mathbb{Y}}$ را تعیین می‌کنیم که نتایج زیر را به دست می‌دهد:

$$\mathbb{Y}=\begin{bmatrix}22.94&-41.32&-61.07\\56.23&-9.26&3.89\\26.98&51.04&-37.20\end{bmatrix}\begin{matrix}\dots\\\dots\\\dots\end{matrix}\begin{bmatrix}34.27&10.26&-2.1&3.2\\25.90&28.72&-0.7&0\\22.96&12.92&0.2&-0.7\end{bmatrix},$$

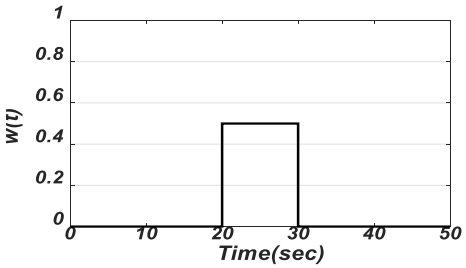
با مشخص شدن $\mathbb{Y}=\begin{bmatrix}Y_1&H\\Y_2&L\end{bmatrix}$ ماتریس‌های ضرایب H و L به‌صورت زیر به دست می‌آیند. همچنین ماتریس‌های دلخواه Y_1 و Y_2 تعیین می‌شوند که با به‌کارگیری روابط (۱۶) تا (۱۹) می‌توانیم باقیمانده ماتریس‌های ضرایب رؤیت‌گر یعنی N, F, S و M را محاسبه کنیم.

$$H=[-2.1\quad 3.2],L=\begin{bmatrix}-0.7&0\\0.2&-0.7\end{bmatrix},N=[-4.2],F=[4.89\quad 2.07\quad 1.90],$$
$$S=[0.51\quad -0.08],M=\begin{bmatrix}-0.76&1.22&0.12\\2.28&1.78&0.02\end{bmatrix},$$

حال تمامی ضرایب رؤیت‌گر (۶) محاسبه‌شده‌اند و کافی است با استفاده از رابطه (۱۴) و انتخاب ماتریس‌های دلخواه، ماتریس کنترل‌کننده را به دست آوریم:

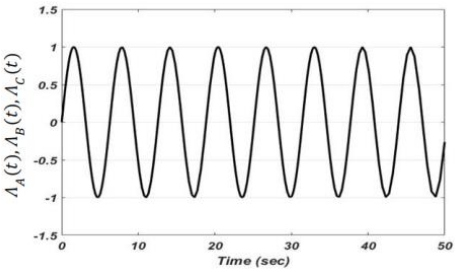
$$\kappa=[-22.54\quad -15.35\quad 39.45\quad 0.38]$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.6.1]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.51]

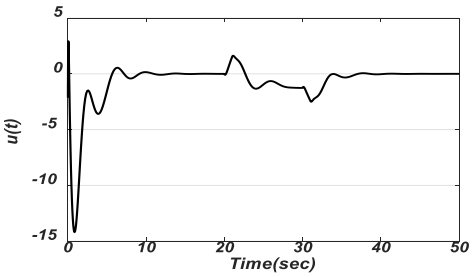


شکل ۲) سیگنال اغتشاش اعمال‌شده به سیستم

نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های زیر آورده شده‌اند. در شکل ۲ تابع اغتشاش اعمال‌شده به سیستم مشاهده می‌شود. شکل ۳ تابع تغییر نامعینی در ضرایب سیستم را نشان می‌دهد که یک تابع سینوسی با فرکانس ۲ رادیان بر ثانیه است. این تابع نامعینی‌های موجود در پارامترهای سیستم را در رنج تعریف‌شده در صورت‌مسئله مدل می‌کند. سیگنال کنترلی سیستم را

