مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد۱۵، شماره ۱، بهار ۱۴۰۰، صفحه ۱۹-۱

کنترل مقاوم زمان‌بندی بهره سیستم‌های خطی متغیر با پارامتر با پارامترهای زمان‌بندی نامعین در حضور عدم قطعیت‌های نامتغیر با زمان

حسین اسراری[۱]، ایمان محمدزمان[۲]، فیروز اللهوردی‌زاده[۲]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، h.asrari@gmail.com

[۲] استادیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، mohammadzaman@mut.ac.ir

[۲] استادیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، saeed.allahverdizadeh@gmail.com

دریافت: ۱۳۹۸/۰۹/۲۹ ویرایش: ۱۳۹۸/۱۱/۰۷ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۱/۳۰

چکیده: در این مقاله، رویکرد جدیدی در زمینه طراحی کنترل‌کننده پسخورد حالت زمان‌بندی بهره برای سیستم‌های خطی متغیر با پارامتر نامعین ارائه شده است. فرض بر این است که ماتریس‌های فضای حالت این سیستم‌ها، ترکیب خطی از پارامترهای زمان‌بندی نامعین هستند. همچنین فرض می‌شود نامعینی موجود از نوع نامعینی‌های پارامتری نامتغیر با زمان با بازه‌های مشخص است. حضور هم‌زمان مفاهیم زمان‌بندی بهره و نامعینی‌های نامتغیر با زمان، چالشی جدی به حساب می‌آید. زیرا فلسفه زمان‌بندی بهره، تغییرپذیری با زمان است. اما نامعینی‌های نامتغیر با زمان، نامعلوم و ثابت می‌باشند. به منظور مرتفع نمودن این چالش، قانون پسخورد حالت مقاومی پیشنهاد می‌شود که در برابر عدم قطعیت‌های نامتغیر با زمان، مقاوم است. در روش پیشنهادی، مقادیری دلخواه از بازه‌های تعریف شده برای نامعینی‌ها انتخاب شده است. اما الزاما مقادیر انتخاب شده با مقادیر صحیح، یکسان نمی‌باشد. در نتیجه، به منظور محاسبه کنترل‌کننده پیشنهادی، پارامترهای زمان‌بندی جدیدی ارائه شده است. در نهایت، اثبات رویکرد پیشنهادی بر اساس مفهوم لیاپانوف ارائه شده است. برای نمایش اثرگذاری کنترل‌کننده نهایی، روش پیشنهادی برای پایدارسازی نرخ غلتش یک رهگیر نوعی شبیه‌سازی می‌شود. همچنین، نتایج شبیه‌سازی با نتایج تجربی در حضور ماژول INS (Inertial Navigation System) مقایسه شده است.

کلمات کلیدی: سیستم‌های خطی متغیر با پارامتر، نامعینی‌های پارامتری نامتغیر با زمان، زمان‌بندی بهره، پسخورد حالت، نامساوی‌های خطی ماتریسی.

Robust gain-scheduled control of linear parameter-varying systems with uncertain scheduling parameters in the presence of the time-invariant uncertainties

H. Asrari, I. Mohammadzaman, F. Allahverdizadeh

Abstract: In this paper, a new approach is presented to design a gain-scheduled state-feedback controller for uncertain linear parameter-varying systems. It is supposed that the state-space matrices of them are the linear combination of the uncertain scheduling parameters. It is assumed that the existed uncertainties are of type of time-invariant parametric uncertainties with specified intervals. Simultaneous presence of the concepts of the gain-scheduling and the time-invariant uncertainties is a serious challenge. Because, the philosophy of the gain-scheduling is variability with time. But, the time-invariant parametric uncertainties are constant and unknown. To obviate this challenge, a robust state-feedback law is proposed that is robust against the time-invariant uncertainties. In this method, the arbitrary values are selected for the uncertainties from the defined intervals. But, the selected values are not necessarily equal to the true ones. Hence, the new scheduling parameters are presented to calculate the proposed controller. Finally, the proof of the proposed scheme is presented based on Lyapunov concept. To show the effectiveness of the final controller, the proposed method is simulated to stabilize the roll rate of a typical missile. Also, the simulation results are compared with the experimental ones in the presence of the INS (Inertial Navigation System) module.

Keywords: Linear parameter-varying systems, Time – invariant parametric uncertainties, Gain – scheduling, State – feedback, Linear matrix inequalities.

نویسنده عهده دار مکاتبات: ایمان محمدزمان

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.2.7]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.1]

۱- مقدمه

در سالهای اخیر، رویکرد استفاده از سیستم‌های خطی متغیر با پارامتر، توجهات زیادی را به خود جلب کرده است. از دلایل اصلی چنین توجهاتی، امکان استفاده از ابزار پیشرفته ریاضی همچون نامساوی‌های خطی ماتریسی و مفهوم محدب بودن سیستم‌ها و امکان پیشنهاد کنترل‌کننده‌های زمان‌بندی بهره در بسترهای پسخورد حالت و خروجی می‌باشد [۱-۴]. در میان روش‌های پیشنهادی برای طراحی کنترل‌کننده پسخورد خروجی، رویکردهای متفاوتی از جمله تکنیک‌های بر پایه بهینه‌سازی [۵] (شرایط بر حسب الگوریتم کمینه/بیشینه)، معادلات ریکاتی [۶] و برنامه‌ریزی محدب [۷] ارائه شده است. اکثر روش‌های ارائه شده در این مقالات، با استفاده از الگوریتم‌های نامساوی‌های خطی ماتریسی تکرار شونده حل می‌شوند. اشکال اساسی رویکردهای تکراری این است که هیچ نظریه نظام‌مندی برای توقف تکرار و رسیدن به مقدار نهایی وجود ندارد. در کاربردهای عملیاتی، تابع هدف پس از تکرارهای کم به دست می‌آید. اما مقدار به دست آمده الزاما پاسخ کلی نمی‌باشند. به عبارت دیگر، روش‌های ارائه شده ابتکاری بوده و هیچ تضمینی برای همگرایی به یک جواب خاص وجود ندارد. اشکال دیگر، نبود قانون کلی برای دادن مقدار اولیه به پارامترهای تکرار شونده می‌باشد. بنابراین، محافظه‌کاری جزء جدانشدنی الگوریتم‌های تکرار شونده می‌باشد [۸]. در صورت مطرح نبودن محدودیت‌های اقتصادی و فیزیکی (همانند جانمایی سنسورها) می‌توان از روش پسخورد حالت نیز استفاده نمود. در برخی کاربردها، حساسیت‌های عملیاتی و نگرش‌های کنترلی ایجاب می‌کند تا مستقیما از حالتی خاص، پسخورد به دست آید. به عنوان مثال، در بسیاری از رهگیرها، کنترل غلتش حائز اهمیت می‌باشد. بنابراین، گاها بایستی مستقیما میزان غلتش رهگیر اندازه‌گیری شود.

فرض رایج در اکثر مقالات این است که مقادیر دقیق پارامترهای زمان‌بندی به صورت زمان – حقیقی در دسترس است. این یک شرط محدودکننده در کاربردهای عملیاتی است. زیرا حضور نویزهای اندازه‌گیری، خطاهای کالیبراسیون و نامعینی‌های دیگر اجتناب‌ناپذیر می‌باشد. بنابراین، بایستی کنترل‌کننده‌های طراحی شده در برابر نامعینی‌های ایجاد شده بر روی پارامترهای زمان‌بندی مقاوم باشند [۹، ۱۰]. همچنین در بسیاری از کاربردهای عملیاتی، تنها برخی از پارامترهای فیزیکی، قابل اندازه‌گیری بوده و مابقی به عنوان عدم قطعیت‌های پارامتری در نظر گرفته می‌شوند. در نتیجه، حضور عدم قطعیت‌های پارامتری نیز می‌تواند منجر به پارامترهای زمان‌بندی نامعین شود.

در مراجع [۱۱-۱۴]، اثر غیر دقیق بودن پارامترهای زمان‌بندی مورد بررسی قرار گرفته است. فرض بر این است که تنها نامعینی‌های جمع شونده حضور داشته باشند. در واقع، پارامترهای زمان‌بندی غیر دقیق به شکل $\tilde{\theta}_i(t)=\theta_i(t)+\delta_i(t)$ نمایش داده شده است. در نهایت، با استفاده از پارامترهای زمان‌بندی مذکور به طراحی کنترل‌کننده پسخورد خروجی دینامیکی پرداخته شده است. در مرجع [۱۰]، نمایش مشابهی برای پارامترهای زمان‌بندی غیر دقیق در نظر گرفته شده است. در این مرجع، طراحی انجام گرفته بر اساس پسخورد خروجی استاتیکی بوده است. در مرجع [۱۵]، مساله طراحی کنترل‌کننده پسخورد خروجی مرتبه کامل در حضور پارامترهای زمان‌بندی غیر دقیق در نظر گرفته شده است. اشکال اصلی این مقاله، عدم به حساب آوردن خطاهای بایاس می‌باشد. به عبارتی دیگر، تنها حالتی در نظر گرفته شده است که در آن $\hat{\theta}(t)=\lambda\theta(t)$ می‌باشد ($\theta(t)$، $\hat{\theta}(t)$ و λ به ترتیب پارامترهای زمان‌بندی دقیق، پارامترهای زمان‌بندی غیر دقیق و عدد ثابت هستند).

مرجع [۱۶]، کنترل‌کننده پسخورد خروجی مرتبه کاملی در حضور پارامترهای زمان‌بندی غیر دقیق طراحی نموده است. در این طراحی، دو نوع عدم قطعیت جمع شونده و تناسبی مورد بررسی قرار گرفته است. در مرجع [۱۷]، پارامترهای غیر دقیق به صورت $\tilde{\theta}_i(t)=\left(1+\delta_i^p(t)\right)\left(\theta_i(t)+\delta_i^a(t)\right)$ در نظر گرفته شده و کنترل‌کننده پسخورد خروجی دینامیکی طراحی شده است. $\delta_i^p(t),\delta_i^a(t)$ را می‌توان به صورت عدم قطعیت‌های جمع شونده و تناسبی تعبیر نمود. مرجع [۱۸] نیز به بررسی اثرات حضور پارامترهای زمان‌بندی غیر دقیق در طراحی کنترل‌کننده‌های پسخورد خروجی مرتبه کامل پرداخته است. نامساوی‌های به دست آمده در این اثر، به روش تکراری حل شده‌اند. همانطور که قبلا بیان گردید، رویکردهای تکراری با چالش‌های زیادی از جمله تعیین شرایط اولیه روبرو می‌باشند. نویسندگان مراجع [۱۹، ۲۰] نیز به طراحی کنترل‌کننده‌های پسخورد حالت زمان‌بندی بهره پرداخته‌اند. در این مراجع، از مدل‌های ضرب شونده و جمع شونده برای بیان پارامترهای زمان‌بندی غیر دقیق استفاده شده و فرآیند طراحی انجام شده است.

یکی از مهم‌ترین چالش‌های پیش رو در پیشنهاد کنترل‌کننده‌های زمان‌بندی بهره، حضور نامعینی‌های نامتغیر با زمان در سیستم‌های خطی متغیر با پارامتر می‌باشد. زیرا کنترل‌کننده‌های زمان‌بندی بهره با تغییرات زمانی معنا پیدا می‌کنند. این در حالی است که نامعینی‌های مذکور، ثابت و نامعین می‌باشند. در واقع، ما با دو مفهوم متضاد سر و کار داریم. بنابراین، چالش اصلی طراح کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره، در نظر گرفتن توامان این مفاهیم است. در چنین حالتی، دشواری طراحی زمانی افزایش می‌یابد که عدم قطعیت‌های نامتغیر با زمان، به طور صریح قابل استخراج نباشند. مقالات کمی به بررسی توامان دو پدیده مذکور پرداخته‌اند. لازم به ذکر است مراجعی وجود دارند که بدون استفاده از رویکرد سیستم‌های متغیر با پارامتر، عدم قطعیت‌های پارامتری را در نظر گرفته‌اند [۲۱]. اگرچه رویکردهای ارائه شده در این مقالات موثر بوده است، لکن مشکل غیر قابل انکار رویکردهای پیشنهادی در مقالات مذکور، حضور دشواری‌های محاسباتی همچون روابط بازگشتی پیچیده و همچنین تحمیل فرض‌هایی بر روی دینامیک سیستم‌های غیرخطی می‌باشد. به دلایل مذکور، طراحان ترجیح می‌دهند از رویکرد سیستم‌های متغیر با پارامتر برای کنترل سیستم‌های غیرخطی استفاده نمایند. محققین در مراجع [۲۴-۲۲] از رویکرد سیستم‌های متغیر با پارامتر استفاده نموده و عدم قطعیت‌های پارامتری نامتغیر با

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.2.7]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.1]

زمان را نیز در نظر گرفته‌اند. در مرجع [۲۲]، روش کنترلی پسخورد حالت مقاوم در حضور عدم قطعیت‌های پارامتری نامتغیر با زمان ارائه شده است. از چالش‌های اساسی این مقاله، ثابت در نظر گرفتن ماتریس ورودی است. به عبارت دیگر، تنها ماتریس حالت، متغیر با پارامتر در نظر گرفته شده است. در این مقاله، ماتریس ورودی، متأثر از عدم قطعیت‌های پارامتری نامتغیر با زمان بوده است. اما فرض بر این است که بازه عدم قطعیت‌های مذکور، کوچک بوده و در نتیجه، این عدم قطعیت‌ها با مقادیر میانگین مربوط به خودشان، جایگزین شده‌اند. این موضوع باعث شده تا ماتریس ورودی، ثابت در نظر گرفته شود. کاملا واضح است که در صورت در نظر گرفتن چنین فرض محدودکننده‌ای، امکان ناپایداری سیستم در شرایط عملیاتی به شدت افزایش خواهد یافت.

