مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۵، شماره ۲، تابستان ۱۴۰۰، صفحه ۱۰۵-۹۷

مدلسازی و صحه‌گذاری معادلات فضای حالت برای یک مبدل ایزوله رزنانسی سری

رضا امجدی فرد[۱]، محمد توکلی بینا[۲]، حمید خالوزاده[۳]، فرهاد باقراسکویی[۴]، ولی طالب زاده[۵]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه قدرت، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، r.amjadifard@ee.kntu.ac.ir
[۲] استاد، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه قدرت، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی ، tavakoli@eetd.kntu.ac.ir
[۳] استاد، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی ، h_khaloozadeh@kntu.ac.ir
[۴] مربی، پژوهشکده سامانه های ماهواره، پژوهشگاه فضایی ایران، f.bagheroskouei@isrc.ac.ir
[۵] مربی، پژوهشکده سامانه های ماهواره، پژوهشگاه فضایی ایران، v.talebzadeh@isrc.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۲۵ ویرایش: ۱۳۹۹/۰۴/۱۱ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۷/۲۸

چکیده: امروزه مبدل‌های رزنانسی بدلیل قابلیت پیاده‌سازی تکنیک‌های سوئیچ زنی در ولتاژ صفر یا جریان صفر بسیار مورد توجه می‌باشند. استفاده از این دو تکنیک منجر به کاهش تلفات دینامیک در مبدل شده که نتیجه آن افزایش راندمان و کاهش نویز در مقایسه با مبدل‌های سوئیچینگ متداول با مدولاسیون پهنای پالس می‌باشد که از سوئیچ زنی سخت استفاده می کنند. اما در مقابل، به‌دست آوردن مدل سیگنال کوچک برای مبدل‌های رزنانسی بسیار پیچیده و دشوار می‌باشد زیرا مقدار متوسط متغیرهای حالت در هر سیکلِ سوئیچ زنی، برابر با صفر بوده و لذا نمی‌توان از روش‌های متداول نظیر متوسط گیری در فضای حالت استفاده نمود. در این مقاله از تکنیک توابع توصیف گسترده برای به‌دست آوردن معادلات حالت یک مبدل ایزوله رزنانسی سری استفاده شده است. به منظور صحه‌گذاری معادلات به‌دست آمده، روش میدل‌بروک پیشنهاد شده است. به کمک این روش می‌توان دیاگرام بد را با اعمال تغییرات و انجام چندین اندازه‌گیری بر روی یک مبدل، به‌دست آورد. بر این اساس در مرحله صحه گذاری، ابتدا یک مبدل رزنانسی طراحی و پیاده‌سازی شده است. در مرحله بعد با اعمال تغییرات ضروری برای بکارگیری روش میدل‌بروک، داده‌های مورد نیازاندازه‌گیری و پس از پردازش، با نتایج حاصل از پیاده‌سازی معادلات استخراج شده در محیط متلب که مبتنی بر معادلات حالت به‌دست آمده می‌باشند، مقایسه می‌شوند. مقایسه نتایج، صحت معادلات حالت به‌دست آمده را تایید می کنند.

کلمات کلیدی: مبدل رزنانسی، تابع توصیف گسترده، معادلات فضای حالت، میدل‌بروک.

Modeling and Verification of the State Space Equation for an Isolated Series Resonant Converter

Reza Amjadifard, Mohammad Tavakoli Bina, Hamid Khaloozadeh,
Farhad Bagheroskouei, Vali Talebzadeh

Abstract: Resonant converter due to implementation of zero voltage switching (ZVS) or zero current switching (ZCS), are very interested. Although using these techniques, increases the efficiency and also decreases the generated EMI noise, obtaining the small-signal model of these

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.5.2]
[DOI: 10.52547/joc.15.2.97]

converters is very complicated. The state-space variables mostly change as a sinusoid curve, so the average of these variables is equal to zero. Therefore the traditional method such as state-space averaging is not applicable in order to obtaining the state space equation of the converter. In this article, the state space equation is obtained by using the extended describing functions. To verify the obtained equation, the Middlebrook method is suggested. By means of this method, the bode-plot of the open-loop transfer function could be obtained based on the existing hardware. So an isolated series resonant converter is implemented and the required signals are measured in order to draw the bode-plot of the open-loop transfer function based on Middlebrook method. Verification is performed by comparing the experimental results with simulation results.

