

# همزمان سازی سیستم های مرتبه کسری آشوبی جنسیو تسی و کولت با استفاده از کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری

علی فیاضی<sup>۱</sup>، حسین احمدی نوبری<sup>۲</sup> حسن فاتحی مرج<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> عضو هیئت علمی، دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، a.fayazi@vru.ac.ir

<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، قطب علمی کنترل و پردازش هوشمند، دانشگاه تهران، noubari@ece.ubc.ca

<sup>۳</sup> استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، h.fatehi@vru.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۰/۵/۱۲، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۰/۱۰/۵)

**چکیده:** در این مقاله یک کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری بر مبنای مد لغزشی برای همزمان سازی سیستم های آشوبی مرتبه کسری با پارامترهای متناسب، با دینامیک کسری پیشنهاد شده است. این کنترل کننده تطبیقی یک PID مرتبه کسری است که ضرایب آن با یک مکانیزم تطبیق مناسب تنظیم خواهند شد. با انتخاب یک سطح لغزش مناسب، ضرایب کنترل کننده با استفاده از روش گرادیان به روز می شوند. به منظور بررسی صحت عملکرد کنترل کننده، کنترل کننده پیشنهادی بر روی سیستم های مرتبه کسری آشوبی جنسیو تسی و کولت اعمال شده است و عملکرد آن به لحاظ خطای همزمان سازی و سیگنال کنترلی با کنترل کننده های تطبیقی مرتبه صحیح و کنترل کننده مد لغزشی مقایسه گردیده است. نتایج شبیه سازی کارایی کنترل کننده پیشنهادی را نشان می دهد.

**کلمات کلیدی:** کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری، کنترل مد لغزشی، سیستم مرتبه کسری آشوبی جنسیو- تسی و کولت، سیستم

پایه و پیرو، همزمان سازی

## Synchronization of Chaotic Fractional-Order Genesio Tesi -Coullet Systems via Fractional-Order Adaptive Controller

Ali Fayazi, Hossein Ahmadi Noubari, Hasan Fatehi Marj

**Abstract:** This paper presents a fractional-order adaptive controller based on sliding mode control for synchronization of commensurate fractional-order chaotic systems. The adaptive controller is a fractional PID controller, which the coefficients will be tuned according to a proper adaptation mechanism. Fractional PID coefficients are updated using the gradient method when a proper sliding surface is chosen. To illustrate the effectiveness and performance of the controller, the proposed controller is implemented on chaotic fractional-order Genesio Tessi and Coullet systems. Performance of fractional-order PID adaptive controller ( $P^{\alpha}I^{\lambda}D^{\mu}$ ) based on synchronization error, and control signal is compared with the conventional adaptive controller (PID) and sliding mode controller (SMC). The simulation results show the efficiency of the proposed controller.

**Keywords:** Fractional-Order Adaptive Controller, Sliding Mode Control, Chaotic Fractional-Order Genesio-Tessi and Coullet systems, Master and Slave System, Synchronization.

## ۱- مقدمه

محاسبات مرتبه کسری نقش بسیار مهمی در زمینه های گوناگون علمی دارد، به خصوص در دهه اخیر کاربرد کنترل مرتبه کسری (FOC) در مهندسی کنترل به عنوان یک موضوع مهم در عرصه تحقیقات بین المللی مطرح شده است [۲۰]. اخیراً دانشمندان نشان دادند که معادلات مرتبه کسری قادرند پدیده های گوناگون را مناسب تر از مرتبه صحیح آن مدل کنند و یک ابزار قدرتمند جهت توصیف ساختارهای یک سیستم با دینامیک پیچیده می باشند. اکثر سیستم های موجود در طبیعت با دینامیک کسری بوده و با تقریب، مرتبه ی آنها صحیح در نظر گرفته می شود. تئوری الکترو مغناطیس [۳] حرکت براونی کسری [۴] دینامیک محیط متخلخل [۵] تئوری راه رفتن تصادفی با پیوستگی زمانی [۶] و تئوری آشوب جزو این دسته از سیستم ها هستند. رفتار آشوبی در زمینه های مختلف علوم و مهندسی مانند مکانیک، برق، فیزیک، پزشکی، زیست شناسی، اقتصاد و ... مشاهده شده است. آشوب در بسیاری از سیستم های کسری وجود دارد و کنترل سیستم آشوبی و همچنین همزمان سازی<sup>۱</sup> دو سیستم آشوبی در سیستم های با دینامیک کسری بسیار حائز اهمیت و پرکاربرد است. از عمده کاربردهای آن می توان به همزمان سازی سیستم های آشوبی در مخابرات امن اشاره نمود. یک هدف مهم در کنترل آشوب متوقف نمودن نوسان های آشوبی و یا کاهش آنها به نوسان های معمول است. سیستم های مرتبه کسری برای کنترل موثرشان معمولاً به کنترل کننده های مرتبه کسری نیاز دارند. کنترل کننده PID سابقه ای طولانی در مهندسی کنترل دارد و بدلیل سادگی ساختار آن از این کنترل کننده برای کنترل بسیاری از فرآیندهای واقعی استفاده می کنند. علیرغم اینکه تاکنون تکنیک های جدید کنترل بسیاری پیشنهاد شده است، اما هنوز در بسیاری از برنامه های کاربردی واقعی صنعتی از کنترل کننده PID بطور گسترده استفاده می شود. بعد از معرفی اولین روش همزمان سازی توسط پکورا و کارول، روش های مختلف کنترل برای همزمان سازی سیستم های آشوبی شامل روش خطی سازی فیدبک [۷]، روش های کنترل فازی [۸ و ۹]، روش ضربه ای [۱۰]، روش گام به عقب [۱۱]، کنترل مد لغزشی [۱۲]، کنترل مد لغزشی فعال [۱۳ و ۱۴]، کنترل تطبیقی [۱۵]، ارایه شده است.

در زمینه همزمان سازی از عملگر کسری جهت معرفی کنترل کننده های کسری و ایجاد یک قانون کنترل جدید و مناسب برای همزمان سازی سیستم های آشوبی با دینامیک کسری استفاده می گردد [۲۱-۱۶].

در [۱۶]، همزمان سازی سیستم های آشوبی مرتبه کسری بحث شده است. در [۱۷]، همزمان سازی دو سیستم همسان کسری<sup>۴</sup> لویه ارایه شده است. در [۲۰]، مساله همزمان سازی برای یک دسته از سیستم های آشوبی

مرتبه کسری بررسی شده است. در [۲۱]، مساله کنترل آشوب و همزمان سازی یک سیستم مکانیکی چرخشی با دینامیک کسری بحث شده است. در این مقاله بر مبنای مد لغزشی یک کنترل کننده PID تطبیقی مرتبه کسری با استفاده از روش گرادیان جهت همزمان سازی سیستم های آشوبی جنسیو تسی و کولت پیشنهاد شده است. در این روش به ازای یک مرتبه کسری مشخص از دینامیک سیستم که سبب ایجاد رفتار آشوبی در سیستم شده است با انتخاب یک سطح لغزش و نرخ یادگیری مناسب، ضرایب PID با استفاده از روش گرادیان توسط یک قانون تطبیق مناسب به روز می شوند.