مساله‌ای مشابه در مرجع [۲۳] مورد بررسی قرار گرفته است. در واقع، ماتریس‌های فضای حالت سیستم، به واسطه حضور عدم قطعیت‌های پارامتری نامتغیر با زمان، نامعین در نظر گرفته شده‌اند. مهم‌ترین چالش اثر مذکور، محدودیت اعمال شده بر روی ماتریس‌های فضای حالت سیستم است. به عبارت دیگر، فرض بر این بوده که می‌توان نامعینی‌های موجود در ماتریس‌های فضای حالت سیستم را به صورت صریح از ماتریس‌های مذکور استخراج نمود. به طور دقیق‌تر، فرض بر این است که هر کدام از ماتریس‌های نامعین فضای حالت سیستم را می‌توان به صورت دو جزء مجزا بازنویسی کرد که جزء اول، تنها شامل عدم قطعیت‌های پارامتری نامتغیر با زمان و جزء دوم شامل پارامترهای زمان‌بندی دقیق می‌باشد. این در حالی است که در بسیاری از کاربردها، امکان جداسازی عدم قطعیت‌های پارامتری نامتغیر با زمان وجود ندارد. به عنوان مثال، در سیستم‌های رهگیر می‌توان ضرایب آیرودینامیکی را به عنوان عدم قطعیت‌های پارامتری نامتغیر با زمان در نظر گرفت. اما معادلات دینامیکی حاکم بر رهگیر به حدی پیچیده است که نمی‌توان این ضرایب را به طور خالص استخراج نمود. این موضوع در بسیاری از کاربردهای عملیاتی پیچیده، صادق می‌باشد. به منظور غلبه بر این مشکل، مرجع [۲۴] قانون پسخورد حالت مقاومی را پیشنهاد داده که در برابر عدم قطعیت‌های پارامتری نامتغیر با زمان، مقاوم می‌باشد. در مرجع مذکور، از پارامترهای زمان‌بندی کمکی کران‌های بالا و پایین متغیر با زمان استفاده شده است. این پارامترها از بیشینه و کمینه نمودن پارامترهای زمان‌بندی نامعین در هر لحظه زمانی و در کل بازه ارائه شده برای نامعینی‌ها به دست آمده است. کاملا واضح است که چنین فرآیندی بایستی به صورت برخط بوده و حجم محاسباتی زیادی به پردازنده تحمیل می‌کند. به همین دلیل، روش مذکور در کابردهای عملی دارای محدودیت می‌باشد.

در مقاله جاری، طراحی کنترل‌کننده پسخورد حالت مقاوم زمان‌بندی بهره سیستم‌های خطی متغیر با پارامتر در حضور عدم قطعیت‌های پارامتری نامتغیر با زمان مورد بحث قرار گرفته است. در گام اول، از بازه‌های ارائه شده برای عدم قطعیت‌های مذکور، مقادیر دلخواهی انتخاب کرده و به جای عدم قطعیت‌های موجود در پارامترهای زمان‌بندی نامعین جایگذاری می‌نماییم. در نتیجه، پارامترهای زمان‌بندی مشخصی خواهیم داشت. بنابراین، سیستم متغیر با پارامتر، معلوم می‌باشد. اما نمی‌توان از پارامترهای مشخص شده جهت ایجاد کنترل‌کننده نهایی استفاده نمود. زیرا مقادیر انتخابی برای عدم قطعیت‌ها الزاما برابر با مقادیر صحیح نمی‌باشند. بنابراین، به دنبال روشی هستیم که اختلاف مذکور را جبران نماید. در این مسیر، پارامترهای زمان‌بندی جدید پیشنهادی را به کار خواهیم گرفت. به این ترتیب که با توجه به بازه‌های تعریف شده برای عدم قطعیت‌های پارامتری و بازه‌های تغییرات حالت‌های سیستم متغیر با پارامتر، مقادیری از عدم قطعیت‌های پارامتری را می‌یابیم که موجب کمینه و بیشینه شدن پارامترهای زمان‌بندی نامعین می‌گردد. با جایگذاری مقادیر به دست آمده در پارامترهای زمان‌بندی نامعین و ترکیب آن‌ها، پارامترهای زمان‌بندی جدید به دست خواهد آمد. سپس کنترل‌کننده پسخورد حالتی پیشنهاد می‌شود که به وسیله پارامترهای جدید، زمان‌بندی بهره شده‌اند. کنترل‌کننده پیشنهادی، به ازای تمامی مقادیر بازه‌های داده شده برای عدم قطعیت‌های پارامتری، مقاوم است. به عبارت دیگر، هر مقدار دلخواهی برای عدم قطعیت‌های مذکور انتخاب نماییم، سیستم حلقه بسته پایدار خواهد ماند. زیرا کنترل‌کننده پیشنهادی شامل تمام اطلاعات مربوط به کمینه و بیشینه پارامترهای زمان‌بندی نامعین می‌باشد. مفهوم محدب بودن سیستم‌ها، نامساوی‌های خطی ماتریسی و مفهوم پایداری لیاپانوف، ابزاری هستند که در یافتن کنترل‌کننده نهایی، مورد استفاده قرار می‌گیرند. در نهایت، قانون پیشنهادی، برای کنترل کانال غلتش رهگیر نوعی هوا به زمین به کار گرفته شده و نتایج به دست آمده در شبیه‌سازی با نتایج حاصل از آزمایشگاه سخت افزار در حلقه مقایسه می‌گردد. همچنین، رویکردهای پیشنهادی در مقاله جاری و مرجع [۲۴] بر روی یک پاندول معکوس، شبیه‌سازی شده و نتایج به دست آمده مورد مقایسه قرار خواهند گرفت.

در این مقاله، در بخش ۲ به معرفی مساله پیش رو پرداخته خواهد شد. در بخش ۳، پارامترهای زمان‌بندی جدید معرفی شده و اثبات می‌گردد که مجموعه این پارامترها محدب می‌باشند. سپس، کنترل‌کننده پسخورد حالت مقاوم طراحی شده برای سیستم‌های خطی متغیر با پارامتر نامعین ارائه خواهد شد. سرانجام برای بررسی عملکرد کنترل‌کننده پیشنهادی، در بخش ۴، توضیح اجمالی راجع به معادلات کانال غلتش رهگیر نوعی ارائه خواهد شد. سپس، نتایج شبیه‌سازی و آزمایشگاهی حاصل از به کارگیری کنترل‌کننده پیشنهادی، نمایش داده شده و مقایسه خواهند شد. همچنین، راهکار پیشنهادی در مقاله جاری و رویکرد پیشنهادی در مرجع [۲۴]، بر روی یک پاندول معکوس شبیه‌سازی شده و نتایج حاصل از شبیه‌سازی با یکدیگر مقایسه می‌شود. در نهایت، در بخش ۵، نتیجه‌گیری ارائه می‌شود. در ادامه، نمادهای مورد استفاده در این مقاله ارائه می‌گردد.

نمادها: I ماتریس واحد با بُعد مناسب می‌باشد. $\left[C_i\right]_p$، $\left[C_{(i,j)}\right]_{p\times p}$، $\Theta(t,\eta)|_{\eta=\eta_c}$ و $\Theta_{New}(t,\eta_{New})$ به صورت ذیل تعریف می‌شوند:

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.2.7]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.1]

$$\left[C_i\right]_p := \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_p \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\left[C_{(i,j)}\right]_{p\times p} := \begin{bmatrix} C_{(1,1)} & C_{(1,2)} & \cdots & C_{(1,p)} \\ C_{(2,1)} & C_{(2,2)} & \cdots & C_{(2,p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{(p,1)} & C_{(p,2)} & \cdots & C_{(p,p)} \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\Theta(t,\eta)\big|_{\eta=\eta_c} := \{\theta_i(t,\eta)\big|_{\eta=\eta_c} \mid \mathrm{i}=1,2,...,\mathrm{p}\} \quad (۳)$$

$$\Theta_{New}(t,\eta_{New}) := \{\theta_{iNew}(t,\eta_{New}) \mid \mathrm{i}=1,2,...,\mathrm{p}\} \quad (۴)$$

که $\Theta(t,\eta)\in R^p$، $\Theta(t,\eta)\big|_{\eta=\eta_c}\in R^p$ و $\Theta_{New}(t,\eta_{New})\in R^p$ به ترتیب مجموعه پارامترهای زمان‌بندی نامعین، مشخص و جدید می‌باشند. η بردار عدم قطعیت‌های پارامتری نامتغیر با زمان موجود در پارامترهای زمان‌بندی نامعین می‌باشد. η_c بردار مقادیر دلخواه انتخابی از بازه تعریف شده برای عدم قطعیت‌های پارامتری است که با جایگذاری آن‌ها در پارامترهای زمان‌بندی نامعین، پارامترهای زمان‌بندی مشخص به دست خواهند آمد. η_{New} بردار شامل $\eta_{i\max},\eta_{i\min}, i=1,2,...,p$ ها بوده که $\eta_{i\max},\eta_{i\min}$ ها مقادیری از عدم قطعیت‌های پارامتری هستند که i- امین پارامتر زمان‌بندی نامعین را به ترتیب، کمینه و بیشینه می‌نمایند. نماد $(*)$، بیانگر عناصر زیر قطر اصلی یک ماتریس متقارن است. همچنین، در سرتاسر مقاله، منظور از " عدم قطعیت‌های پارامتری " همان " عدم قطعیت‌های پارامتری نامتغیر با زمان " است.

$\delta_a(t), C_{L_{\delta a}}, D, S, V(t), h, I_x, \rho(h), p(t)$ و C_{L_p} به ترتیب نرخ غلتش رهگیر ($\deg/\sec$)، چگالی هوا (kg/m^3)، ممان اینرسی حول محور طولی ($kg-m^2$)، ارتفاع (m)، سرعت رهگیر ($m/\sec$)، مساحت قاعده رهگیر (m^2)، قطر رهگیر (m)، ضریب تغییر گشتاور غلتش ناشی از تغییرات فرمان غلتش ($\deg^{-1}$)، فرمان غلتش ($\deg$) و ضریب میرایی کانال غلتش رهگیر ($\deg^{-1}$) می‌باشند. همچنین، $M(t)$ سرعت بر حسب ماخ است.

۲- معرفی مساله

سیستم متغیر با پارامتر نامعین ذیل را در نظر بگیرید:

$$\dot{X}(t) = A(\Theta(t,\eta))X(\mathrm{t}) + B(\Theta(t,\eta))u(t) \quad (۵)$$

که در آن $A(\Theta(t,\eta))\in R^{p\times p}$ و $B(\Theta(t,\eta))\in R^{p\times m}$ به ترتیب ماتریس‌های حالت و ورودی و $\Theta(t,\eta)\in R^p$ بردار پارامترهای زمان‌بندی نامعین می‌باشند. p تعداد گوشه‌ها است. همچنین $X(\mathrm{t})\in R^p$ و $u(t)\in R^m$ به ترتیب بردار حالت و ورودی کنترلی می‌باشند. مقدار دلخواهی از عدم قطعیت‌های پارامتری، η_c، را از بازه‌های تعریف شده برای عدم قطعیت‌های مذکور، انتخاب کرده و در $\Theta(t,\eta)\in R^p$ جایگذاری می‌کنیم. آنگاه، سیستم خطی متغیر با پارامتر مشخصی به شکل ذیل خواهیم داشت:

$$\dot{X}(t) = A(\Theta(t,\eta)\big|_{\eta=\eta_c})X(\mathrm{t}) + B(\Theta(t,\eta)\big|_{\eta=\eta_c})u(t) \quad (۶)$$

که $\Theta(t,\eta)\big|_{\eta=\eta_c}\in R^p$ را بردار پارامترهای زمان‌بندی مشخص می‌نامیم. همچنین، ماتریس‌های ورودی و حالت به صورت محدب نشان داده شده در رابطه ذیل بیان شده‌اند:

$$A(\Theta(t,\eta)\big|_{\eta=\eta_c}) = \sum_{i=1}^{p} A_i\,\theta_i(t,\eta)\big|_{\eta=\eta_c}$$
$$B(\Theta(t,\eta)\big|_{\eta=\eta_c}) = \sum_{i=1}^{p} B_i\,\theta_i(t,\eta)\big|_{\eta=\eta_c} \quad (۷)$$

که

$$\sum_{i=1}^{p}\theta_i(t,\eta)\big|_{\eta=\eta_c} = 1, \quad 0\le\theta_i(t,\eta)\big|_{\eta=\eta_c}\le 1 \quad (۸)$$

که A_iها و B_i ها رئوس (گوشه‌ها) چندوجهی محدب ایجاد شده هستند. فرض کنید قانون کنترل پسخورد حالت به صورت ذیل تعریف گردد:

$$u(t) = K(\Theta_{New}(t,\eta_{New}))X(\mathrm{t}) = \sum_{i=1}^{p}(K_i\,\theta_{iNew}(t,\eta_{New}))X(\mathrm{t}) \quad (۹)$$