Keywords: Resonant converter, Extended describing function, State-space equation, MiddleBrook.

۱- مقدمه

مبدل‌های رزنانسی بدلیل قابلیت بکارگیری سوئیچینگ در ولتاژ صفر یا سوئیچینگ در جریان صفر، در مقایسه با سایر انواع مبدل‌های سوئیچینگ با مدولاسیون پهنای پالس از مزایای خاصی برخوردار هستند [۱]. مهمترین این مزیت‌ها، کمتر بودن تلفات سوئیچینگ و کاهش چشمگیر تداخل الکترومغناطیسی است. به همین دلیل مبدل‌های رزنانسی در مقایسه با سایر مبدل‌های سوئیچینگ از چگالی توانی (وات بر متر مکعب یا وات بر کیلوگرم) بیشتری برخوردار هستند. در مقابل مدلسازی این نوع مبدل‌ها پیچیده‌تر بوده و بررسی رفتار دینامیکی آن‌ها دشوارتر می‌باشد چراکه روش‌های متداول نظیر متوسط‌گیری مداری و متوسط‌گیری در فضای حالت به منظور دستیابی به تابع انتقال آن‌ها قابل استفاده نیستند. دلیل این امر تغییرات سریع مقدار متغیرهای حالت در هر سیکل (یا وضعیت سوئیچ ها از نظر باز و بسته بودن) می‌باشد. در روش متوسط‌گیری در فضای حالت، معادلات حالت برای بازه‌هایی از زمان نوشته می‌شوند که وضعیت سوئیچ صفر یا یک باشد. چون فرکانس‌های طبیعی یک مبدل سوئیچینگ با مدولاسیون پهنای پالس و نیز تغییرات سایر پارامترها نظیر ولتاژ ورودی و بار بسیار کندتر از فرکانس سوئیچینگ می‌باشند، می‌توان یک مقدار در حال تعادل برای هر پارامتر در بازه زمانی فوق در نظر گرفت [۲]. اما در مبدل‌های رزنانسی فرکانس سوئیچینگ بسیار نزدیک به فرکانس رزنانس بوده و حالات دارای تغییراتی شبه-سینوسی با همین فرکانس هستند لذا روش متوسط‌گیری برای استخراج معادلات نهایی حالت قابل استفاده نیست. بر این اساس روش‌های دیگری نظیر مدلسازی بر اساس داده‌های نمونه برداری شده [۳] و [۴]، مدل معادل منابع [۵] وتوابع توصیف گسترده [۶-۱۱] برای این دسته از مبدل‌ها پیشنهاد می‌شوند.

در این مقاله یک مبدل رزنانسی سری از نوع ایزوله با شبکه سوئیچ تمام-پل در ورودی و یکسوساز تمام موج درخروجی، مورد بررسی قرار گرفته است. این درحالی است که در [۶] و[۷]، مبدل رزنانسی غیر ایزوله (یک متغیر حالت کمتر) و در [۸]، [۹] و [۱۰]، مبدل رزنانسی با شبکه سوئیچ از نوع نیم-پل بررسی شده‌است. همچنین در [۸] مرتبه سیستم کاهش یافته و در [۹] تنها یک پارامتر (کنترلی) یعنی ω_s در معادلات درنظر گرفته شده است. [۱۱] علاوه بر هارمونیک اصلی، هارمونیک‌های مرتبه بالاتر را نیز در محاسبات لحاظ نموده اما تنها دو ورودی کنترلی را درنظرگرفته است. در این مقاله علاوه بر اینکه سعی شده تا حداکثر متغیرهای حالت و پارامترهای کنترلی در معادلات لحاظ شوند، برای صحه‌گذاری معادلات به دست آمده، روش میدل‌بروک پیشنهاد و جزئیات پیاده‌سازی آن تشریح شده‌است. استفاده از روش فوق برای صحه گذاری در حالی است که [۶] تا [۱۰] از تجهیزی بنام امپدانس آنالایزر برای این منظور استفاده کرده‌اند.