این مقاله به صورت زیر مرتب شده است. در ادامه و در بخش دوم به معرفی عملگر کسری و مفاهیم پایه مربوط به محاسبات کسری و تحلیل پایداری سیستم های کسری پرداخته شده است. بخش سوم مقاله به طراحی کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری جهت همزمان سازی دو سیستم همسان و غیرهمسان با دینامیک کسری می پردازد. در بخش چهارم مدل دینامیکی دو سیستم آشوبی جنسیو-تسی و کولت معرفی می گردد. بخش پنجم به شبیه سازی مساله همزمان سازی دو سیستم همسان جنسیو-تسی و همچنین همزمان سازی دو سیستم غیر همسان جنسیو-تسی و کولت با استفاده از روش پیشنهادی اختصاص یافته است. در پایان نتایج بدست آمده در بخش ششم جمع بندی شده است.

## ۲- معرفی عملگر کسری

## ۱-۲ مفاهیم و تعاریف پایه

نمایش کلی عملگر مشتق گیر- انتگرال گیر مرتبه کسری را در نظر بگیرد [۲۲]:

$${}_a D_t^q = \begin{cases} \frac{d^q}{dt^q}, & q > 0 \\ 1, & q = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-q}, & q < 0 \end{cases} \quad (1)$$

که در آن  $q$  مرتبه کسری و ثابت  $a$  مربوط به شرایط اولیه است. این عملگر نمادی از عملگر مشتق گیر و انتگرال گیر کسری است. به این ترتیب، که برای  $q$  های مثبت عملگر  ${}_a D_t^q$  نماینده عملگر مشتق گیر و برای  $q$  های منفی عملگر  ${}_a D_t^q$  نماینده عملگر انتگرال گیر است. تعاریفی که به طور معمول برای مشتق بیان می گردد شامل ریمان-لیویل<sup>۵</sup>، گرانوالد-لتنیکوف<sup>۶</sup>، و کاپوتو<sup>۷</sup> است.

<sup>1</sup> Synchronization<sup>2</sup> Impulsive Method<sup>3</sup> Backstepping<sup>4</sup> Lü<sup>5</sup> Riemann-Liouville<sup>6</sup> Grunwald-Letnikov<sup>7</sup> Caputo

متناسب<sup>۱</sup> کسری است. اگر  $q_1 = q_2 = \dots = q_n$  سیستم تعریف شده در رابطه (۷) معرف یک سیستم مرتبه کسری با پارامترهای متناسب است. در غیر این صورت یک سیستم مرتبه کسری با پارامترهای نامتناسب<sup>۲</sup> خواهیم داشت.

## ۲-۲ آنالیز پایداری برای سیستم های مرتبه کسری

پایداری یکی از مهمترین مباحث در طراحی کنترل کننده ها در سیستم های کسری می باشد. در این بخش دو قضیه مهم در پایداری سیستم های کسری مطرح شده است. در این قضایا پایداری سیستم های مرتبه کسری با پارامترهای متناسب<sup>۳</sup> و نامتناسب<sup>۴</sup> بررسی شده است. قضیه ۱ برای سیستم های مرتبه کسری با پارامترهای متناسب مطرح می شود در ادامه پایداری سیستم های مرتبه کسری با پارامترهای نامتناسب را در قضیه ۲ خواهیم داشت.

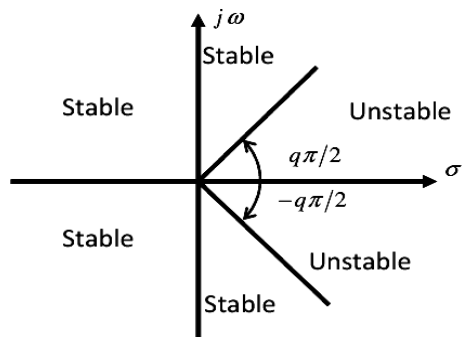
**قضیه ۱:** سیستم خود کار زیر را در نظر بگیرید

$$D_x^q x = Ax, \quad x(0) = x_0 \quad (۸)$$

که در آن  $0 < q \leq 1$  است. این سیستم بطور مجانبی پایدار است اگر و تنها اگر شرط زیر برای همه مقادیر ویژه  $\lambda$  ماتریس  $A$  برقرار باشد [۲۶].

$$|\arg(\lambda)| > q\pi/2 \quad (۹)$$

با برقراری شرط فوق تمام حالت هایی که به فرم  $t^{-q}$  می باشند به سمت صفر میل می کنند. افزون بر این، اگر  $|\arg(\lambda)| > q\pi/2$  سیستم پایدار است. و مقادیر ویژه بحرانی که به ازای آنها  $|\arg(\lambda)| = q\pi/2$  مرز پایداری و ناپایداری را تعیین می کنند. در شکل ۱ محدوده پایداری به ازای  $0 < q < 1$  نمایش داده شده است.



شکل ۱: محدوده پایداری برای سیستم مرتبه کسری خطی با مرتبه  $0 < q < 1$

یک سیستم مرتبه کسری با پارامترهای متناسب را در نظر بگیرید.

**تعریف ۱-** مشتق ریمان-لیوویل به عنوان ساده ترین تعریف مطابق رابطه زیر در نظر بگیرید [۲۳]:

$${}^{RL}_a D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-q)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-(m-q)}} d\tau \quad (۲)$$

که در آن  $m-1 < q < m$  و  $m$  اولین عدد صحیح بزرگتر از  $q$  است. همچنین  $\Gamma(\cdot)$  تابع معروف گاما است. عملگر

$$D_t^{(q)} f(t) = \frac{d^q f(t)}{dt^q}$$

**تعریف ۲-** مشتق گرانوالد-لننیکوف طبق رابطه زیر بیان شده است [۲۴]:

$${}^{GL}_a D_t^q f(t) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left( \frac{N}{t} \right)^q \sum_{j=1}^N \left( \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(-q)\Gamma(j+1)} \right) \left( f\left( \frac{(N-j)t}{N} \right) \right) \right\} \quad (۳)$$

**تعریف ۳-** مشتق کاپوتو طبق رابطه زیر بیان شده است [۲۵]:

$$\begin{cases} {}^C_a D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-q)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{1-(m-q)}} d\tau, & m-1 < q < m \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & q = m \end{cases} \quad (۴)$$

که در آن  $m$  اولین عدد صحیح بزرگتر از  $q$  است. تبدیل لاپلاس مشتق کسری کاپوتو مطابق رابطه زیر بیان می شود:

$$L \left\{ \frac{d^q f(t)}{dt^q} \right\} = s^q L \{ f(t) \} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{q-1-k} f^{(k)}(0) \quad (۵)$$

$$m-1 < q \leq m \in N$$

برخلاف مشتق ریمان-لیوویل فقط مشتق های مرتبه صحیح تابع  $f$  در تبدیل لاپلاس کسری کاپوتو ظاهر می شود. به ازای شرایط اولیه صفر داریم

$$L \left\{ \frac{d^q f(t)}{dt^q} \right\} = s^q L \{ f(t) \} \quad (۶)$$

در ادامه با توجه به تعریف عملگر مشتق گیر در رابطه (۱) نماد  $D^q x(t)$  به عنوان عملگر مشتق کسری کاپوتو از مرتبه  $q$  معرفی می شود. نمایش کلی یک سیستم مرتبه کسری خطی تغییر ناپذیر با زمان را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} D^q x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (۷)$$

که  $x \in R^n$  و  $u \in R^m$  به ترتیب بردارهای حالت، بردارهای ورودی و بردارهای خروجی سیستم می باشند و  $A \in R^{n \times n}$ ،  $C \in R^{p \times n}$ ،  $B \in R^{n \times m}$  و  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$  معرف مرتبه های