با جایگذاری رابطه (۹) در (۶) به رابطه ذیل خواهیم رسید:

$$\dot{X}(t) = A_c(\Theta(t,\eta)\big|_{\eta=\eta_c},\Theta_{New}(t,\eta_{New}))X(t) \quad (۱۰)$$

که

$$A_c(\Theta(t,\eta)\big|_{\eta=\eta_c},\Theta_{New}(t,\eta_{New})) = A(\Theta(t,\eta)\big|_{\eta=\eta_c}) + B(\Theta(t,\eta)\big|_{\eta=\eta_c})K(\Theta_{New}(t,\eta_{New})) \quad (۱۱)$$

که در آن $K_i,\ i=1,...,p,$ ماتریس‌های ثابتی هستند که بایستی محاسبه شوند. بردار پارامترهای زمان‌بندی جدید بوده و $\Theta_{New}(t,\eta_{New})\in R^p$ بهره پسخورد حالت زمان‌بندی $K(\Theta_{New}(t,\eta_{New}))$ حالت است. همچنین، η_{New} بردار شامل $\eta_{i\max},\eta_{i\min}, i=1,2,...,p$ ها بوده که $\eta_{i\max},\eta_{i\min}, i=1,2,...,p$ ها مقادیری از عدم قطعیت‌های پارامتری هستند که i- امین پارامتر زمان‌بندی نامعین را به ترتیب، کمینه و بیشینه می‌نمایند. بنابراین، مساله طراحی کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.2.7]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.1]

پسخورد حالت سیستم‌های خطی متغیر با پارامتر نامعین، به صورت ذیل تعریف می‌گردد:

" سیستم خطی متغیر با پارامتر نامعین (۵) را در نظر بگیرید. هدف یافتن بهره پسخورد حالت $K(\Theta_{New}(t,\eta_{New}))$ است، به طوریکه بر عدم قطعیت‌های پارامتری نامتغیر با زمان غلبه نموده و در نهایت، سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی باشد". در این مسیر بایستی پارامترهای زمان‌بندی جدیدی تعریف گردد. در بخش آینده، پارامترهای زمان‌بندی جدید و روش طراحی کنترل‌کننده پسخورد حالت مقاوم ارائه می‌شود.

۳- پارامترهای زمان‌بندی جدید و کنترل پسخورد حالت مقاوم سیستم‌های خطی متغیر با پارامتر نامعین

همانطور که بیان نمودیم، با انتخاب مقادیر دلخواهی از بازه تعریف شده برای عدم قطعیت‌های پارامتری و جایگذاری آن‌ها در پارامترهای زمان‌بندی نامعین، به پارامترهای زمان‌بندی مشخص نائل می‌آییم. اما الزاما مقادیر انتخابی، برابر با مقادیر واقعی نمی‌باشند. بنابراین، بایستی پارامترهای زمان‌بندی جدیدی ارائه شوند تا با استفاده از آن‌ها، کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره پیشنهادی، ایجاد شده و در نهایت، پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته به ازای تمامی مقادیر مربوط به بازه‌های عدم قطعیت‌های پارامتری تضمین گردد. حال فرض کنید پارامترهای زمان‌بندی مشخص، قیود رابطه (۸) را برآورده می‌کنند. آنگاه، پارامترهای زمان‌بندی جدید به صورت ذیل تعریف می‌گردند:

$$\theta_{iNew}(t,\eta_{New}) = \frac{a_i(t)}{b(t)} \qquad (۱۲)$$

که در آن $a_i(t)$ و $b(t)$ به صورت ذیل می‌باشند:

$$\begin{aligned} a_i(t) &= (p-1)\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\min}} \\ &+ (p-1)\left(\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}} + \mu\right) \\ &- \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p}\left(\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{j\max}} - \mu\right) \\ &+ \frac{1}{p-1}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p}\sum_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{p}\theta_j(t,\eta)|_{\eta=\eta_{l\max}} \\ &+ \theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_c} \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

$$b(t) = (p-1)\left(\begin{array}{l} \sum_{q=1}^{p}\theta_q(t,\eta)|_{\eta=\eta_{q\max}} \\ +\sum_{q=1}^{p}\theta_q(t,\eta)|_{\eta=\eta_{q\min}} \\ +\sum_{q=1}^{p}2\mu + \frac{1}{p-1} \end{array}\right)$$

که $\eta_{i\max}, \eta_{i\min}, i=1,2,...,p$ مقادیری از عدم قطعیت‌های پارامتری هستند که i– امین پارامتر زمان‌بندی نامعین را به ترتیب، کمینه و بیشینه می‌نمایند. μ مقدار ثابت غیر منفی است که نامساوی $\left(\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}} + \mu\right) \geq \left(\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{j\max}} - \mu\right)$ را برای $i=1,2,...,p \quad \& \quad j\neq i$ برقرار می‌سازد. η بردار عدم قطعیت‌های پارامتری نامتغیر با زمان است. η_c بردار دلخواه انتخابی است. $\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\min}}$، $\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}}$، $\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_c}$ و $\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{j\max}}$ به ترتیب پارامترهای زمان‌بندی i–ام هستند که از جایگذاری $\eta_{i\min}, \eta_{i\max}, \eta_{j\max}$ و η_c در η محاسبه شده‌اند. $\theta_j(t,\eta)|_{\eta=\eta_{l\max}}$ پارامتر زمان‌بندی j–ام است که از جایگذاری $\eta_{l\max}$ در η به دست می‌آید. p تعداد گوشه‌ها است. تعریف $\theta_q(t,\eta)|_{\eta=\eta_{q\min}}$ و $\theta_q(t,\eta)|_{\eta=\eta_{q\max}}$ به ترتیب مشابه با $\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\min}}$ و $\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}}$ می‌باشد.

به دلیل طولانی بودن فرآیند اثبات، مراحل کامل اثبات در ضمیمه ارائه شده است. بخش ضمیمه شامل روابط (۱۴) الی (۳۲) می‌باشد. در گام بعدی، " تئوری ۱ " را ارائه خواهیم نمود. در این تئوری، راهکاری به منظور یافتن ماتریس‌های بهره حالت، K_i، معرفی می‌گردد. پس از محاسبه K_iها، از پارامترهای زمان‌بندی جدید استفاده نموده و $K(\Theta_{New}(t,\eta_{New})) = \sum_{i=1}^{p}(K_i\theta_{iNew}(t,\eta_{New}))$ را محاسبه می‌نماییم. در نهایت، قانون پسخورد حالت به دست آمده را به شبیه‌سازی اعمال خواهیم کرد.

تئوری ۱: سیستم حلقه بسته (۱۰) پایدار مجانبی است اگر ماتریس مثبت معین متقارن P و ماتریس‌های $L_0, W_0, X_i, Y_i, R_i\ L_i, H_i, S_i, E_i, \Gamma_{ij}, G_{ij}, Q_{ij}$ به ازای $i,j=1,2,...,p$ وجود داشته باشند طوریکه نامساوی‌های خطی ماتریسی ذیل را برآورده نمایند:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ * & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ * & * & \Psi_{33} \end{bmatrix} < 0 \qquad (۳۳)$$

$$\begin{aligned} &(X_i + X_i^T) > 0, \quad (Y_i + Y_i^T) > 0, \\ &(Q_{ij} + Q_{ij}^T) > 0, \quad (G_{ij} + G_{ij}^T) > 0, \\ &(\Gamma_{ij} + \Gamma_{ij}^T) > 0, \quad P > 0 \end{aligned} \qquad (۳۴)$$

که

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.2.7]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.1]

$$\Psi_{11}=U_0,\quad \Psi_{12}=\left[U_{(0,i)}+V_{(0,i)}\right]_p,$$
$$\Psi_{13}=\left[U_{(0,iNew)}\right]_p,$$
$$\Psi_{22}=\left[U_{(i,i)}\ \vdots\ U_{(i,j)}\right]_{p\times p},$$
$$\Psi_{23}=\left[U_{(i,jNew)}+V_{(i,jNew)}\right]_{p\times p},$$
$$\Psi_{33}=\left[U_{(iNew,iNew)}\ \vdots\ U_{(iNew,jNew)}\right]_{p\times p},$$
$$U_0=2(L_0+L_0^T)-\sum_{i=1}^{p}(X_i+X_i^T)-\sum_{i=1}^{p}(Y_i+Y_i^T),$$
$$U_{(0,i)}=W_0+2R_i+X_i-L_0,$$
$$U_{(0,iNew)}=-W_0+2L_i+Y_i-L_0,$$
$$U_{(i,i)}=-(X_i+X_i^T)-(H_i+H_i^T)-(R_i+R_i^T)\qquad (i=j),$$
$$U_{(i,j)}=G_{ij}+(H_i+H_j)-(R_i+R_j)\qquad (i<j),$$
$$U_{(iNew,iNew)}=-(S_i+S_i^T)-(L_i+L_i^T)-(Y_i+Y_i^T)\qquad (i=j),$$
$$U_{(iNew,jNew)}=\Gamma_{ij}-(S_i+S_j)-(L_i+L_j)\qquad (i<j),$$
$$U_{(i,jNew)}=Q_{ij}+S_j-H_i-R_i-L_j,$$
$$V_{(0,i)}=A_iP,\quad V_{(i,jNew)}=B_iE_{jNew},$$

پس از حل نامساوی‌های خطی ماتریسی (۳۳) و (۳۴)، ماتریس‌های بهره پسخورد حالت، K_i، از رابطه ذیل به دست می‌آیند:

$$K_i=E_iP^{-1},\quad i=1,2,...,p \qquad (۳۵)$$

اثبات:

تابع منتخب لیاپانوف ذیل را در نظر بگیرید:

$$V(t)=X^T(t)P^{-1}X(t) \qquad (۳۶)$$

که P ماتریس مثبت معین می‌باشد. حال از دو طرف رابطه (۳۶) نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\dot{V}(t)=\dot{X}^T(t)P^{-1}X(t)+X^T(t)P^{-1}\dot{X}(t) \qquad (۳۷)$$

در گام بعدی، $\dot{X}(t)$ از رابطه (۱۰) را در (۳۷) جایگذاری کرده و به نتیجه ذیل می‌رسیم:

$$\dot{V}(t)=X^T(t)\times \bar{G}(\Theta(t,\eta)|_{\eta=\eta_c},\Theta_{New}(t,\eta_{New}))X(t) \qquad (۳۸)$$

که

$$\begin{aligned}&\bar{G}(\Theta(t,\eta)|_{\eta=\eta_c},\Theta_{New}(t,\eta_{New}))\\&=A^T(\Theta(t,\eta)|_{\eta=\eta_c})P^{-1}\\&+P^{-1}A(\Theta(t,\eta)|_{\eta=\eta_c})\\&+K^T(\Theta_{New}(t,\eta_{New}))B^T(\Theta(t,\eta)|_{\eta=\eta_c})P^{-1}\\&+P^{-1}B(\Theta(t,\eta)|_{\eta=\eta_c})K(\Theta_{New}(t,\eta_{New}))\end{aligned} \qquad (۳۹)$$

به منظور برقراری پایداری مجانبی، بایستی رابطه (۳۸) کوچکتر از صفر باشد. این شرط معادل با برقراری رابطه ذیل خواهد بود:

$$\bar{G}(\Theta(t,\eta)|_{\eta=\eta_c},\Theta_{New}(t,\eta_{New}))<0 \qquad (۴۰)$$

حال رابطه (۴۰) را از سمت راست و چپ در P ضرب می‌کنیم. در نهایت، با توجه به روابط (۷) و (۹) به رابطه (۴۱) می‌رسیم:

$$\begin{aligned}&G\left(\Theta(t,\eta)|_{\eta=\eta_c},\Theta_{New}(t,\eta_{New})\right)\\&=\sum_{i=1}^{p}\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_c}(V_{(0,i)}+V_{(0,i)}^T)\\&+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\begin{pmatrix}\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_c}\ \theta_{jNew}(t,\eta_{New})\times\\(V_{(i,jNew)}+V_{(i,jNew)}^T)\end{pmatrix}<0\end{aligned} \qquad (۴۱)$$

$$V_{(i,jNew)}=B_iE_{jNew},\quad V_{(0,i)}=A_iP \qquad (۴۲)$$

که بایستی E_{jNew}ها محاسبه شوند. در ادامه، از راهبرد روند S-[1] معرفی شده در مرجع [۲۵] استفاده نموده و شروط پایداری را به دست خواهیم آورد. با توجه به راهبرد مذکور، رابطه (۴۱) برقرار خواهد بود، اگر عبارت $N\left(\Theta(t,\eta)|_{\eta=\eta_c},\Theta_{New}(t,\eta_{New})\right)\geq 0$ وجود داشته باشد به طوریکه نامساوی ذیل برقرار گردد:

$$\begin{aligned}&G\left(\Theta(t,\eta)|_{\eta=\eta_c},\Theta_{New}(t,\eta_{New})\right)\\&+N\left(\Theta(t,\eta)|_{\eta=\eta_c},\Theta_{New}(t,\eta_{New})\right)<0\end{aligned} \qquad (۴۳)$$