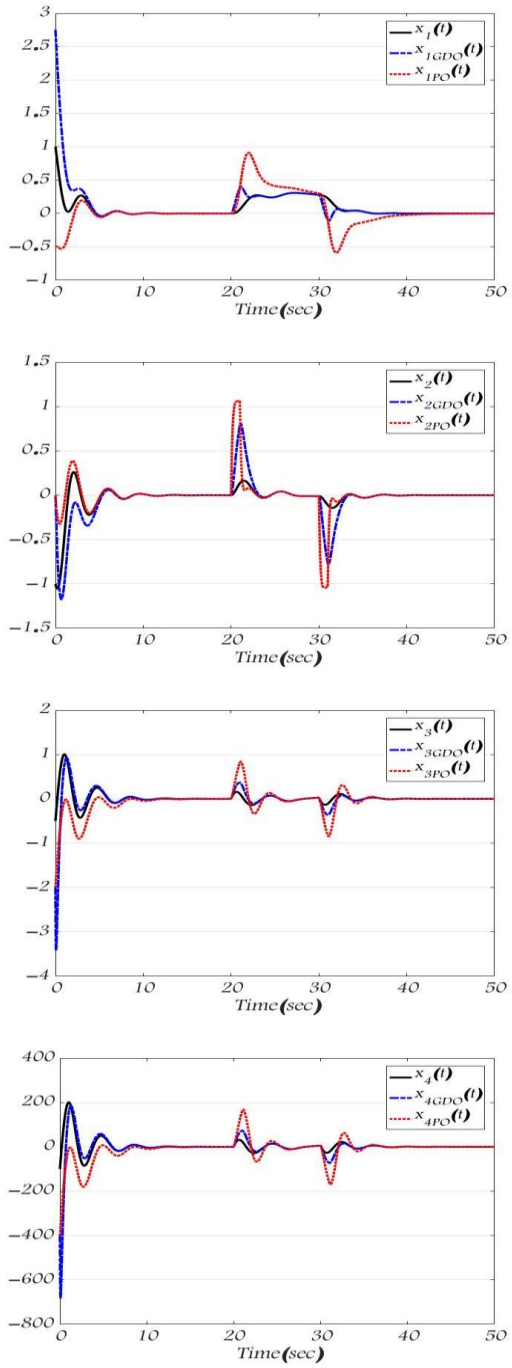


شکل ۳) تابع تغییرات نامعینی $\Lambda_A = \Lambda_B = \Lambda_C$



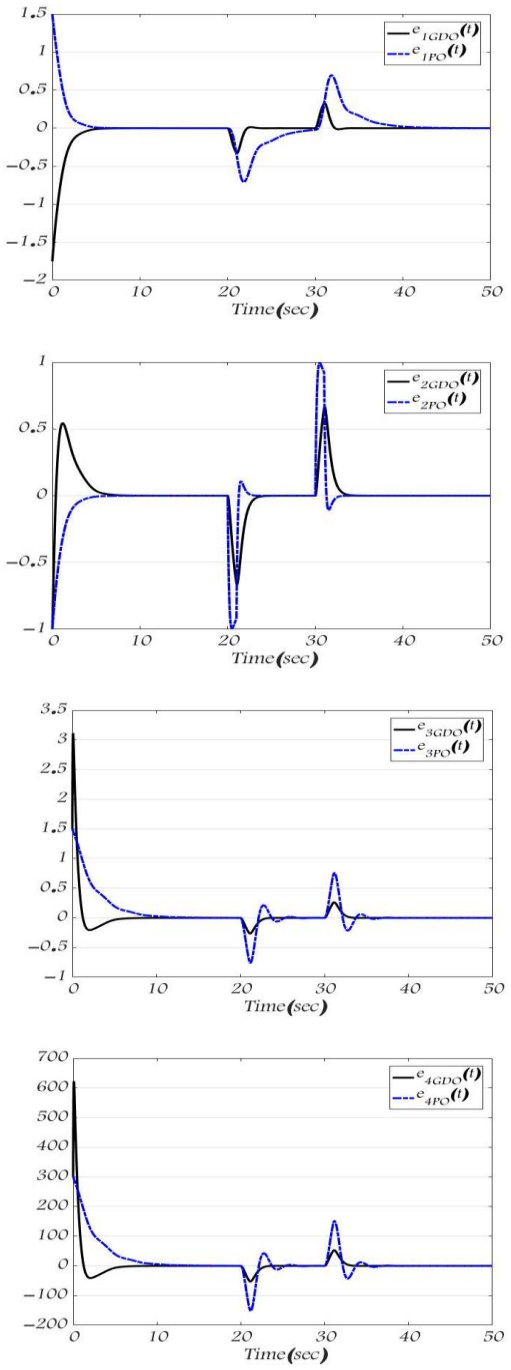
شکل ۴) سیگنال کنترلی سیستم $u(t)$

می‌توان در شکل ۴ مشاهده کرد. همچنین حالت‌های سیستم $(x(t))$ و حالت‌های تخمین زده‌شده با رؤیت‌گر دینامیکی توسعه‌یافته ارائه‌شده در این مقاله $(x_{GDO}(t))$ و مقایسه آن‌ها با یک رؤیت‌گر تناسبی $(x_{PO}(t))$ در شکل ۵ رسم شده است. همان‌طور که دیده می‌شود با توجه به اینکه سیستم حلقه بسته دارای ورودی خارجی نیست، حالت‌های سیستم به سمت صفر میل کرده است و نشان‌دهنده این است که سیستم حلقه بسته مجاز شده است. مقایسه خطاهای تخمین در دو روش رؤیت‌گر دینامیکی توسعه‌یافته $(e_{GDO}(t))$ و رؤیت‌گر تناسبی [۴۸] $(e_{PO}(t))$ نیز در شکل ۶ قابل‌رؤیت هستند. ملاحظه می‌شود که در رؤیت‌گر دینامیکی توسعه‌یافته خطای تخمین کمتر و زمان تخمین حالت‌های سیستم نیز در مقایسه با رؤیت‌گر تناسبی کوتاه‌تر است و وجود بخش دینامیکی و بخش انتگرالی در رؤیت‌گر پیشنهادشده باعث افزایش دقت و سرعت تخمین حالت‌ها شده است.



شکل ۵) حالت‌های سیستم $x(t)$ و مقادیر تخمین زده‌شده توسط رؤیت‌گر دینامیکی توسعه یافته $x_{GDO}(t)$ و رؤیت‌گر تناسبی $x_{PO}(t)$.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.6.1]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.51]



شکل ۶) مقایسه خطای تخمین رؤیت‌گر دینامیکی توسعه یافته $e_{GDO}(t)$ با رؤیت‌گر تناسبی $e_{PO}(t)$

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله طراحی کنترل‌کننده بر پایه رؤیت‌گر برای سیستم‌های تکین خطی و دارای نامعینی در حضور اغتشاش ارائه شد. رؤیت‌گر دینامیکی توسعه‌یافته مقاوم برای تخمین حالت‌های سیستم بکار گرفته شد و قانون کنترل به‌گونه‌ای محاسبه گردید تا سیستمی را که ذاتاً ناپایدار است، در حالت حلقه بسته مجاز نماید. ویژگی مهم این مقاله در این است که نامعینی می‌تواند در سه ماتریس سیستم، ورودی و خروجی باشد. تحلیل پایداری رؤیت‌گر و کنترل‌کننده با انتخاب یک تابع مناسب لیاپانوف نشان داده شد. شرایط لازم و کافی برای وجود جواب، به‌صورت نامعادلات ماتریسی