<sup>1</sup> Commensurate Orders

<sup>2</sup> Incommensurate Order System

<sup>3</sup> Commensurate

<sup>4</sup> Incommensurate

$$D^q x = f(x) \quad (10)$$

که  $0 < q < 1$  و  $x \in R^n$ . نقاط تعادل سیستم با حل معادله زیر بدست می آید

$$f(x) = 0 \quad (11)$$

این نقاط به صورت محلی و مجانبی پایدار می باشند اگر تمام مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین  $A = \frac{\partial f}{\partial x}$  که در این نقاط تعادل محاسبه شده اند شرط ذکر شده در رابطه (۹) را ارضا کنند [۲۶ و ۲۷]:

**قضیه ۲:** سیستم خطی کسری  $n$  بعدی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x_1}{dt^{q_1}} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \frac{d^{q_2} x_2}{dt^{q_2}} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ \frac{d^{q_n} x_n}{dt^{q_n}} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (12)$$

که  $0 < q_i < 1$ . فرض کنید  $M$  کوچکترین مضرب مشترک معرج های  $(u_i)$  متناظر با  $q_i$  ها باشد. به-

طوری که  $q_i = v_i / u_i, (u_i, v_i) = 1, u_i, v_i \in Z^+, \text{ for } i = 1, 2, \dots, n$  در این وضعیت، معادله مشخصه  $\Delta(\lambda)$  مربوط به سیستم فوق مطابق رابطه زیر تعریف می گردد

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^{Mq_1} - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda^{Mq_2} - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda^{Mq_n} - a_{nn} \end{pmatrix} \quad (13)$$

آنگاه پاسخ صفر سیستم (۱۲) پایدار مجانبی کلی به بیان لیاپانوف است، اگر همه  $\lambda_i$  ها یعنی ریشه های معادله  $\det(\Delta(\lambda)) = 0$  در رابطه  $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\pi}{2M}$  صدق کنند. ماتریس مشخصه و  $\det(\Delta(\lambda)) = 0$  چند جمله ای مشخصه سیستم (۱۲) نامیده می شود [۲۸]. حال سیستم غیرخطی با پارامتر کسری نامتناسب زیر را در نظر بگیرید [۲۹].

$$\frac{d^{q_i} x_i}{dt^{q_i}} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ for } i = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

با فرض اینکه  $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$  نقاط تعادل سیستم باشند و سیستم خطی سازی شده حول این نقاط به صورت زیر باشد

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{q_1} x_1}{dt^{q_1}} \\ \frac{d^{q_2} x_2}{dt^{q_2}} \\ \vdots \\ \frac{d^{q_n} x_n}{dt^{q_n}} \end{bmatrix} = JX \quad (15)$$

که  $J$  ماتریس ژاکوبین سیستم (۱۴) می باشد. نقاط  $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$  به صورت مجانبی پایدار هستند اگر شرط زیر برقرار باشد.

$$|\arg(\lambda)| > \frac{\pi}{2M} \quad (16)$$

$\lambda$  ریشه های  $\det(\text{diag}(\lambda^{Mq_1}, \lambda^{Mq_2}, \dots, \lambda^{Mq_n}) - J) = 0$  بوده و  $M$  کوچکترین مضرب مشترک  $u_i$  و  $q_i$  می باشد. همچنین  $\text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n)$  نشان دهنده ماتریس قطری زیر می باشد.

$$\text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n) = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \quad (17)$$

مهمترین مزیت بیان کسری یک سیستم در تحلیل پایداری این است که تمام پارامترهای سیستم در محدوده پایداری می توانند تحت تاثیر مرتبه  $q$  قرار گیرند و این بدین معنی است که بیان مرتبه کسری از یک سیستم در مقایسه با بیان مرتبه صحیح آن در شرایط یکسان می تواند شرایط بهتری از نظر تحلیل پایداری و فرآیند طراحی فراهم کند. در سیستم های مرتبه کسری ناحیه پایداری به صورت قطاعی می باشد و با تغییر پارامترهای کسری در سیستم های مرتبه کسری وضعیت پایداری یا ناپایداری آن ها تغییر خواهد کرد. در این مقاله سیستم های آشوبی مرتبه کسری با پارامترهای متناسب<sup>۱</sup> بررسی شده است.

### ۳- طراحی کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری

در این بخش روش طراحی کنترل کننده PID تطبیقی کسری به منظور همزمان سازی دو سیستم آشوبی همسان و همچنین همزمان سازی دو سیستم آشوبی غیرهمسان با دینامیک کسری ارائه شده است. در این روش ضرایب کنترل کننده PID با یک قانون تطبیق مناسب و با تکنیک گرادینان محاسبه می شوند. پایداری حلقه بسته سیستم در حضور کنترل کننده PID تطبیقی تضمین شده است [۳۰].

همزمان سازی برای دو حالت زیر انجام خواهد شد.

<sup>1</sup> Commensurate fractional-order chaotic system

کنترل کننده PID با دینامیک کسری با توجه به خطای دینامیکی سیستم به صورت زیر است:

$$u_{PID}(t) = K_p D^\alpha e_1(t) + K_I D^\lambda e_1(t) + K_D D^\mu e_1(t) \quad (21)$$

که در آن  $u_{PID} = u$  و ضرایب PID با استفاده از الگوریتمی بر مبنای روش گرادین تنظیم خواهند شد. واضح است با قرار دادن  $\alpha = 0, \lambda = -1, \mu = 1$  کنترل کننده PID مرتبه صحیح خواهیم داشت. بنابراین با اضافه شدن سه پارامتر به سیستم، درجه آزادی کنترل کننده بیشتر خواهد شد و آزادی عمل بیشتری در طراحی یک کنترل کننده پایدار خواهیم داشت. محدوده پارامترهای کنترل کننده کسری به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} -1 \leq \alpha < 0 \\ -1 \leq \lambda < -2 \\ 0 \leq \mu < 1 \end{aligned} \quad (22)$$

به منظور تعیین قانون تطبیقی سیگنال طراحی  $y_r$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$D^{nq} y_r = D^{nq} x_n + \dots + k_2 D^q e_1 + k_1 e_1 \quad (23)$$

همچنین سطح لغزشی به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$S = y_n - y_r \quad (24)$$

مد لغزشی به ازای  $S = 0$  فعال خواهد بود و به این ترتیب داریم:

$$y_n = y_r \quad (25)$$

لذا، با جایگذاری (25) در (23) خواهیم داشت:

$$D^{nq} e_1 + \dots + k_2 D^q e_1 + k_1 e_1 = 0 \quad (26)$$

فرم فضای حالت رابطه فوق به صورت زیر است:

$$\begin{cases} D^q e_1 = e_2 \\ D^q e_2 = e_3 \\ \vdots \\ D^q e_n = -k_1 e_1 - k_2 e_2 - \dots - k_n e_n \end{cases} \Rightarrow D^q E = AE \quad (27)$$

که  $A$  ماتریس ضرایب بردار خطای سیستم  $E$  است. بنابراین، ماتریس  $A$  و ماتریس  $E$  را می توان به ترتیب (28) و (29) به صورت زیر بیان نمود:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \dots & -k_n \end{bmatrix} \quad (28)$$

**حالت اول:** دو سیستم آشوبی همسان با دینامیک یکسان و شرایط اولیه متفاوت می باشند. یک سیستم به عنوان سیستم پایه<sup>۱</sup> و دیگری به عنوان سیستم پیرو<sup>۲</sup> انتخاب خواهد شد.