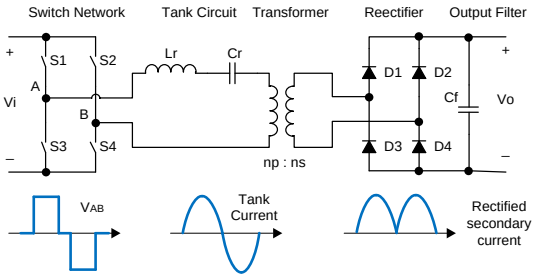
ساختار مقاله به این ترتیب تنظیم گردیده که در بند۲ مدل سیگنال کوچک یک مبدل ایزوله سری رزنانسی به کمک توابع توصیف گسترده به‌دست آمده و در بند۳ نتایج پیاده‌سازی این معادلات به کمک نرم افزار متلب نشان داده شده است. در بند ۴، پیاده‌سازی سخت افزاری مبدل ایزوله همراه با جزئیات روش میدل‌بروک جهت به‌دست آوردن تابع انتقال حلقه باز مبدل ارائه شده است. نهایتا در همین بند از مقاله نتایج حاصل از پیاده-سازی روابط با آنچه از اندازه گیری‌های عملی حاصل شده است، مقایسه می‌شوند تا صحت معادلات به‌دست آمده از تحلیل‌های بند۲ ارزیابی شوند.

۲- مدلسازی سیگنال کوچک برای مبدل رزنانسی سری LLC

یک مبدل رزنانسی ایزوله سری از نوع LLC در شکل ۱ نشان داده شده است. مدار تانک رزنانس شامل یک سلف و خازن سری شده در سمت اولیه ترانسفورماتور ایزوله کننده است. اندوکتانس مغناطیس کننده ترانسفورماتور نیز در مدار رزنانس تاثیر گذار بوده و به همین دلیل این مبدل LLC سری خوانده می‌شود.

مبدل‌های رزنانسی سیستم‌هایی غیرخطی‌اند لذا داشتن یک مدل سیگنال کوچکِ خطی برای بررسی رفتار دینامیکی این مبدل‌ها بسیار مناسب بوده و به کمک آن می‌توان تابع انتقال مبدل را نیز به‌دست آورد. برای به‌دست آوردن معادلات حالت مبدل به کمک توابع توصیف گسترده، باید مطابق هفت گامی که در ادامه بیان خواهد شد عمل نمود.

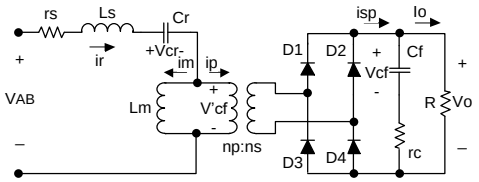
[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.5.2]
[DOI: 10.52547/joc.15.2.97]



شکل۱: مبدل ایزوله رزنانسی سری LLC

۲-۱ معادلات فضای حالت

در گام نخست باید معادلات حالت را برای متغیرهای حالت نشان داده‌شده در شکل ۲ نوشت. این معادلات در قالب روابط ۱ ارائه شده‌اند.



شکل۲: متغیرهای حالت در مبدل رزنانسی سری

$$V_{AB} = L_s\left(\frac{di_r}{d_t}\right) + i_r r_s + V_{cr} + sgn(i_p)v'_o \quad (۱)$$

$$where \quad sgn(i_p) = \begin{cases} -1, if\ v'_o < 0 \\ +1, if\ v'_o \geq 0 \end{cases} \quad (۱\text{-الف})$$