به منظور نایل آمدن به رابطه (۴۳)، $N\left(\Theta(t,\eta)|_{\eta=\eta_c},\Theta_{New}(t,\eta_{New})\right)$ را به صورت ذیل پیشنهاد می‌دهیم:

[1] S-Procedure

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.2.7]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.1]

$$
\begin{aligned}
&N\left(\Theta(t,\eta)|_{\eta=\eta_c},\Theta_{New}(t,\eta_{New})\right)\\
&=U_0+\sum_{i=1}^{p}\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_c}\left(U_{(0,i)}+U_{(0,i)}^T\right)\\
&+\sum_{i=1}^{p}\theta_{iNew}(t,\eta_{New})\left(U_{(0,iNew)}+U_{(0,iNew)}^T\right)\\
&+\sum_{i=1}^{p}\theta_i^2(t,\eta)|_{\eta=\eta_c}U_{(i,i)}\\
&+\sum_{i=1}^{p}\theta_{iNew}^2(t,\eta_{New})U_{(iNew,iNew)}\\
&+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\begin{pmatrix}\theta_i|_{\eta=\eta_c}(t,\eta)\times\\ \theta_{jNew}(t,\eta_{New})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_{(i,jNew)}\\ +U_{(i,jNew)}^T\end{pmatrix}\\
&+\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p}\begin{pmatrix}\theta_{iNew}(t,\eta_{New})\times\\ \theta_{jNew}(t,\eta_{New})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_{(iNew,jNew)}\\ +U_{(iNew,jNew)}^T\end{pmatrix}\\
&+\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p}\begin{pmatrix}\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_c}\times\\ \theta_j(t,\eta)|_{\eta=\eta_c}\end{pmatrix}\left(U_{(i,j)}+U_{(i,j)}^T\right)
\end{aligned}
\qquad (۴۴)
$$

که

$$
\begin{aligned}
&U_0=2(L_0+L_0^T)-\sum_{i=1}^{p}(X_i+X_i^T)\\
&\quad-\sum_{i=1}^{p}(Y_i+Y_i^T),\\
&U_{(0,i)}=W_0+2R_i+X_i-L_0,\\
&U_{(0,iNew)}=-W_0+2L_i+Y_i-L_0,\\
&(X_i+X_i^T)>0,\quad (Y_i+Y_i^T)>0,\\
&(Q_{ij}+Q_{ij}^T)>0,\\
&U_{(i,i)}=-(X_i+X_i^T)-(H_i+H_i^T)\\
&\quad-(R_i+R_i^T)\\
&(G_{ij}+G_{ij}^T)>0,\quad (\Gamma_{ij}+\Gamma_{ij}^T)>0,\\
&P>0,\\
&U_{(i,j)}=G_{ij}+(H_i+H_j)-(R_i+R_j)\\
&U_{(iNew,iNew)}=-(S_i+S_i^T)-(L_i+L_i^T)\\
&\quad-(Y_i+Y_i^T)\\
&U_{(iNew,jNew)}=\Gamma_{ij}-(S_i+S_j)\\
&\quad-(L_i+L_j)\\
&U_{(i,jNew)}=Q_{ij}+S_j-H_i-R_i-L_j,\\
&\quad(i<j)
\end{aligned}
$$

با توجه به روابط (۴۱) و (۴۴)، می‌توان رابطه (۴۳) را به صورت ادامه بازنویسی نمود:

$$\Pi=\Lambda^T T\,\Lambda<0 \qquad (۴۵)$$

که در آن Λ و T به صورت ذیل می‌باشد:

$$
\Lambda=\begin{bmatrix}
I\\
\theta_1(t,\eta)|_{\eta=\eta_c}\ I\\
\cdots\\
\theta_p(t,\eta)|_{\eta=\eta_c}\ I\\
\theta_{1New}(t,\eta_{New})I\\
\cdots\\
\theta_{pNew}(t,\eta_{New})I
\end{bmatrix} \qquad (۴۶)
$$

$$
T=\begin{bmatrix}
\Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13}\\
* & \Psi_{22} & \Psi_{23}\\
* & * & \Psi_{33}
\end{bmatrix} \qquad (۴۷)
$$

که المان‌های (۴۷) برابر با المان‌های تعریف شده در رابطه (۳۳) می‌باشد. کاملا واضح است که برآورده شدن رابطه (۴۵) معادل با $T<0$ می‌باشد. بنابراین، تئوری ۱ اثبات گردید.

یادداشت ۱: همانطور که قبلا بیان شد، در مرجع [۲۴] از دو مجموعه پارامتر زمان‌بندی جدید استفاده شده است. این پارامترها از کمینه و بیشینه نمودن پارامترهای زمان‌بندی نامعین در هر لحظه از زمان و در کل بازه مربوط به عدم قطعیت‌های پارامتری ایجاد شده است. چنین فرآیندی، بسیار زمان‌بر بوده و از نظر عملیاتی، کاربردی نمی‌باشد. در مجموعه پارامترهای زمان‌بندی پیشنهادی در مقاله حاضر، تنها مقادیری از عدم قطعیت‌های پارامتری مورد استفاده قرار می‌گیرد که در تمامی زمان‌ها، پارامترهای مذکور را کمینه یا بیشینه نماید. به عبارت دیگر، ابتدا به صورت بیرون – خط[1] و با توجه به بازه تغییرات حالت‌های سیستم و بازه مربوط به عدم قطعیت‌های پارامتری، مقادیری از عدم قطعیت‌ها به دست می‌آید که پارامترهای زمان‌بندی نامعین را در تمامی زمان‌ها کمینه و بیشینه می‌نماید. سپس، از جایگزین نمودن عدم قطعیت‌های پارامتری موجود در پارامترهای زمان‌بندی نامعین با مقادیر به دست آمده، پارامترهای زمان‌بندی جدید ایجاد خواهند شد. همچنین، تعداد پارامترهای زمان‌بندی مورد نیاز جهت زمان‌بندی بهره نمودن کنترل‌کننده پیشنهادی، نصف تعداد پارامترهای زمان‌بندی مورد استفاده در مرجع [۲۴] می‌باشد. بنابراین، در رویکرد پیشنهادی، حجم محاسباتی کاهش یافته و از نظر کاربردی، رویکردی عملیاتی خواهد بود.

٤- نتایج شبیه‌سازی و آزمایشگاهی

مثال ۱: در این قسمت به طراحی کنترل کننده کانال غلتش برای یک رهگیر نوعی هوا به زمین پرداخته شده است. با توجه به مراجع [۲۶-۲۸]

[1] Offline

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.2.7]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.1]

و با صـــرفنظر از اثرات تـداخلی، می‌توان معـادلات کـانال غلتش را به صورت ذیل نمایش داد:

$$\dot{p}(t)=\frac{0.5\rho(h)V^{2}(t)SD}{I_x}\times \\ (C_{L_{\delta a}}\delta_a(t)+C_{L_p}\frac{D}{2V(t)}p(t)) \qquad (۴۸)$$

پارامترهای موجود در رابطه (۴۸) در بخش " نمادها " معرفی شده‌اند. اگر ســـرعت را برحســـب ماخ بیان نماییم، رابطه (۴۸) به صـــورت ذیل قابل بازنویسی است:

$$\dot{p}(t)=A(t)p(t)+B(t)\delta_a(t) \qquad (۴۹)$$

که در آن

$$A(t)=\frac{85\rho(h)M(t)SD^{2}C_{L_p}}{I_x},$$

$$B(t)=\frac{57800\rho(h)M^{2}(t)SDC_{L_{\delta a}}}{I_x}$$

و $M(t)$ سرعت بر حسب ماخ می‌باشد.

رهگیر در نظر گرفته شـــده از نوع هوا به زمین می‌باشـــد. هدف از انجام طراحی، صـفر نمودن نرخ غلتش رهگیر می‌باشـد. فرض بر این اسـت که رهگیر بر روی جنگنده قرار گرفته و از ارتفاع اولیه ۱۵۰۰ متری از ســـطح زمین شلیک می‌شـود. همچنین، طراحی کنترل‌کننده زمان‌بندی بهره برای ماخ‌های $0.5\le M(t)\le 0.9$ انجام خواهد شـــد. در این بازه، اطلاعات مربوط به آیرودینامیک رهگیر به شرح ذیل می‌باشد:

$$-3.3\le C_{L_{\delta a}}\le -1 \quad \rho(h)\simeq 1 \quad I_x=1$$
$$D=0.2 \quad -6.4\le C_{L_p}\le -2.2$$

به منظور ســـاده‌ســـازی در طراحی و با پذیرش کمی محافظه‌کاری، ساده‌سازی‌های ذیل را در فاز طراحی انجام می‌دهیم:

$$-6.4\le C_{L_{\delta a}}\le -1 \quad -6.4\le C_{L_p}\le -1$$
$$M^{2}(t)=8M(t)$$

در این صـــورت می‌توان فرض کرد C_{L_p} برابر با $C_{L_{\delta a}}$ می‌باشـــد و $A(t)$ و $B(t)$ برابر هستند با:

$$A(t)=0.102C_{L_{\delta a}}M(t),$$
$$B(t)=2774.4C_{L_{\delta a}}M(t)$$

$C_{L_{\delta a}}$ را به عنوان عدم قطعیت پارامتری نامتغیر با زمان تعریف می‌نماییم. بنابراین، η برابر با $C_{L_{\delta a}}$ می‌باشد. کنترل‌کننده پیشنهادی بایستی در تمامی بازه مربوط به این ضریب، پایدار بماند. پارامترهای زمان‌بندی را به صورت ذیل انتخاب می‌کنیم:

$$\theta_1(t,\eta=C_{L_{\delta a}})=\frac{-C_{L_{\delta a}}M(t)+0.1}{7},$$
$$\theta_2(t,\eta=C_{L_{\delta a}})=\frac{6.9+C_{L_{\delta a}}M(t)}{7}$$

همانطور که در متن مقاله اشاره شد، در روش پیشنهادی می‌توان از بازه‌های اعلام شده برای عدم قطعیت‌های پارامتری، مقادیر دلخواهی را انتخاب نمود. بنابراین، η_c برابر با -1 انتخاب می‌گردد. در نتیجه، پارامترهای زمان‌بندی به صورت ذیل خواهند بود:

$$\theta_1(t,\eta=-1)=\frac{M(t)+0.1}{7},$$
$$\theta_2(t,\eta=-1)=\frac{6.9-M(t)}{7}$$

در نهایت، ماتریس‌های گوشه به صورت ذیل می‌باشند:

$$A_1=-0.6135, \qquad A_2=0.01005$$
$$B_1=-19147.2676, \qquad B_2=273.5323$$

پس از حل نامساوی‌های خطی ماتریسی (۳۳) و (۳۴)، ماتریس‌های P,E_1,E_2 به شرح ذیل به دست می‌آیند:

$$P=110.00522, \qquad E_1=5.8716,$$
$$E_2=-9.11$$

بنابراین، با توجه به تساوی (۳۵)، بهره‌های پسخورد حالت به صورت ذیل محاسبه می‌شود:

$$K_1=0.0534, \qquad K_2=-0.0828$$

حال قانون پسخورد حالت پیشنهادی در رابطه (۹)، محاسبه می‌گردد. بدین منظور، ابتدا بایستی پارامترهای زمان‌بندی جدید به دست آیند. به منظور به دست آوردن پارامترهای زمان‌بندی جدید، ابتدا بایستی $\eta_{1\max},\eta_{1\min},\eta_{2\max},\eta_{2\min}$ را محاسبه نماییم. مقادیر به دست آمده برای پارامترهای مذکور برابر با $\eta_{1\max}=-6.4$، $\eta_{1\min}=-1$، $\eta_{2\max}=-1$ و $\eta_{2\min}=-6.4$ می‌باشند. با توجه به روابط (۱۲) و (۱۳) و مقادیر به دست آمده و پس از انجام ساده‌سازی‌ها، پارامترهای زمان‌بندی جدید، به صورت ذیل خواهند بود:

$$\theta_{1New}(t,\eta_{New})=\frac{1+\theta_1(t,\eta=-1)}{3},$$
$$\theta_{2New}(t,\eta_{New})=\frac{1+\theta_2(t,\eta=-1)}{3}$$

در نهایت، قانون پسخورد حالت پیشنهادی به صورت ذیل محاسبه شده است:

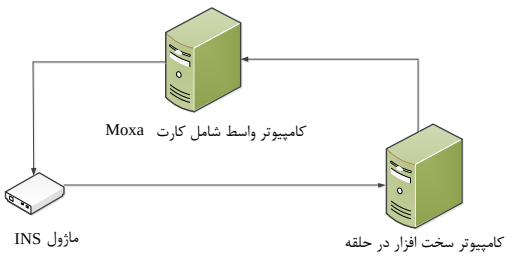
$$\delta_a(t)=\begin{pmatrix}0.0534\theta_{1New}(t,\eta_{New})\\ -0.0828\theta_{2New}(t,\eta_{New})\end{pmatrix}p(t)$$

در ادامه، نتایج شبیه‌سازی و آزمایشگاهی ارائه شده است. شکل‌های خط‌چین و توپر به ترتیب مربوط به نتایج آزمایشگاهی و شبیه‌سازی هستند. بستر