خطی ارائه شد. نامعادلات ماتریسی خطی با استفاده از جعبه‌ابزار YALMIP حل‌شده و ماتریس‌های ضرایب رؤیت‌گر و کنترل‌کننده محاسبه شدند. کنترل‌کننده H_∞ به‌گونه‌ای طراحی شد تا در حضور اغتشاش بتواند مجاز بودن سیستم حلقه بسته را تضمین کند. با حل یک مثال عددی عملکرد روش پیشنهادی و الگوریتم ارائه‌شده موردبررسی و مقایسه قرار گرفت.

مراجع

[1] G. R. Duan, Analysis and design of descriptor linear systems, Springer Science & Business Media, 2010 .

[2[M. Darouach and L. Boutat-Baddas, "Observers for a class of nonlinear singular systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 53, no. 11, pp. 2627-2633, 2008 .

[3[I. Zamani, M. Shafiee and A. Ibeas, "Exponential stability of hybrid switched nonlinear singular systems with time-varying delay," Journal of the Franklin Institute, vol. 350, no. 1, pp. 171-193, 2013 .

[4] M. Darouach and M. Zasadzinski, "Data reconciliation in generalized linear dynamic systems," AICHE journal, vol. 37, no. 2, pp. 193-201, 1991 .

[5] J. Huang, W. Zhang, M. Shi, L. Chen and L. Yu, " H∞ observer design for singular one-sided Lur'e differential inclusion system," Journal of the Franklin Institute, vol. 354, no. 8, pp. 3305-3321, 2017

[6] F. L. Lewis, "A survey of linear singular systems," Circuits, Systems, and Signal Processing, vol. 5, no. 1, pp. 3-36, 1986 .

[7] J. Dai, "Singular control systems," in Singular control systems, 1989, pp. 3-36.

[8] C. Farhat and M. Geradin, "On the general solution by a direct method of a large-scale singular system of linear equations: application to the analysis of floating structures," International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 41, no. 4, pp. 675-696, 1998 .

[9] R. Shahnazi and Q. Zhao, "Adaptive fuzzy descriptor sliding mode observer-based sensor fault estimation for uncertain nonlinear systems," Asian Journal of Control, vol. 18, no. 4, pp. 1478-1488, 2016 .