**حالت دوم:** دو سیستم آشوبی غیرهمسان با دینامیک متفاوت و شرایط اولیه متفاوت می باشند. یک سیستم به عنوان سیستم پایه و دیگری به عنوان سیستم پیرو انتخاب خواهد شد.

در هر دو حالت فوق از دیدگاه کنترل هدف طراحی کنترل کننده ای می باشد که در یک مدت زمان معقول رفتار حالت های سیستم پیرو را همانند سیستم پایه نماید. به منظور طراحی کنترل کننده جهت تحقق هدف تعریف شده، دو سیستم مرتبه  $n$  با دینامیک کسری را مطابق معادلات زیر به ترتیب به عنوان سیستم پایه و سیستم پیرو معرفی می کنیم:

$$\begin{aligned} D^q x_1 &= x_2 \\ D^q x_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ D^q x_n &= f_1(X, t), \end{aligned} \quad (18)$$

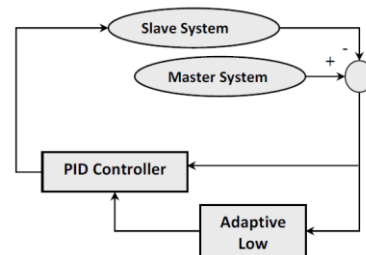
$$\begin{aligned} D^q y_1 &= y_2 \\ D^q y_2 &= y_3 \\ &\vdots \\ D^q y_n &= f_2(Y, t) + u(t) \end{aligned} \quad (19)$$

که  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  و  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$  به ترتیب حالت های سیستم پایه و سیستم پیرو می باشند و  $0 < q < 1$ . توابع غیر خطی  $f_1(X, t)$  و  $f_2(Y, t)$  به ترتیب معرف دینامیک سیستم های پایه و پیرو می باشند.  $u(t)$  معرف سیگنال کنترلی است که جهت همزمان سازی سیستم های پایه و پیرو، توسط کنترل کننده پیشنهادی فراهم خواهد شد.

به منظور رسیدن به سیگنال کنترلی مناسب  $u(t)$  خطای همزمان سازی را تعریف می کنیم:

$$e_i = x_i - y_i, \text{ for } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (20)$$

نمایش بلوکی سیستم حلقه بسته در شکل ۲ نمایش داده شده است.



شکل ۲: نمایش بلوکی سیستم حلقه بسته کنترل کننده تطبیقی PID مرتبه کسری

<sup>1</sup> Master  
<sup>2</sup> Slave

و همچنین شرایط اولیه ضرایب PID در پایداری تاثیر گذار خواهد بود. بدیهی است با قراردادن  $q = 1$  در معادلات فوق مکانیزم کلاسیک تطبیق حاصل خواهد شد [۳۰]. برای داشتن یک قانون تطبیق غیر کسری و برای سادگی محاسبات، مقادیر کسری کنترل کننده PID به صورت زیر انتخاب می شوند:

$$\begin{aligned}\alpha &= q - 1 \\ \lambda &= q - 2 \\ \mu &= q\end{aligned}\quad (36)$$

به این ترتیب، (۳۵) به عنوان قانون تطبیق به صورت زیر ساده خواهد شد:

$$\begin{aligned}\dot{K}_p &= -\gamma S e_1(t) \\ \dot{K}_I &= -\gamma S \int_0^t e_1(\tau) d\tau \\ \dot{K}_D &= -\gamma S \frac{d}{dt} e_1(t)\end{aligned}\quad (37)$$

با توجه به روابط فوق مشاهده می شود که با انتخاب پارامترهای  $\alpha$ ،  $\lambda$  و  $\mu$  مطابق (۳۷) قانون تطبیق بسیار ساده خواهد شد. با این وجود باید توجه داشت که برای پارامترهای آزادی سیستم محدودیت ایجاد شده است. البته این محدودیت در شبیه سازی اعمال نشده است. بلکه با استفاده از روش سعی و خطا یکی از مناسبترین مقادیر برای پارامترهای کسری کنترل کننده انتخاب شده است.

#### ۴- معرفی دینامیک سیستم های آشوبی جنسیو تسی و کولت

معادلات دینامیکی دو سیستم آشوبی جنسیو-تسی و کولت به ترتیب (۳۸) و (۳۹) در نظر بگیرد [۳۱ و ۳۲]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3\end{aligned}\quad (38)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_3 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + x_1^2 \\ \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ \dot{y}_3 &= b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 - y_1^3\end{aligned}\quad (39)$$

این دو سیستم به ازای  $a_3 = b_3 = -0.45 < 0$  و  $a_1 = -1 < 0$ ،  $b_1 = 0.8 > 0$  و  $a_2 = b_2 = -1.1 < 0$  رفتار آشوبی از خود نشان می دهند. نمودار صفحه فاز سیستم آشوبی جنسیو تسی و کولت، که معرف جاذب های آشوبی در این سیستم ها است. به- ترتیب در شکل ۳ و ۴ نمایش داده شده اند.

$$E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}\quad (29)$$

با انتخاب مناسب مقادیر  $k_i$  شرط پایداری سیستم با دینامیک کسری ( $|\arg(\lambda)| > q\pi/2$ ) ارضا خواهد شد به گونه ای که برای  $t \rightarrow \infty$  مقدار خطا به صفر میل خواهد کرد. برای برقراری شرط لغزش به منظور تأمین پایداری کنترل کننده تابع لیپانوف را به صورت زیر معرفی می کنیم:

$$V(t) = \frac{1}{2} S^2(t)\quad (30)$$

شرط لغزش به صورت رابطه زیر تعریف می شود:

$$\dot{V}(t) = S(t)\dot{S}(t) < 0\quad (31)$$

در صورت برقراری شرط بالا داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) \rightarrow 0\quad (32)$$

برای رسیدن به یک مکانیزم تطبیق مناسب برای تعیین ضرایب PID روش گرادیان به منظور کمینه کردن شرط لغزش اعمال می شود. الگوریتم جستجوی گرادیان بر خلاف مسیر انرژی محاسبه خواهد شد و در نتیجه همگرایی ضرایب کنترل کننده تضمین می گردد [۳۰]. همچنین تحت این قانون تطبیق ضرایب کنترل کننده بدست خواهد آمد. با در نظر گرفتن  $\dot{S}$ ، به عنوان تابع خطا [۳۰] با استفاده از (۱۹) و (۲۴) رابطه زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= \dot{y}_n - \dot{y}_r = D^{1-q}(D^q(y_n)) - \dot{y}_r = \\ &= D^{1-q}(f(Y, t) + u_{PID}(t)) - \dot{y}_r\end{aligned}\quad (33)$$

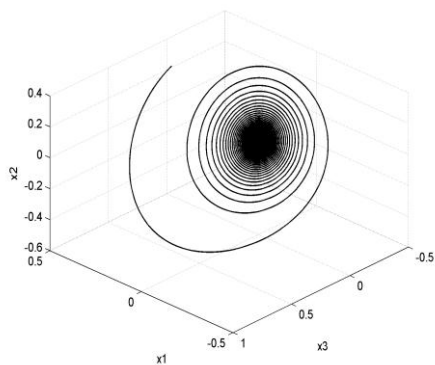
با ضرب طرفین (۳۳) در  $S$  داریم:

$$\begin{aligned}S(t)\dot{S}(t) &= \\ S(t)[D^{1-q}(f(Y, t) + u_{PID}(t)) - \dot{y}_r]\end{aligned}\quad (34)$$