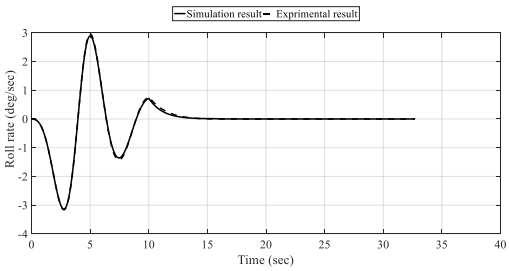
[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.2.7]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.1]

مورد استفاده در آزمایشگاه سخت‌افزار در حلقه، از نوع XPC – Target می‌باشد. در بستر مذکور، ابتدا شبیه‌سازی انجام شده متناسب با بستر سخت‌افزاری، آماده شده و در کامپیوتر شبیه‌ساز، پیاده‌سازی خواهد شد. سپس از طریق کارت واسط Moxa یا Quatech

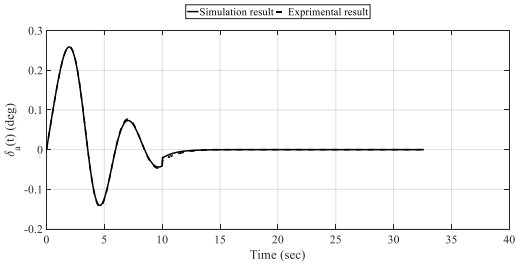
ارتباط کامپیوتر شبیه‌ساز با ماژول‌های سخت‌افزاری، برقرار می‌گردد. در تست آزمایشگاهی انجام شده از ماژول INS استفاده شده است. این ماژول، هر ۵ میلی ثانیه، محاسبات ناوبری را انجام می‌دهد. در واقع، ابتدا معادلات ناوبری به صورت تئوری نوشته شده و بر روی میکروکنترلر موجود در ماژول INS پیاده‌سازی شده است. سپس با استفاده از تست‌های آزمایشگاهی، خروجی‌های مربوط به ماژول مذکور، صحه سنجی شده و پس از تایید خروجی‌ها، ماژول INS به صورت آزمایشگاهی مورد استفاده قرار گرفته است. فرکانس پیاده‌سازی حلقه کنترلی در آزمایشگاه برابر با ۲۰۰ هرتز می‌باشد. همچنین، قانون کنترلی پیشنهادی، در محدوده زمانی $t \geq 10$ اعمال خواهد شد. زیرا در این بازه، شرط ماخ‌های $0.5 \leq M(t) \leq 0.9$ برقرار است. در محدوده زمانی $0 \leq t \leq 10$ از کنترل‌کننده تناسبی – انتگرالی مرسوم استفاده شده است. در این مقاله از گفتن جزئیات طراحی کنترل‌کننده تناسبی –انتگرالی صرفنظر می‌گردد. شماتیک تست انجام شده در آزمایشگاه در شکل (۱) ارائه شده است. نتایج حاصل از تست‌های انجام شده در شکل‌های (۲) تا (۶) نشان داده شده است. نمودارهای نقطه‌چین و توپر به ترتیب مربوط به نتایج آزمایشگاهی و شبیه‌سازی می‌باشند. همانطور که مشاهده می‌شود، نرخ غلتش در طول زمان، میرا شده و پس از اعمال کنترل‌کننده پیشنهادی در ثانیه $t = 10$ کاملا به صفر میل می‌کند. این رفتار و انطباق نتایج مربوط به شبیه‌سازی و آزمایشگاه، بیانگر اثرگذار بودن کنترل‌کننده پیشنهادی است.



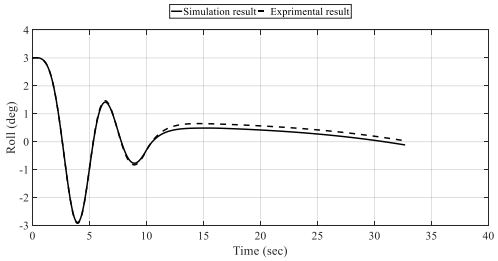
شکل ۱ : شماتیک کلی تست انجام شده در آزمایشگاه



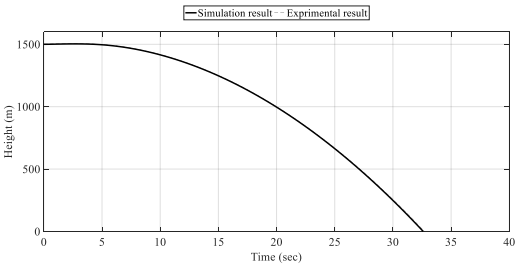
شکل ۲ : نرخ غلتش در شبیه‌سازی و آزمایشگاه



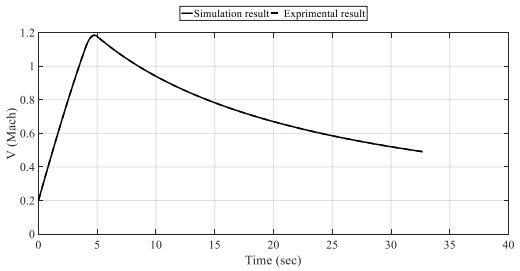
شکل ۳ : فرمان غلتش در شبیه‌سازی و آزمایشگاه



شکل ۴ : زاویه غلتش در شبیه‌سازی و آزمایشگاه



شکل ۵ : ارتفاع در شبیه‌سازی و آزمایشگاه



شکل ۶ : سرعت در شبیه‌سازی و آزمایشگاه

با توجه به شکل‌های (۲) و (۳)، زمانی که نرخ غلتش منفی است، فرمان غلتش مثبت بوده و برای نرخ غلتش مثبت، فرمان غلتش منفی اعمال شده است. در نهایت، با صفر شدن نرخ غلتش، فرمان صفر به رهگیر ارسال می‌گردد. به عبارت دیگر، فراز و فرودهای موجود در نمودار نرخ غلتش، کنترل‌کننده را وادار به ارائه عکس‌العمل نموده است. کنترل‌کننده توسط پارامترهای زمان‌بندی جدید ایجاد شده است. این پارامترها شامل دینامیک‌های سیستم رهگیر هستند. بنابراین، به تغییرات نرخ غلتش، واکنش نشان داده‌اند و در نهایت توانسته‌اند آن را کنترل نموده و به سمت صفر میل دهند. چنین رفتاری صحت فرامین ارسالی را تایید می‌کند.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.2.7]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.1]

زاویه غلتش در شکل (۴) نمایش داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، زاویه غلتش نیز به سمت صفر میل نموده است. به عبارت دیگر، صفر شدن نرخ غلتش، موجب ثابت ماندن تقریبی مقدار غلتش می‌شود. همانطور که بیان نمودیم، کنترل‌کننده پیشنهادی از ثانیه $t=10$ اعمال شده است. با توجه به شکل (۲)، نرخ غلتش از ثانیه مذکور به سمت صفر میل نموده است. در نتیجه، مقدار غلتش نیز از ثانیه $t=10$ تقریبا بدون تغییر و حول صفر باقی مانده است. اختلاف ایجاد شده در انتهای مسیر، به دلیل وجود خطای الگوریتم ناوبری است که اجتناب‌ناپذیر است. محاسبات ناوبری، با افزایش زمان دچار خطا می‌شود. در رهگیر شبیه‌سازی شده، این خطا در نمودار غلتش بارز می‌باشد.

در نهایت، شکل‌های (۵) و (۶) به ترتیب ارتفاع و سرعت رهگیر را به نمایش می‌گذارند. همانطور که از شکل‌ها مشخص است، انطباق بسیار خوبی بین نتایج آزمایشگاهی و شبیه‌سازی ایجاد شده است. به طور تجربی ثابت شده است مقادیر سرعت و ارتفاع محاسبه شده از طریق الگوریتم‌های ناوبری، تاثیرپذیری کمی از خطاهای محاسباتی موجود در الگوریتم‌های ناوبری دارند. به همین دلیل، انطباق ایجاد شده در شکل‌های (۵) و (۶) بسیار قابل توجه است. به طور کلی، نتایج به دست آمده حاکی از کارا بودن رویکرد پیشنهادی در این مقاله می‌باشد.

مثال ۲: در این مثال، نمونه مطالعاتی، یک پاندول معکوس است که تمامی اطلاعات مربوط به آن را از مرجع [۲۴] استخراج نموده‌ایم. معادلات دینامیکی یک پاندول معکوس به قرار ذیل است:

$$\ddot{\varphi}(t)=\frac{g\sin(\varphi(t))}{4L/3-am_pL\cos^2(\varphi(t))}-\frac{0.5am_pL\dot{\varphi}(t)^2\sin(2\varphi(t))}{4L/3-am_pL\cos^2(\varphi(t))}-\frac{a\cos(\varphi(t))u(t)}{4L/3-am_pL\cos^2(\varphi(t))}$$

که در آن $\varphi(t)$، a، m_p، L و g به ترتیب جابجایی زاویه‌ای، عدد ثابت وابسته به جرم پاندول و جرم گاری (M_c)، جرم پاندول، طول پاندول و شتاب جاذبه می‌باشند. مقادیر g، a، m_p و L عبارتند از:

$$g=9.8,\ 1/19\le a\le 1/10,\ 2\le m_p\le 3,\ L=0.5$$

با در نظر گرفتن حالت‌های سیستم به صورت $X(t)=[x_1(t)\ \ x_2(t)]^T=[\varphi(t)\ \ \dot{\varphi}(t)]^T$ می‌توان نوشت:

$$\dot{x}_1=x_2;$$
$$\dot{x}_2=f_1(X(t))x_1(t)+f_2(X(t))u(t)$$

که

$$f_1(X(t))=\frac{g-am_pLx_2(t)^2\cos(x_1(t))}{4L/3-am_pL\cos^2(x_1(t))}\times\left(\frac{\sin(x_1(t))}{x_1(t)}\right)$$

$$f_2(X(t))=\frac{-a\cos(x_1(t))}{4L/3-am_pL\cos^2(x_1(t))}$$

در نهایت، معادلات فضای حالت پاندول معکوس، به شکل چندوجهی ذیل نوشته شده است:

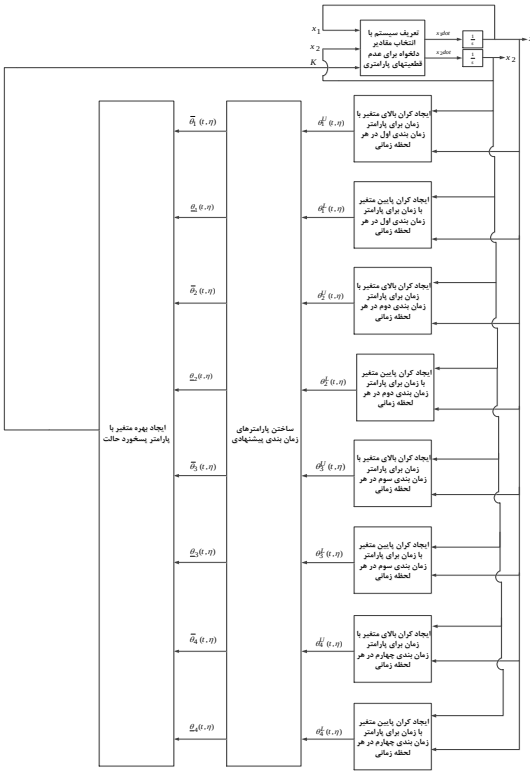
$$\dot{X}(t)=\sum_{i=1}^{4}\theta_i(t,\eta)(A_iX(t)+B_iu(t))$$

که

$$\theta_1(t,\eta)=\eta_1(t,\eta)w_1(t,\eta),$$
$$\theta_2(t,\eta)=\eta_1(t,\eta)w_2(t,\eta),$$
$$\theta_3(t,\eta)=\eta_2(t,\eta)w_1(t,\eta),$$
$$\theta_4(t,\eta)=\eta_2(t,\eta)w_2(t,\eta)$$
$$\eta_1(t,\eta)=\frac{f_{1\max}-f_1}{f_{1\max}-f_{1\min}},$$
$$\eta_2(t,\eta)=\frac{f_1-f_{1\min}}{f_{1\max}-f_{1\min}},$$
$$w_1(t,\eta)=\frac{f_{2\max}-f_2}{f_{2\max}-f_{2\min}},$$
$$w_2(t,\eta)=\frac{f_2-f_{2\min}}{f_{2\max}-f_{2\min}}$$

در این مساله، بردار η شامل پارامترهای a و m_p می‌باشد. بازه در نظر گرفته شده برای این پارامترها $1/19\le a\le 1/10$ و $2\le m_p\le 3$ است. در مرجع [۲۴] مقادیر دلخواه انتخابی برای a و m_p به ترتیب برابر با $\frac{1}{19}$ و 3 است. بلوک دیاگرام مربوط به شبیه‌سازی مرجع [۲۴] در شکل (۷) نمایش داده شده است.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.2.7]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.1]



شکل ۷: بلوک دیاگرام رویکرد پیشنهادی در مرجع [۲۴]