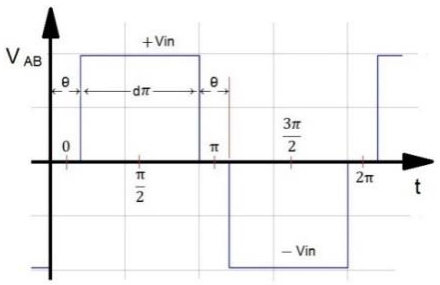
$$i_r = C_r\frac{dv_{cr}}{dt} \quad (۱\text{-ب})$$

$$sgn(i_r - i_m)v'_o = L_m\frac{di_m}{dt} \quad (۱\text{-ج})$$

$$|i_{sp}| = \left(1+\frac{r_c}{R}\right)C_f\frac{dv_{cf}}{dt} + \frac{1}{R}v_{cf} \quad (۱\text{-د})$$

$$v_o = v_{cf} + r_c(i_{sp} - I_o) \quad \text{or} \quad v_o = r'_c \times abs(i_{sp}) + \left(\frac{r'_c}{r_c}\right)v_{cf} \quad where \ r'_c = r_c||R \quad (۱\text{-ه})$$

ولتاژ V_{AB} خروجی شبکه سوئیچ از نوع تمام-پل است که شکل موج آن شبه-مربعی بوده که در شکل ۳ نشان داده شده است. در این شکل d و θ به ترتیب معرف سیکل وظیفه و زمان مرده (بین دو پالس) هستند.



شکل۳: ولتاژ خروجی شبکه سوئیچ

۲-۲ تقریب هارمونیکی

در مبدل فوق جریان سلف i_r ، ولتاژ خازن v_{cr} و جریان اندوکتانس مغناطیس‌کننده ترانس i_m، شبه-سینوسی هستند (شکل۱). لذا این امکان وجود دارد که بتوان پس از بیان این متغیرها توسط سری فوریه، آن‌ها را با هارمونیک اصلی‌شان تقریب زد. تنها متغییری که با ولتاژ DC خود تقریب زده خواهد شد، ولتاژ خازن خروجی است. تقریب‌های فوق در روابط ۲ ارائه شده اند.

$$i_r(t) = i_s(t)sin\omega_s t + i_c(t)cos\omega_s t \quad (۲\text{-الف})$$

$$v_{cr}(t) = v_s(t)sin\omega_s t + v_c(t)cos\omega_s t \quad (۲\text{-ب})$$

$$i_m(t) = i_{ms}(t)sin\omega_s t + i_{mc}(t)cos\omega_s t \quad (۲\text{-ج})$$

$$\frac{di_r}{dt} = \left(\frac{di_s}{dt} - \omega_s i_c\right)sin\omega_s t + \left(\frac{di_c}{dt} + \omega_s i_s\right)cos\omega_s t \quad (۲\text{-د})$$

$$\frac{dv_{cr}}{dt} = \left(\frac{dv_s}{dt} - \omega_s v_c\right)sin\omega_s t + \left(\frac{dv_c}{dt} + \omega_s v_s\right)cos\omega_s t \quad (۲\text{-ه})$$

$$\frac{di_m}{dt} = \left(\frac{di_{ms}}{dt} - \omega_s i_{mc}\right)sin\omega_s t + \left(\frac{di_{mc}}{dt} + \omega_s i_{ms}\right)cos\omega_s t \quad (۲\text{-و})$$

در روابط فوق ω_s فرکانس سوئیچینگ (rad/sec) است. با وجود اینکه متغیرهای فوق شبه-سینوسی هستند اما تغییرات پوش آنها نسبت به زمان کند است و لذا همانگونه که در ادامه خواهید دید می‌توان رفتار دینامیکی مبدل را بر اساس تغییرات این پوش بیان نمود.

۲-۳ توابع توصیف گسترده

روش تابع توصیف گسترده یک روش قدرتمند ریاضی برای فهم، تحلیل، ارتقاء و طراحی سیستم‌های غیرخطی است. غالب سیستم‌ها غیرخطی هستند اما می‌توان در بازه های محدودی، عملکرد خطی داشته و به صورت خطی درنظر گرفته شوند. جملات غیرخطی در مجموعه معادلات (۱) را می‌توان با هارمونیک و مقدار DC آنها تقریب زد و به شکل معادلات (۳) بیان نمود.