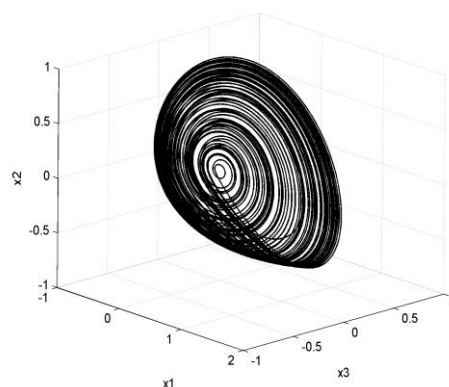
در نهایت با استفاده از روش گرادیان ضرایب PID به صورت رابطه زیر به روز می شوند:

$$\begin{aligned}\dot{K}_p &= -\gamma \frac{\partial \dot{S}}{\partial K_p} = -\gamma \frac{\partial \dot{S}}{\partial u_{PID}} \frac{\partial u_{PID}}{\partial K_p} = -\gamma S D^{1-q}(D^q e_1(t)) \\ \dot{K}_I &= -\gamma \frac{\partial \dot{S}}{\partial K_I} = -\gamma \frac{\partial \dot{S}}{\partial u_{PID}} \frac{\partial u_{PID}}{\partial K_I} = -\gamma S D^{1-q}(D^q e_1(t)) \\ \dot{K}_D &= -\gamma \frac{\partial \dot{S}}{\partial K_D} = -\gamma \frac{\partial \dot{S}}{\partial u_{PID}} \frac{\partial u_{PID}}{\partial K_D} = -\gamma S D^{1-q}(D^q e_1(t))\end{aligned}\quad (35)$$

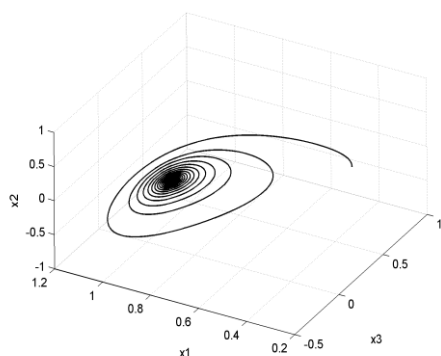
که در (۳۵) تعیین کننده نرخ یادگیری است و باید با توجه به شرایط مساله بطور مناسب انتخاب گردد. انتخاب نامناسب نرخ یادگیری



شکل ۵: رفتار غیر آشوبی سیستم جنسیو-تسی با دینامیک کسری به ازای  $q=0.91$



شکل ۳: منحنی جاذب آشوبی سیستم جنسیو-تسی



شکل ۶: رفتار غیر آشوبی سیستم کولت با دینامیک کسری به ازای  $q=0.86$  با توجه به شکل های ۵ و ۶ مشاهده می شود با انتخاب  $q$  کمتر از محدوده تعیین شده در (۴۲) و (۴۳) به ترتیب سیستم آشوبی جنسیو تسی و کولت خاصیت آشوبی خود را از دست داده و به سمت پایداری میل می کنند. به منظور ارزیابی عملکرد کنترل کننده پیشنهادی در بخش بعد الگوریتم پیشنهادی جهت همزمان سازی دو سیستم آشوبی همسان جنسیو-تسی با مقادیر اولیه متفاوت و همچنین همزمان سازی دو سیستم آشوبی غیرهمسان جنسیو-تسی و کولت با مقادیر اولیه متفاوت پیاده سازی خواهد شد.

## ۵- شبیه سازی

شبیه سازی عددی با استفاده از سیمولینک متلب انجام شده است و برای حل مجموعه معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری مربوط به سیستم های پایه و پیرو از جعبه ابزار CRONE و حل کننده رانگ-کوتا<sup>۱</sup> با اندازه گام های ثابت<sup>۲</sup>  $0.0001$  استفاده شده است. قابل ذکر است مقادیر پارامترهای شبیه سازی بر اساس سعی و خطا محاسبه شده است و سعی شده است در شرایط یکسان یک پاسخ مطلوب برای هر دو حالت بدست آید. البته این مقادیر بهینه نمی باشند. برای محاسبه مقادیر بهینه می توان از

شکل ۴: منحنی جاذب آشوبی سیستم کولت

دینامیک کسری سیستم های جنسیو-تسی و کولت را به ترتیب (۴۰) و (۴۱) در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned} D^q x_1 &= x_2 \\ D^q x_2 &= x_3 \end{aligned} \quad (40)$$

$$D^q x_3 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + x_1^2$$

$$\begin{aligned} D^q y_1 &= y_2 \\ D^q y_2 &= y_3 \end{aligned} \quad (41)$$

$$D^q y_3 = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 - y_1^3$$

با توجه به (۹) محدوده  $q$  برای داشتن رفتار آشوبی در سیستم های جنسیو-تسی و کولت به ترتیب (۴۲) و (۴۳) بدست می آید.

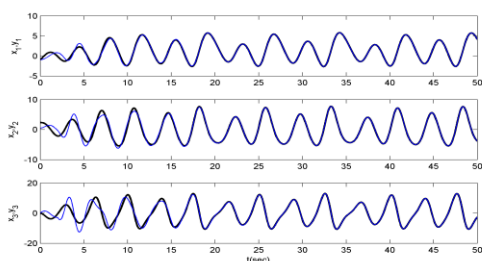
$$q > 0.9262 \quad (42)$$

$$q > 0.8656 \quad (43)$$

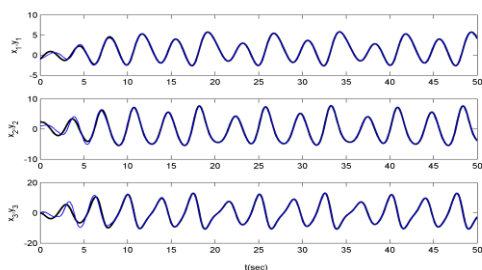
نمودار صفحه فاز سیستم جنسیو-تسی و کولت با دینامیک کسری، به ترتیب به ازای  $q=0.91$  و  $q=0.86$  در شکل ۵ و ۶ نشان داده شده اند.

<sup>1</sup> Runge-Kutta solver

<sup>2</sup> Fixed step size



شکل ۷: پاسخ زمانی متغیرهای حالت سیستم پایه و پیرو همزمان سازی شده با

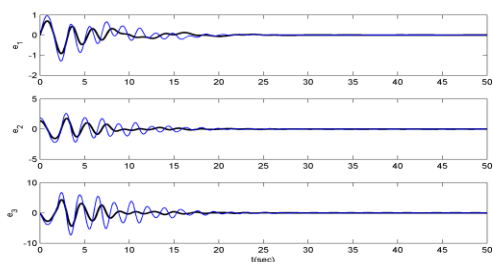
اعمال کنترل کننده تطبیقی مرتبه صحیح در  $t=2 \text{ sec}$ 

شکل ۸: پاسخ زمانی متغیرهای حالت سیستم پایه و پیرو همزمان سازی شده

با اعمال کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری در  $t=2 \text{ sec}$ 

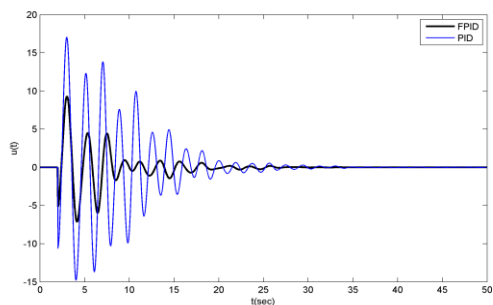
همان گونه که از شکل های ۷ و ۸ مشاهده می گردد، با فعال شدن سیگنال کنترلی در لحظه  $t = 2 \text{ sec}$  متغیرهای حالت سیستم پایه و پیرو همدیگر را به خوبی دنبال می کنند. خطای همزمان سازی مربوط به کنترل کننده تطبیقی مرتبه صحیح و کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری در شکل ۹ نشان داده شده است.