با توجه به شکل (۷)، ابتدا سیستم اصلی با استفاده از مقادیر انتخابی برای بردار عدم قطعیت‌های پارامتری ایجاد می‌گردد. سپس پارامترهای زمان‌بندی غیر دقیق ایجاد می‌شود. پس از آن، به ازای هر مقدار از حالت‌های $x_1(t_0)$ و $x_2(t_0)$ در لحظه $t=t_0$ و با توجه به بازه‌های ارائه شده برای پارامترهای a و m_p، بیشترین و کمترین مقدار پارامترهای زمان‌بندی در لحظه مذکور به دست خواهد آمد. به دلیل غیر خطی بودن این پارامترها، بایستی بازه‌های مربوط به a و m_p را به گام‌های کوچکی تقسیم کرده و پس از آن، گام به گام پیش رفته و مقادیر پارامترهای زمان‌بندی را به دست آورده و ذخیره نماییم. در نهایت، با توجه به مقادیر به دست آمده، کمینه و بیشینه این پارامترها یعنی $\theta_i^L(t,\eta)$ و $\theta_i^U(t,\eta)$ را در لحظه $t=t_0$ محاسبه نموده و آن‌ها را به ترتیب کران‌های پایین و بالای متغیر با زمان می‌نامیم. پس از آن، پارامترهای کمکی معرفی شده در مرجع [۲۴] به دست خواهند آمد. این پارامترهای کمکی به صورت ذیل تعریف شده‌اند:

$$\underline{\theta}_i(t)=\frac{\theta_i^L(t)}{\sum_{i1}^{p}\theta_i^L(t)+\theta_i^U(t)},$$

$$\overline{\theta}_i(t)=\frac{\theta_i^U(t)}{\sum_{i1}^{p}\theta_i^L(t)+\theta_i^U(t)}$$

در نهایت، بهره پسخورد حالت محاسبه خواهد شد. تعداد گوشه‌ها در نمایش چندوجهی سیستم پاندول معکوس، برابر با ۴ است. بنابراین، ۸ پارامتر کمکی خواهیم داشت. ۴ پارامتر کمکی به واسطه $\theta_1^L(t,\eta),\theta_2^L(t,\eta),\theta_3^L(t,\eta),\theta_4^L(t,\eta)$ و ۴ پارامتر کمکی دیگر به واسطه $\theta_1^U(t,\eta)$، $\theta_2^U(t,\eta)$، $\theta_3^U(t,\eta)$ و $\theta_4^U(t,\eta)$ ایجاد خواهند شد. در نتیجه، پارامترهای کمکی نهایی عبارتند از:

$$\overline{\theta}_1(t,\eta),\overline{\theta}_2(t,\eta),\overline{\theta}_3(t,\eta),\overline{\theta}_4(t,\eta),$$
$$\underline{\theta}_1(t,\eta),\underline{\theta}_2(t,\eta),\underline{\theta}_3(t,\eta),\underline{\theta}_4(t,\eta)$$

همانطور که از شکل ۷ مشخص است این روش موجب افزایش بیش از حد محاسبات شده که در کاربردهای عملیاتی، چالشی اساسی به حساب می‌آید. همین امر موجب شده تا نویسندگان در مرجع [۲۴] تنها به شبیه‌سازی کامپیوتری اکتفا کرده و پیاده‌سازی عملیاتی را انجام ندهند. به هر حال، رویکرد ارائه شده در مرجع [۲۴] بر روی پاندول معکوس اعمال شده و نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های (۸) الی (۱۲) نمایش داده شده است. شکل (۸) مسیر حالت‌ها و شکل‌های (۹) الی (۱۲) پارامترهای زمان‌بندی را نشان می‌دهند. در برچسب‌های استفاده شده در شکل‌های (۹) الی (۱۲) منظور از $\theta_i(t,\eta)-L$ و $\theta_i(t,\eta)-U$ به ترتیب $\theta_i^L(t,\eta)$ و $\theta_i^U(t,\eta)$ است.

حال شماتیک کلی شبیه‌سازی در روش پیشنهادی در مقاله جاری را نمایش می‌دهیم. شماتیک مذکور در شکل (۱۳) ارائه شده است. همانطور که در متن مقاله بیان نمودیم، η_{New} بردار شامل $\eta_{i\max},\eta_{i\min},i=1,2,...,p$ها بوده که $\eta_{i\max},\eta_{i\min}$ها مقادیری از عدم قطعیت‌های پارامتری هستند که $\mathbf{i}$-امین پارامتر زمان‌بندی نامعین را به ترتیب، کمینه و بیشینه می‌نمایند. به عبارت دیگر، ابتدا به صورت بیرون – خط و با توجه به بازه تغییرات حالت‌های سیستم و بازه مربوط به عدم قطعیت‌های پارامتری، مقادیری از عدم قطعیت‌ها به دست می‌آیند که پارامترهای زمان‌بندی نامعین را در تمامی زمان‌ها کمینه و بیشنه می‌نمایند. مقادیر محاسبه شده را با نمادهای $\eta_{i\max},\eta_{i\min}$ نشان می‌دهیم. بنابراین، نیاز به محاسبه لحظه به لحظه کمینه و بیشینه پارامترهای زمان‌بندی نداریم. به همین دلیل، نیاز به ایجاد حلقه‌های محاسباتی تکراری بر – خط نبوده و زمان محاسباتی کلی، به شدت کاهش خواهد یافت. سپس، از جایگزین نمودن عدم قطعیت‌های پارامتری موجود در پارامترهای زمان‌بندی نامعین با مقادیر به دست آمده و استفاده از ایده‌ای خاص (که در قسمت معرفی پارامترهای زمان‌بندی جدید در متن مقاله جاری بیان شده است)، پارامترهای زمان‌بندی جدید ایجاد خواهند شد. با توجه به روابط (۱۲) و (۱۳)، پارامترهای زمان‌بندی جدید به صورت ذیل خواهند بود:

$$\theta_{iNew}(t)=\frac{a_i(t)}{b(t)},\qquad i=1,2,3,4,$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.2.7]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.1]

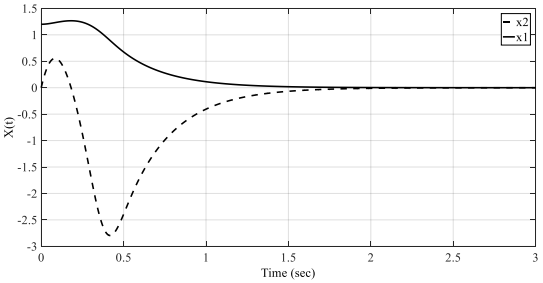
$$a_i(t)=3\theta_i(t)\big|_{\eta=\eta_{i\min}}+3\left(\theta_i(t)\big|_{\eta=\eta_{i\max}}+1\right)$$
$$-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}\left(\theta_i(t)\big|_{\eta=\eta_{j\max}}-1\right)+\frac{1}{3}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{4}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{4}\theta_j(t)\big|_{\eta=\eta_{l\max}},$$

$$b(t)=3\left(\sum_{q=1}^{4}\theta_q(t)\big|_{\eta=\eta_{q\max}}+\sum_{q=1}^{4}\theta_q(t)\big|_{\eta=\eta_{q\min}}+\sum_{q=1}^{4}2\right)$$

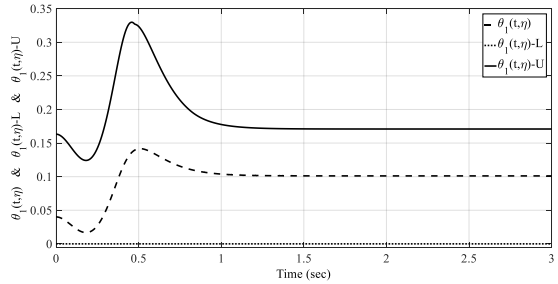
که

$$\eta_{1\max}=\begin{bmatrix}0.1 & 3\end{bmatrix},\quad \eta_{1\min}=\begin{bmatrix}0.052 & 2\end{bmatrix},$$
$$\eta_{3\max}=\begin{bmatrix}0.1 & 3\end{bmatrix},\quad \eta_{3\min}=\begin{bmatrix}0.052 & 2\end{bmatrix},$$
$$\eta_{2\max}=\begin{bmatrix}0.052 & 3\end{bmatrix},\quad \eta_{2\min}=\begin{bmatrix}0.1 & 3\end{bmatrix},$$
$$\eta_{4\max}=\begin{bmatrix}0.052 & 3\end{bmatrix},\quad \eta_{4\min}=\begin{bmatrix}0.1 & 3\end{bmatrix}$$

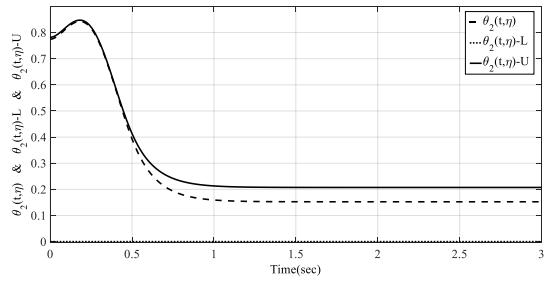
همچنین، با مقایسه شکل‌های (۷) و (۱۳) متوجه می‌شویم تعداد پارامترهای زمان‌بندی مورد نیاز جهت زمان‌بندی بهره کنترل‌کننده پیشنهادی در مقاله جاری، نصف تعداد پارامترهای زمان‌بندی مورد استفاده در مرجع [۲۴] می‌باشد. این رویداد نیز در کاهش زمان محاسباتی تاثیر بسزایی خواهد داشت. روش کنترلی پیشنهادی در مقاله جاری بر روی پاندول معکوس معرفی شده در مرجع [۲۴] اعمال شده و نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های (۱۴) الی (۱۸) نشان داده شده است.



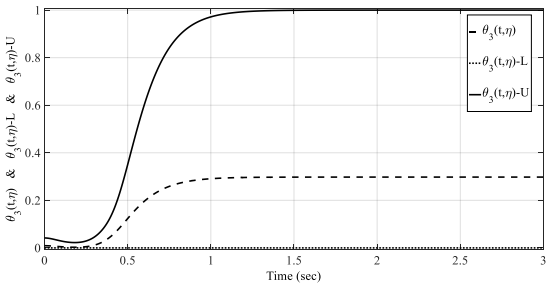
شکل ۸ : حالت‌های سیستم پاندول معکوس در رویکرد پیشنهادی در مرجع [۲۴]



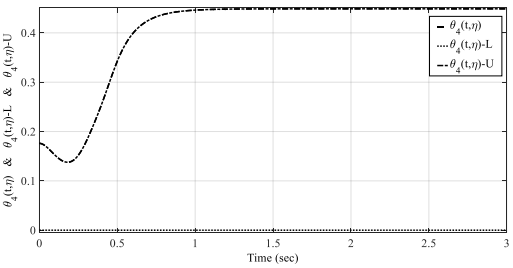
شکل ۹: پارامتر زمان‌بندی اول به ازای مقدار دلخواه برای بردار عدم قطعیت‌های پارامتری و کران‌های بالا و پایین متغیر با زمان مربوطه در مرجع [۲۴]



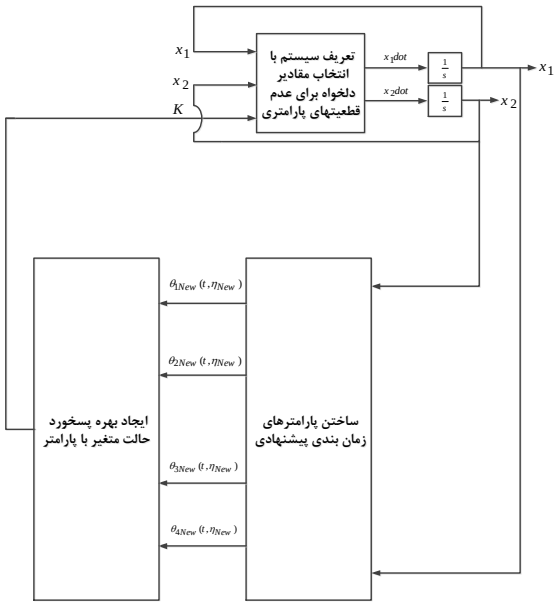
شکل ۱۰: پارامتر زمان‌بندی دوم به ازای مقدار دلخواه برای بردار عدم قطعیت‌های پارامتری و کران‌های بالا و پایین متغیر با زمان مربوطه در مرجع [۲۴]



شکل ۱۱: پارامتر زمان‌بندی سوم به ازای مقدار دلخواه برای بردار عدم قطعیت‌های پارامتری و کران‌های بالا و پایین متغیر با زمان مربوطه در مرجع [۲۴]

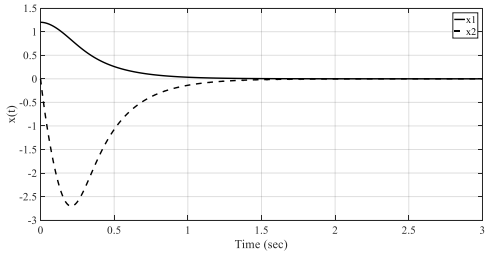


شکل ۱۲: پارامتر زمان‌بندی چهارم به ازای مقدار دلخواه برای بردار عدم قطعیت‌های پارامتری و کران‌های بالا و پایین متغیر با زمان مربوطه در مرجع [۲۴]