[10] J. M. Araújo, P. R. Barros and C. E. Dorea, "Design of observers with error limitation in discrete-time descriptor systems: A case study of a hydraulic tank system," IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 20, no. 4, pp. 1041-1047, 2012 .

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.6.1]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.51]

dynamical observers design for linear descriptor systems," IET Control Theory & Applications, vol. 10, no. 17, pp. 2223-2232, 2016 .

[26] G. L. Osorio-Gordillo, M. Darouach, L. Boutat-Baddas and C. M. Astorga-Zaragoza, "On Dynamic Observers Design for Descriptor Systems," in New Trends in Observer-Based Control, 2019, pp. 3-45.

[27] L. Boutat-Baddas, G. L. Osorio-Gordillo and M. Darouach, "H∞ dynamic observers for a class of nonlinear systems with unknown inputs," International Journal of Control, pp. 1-12, 2019 .

[28] G. L. Osorio-Gordillo, M. Darouach, L. Boutat-Baddas and C. M. Astorga-Zaragoza, "dynamical observer-based control for descriptor systems," IMA Journal of Mathematical Control and Information, vol. 35, no. 3, pp. 707-734, 2017 .

[29] S. P. Bhattacharyya, "Robust control under parametric uncertainty: An overview and recent results," Annual Reviews in Control, vol. 44, pp. 45-77, 2017 .

[30] M. S. Asadinia, T. Binazadeh and B. Safarinejadian, "A delay-range-dependent stabilization of uncertain singular time-delay systems with one-sided Lipschitz nonlinearities subject to input saturation," Journal of Vibration and Control, vol. 25, no. 4, pp. 868-881, 2019 .

[31] E. Arefinia, H. A. Talebi and A. Doustmohammadi, "A robust adaptive observer for a class of singular nonlinear uncertain systems," International Journal of Systems Science, vol. 48, no. 7, pp. 1404-1415, 2017 .

[32] Y. Ma, P. Yang, Y. Yan and Q. Zhang, " Robust observer-based passive control for uncertain singular time-delay systems subject to actuator saturation," ISA transactions, vol. 67, pp. 9-18, 2017 .

[33] E. K. Boukas and Z. K. Liu, "Robust H∞ filtering for polytopic uncertain time-delay systems with Markov jumps," Computers & Electrical Engineering, vol. 28, no. 3, pp. 171-193, 2002 .

[34] M. S. Pasand, M. A. Sh and H. D. Taghirad, "Unknown input-proportional integral observer for singular systems: Application to fault detection," in Electrical Engineering (ICEE), 2010 18th Iranian Conference, 2010 .

[35] G. L. Osorio-Gordillo, M. Darouach and C. M. Astorga-Zaragoza, "H∞ dynamical observer design for linear descriptor systems," in American Control Conference (ACC), 2014 .

[36] M. Alma and M. Darouach, "Adaptive observers design for a class of linear descriptor systems," Automatica, vol. 50, no. 2, pp. 578-583, 2014 .

[37] N. F. Shamloo, A. A. Kalat and L. Chisci, "Indirect adaptive fuzzy control of nonlinear descriptor systems," European Journal of Control, 2019 .

[11] D. G. Luenberger, "Observing state of linear system," IEEE Trans. Military Electron, Vols. MIL-8, no. 2, pp. 74-77, 1964 .

[12] M. Darouach and M. Boutayed, "Design of observers for descriptor systems," IEEE transactions on Automatic Control, vol. 40, no. 7, pp. 1323-1327, 1995 .

[13] M. Hou and P. C. Muller, "Observer design for descriptor systems.," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 44, no. 1, pp. 164-169., 1999 .

[14] M. Darouach, "Observers and observer-based control for descriptor systems revisited," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 59, no. 5, pp. 1367-1373, 2014 .

[15] M. Cao and F. Liao, "Design of a PD feedback controller for continuous-time descriptor systems," in Control and Decision Conference, 2014 .

[16] Y. Han, Y. Kao and C. Gao, "Robust observer-based H∞ control for uncertain discrete singular systems with time-varying delays via sliding mode approach," ISA Transactions, vol. 80, pp. 81-88, 2018 .

[17] M. Wang and T. Liang, "Adaptive Kalman filtering for sensor fault estimation and isolation of satellite attitude control based on descriptor systems," Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2019 .

[18] M. Darouach, "H∞ unbiased filtering for linear descriptor systems via LMI," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 54, no. 8, pp. 1966-1972, 2009 .

[19] P. C. Muller and M. Hou, "On the observer design for descriptor systems," in Decision and Control, 1991., Proceedings of the 30th IEEE Conference on (pp. 1960-1961). IEEE., 1991 .