همچنین سیگنال کنترلی مربوط به کنترل کننده تطبیقی مرتبه صحیح و کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری در شکل ۱۰ نشان داده شده است



شکل ۹: خطای بین متغیرهای حالت سیستم پایه و پیرو با اعمال کنترل کننده

تطبیقی صحیح و کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری



شکل ۱۰: سیگنال کنترلی مربوط کنترل کننده تطبیقی صحیح و کنترل کننده

تطبیقی مرتبه کسری

روش الگوریتم ژنتیک استفاده نمود. در هر صورت با وجود اینکه مقادیر بدست آمده برای پارامترهای کنترل کننده پیشنهادی بهینه نمی باشند تفاوت میان کنترل کننده مرتبه صحیح (PID) و کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری ( $P^q I^\lambda D^\mu$ ) برای دو حالت براحتی مشهود است.

## ۵-۱ همزمان سازی دو سیستم آشوبی همسان جنسیو

### تسی با دینامیک کسری

یکی از مهمترین خواصی که در مورد سیستم های آشوبی مطرح می گردد حساسیت این سیستم ها به مقادیر اولیه است. بنابراین همزمان سازی دو سیستم آشوبی همسان با شرایط اولیه متفاوت دارای اهمیت است. به منظور همزمان سازی دو سیستم آشوبی همسان جنسیو-تسی با دینامیک کسری، یک سیستم را به عنوان سیستم پایه و دیگری به عنوان سیستم پیرو در نظر گرفته و سیگنال کنترلی  $u(t)$  را به سیستم پیرو اضافه می کنیم.  $u(t)$  سیگنال کنترلی جهت همزمان سازی سیستم های پایه و پیرو می باشد. هدف از طراحی کنترل کننده همزمان سازی سیستم های پایه و پیرو می باشد. بنابراین، سیستم های پایه و پیرو را به ترتیب به صورت رابطه های زیر در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned} D^q x_1 &= x_2 \\ D^q x_2 &= x_3 \end{aligned} \quad (44)$$

$$D^q x_3 = -x_1 - 1.1x_2 - 0.45x_3 + x_1^2$$

$$\begin{aligned} D^q y_1 &= y_2 \\ D^q y_2 &= y_3 \end{aligned} \quad (45)$$

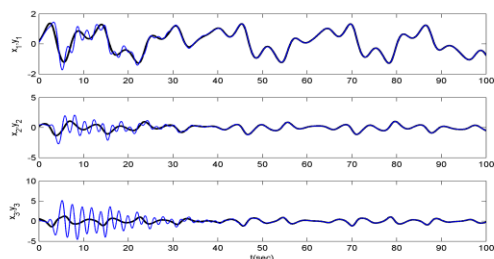
$$D^q y_3 = -y_1 - 1.1y_2 - 0.45y_3 + y_1^2 + u(t)$$

پارامترهای شبیه سازی برای دو سیستم آشوبی جنسیو-تسی پایه و پیرو با دینامیک کسری به ترتیب  $a_1 = -1, a_2 = -1.1, a_3 = -0.45$  انتخاب شده است. مقادیر اولیه حالت ها برای دو سیستم متفاوت و به صورت  $[x_1(0), x_2(0), x_3(0)] = [-1.0038, 2.3548, -0.086]$  و  $[y_1(0), y_2(0), y_3(0)] = [-1, 0.5, 0]$  انتخاب شده اند. همچنین مقادیر اولیه ضرایب کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری ( $P^q I^\lambda D^\mu$ ) مطابق جدول ۱ انتخاب گردیده اند.

جدول ۱: مقادیر پارامترهای شبیه سازی مربوط به کنترل کننده برای حالت اول

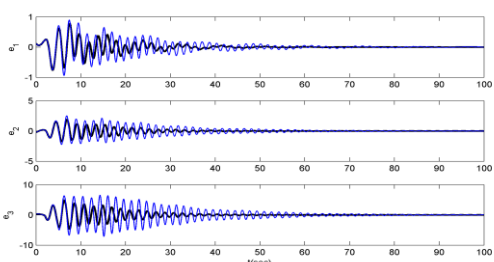
| Simulation Parameters | $\gamma$ | $k_p(0)$ | $k_I(0)$ | $k_D(0)$ | $\alpha$ | $\lambda$ | $\mu$ |
|-----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-------|
| Value                 | 0.1      | 5        | 5        | 5        | -0.7     | -1.2      | 0.98  |

شکل های ۷ و ۸ به ترتیب پاسخ زمانی متغیرهای حالت دو سیستم پایه و پیرو مربوط به کنترل کننده تطبیقی مرتبه صحیح (PID) و کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری ( $P^q I^\lambda D^\mu$ ) را به ازای  $q = 0.98$  نشان می دهند.



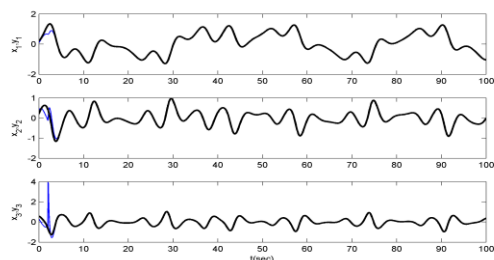
شکل ۱۲: پاسخ زمانی متغیرهای حالت سیستم پایه و پیرو همزمان سازی شده با اعمال کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری در  $t=2 \text{ sec}$

همان گونه که از شکل های ۱۱ و ۱۲ مشاهده می گردد، با فعال شدن سیگنال کنترلی در لحظه  $t=2 \text{ sec}$  متغیرهای حالت سیستم پایه و پیرو همدیگر را به خوبی دنبال می کنند. خطای همزمان سازی مربوط به کنترل کننده تطبیقی مرتبه صحیح و کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری در شکل ۱۳ نشان داده شده است.



شکل ۱۳: خطای بین متغیرهای حالت سیستم پایه و پیرو با اعمال کنترل کننده تطبیقی صحیح و کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری

همان گونه از شکل ۱۳ ملاحظه می گردد، با وجود این که خطای همزمان سازی به ازای کنترل کننده تطبیقی مرتبه صحیح کم می باشد حتی با اعمال کنترل کننده تطبیقی با دینامیک کسری این خطا بسیار کمتر شده است. خطای کمترین مربعات بین حالت های سیستم های پایه و پیرو به ازای کنترل کننده تطبیقی مرتبه صحیح، کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری و کنترل کننده مد لغزشی به صورت کمی در جدول ۳ مقایسه شده است. همچنین نتایج همزمان سازی مربوط به کنترل کننده مد لغزشی به ازای  $q=0.98$  در شکل ۱۴ نشان داده شده است.



شکل ۱۴: پاسخ زمانی متغیرهای حالت سیستم پایه و پیرو همزمان سازی شده با اعمال کنترل کننده مد لغزشی

همچنین سیگنال کنترلی مربوط به کنترل کننده مد لغزشی، کنترل کننده تطبیقی صحیح و کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری در شکل ۱۵ نشان داده شده است.