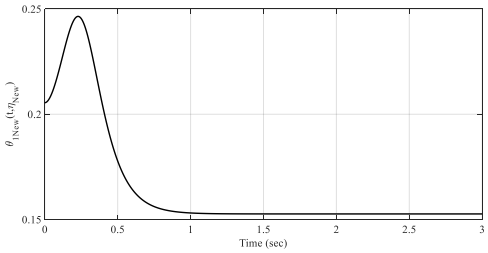


شکل ۱۳: بلوک دیاگرام رویکرد پیشنهادی در مقاله جاری

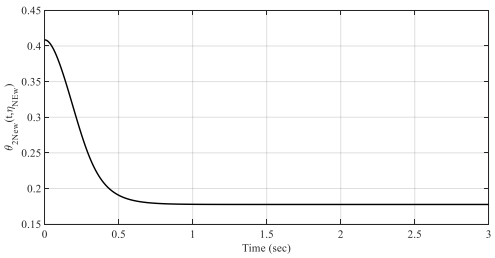
[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.2.7]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.1]



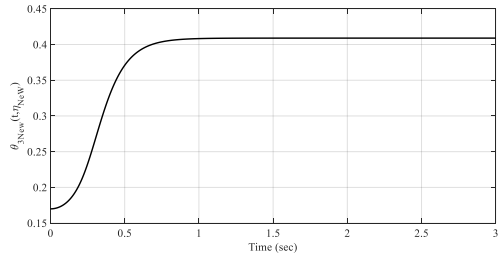
شکل ۱۴: حالت‌های سیستم پاندول معکوس در رویکرد پیشنهادی در مقاله جاری



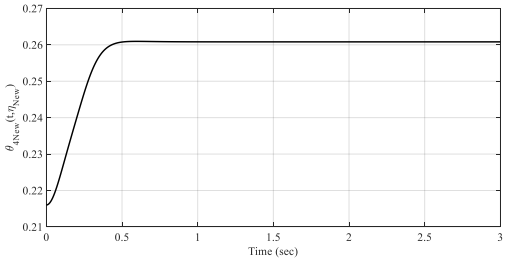
شکل ۱۵: اولین پارامتر زمان‌بندی جدید در رویکرد پیشنهادی در مقاله جاری



شکل ۱۶: دومین پارامتر زمان‌بندی جدید در رویکرد پیشنهادی در مقاله جاری



شکل ۱۷: سومین پارامتر زمان‌بندی جدید در رویکرد پیشنهادی در مقاله جاری



شکل ۱۸: چهارمین پارامتر زمان‌بندی جدید در رویکرد پیشنهادی در مقاله جاری

با توجه به شکل‌های نشان داده شده، پایداری سیستم حلقه بسته در روش‌های پیشنهادی در مقاله جاری و مرجع [۲۴] برآورده شده است. لکن با توجه به توضیحات ارائه شده، حجم محاسباتی در رویکرد مربوط به مرجع [۲۴] بسیار بالا بوده و مناسب کاربردهای عملیاتی نمی‌باشد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، کنترل‌کننده پسخورد حالت نوینی برای سیستم‌های خطی متغیر با پارامتر نامعین ارائه شده است. فرض بر این است که نامعینی سیستم‌های مذکور به واسطه حضور عدم قطعیت‌های پارامتری در پارامترهای زمان‌بندی می‌باشد. کنترل‌کننده مذکور بر پایه معرفی مجموعه‌ای از پارامترهای زمان‌بندی جدید ایجاد شده و در برابر عدم قطعیت‌های پارامتری نامتغیر با زمان با بازه‌های مشخص، مقاوم است. با محاسبه مقادیری از عدم قطعیت‌ها که موجب کمینه و بیشینه شدن پارامترهای زمان‌بندی نامعین می‌گردد و جایگزین نمودن عدم قطعیت‌های پارامتری موجود در پارامترهای زمان‌بندی نامعین با مقادیر به دست آمده، پارامترهای زمان‌بندی جدید محاسبه می‌شوند. همچنین، شرایط پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته به صورت نامساوی‌های خطی ماتریسی ارائه شد. در نهایت، رویکرد پیشنهادی جهت به صفر رساندن نرخ غلتش رهگیر نوعی هوا به زمین به کار گرفته شده است. انطباق نتایج حاصل از شبیه‌سازی و تست‌های آزمایشگاهی ، بیانگر کارا بودن رویکرد پیشنهادی می‌باشد.

ضمیمه

در این بخش اثبات می‌کنیم روابط (۱۲) و (۱۳) ارائه شده در بخش ۳ تشکیل پارامترهای زمان‌بندی خواهند داد.

اثبات:

ابتدا ثابت می‌کنیم $\theta_{iNew}(t,\eta_{New})$ ها غیرمنفی می‌باشند. با انتخاب مقدار مناسبی برای μ ، می‌توان نامساوی‌های رابطه (۱۴) را استخراج نمود. در نتیجه، نامساوی ذیل به ازای تمامی $i=1,2,...,p$ برقرار می‌باشد:

$$(p-1)\left(\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}}+\mu\right) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}\left(\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{j\max}}-\mu\right)>0 \qquad (۱۵)$$

همچنین، کاملا واضح است که عبارات $(p-1)\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\min}}$ ، $\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_c}$ و $\frac{1}{p-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{p}\theta_j(t,\eta)|_{\eta=\eta_{l\max}}$ غیر منفی می‌باشند.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.2.7]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.1]

بنابراین، $a_i(t)$ غیر منفی است. از طرفی، $\sum_{q=1}^{p}\theta_q(t,\eta)|_{\eta=\eta_{q\min}}\geq 0$ ، $\sum_{q=1}^{p}\theta_q(t,\eta)|_{\eta=\eta_{q\min}}\geq 0$ غیر منفی و $p-1$ مثبت هستند. در نتیجه، $b(t)$ و $\theta_{iNew}(t,\eta_{New})=\dfrac{a_i(t)}{b(t)}$، $i=1,2,...,p$ به ازای تمامی غیر منفی می‌باشند. حال نشان می‌دهیم که نامساوی ذیل، صحیح است:

$$\theta_{iNew}(t,\eta_{New})\leq 1 \qquad (۱۶)$$

جهت ادامه اثبات، نیازمند بسط جمله $a_i(t)$ هستیم. رابطه (۱۷) بسط یافته $a_i(t)$ را نمایش می‌دهد. همانطور که می‌دانیم، $p-1\geq 1$ است. بنابراین، عبارات (۲۱) – (۱۷) به دست خواهند آمد.

$$\begin{aligned}
&\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}}+\mu\geq\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{1\max}}-\mu,\\
&\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}}+\mu\geq\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{2\max}}-\mu,\\
&\vdots\\
&\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}}+\mu\geq\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i-1)\max}}-\mu,\ \Rightarrow\ (p-1)\left(\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}}+\mu\right)\geq\begin{bmatrix}\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{1\max}}+\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{2\max}}\\+...+\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i-1)\max}}\\+\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i+1)\max}}+...\\+\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{p\max}}-(p-1)\mu\end{bmatrix}\\
&\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}}+\mu\geq\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i+1)\max}}-\mu,\\
&\vdots\\
&\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}}+\mu\geq\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{p\max}}-\mu,
\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

$$\begin{aligned}
a_i(t)=&(p-1)\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\min}}+(p-1)\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}}+2(p-1)\mu-\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{1\max}}-\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{2\max}}\\
&-...-\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i-1)\max}}-\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i+1)\max}}-...-\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{p\max}}+\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_c}\\
&+\frac{1}{p-1}\begin{bmatrix}\theta_1(t,\eta)|_{\eta=\eta_{2\max}}+\theta_1(t,\eta)|_{\eta=\eta_{3\max}}+...+\theta_1(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}}+...+\theta_1(t,\eta)|_{\eta=\eta_{p\max}}\\+\theta_2(t,\eta)|_{\eta=\eta_{1\max}}+\theta_2(t,\eta)|_{\eta=\eta_{3\max}}+...+\theta_2(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}}+...+\theta_2(t,\eta)|_{\eta=\eta_{p\max}}\\+...+\theta_{(i-1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{1\max}}+\theta_{(i-1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{2\max}}+...+\theta_{(i-1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i-2)\max}}\\+\theta_{(i-1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}}+...+\theta_{(i-1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{p\max}}+\theta_{(i+1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{1\max}}+\theta_{(i+1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{2\max}}\\+...+\theta_{(i+1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}}+\theta_{(i+1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i+2)\max}}+...+\theta_{(i+1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{p\max}}\\+...+\theta_p(t,\eta)|_{\eta=\eta_{1\max}}+\theta_p(t,\eta)|_{\eta=\eta_{2\max}}+...+\theta_p(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}}+...+\theta_p(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(p-1)\max}}\end{bmatrix}
\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.2.7]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.1]

$$\theta_1(t,\eta)|_{\eta=\eta_{1\max}}+2\mu\geq\frac{1}{p-1}\theta_1(t,\eta)|_{\eta=\eta_{2\max}},$$
$$\theta_1(t,\eta)|_{\eta=\eta_{1\max}}+2\mu\geq\frac{1}{p-1}\theta_1(t,\eta)|_{\eta=\eta_{3\max}},\ldots,$$
$$\theta_1(t,\eta)|_{\eta=\eta_{1\max}}+2\mu\geq\frac{1}{p-1}\theta_1(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}},\ldots\ \Rightarrow\ (p-1)\left(\theta_1(t,\eta)|_{\eta=\eta_{1\max}}+2\mu\right)\geq\frac{1}{p-1}\begin{bmatrix}\theta_1(t,\eta)|_{\eta=\eta_{2\max}}\\+\theta_1(t,\eta)|_{\eta=\eta_{3\max}}\\+\ldots\\+\theta_1(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}}\\+\ldots\\+\theta_1(t,\eta)|_{\eta=\eta_{p\max}}\end{bmatrix}\qquad(۱۸)$$
$$\theta_1(t,\eta)|_{\eta=\eta_{1\max}}+2\mu\geq\frac{1}{p-1}\theta_1(t,\eta)|_{\eta=\eta_{p\max}},$$
$$\theta_2(t,\eta)|_{\eta=\eta_{2\max}}+2\mu\geq\frac{1}{p-1}\theta_2(t,\eta)|_{\eta=\eta_{1\max}},$$
$$\theta_2(t,\eta)|_{\eta=\eta_{2\max}}+2\mu\geq\frac{1}{p-1}\theta_2(t,\eta)|_{\eta=\eta_{3\max}},\ldots,$$
$$\theta_2(t,\eta)|_{\eta=\eta_{2\max}}+2\mu\geq\frac{1}{p-1}\theta_2(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}},\ldots,\ \Rightarrow\ (p-1)\left(\theta_2(t,\eta)|_{\eta=\eta_{2\max}}+2\mu\right)\geq\frac{1}{p-1}\begin{bmatrix}\theta_2(t,\eta)|_{\eta=\eta_{1\max}}\\+\theta_2(t,\eta)|_{\eta=\eta_{3\max}}\\+\ldots\\+\theta_2(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}}\\+\ldots\\+\theta_2(t,\eta)|_{\eta=\eta_{p\max}}\end{bmatrix}\qquad(۱۹)$$
$$\theta_2(t,\eta)|_{\eta=\eta_{2\max}}+2\mu\geq\frac{1}{p-1}\theta_2(t,\eta)|_{\eta=\eta_{p\max}},$$
$$\ldots,\ \theta_{(i-1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i-1)\max}}+2\mu\geq\frac{1}{p-1}\theta_{(i-1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{1\max}},$$
$$\theta_{(i-1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i-1)\max}}+2\mu\geq\frac{1}{p-1}\theta_{(i-1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{2\max}},\ldots,$$
$$\theta_{(i-1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i-1)\max}}+2\mu\geq\frac{1}{p-1}\theta_{(i-1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i-2)\max}},\ldots,$$
$$\theta_{(i-1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i-1)\max}}+2\mu\geq\frac{1}{p-1}\theta_{(i-1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}},\ldots,$$
$$\theta_{(i-1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i-1)\max}}+2\mu\geq\frac{1}{p-1}\theta_{(i-1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{p\max}},\qquad(۲۰)$$
$$\Rightarrow(p-1)\left(\theta_{(i-1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i-1)\max}}+2\mu\right)\geq\frac{1}{p-1}\begin{bmatrix}\theta_{(i-1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{1\max}}\\+\theta_{(i-1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{2\max}}\\+\ldots+\theta_{(i-1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i-2)\max}}\\+\theta_{(i-1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}}\\+\ldots+\theta_{(i-1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{p\max}}\end{bmatrix}$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.2.7]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.1]

$$\begin{aligned}
&\ldots,\ \theta_p(t,\eta)|_{\eta=\eta_{p\max}}+2\mu\geq\frac{1}{p-1}\theta_p(t,\eta)|_{\eta=\eta_{1\max}},\\
&\theta_p(t,\eta)|_{\eta=\eta_{p\max}}+2\mu\geq\frac{1}{p-1}\theta_p(t,\eta)|_{\eta=\eta_{2\max}},\ldots,\\
&\theta_p(t,\eta)|_{\eta=\eta_{p\max}}+2\mu\geq\frac{1}{p-1}\theta_p(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}},\ldots,\\
&\theta_p(t,\eta)|_{\eta=\eta_{p\max}}+2\mu\geq\frac{1}{p-1}\theta_p(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(p-1)\max}},\\
&\Rightarrow\ (p-1)\left(\theta_p(t,\eta)|_{\eta=\eta_{p\max}}+2\mu\right)\geq\ \frac{1}{p-1}\begin{bmatrix}\theta_p(t,\eta)|_{\eta=\eta_{1\max}}+\theta_p(t,\eta)|_{\eta=\eta_{2\max}}+\ldots\\+\theta_p(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}}+\ldots+\theta_p(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(p-1)\max}}\end{bmatrix}
\end{aligned}\tag{۲۱}$$