[20] A. G. Wu and G. R. Duan, "Design of generalized PI observers for descriptor linear systems," IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 53, no. 12, pp. 2828-2837, 2006 .

[21] A. G. Wu and G. R. Duan, "Generalized PI observer design for linear systems," IMA Journal of Mathematical Control and Information, pp. 239-250, 2007 .

[22] D. Koenig, "Unknown input proportional multiple-integral observer design for linear descriptor systems," IEEE Transactions on Automatic control, pp. 212-217, 2005 .

[23] G. C. Goodwin and R. H. Middleton, "The class of all stable unbiased state estimators," Systems & Control Letters, pp. 161-163, 1989 .

[24] H. J. Marquez, "A frequency domain approach to state estimation," Journal of the Franklin Institute, pp. 147-157, 2003 .

[25] G. L. Osorio-Gordillo, M. Darouach, C. M. Astorga-Zaragoza and L. Boutat-Baddas, "New

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.6.1]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.51]

[53] S. Xu and J. Lam, Robust control and filtering of singular systems, Vol. 332, Berlin: Springer, 2006 .

[54] W. Xie, "An equivalent LMI representation of bounded real lemma for continuous-time systems," Journal of Inequalities and Applications, vol. 1, p. 672905, 2008 .

[55] H. S. Wang, C. F. Yung and F. R. Chang, "Bounded real lemma and H∞ control for descriptor systems," IEE Proceedings-Control Theory and Applications, vol. 145, no. 3, pp. 316-322, 1998 .

[56] S. Boed, L. EL Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear matrix inequalities in system and control theory, vol. 15, Siam, 1994.

[57] M. Gerdin, Paramete estimation in linear descriptor systems, Linkoping University, Sweden, 2004 .

[58] J. Löfberg, "YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB," in Proceedings of the CACSD Conference, 2004.

[38] Y. Feng and M. Yagoubi, Robust Control of Linear Descriptor Systems, Springer, 2017 .

[39] Y. Uetake, "Adaptive observer for continuous descriptor systems," IEEE Transactions on automatic Control, vol. 39, no. 10, pp. 2095-2100, 1994 .

[40] M. Hou and P. C. Muller, "Design of observers for linear systems with unknown inputs," IEEE Transactions on automatic control, vol. 37, no. 6, pp. 871-875, 1992 .

[41] M. Darouach, M. Zasadzinski and M. Hayar, "Reduced-order observer design for descriptor systems with unknown inputs," IEEE transactions on automatic control, vol. 41, no. 7, pp. 1068-1072, 1996 .

[42] M. Darouach, M. Zasadzinski, A. B. Onana and S. Nowakowski, "Kalman filtering with unknown inputs via optimal state estimation of singular systems," International journal of systems science, vol. 26, no. 10, pp. 2015-2028, 1995 .

[43] X. Mao, N. Koroleva and A. Rodkina, "Robust stability of uncertain stochastic differential delay equations1," Systems & Control Letters, vol. 35, no. 5, pp. 325-336, 1998 .

[44] E. L. Boukas, Control of singular systems with random abrupt changes, Springer Science & Business Media, 2008 .

[45] M. K. Gupta, N. K. Tomar and S. Bhaumik, "On detectability and observer design for rectangular linear descriptor systems," International Journal of Dynamics and Control, vol. 4, no. 4, pp. 438-446, 2016 .

[46] H. Kimura, Chain-scattering approach to H∞ control, Springer Science & Business Media, 1996 .

[47] M. Yuechao and Y. Yifang, "Observer-based H∞ guaranteed cost control for uncertain singular time-delay systems with input saturation," International Journal of Control, Automation and Systems, vol. 14, no. 5, pp. 1254-1261, 2016 .

[48] M. Yuechao and Y. Yifang , "Observer-based H∞ control for uncertain singular time-delay systems with actuator saturation," Optimal Control Applications and Methods, vol. 37, no. 5, pp. 867-884, 2016 .

[49] B. Zheng and R. B. Bapat, "Generalized inverse A (2) T, S and a rank equation," Applied mathematics and computation, vol. 155, no. 2, pp. 407-415, 2004 .

[50] D. C. Lay, Linear algebra and its applications, Greg Tobin, 2006 .

[51] R. E. Skelton, T. Lwasaki and D. E. Griqoriadis, A unified algebraic approach to control design, CRC Press, 1997 .

[52] J. Lan and R. J. Patton, "A new strategy for integration of fault estimation within fault-tolerant control," Automatica, vol. 69, pp. 48-59, 2016 .

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.6.1]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.51]