## ۵-۲ همزمان سازی دو سیستم آشوبی غیرهمسان

### جنسیو تسی و کولت با دینامیک کسری

به منظور همزمان سازی دو سیستم جنسیو-تسی و کولت با دینامیک کسری، سیستم آشوبی کولت با مقادیر اولیه  $[x_1(0), x_2(0), x_3(0)] = [0.22, 0.21, 0.61]$  به عنوان سیستم پایه و سیستم آشوبی جنسیو-تسی، با مقادیر اولیه  $[y_1(0), y_2(0), y_3(0)] = [0.1, 0.41, 0.31]$  به عنوان سیستم پیرو در نظر گرفته شده است. بنابراین ورودی کنترل  $u(t)$  را به سیستم جنسیو-تسی اضافه می کنیم.  $u(t)$  سیگنال کنترلی جهت همزمان سازی سیستم های پایه و پیرو می باشد. هدف از طراحی کنترل کننده همزمان سازی سیستم های پایه و پیرو می باشد بنابراین، سیستم های پایه و پیرو را به ترتیب به صورت رابطه های زیر در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned} D^q x_1 &= x_2 \\ D^q x_2 &= x_3 \\ D^q x_3 &= 0.8x_1 - 1.1x_2 - 0.45x_3 - x_1^3 \end{aligned} \quad (46)$$

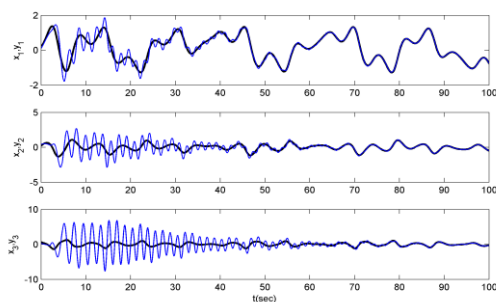
$$\begin{aligned} D^q y_1 &= y_2 \\ D^q y_2 &= y_3 \\ D^q y_3 &= -y_1 - 1.1y_2 - 0.45y_3 + y_1^2 + u(t) \end{aligned} \quad (47)$$

پارامترهای شبیه سازی برای سیستم جنسیو-تسی با دینامیک کسری و پارامترهای سیستم کولت با دینامیک کسری مطابق بخش ۴ انتخاب شده است. مقادیر اولیه ضرایب کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری مطابق جدول ۲ انتخاب گردیده اند.

جدول ۲: مقادیر پارامترهای شبیه سازی مربوط به کنترل کننده برای حالت دوم

| Simulation Parameters | $\gamma$ | $k_p(0)$ | $k_I(0)$ | $k_D(0)$ | $\alpha$ | $\lambda$ | $\mu$ |
|-----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-------|
| Value                 | 0.1      | 5        | 5        | 5        | -0.5     | -1.2      | 0.98  |

نتایج همزمان سازی سیستم پایه و پیرو مربوط به کنترل کننده تطبیقی مرتبه صحیح و کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری به ازای  $q=0.98$  به ترتیب در شکل های ۱۱ و ۱۲ نشان داده شده است.

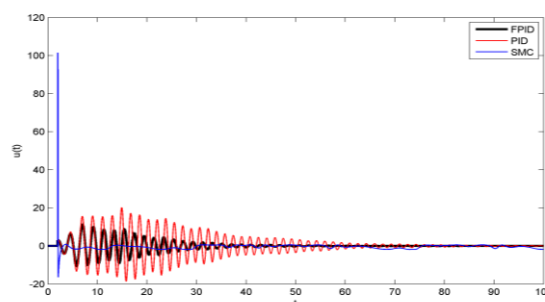


شکل ۱۱: پاسخ زمانی متغیرهای حالت سیستم پایه و پیرو همزمان سازی شده با اعمال کنترل کننده تطبیقی مرتبه صحیح در  $t=2 \text{ sec}$

کننده PID تطبیقی مرتبه کسری به لحاظ بیشینه سیگنال کنترلی نسبت به کنترل کننده PID تطبیقی مرتبه صحیح و کنترل کننده مد لغزشی عملکرد بهتری دارد و برای همزمان سازی به دامنه سیگنال کنترلی کوچک تر نیاز دارد. ضمن اینکه کنترل کننده مد لغزشی به لحاظ سرعت همزمان سازی و پایدار سازی نسبت به کنترل کننده پیشنهادی عملکرد مناسبتری دارد اما دامنه سیگنال کنترلی آن نسبت به کنترل کننده پیشنهادی بسیار بزرگ است. بنابراین در مواردی از مسائل همزمان سازی که در آن دامنه سیگنال کنترلی اهمیت دارد، استفاده از کنترل کننده تطبیقی مناسب است. ضمن اینکه با توجه به شرایط و خواسته های موجود می توان از هر سه کنترل کننده مد لغزشی، تطبیقی مرتبه صحیح و تطبیقی مرتبه کسری استفاده مفید و بهینه نمود.

## مراجع

- [1] Ma. Chengbin, Fractional Order Control and Its Applications in Motion Control. A Doctral Dissertation, Department of Electrical Engineering, The University of Tokyo, 2004.
- [2] O. Valério, Fractional Robust System Control, PhD thesis, 2005.
- [3] IS. Jesus and JA. Tenreiro Machado, "Implementation of fractional-order electromagnetic potential through a genetic algorithm," Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 14, No. 5, pp. 1838-1843, 2009.
- [4] T. Sottinen, "Fractional Brownian motion, random walks and binary market models," Finance Stochastics, Vol. 5, pp. 343-355, 2001.
- [5] ZF. Dholkawala, HK. Sarma and SI. Kam, "Application of fractional flow theory to foams in porous media," Petroleum Science and Engineering, Vol. 57, Issues. 1-2, pp. 152-165, 2007.
- [6] R. Hilfer, "On fractional diffusion and continuous time random walks," Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Vol. 329, Issues. 1-2, pp. 35-40, 2003.
- [7] MT. Yassen, "Controlling Chaos and synchronization for new chaotic system using linear feedback control," Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 26, No. 3, pp. 913, 92, 2005.
- [8] C. S. Chen, H.H. Chen, "Robust adaptive neural-fuzzy-network control for the synchronization of uncertain chaotic systems," Nonlinear Analysis: Real World Applications, Vol. 10, pp. 1466-1479, 2009.
- [9] S. Li, Z. Ge "Generalized synchronization of chaotic systems with different orders by fuzzy logic constant controller," Expert Systems With Applications, Vol.38, pp. 2302-231, 2011.
- [10] M. Haeri, M. Dehghani, "Robust stability of impulsive synchronization in hyperchaotic



شکل ۱۵: سیگنال کنترلی مربوط کنترل کننده تطبیقی صحیح و کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری و کنترل کننده مد لغزشی

همان گونه که از شکل ۱۴ ملاحظه می گردد، سرعت همزمان سازی کنترل کننده مد لغزشی نسبت به کنترل کننده پیشنهادی بیشتر است. اما با توجه به شکل ۱۵ ملاحظه می شود که بیشینه سیگنال کنترلی در کنترل کننده مد لغزشی نسبت به کنترل کننده پیشنهادی ( $P^q I^q D^q$ ) بسیار بزرگ تر است. مقادیر بیشینه سیگنال کنترلی در کنترل کننده تطبیقی مرتبه صحیح، کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری و کنترل کننده مد لغزشی به صورت کمی در جدول ۴ مقایسه شده است.