با جمع نامساوی‌های (۲۱) – (۱۷)، به نتیجه (۲۲) خواهیم رسید:

$$(p-1)\left(\sum_{\substack{q=1\\q\neq i}}^{p}\theta_q(t,\eta)|_{\eta=\eta_{q\max}}+\sum_{\substack{q=1\\q\neq i}}^{p}2\mu\right)\geq\frac{1}{p-1}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{p}\sum_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{p}\theta_j(t,\eta)|_{\eta=\eta_{l\max}}\tag{۲۲}$$

همچنین واضح است که نامساوی‌های (۲۳) صحیح می‌باشند.

$$\begin{aligned}
&(p-1)\theta_1(t,\eta)|_{\eta=\eta_{1\min}}\geq-\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{1\max}},\\
&(p-1)\theta_2(t,\eta)|_{\eta=\eta_{2\min}}\geq-\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{2\max}},\\
&\vdots\\
&(p-1)\theta_{(i-1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i-1)\min}}\geq-\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i-1)\max}},\\
&(p-1)\theta_{(i+1)}(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i+1)\min}}\geq-\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i+1)\max}},\\
&\vdots\\
&(p-1)\theta_p(t,\eta)|_{\eta=\eta_{p\min}}\geq-\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{p\max}},\\
&\Rightarrow\ (p-1)\sum_{\substack{q=1\\q\neq i}}^{p}\theta_q(t,\eta)|_{\eta=\eta_{q\min}}\geq\begin{bmatrix}-\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{1\max}}-\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{2\max}}-\\\ldots-\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i-1)\max}}\\-\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i+1)\max}}-\ldots-\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{p\max}}\end{bmatrix}
\end{aligned}\tag{۲۳}$$

حال عبارات $(p-1)\left(\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}}+2\mu\right)$ و $(p-1)\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\min}}$ را به ترتیب به دو طرف روابط (۲۲) و (۲۳) اضـافه می‌کنیم. در نهایت، به روابط (۲۴) و (۲۵) نائل خواهیم آمد.

$$\begin{aligned}
(p-1)\left(\sum_{q=1}^{p}\left(\theta_q(t,\eta)|_{\eta=\eta_{q\max}}+2\mu\right)\right)\geq\frac{1}{p-1}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{p}\sum_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{p}\theta_j(t,\eta)|_{\eta=\eta_{l\max}}\\
+(p-1)\left(\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}}+2\mu\right)
\end{aligned}\tag{۲۴}$$

$$\begin{aligned}
(p-1)\sum_{q=1}^{p}\theta_q(t,\eta)|_{\eta=\eta_{q\min}}\geq-\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{1\max}}-\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{2\max}}-\ldots\\
-\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i-1)\max}}-\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{(i+1)\max}}\\
-\ldots-\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{p\max}}+(p-1)\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\min}}
\end{aligned}\tag{۲۵}$$

با توجه به رابطه (۸) می‌توان نوشت:

$$1\geq\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_c}\tag{۲۶}$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.2.7]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.1]

با جمع نامساوی‌های (۲۶) – (۲۴) به رابطه ذیل خواهیم رسید:

$$b(t) \geq a_i(t) \tag{۲۷}$$

همانطور که بیان شد، $a_i(t)$ و $b(t)$ غیر منفی هستند. بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} &b(t) \geq 0 \\ &a_i(t) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{a_i(t)}{b(t)} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \theta_{iNew}(t, \eta_{New}) \leq 1 \\ &b(t) \geq a_i(t) \end{aligned} \tag{۲۸}$$

بنابراین، ثابت نمودیم $\theta_{iNew}(t, \eta_{New})$ها در بازه $[0 \quad 1]$ قرار دارند. در نهایت، ثابت می‌کنیم $\sum_{i=1}^{p} \theta_{iNew}(t, \eta_{New})$ برابر با واحد می‌باشد. در گام اول اثبات، $a_i(t)$ را به صورت ذیل بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} a_i(t) = &\underbrace{(p-1)\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\min}} + (p-1)\theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{i\max}} + 2\mu(p-1)}_{X_i} \\ &\underbrace{-\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} \theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_{j\max}} + \frac{1}{p-1}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p}\sum_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{p} \theta_j(t,\eta)|_{\eta=\eta_{l\max}} + \theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_c}}_{Y_i} \end{aligned} \tag{۲۹}$$

نشان می‌دهیم $\sum_{i=1}^{p} Y_i$ برابر با صفر است. با انجام ساده‌سازی‌های ریاضی، بسط $\sum_{i=1}^{p} Y_i$ به صورت رابطه (۳۰) خواهد بود:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p} Y_i = &-\theta_1(t,\eta)|_{\eta_{2\max}} + \theta_1(t,\eta)|_{\eta_{2\max}} - \theta_1(t,\eta)|_{\eta_{3\max}} \\ &+ \theta_1(t,\eta)|_{\eta_{3\max}} - \ldots - \theta_1(t,\eta)|_{\eta_{p\max}} \\ &+ \theta_1(t,\eta)|_{\eta_{p\max}} - \theta_2(t,\eta)|_{\eta_{1\max}} + \theta_2(t,\eta)|_{\eta_{1\max}} \\ &- \theta_2(t,\eta)|_{\eta_{3\max}} + \theta_2(t,\eta)|_{\eta_{3\max}} - \ldots \\ &- \theta_2(t,\eta)|_{\eta_{p\max}} + \theta_2(t,\eta)|_{\eta_{p\max}} - \ldots - \theta_p(t,\eta)|_{\eta_{1\max}} \\ &+ \theta_p(t,\eta)|_{\eta_{1\max}} - \ldots - \theta_p(t,\eta)|_{\eta_{(p-1)\max}} + \theta_p(t,\eta)|_{\eta_{(p-1)\max}} \end{aligned} \tag{۳۰}$$

همانطور که مشخص است، تساوی (۳۰) برابر با صفر است. از طرفی، $\sum_{i=1}^{p}\left(X_i + \theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_c}\right)$ برابر است با:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i + \sum_{i=1}^{p} \theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_c} = (p-1)\left(\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{p}\left(\theta_i(t,\eta)|_{\eta_{i\max}} + \theta_i(t,\eta)|_{\eta_{i\min}}\right) \\ + \sum_{i=1}^{p} 2\mu + \frac{1}{p-1} \end{array}\right) \tag{۳۱}$$

بنابراین، $\sum_{i=1}^{p} \theta_{iNew}(t, \eta_{New})$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p} \theta_{iNew}(t,\eta_{New}) &= \frac{\sum_{i=1}^{p} a_i(t)}{b(t)} = \frac{\sum_{i=1}^{p} X_i + \sum_{i=1}^{p} Y_i + \sum_{i=1}^{p} \theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_c}}{b(t)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{p} X_i + \sum_{i=1}^{p} \theta_i(t,\eta)|_{\eta=\eta_c}}{b(t)} = \frac{b(t)}{b(t)} = 1 \end{aligned} \tag{۳۲}$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.2.7]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.1]

در نتیجه، ثابت نمودیم پارامترهای زمان‌بندی جدید، تشکیل مجموعه‌ای محدب داده و رابطه (۸) را ارضا می‌نمایند. بنابراین، اثبات کامل است

مراجع

[1] J. Mohammadpour and G. Scherer, Control of linear parameter varying systems with applications. Springer, New York, 2012.

[2] A. White, G. Zhu, and J. Choi, "Mixed H_2 / H_∞ observer-based LPV control of a hydraulic engine cam phasing actuator," IEEE Trans. on Control Systems Technology, vol. 21, no. 1, pp. 229-238, 2013.

[3] J. Shamma, Analysis and design of gain scheduled control systems, PhD degree, Massachusetts Institute of Technology, U.S.A, 1988.

[4] M-G. Yoon, V. A. Ugrinovskii, and M. Pszczel, "Gain-scheduling of minimax optimal state-feedback controllers for uncertain LPV systems," IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 52, no. 1, pp. 311-317, 2007.

[5] J. C. Geromel, C. De Souza, and R. Skelton, "Static output feedback controllers: Stability and convexity," IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 43, no. 1, pp. 120-125, 1998.

[6] V. Kučera and A. De Souza, "A necessary and sufficient condition for output feedback stabilizability," Automatica, vol. 31, no. 9, pp. 1357-1359, 1995.

[7] D. Henrion and J. Lasserre, "Convergent relaxations of polynomial matrix inequalities and static output feedback," IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 51, no. 2, pp. 192-202, 2006.

[8] M. S. Sadabadi and D. J. Peaucelle, "From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey," Annual reviews in control, vol. 42, pp. 11-26, 2016.

[9] C. M. Agulhari, E. S. Tognetti, R. C. Oliveira, and P. D. Peres, "H_∞ dynamic output feedback for LPV systems subject to inexactly measured scheduling parameters," In Proc. of the American Control Conference, Washington-DC, USA, pp. 6060-6065, 2013.

[10] A. K. Al-Jiboory and G. Zhu, "Static output-feedback robust gain-scheduling control with guaranteed H_2 performance," Journal of Franklin Institute, vol. 355, no. 5, pp. 2221-2242, 2018.

[11] A. K. Al-Jiboory and G. Zhu, "Robust gain-scheduling control with guaranteed performance," IFAC-PapersOnLine, vol. 49, no. 18, pp. 528-533, 2016.

[12] A. K. Al-Jiboory and G. Zhu, "Improved synthesis conditions for mixed H_2 / H_∞ gain-scheduling control subject to uncertain scheduling parameters," International Journal of control, vol. 90, no. 3, pp. 580-598, 2017.

[13] M. Sato, "Gain-scheduled flight controller using bounded inexact scheduling parameters," IEEE Trans. on Control Systems Technology, vol. 26, no. 3, pp. 1074-1082, 2018.

[14] M. Sato, "Gain-scheduled output-feedback controllers using inexactly measured scheduling parameters for linear parametrically affine systems," SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration, vol. 4, no. 2, pp. 145-152, 2011.

[15] J. Daafouz, J. Bernussou, and J. Geromel, "On inexact LPV control design of continuous–time polytopic systems," IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 53, no. 7, pp. 1674-1678, 2008.

[16] M. Sato and D. Peaucelle, "Gain-scheduled output-feedback controllers using inexact scheduling parameters for continuous-time LPV systems," Automatica, vol. 49, no. 4, pp. 1019-1025, 2013.

[17] A. Sadeghzadeh, "Gain-scheduled continuous-time control using polytope-bounded inexact scheduling parameters," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 28, vol. 17, pp. 5557-5574, 2018.

[18] M. Sato and D. Peaucelle, "A new method for gain-scheduled output feedback controller design using inexact scheduling parameters," IEEE Conference on Control Technology and Applications, Copenhagen, Denmark, pp. 1295-1300, 2018.

[19] A. K. Al-Jiboory, G. Zhu, and J. Choi, "Guaranteed performance state-feedback gain-scheduling control with uncertain scheduling parameters," Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 138, no. 1, pp. 1-7, 2016.

[20] S. Masayuki, "Gain-scheduled state feedback controllers for discrete-time LPV systems using scheduling parameters affected by absolute and proportional uncertainties," IFAC-PapersOnLine, vol. 48, no. 26, pp. 31-36, 2015.

[21] P. Krishnamurthy and F. Khorrami, "Decentralised dynamic high-gain scaling-based output-feedback control of large-scale non-linear interconnected systems with delays," Journal of Control and Decision, vol. 1, no. 4, pp. 257-282, 2014.

[22] A. Jafar, A. Bhatti, SM. Ahmad, and N. Ahmed, "Robust gain-scheduled linear parameter-varying control algorithm for a lab helicopter: A linear matrix inequality-based approach," Journal of Systems and Control Engineering, vol. 232, no. 5, pp. 558-571, 2018.

[23] D. Rotondo, F. Nejjari, and V. Puig, "Robust state-feedback control of uncertain LPV systems: An

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.2.7]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.1]

LMI-based approach," Journal of the Franklin Institute, vol. 351, no. 5, pp. 2781-2803, 2014.

[24] P. Park, N. K. Known, and B. Y. Park, "State-feedback control for LPV systems with interval uncertain parameters," Journal of the Franklin Institute, vol. 352, no. 11, pp. 5214-5225, 2015.

[25] P. Park and D-J. Choi, "LPV controller design for the nonlinear RTAC system," International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 11, no. 14, pp. 1343-1363, 2001.

[26] J. Blakelock, Automatic Control of Aircraft and Missiles. John Wiley & Sons, New York, 1991.

[27] G. M. Siouris, Missile Guidance and Control Systems. Springer, New York, 2004.

[۲۸] ایمان محمدزمان، سید محمدجواد معافی، "طراحی خودخلبان مقاوم با استفاده از جدول‌بندی بهره فازی"، مجله علمی پژوهشی کنترل، جلد ۱۱، شماره ۴، صفحه ۱۱-۱، ۱۳۹۶.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-12]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.1.2.7]
[DOI: 10.52547/joc.15.1.1]