جدول ۳: خطای کمترین مربعات بین حالت های سیستم های پایه و پیرو به ازای کنترل کننده تطبیقی مرتبه صحیح (PID)، کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری ( $P^q I^q D^q$ ) و کنترل کننده مد لغزشی (SMC)

| q               |                | q=0.98 | q=0.96 | q=0.95 | q=0.93 |
|-----------------|----------------|--------|--------|--------|--------|
| Controller Type | e <sub>1</sub> | 0.0403 | 0.0225 | 0.0172 | 0.0183 |
|                 | e <sub>2</sub> | 0.3439 | 0.1836 | 0.1389 | 0.0769 |
|                 | e <sub>3</sub> | 3.5146 | 1.9931 | 1.6026 | 1.1237 |
|                 | e <sub>4</sub> | 3.5146 | 1.9931 | 1.6026 | 1.1237 |
| FPID            | e <sub>1</sub> | 0.0234 | 0.0162 | 0.0148 | 0.0152 |
|                 | e <sub>2</sub> | 0.1467 | 0.1127 | 0.1155 | 0.1023 |
|                 | e <sub>3</sub> | 1.1291 | 0.7339 | 0.6789 | 0.4359 |
| SMC             | e <sub>1</sub> | 0.0043 | 0.0038 | 0.0035 | 0.0030 |
|                 | e <sub>2</sub> | 0.0044 | 0.0039 | 0.0037 | 0.0032 |
|                 | e <sub>3</sub> | 0.0331 | 0.0315 | 0.0308 | 0.0225 |

جدول ۴: بیشینه سیگنال کنترلی مربوط به کنترل کننده تطبیقی مرتبه صحیح (PID)، کنترل کننده تطبیقی مرتبه کسری ( $P^q I^q D^q$ ) و کنترل کننده مد لغزشی (SMC)

| q               |                | q=0.98   | q=0.96   | q=0.95  | q=0.93  |
|-----------------|----------------|----------|----------|---------|---------|
| Controller Type | e <sub>1</sub> | 23.1487  | 22.1743  | 21.5946 | 20.4491 |
|                 | e <sub>2</sub> | 11.5679  | 10.5274  | 10.0259 | 8.0398  |
|                 | e <sub>3</sub> | 101.5685 | 100.0968 | 98.7933 | 96.3575 |
|                 | e <sub>4</sub> | 101.5685 | 100.0968 | 98.7933 | 96.3575 |
| FPID            | e <sub>1</sub> | 11.5679  | 10.5274  | 10.0259 | 8.0398  |
|                 | e <sub>2</sub> | 11.5679  | 10.5274  | 10.0259 | 8.0398  |
|                 | e <sub>3</sub> | 101.5685 | 100.0968 | 98.7933 | 96.3575 |
| SMC             | e <sub>1</sub> | 11.5679  | 10.5274  | 10.0259 | 8.0398  |
|                 | e <sub>2</sub> | 11.5679  | 10.5274  | 10.0259 | 8.0398  |
|                 | e <sub>3</sub> | 101.5685 | 100.0968 | 98.7933 | 96.3575 |

## ۶- نتیجه گیری

در این مقاله یک کنترل کننده PID تطبیقی مرتبه کسری بر مبنای مد لغزشی برای همزمان سازی دو سیستم آشوبی همسان جنسیو-تسی با دینامیک کسری و همچنین همزمان سازی دو سیستم آشوبی غیر همسان جنسیو-تسی و کولت طراحی گردید. نتایج شبیه سازی نشان داد کنترل

- [23] K. Miller, B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, A Wiley-Interscience Publication, San Fransisco, 1993.
- [24] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, New York, 1999.
- [25] M. Caputo, "Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II" Geophys, JR Astron. Soc, Vol. 13, pp. 529-539, 1967.
- [26] D. Matignon, "Stability results for fractional differential equations with applications to control processing", in: Computational Engineering in Systems Applications, in: IEEE-SMC, Vol. 2, pp. 963-968, 1996.
- [27] E. Ahmed, A. M. A. El-Sayed and H. A. A. El-Saka, "Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional order predator-prey and rabies models", Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 325, No. 1, pp. 542-553, 2007.
- [28] W. Deng, C. Li and J. Lü, "Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays," Nonlinear Dynamics, Vol. 48, pp. 409-416, 2007.
- [29] M. S. Tavazoei and M. Haeri, "Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems," Physica D, Vol. 237, pp. 2628-2637, 2008.
- [30] W. D Chang and J. J Yan, "Adaptive robust PID controller design based on a sliding mode for uncertain chaotic systems" Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 26, No. 1, pp. 167-175, 2005.
- [31] R. Genesio and A. Tesi, "harmonic balance methods for the analysis of chaotic dynamics in nonlinear systems" Automatica, Vol. 28, No. 3, pp. 531-548, 1992.
- [32] A. Arnéodo, P. Couillet and C. Tresser, "Possible new strange attractors with spiral structure" Communication in Mathematical Physics, Vol. 79, No. 4, pp. 573-579, 1981.
- systems," Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol.14, pp. 880-891, 2009.
- [11] Jian-Bing Hu, Han Yan, Zhao Ling-Dong. "Synchronization in the Genesio Tesi and Couillet systems using the backstepping approach," Journal of Physics, Vol.96, pp.1-6, 2008.
- [12] Zh. Hao, Ma. Xi Kui and Liu. Wei Zeng, "Synchronization of chaotic systems with parametric uncertainty using active sliding mode control," Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 21, No. 3, pp. 1249-1257, 2004.
- [13] M. S. Tavazoei and M. Haeri, "Determination of active sliding mode controller parameters in synchronizing different chaotic systems," Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 32, No. 2, pp. 583-591, 2007.
- [14] M. S. Tavazoei and M. Haeri, "Synchronization of chaotic fractional-order systems via active sliding mode controller," Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Vol. 387, Issue 1, pp. 57-70, 2008.
- [15] H. T Yau, "Design of adaptive sliding mode controller for chaos synchronization with uncertainties," Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 22, No. 2, pp. 341-347, 2004.
- [16] C. Li, X. Liao, J. Yu, "Synchronization of fractional order chaotic systems," Physical Review E, Vol.68, pp. 067203, 2003.
- [17] W. Deng, C. Li, "Chaos synchronization of the fractional Lü system," Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Vol.353, Issues. 1-4, pp. 61-72, 2005.
- [18] J. Wang, Y. Zhang, "Designing synchronization schemes for chaotic fractional-order unified systems," Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 30, No. 5, pp. 1265-1272, 2006.
- [19] L. Pan, W. Zhou, J. Fang, D. Li, "Synchronization and anti-synchronization of new uncertain fractional-order modified unified chaotic systems via novel active pinning control," Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 15, No. 12, pp. 3754-3762, 2010.
- [20] J. Lu, "Synchronization of a class of fractional-order chaotic systems via a scalar transmitted signal," Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 27, No. 2, pp. 519-525, 2006.
- [21] Z. Ge, WR. Jhuang, "Chaos control and synchronization of a fractional order rotational mechanical system with a centrifugal governor," Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 33, No. 1, pp. 270-289, 2007.
- [22] A. J. Calderón, B. M. Vinagre and V. Feliu, "Fractional order control strategies for power electronic buck converters", Signal Processing, Vol. 86 , No. 10 , pp. 2803-2819, 2006.