$$v_{AB}(t) = f_1(d, v_{in})sin\omega_s t \quad (۳\text{-الف})$$

$$sgn(i_{sp})v'_o = f_2(i_{ss}, i_{sp}, v_{cf})sin\omega_s t + f_3(i_{sc}, i_{sp}, v_{cf})cos\omega_s t \quad (۳\text{-ب})$$

$$|i_{sp}| = f_4(i_{ss}, i_{sc}) \quad (۳\text{-ج})$$

در روابط فوق i_{ss} و i_{ps} به ترتیب جملات سینوس و کسینوس از جریان ثانویه ترانسفورماتور هستند. i_{sp} نیز جریان ثانویه ترانسفورماتور می‌باشد. در معادلات (۳)، f_1 ، f_2، f_3 و f_4 توابع توصیف گسترده نامیده می‌شوند. توابع غیر خطی فوق را می‌توان با بسط فوریه و درنظر گرفتن هارمونیک اصلی شان، در قالب معادلات (۴) بیان کرد. i_{ss} و i_{ps} به ترتیب جملات سینوس و کسینوس از جریان ثانویه ترانسفورماتور هستند. i_{sp} نیز جریان ثانویه ترانسفورماتور می‌باشد.

$$f_1(d, v_{in}) = \frac{4v_{in}}{\pi}sin\left(\frac{\pi}{2}d\right) = v_{es} \quad (۴\text{-الف})$$

$$f_2(i_{ss}, i_{sp}, v'_{cf}) = \frac{4}{\pi}\frac{i_{ss}}{i_{sp}}v'_{cf} = \frac{4}{\pi}\frac{i_{ps}}{i_{pp}}v'_{cf} = \frac{4n}{\pi}\frac{i_{ps}}{i_{pp}}v_{cf} = v_{ps} \quad (۴\text{-ب})$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.5.2]
[DOI: 10.52547/joc.15.2.97]

$$f_3(i_{sc}, i_{sp}, v'_{cf}) = \frac{4}{\pi}\frac{i_{sc}}{i_{sp}}v'_{cf} = \frac{4}{\pi}\frac{i_{pc}}{i_{pp}}v'_{cf}$$
$$= \frac{4n}{\pi}\frac{i_{pc}}{i_{pp}}v_{cf} = v_{pc} \qquad (۴-ج)$$
$$where \quad i_{sp} = \sqrt{i_{ss}^2 + i_{sc}^2} = n.i_{pp} = n.\sqrt{i_{ps}^2 + i_{pc}^2}$$

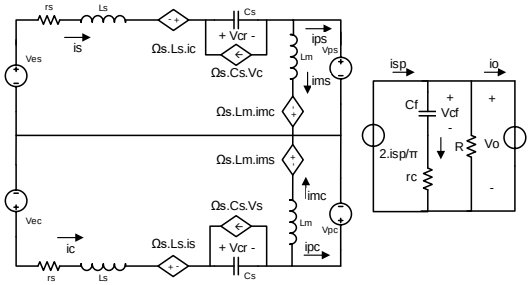
در روابط فوق i_{ps} و i_{pc} به ترتیب جملات سینوس و کسینوس از جریان اولیه ترانسفورماتور هستند. i_{pp} نیز جریان اولیه ترانسفورماتور است. نسبت تبدیل ترانسفورماتور (تعداد دور اولیه به ثانویه) با n نشان داده شده است. باید توجه داشت که شکل موج V_{AB} تقارن زوج داشته و لذا ضریب جمله کسینوس آن صفر است $(v_{ec} = 0)$.

۲-۴ بالانس هارمونیکی

بالانس هارمونیکی روشی در حوزه فرکانس است که برای محاسبه پاسخ حالت پایدارِ معادلات تفاضلی غیرخطی استفاده می شود. برای این منظور ابتدا معادلات کیرشهف در حوزه فرکانس و برای تعداد مشخصی از هارمونیک‌ها (در این مقاله تنها هارمونیک اصلی در نظر گرفته شده است) نوشته می‌شود. سپس با توجه به اینکه ضرایب جملات دارای فرکانس تغییرات کمی در مقایسه با فرکانس رزنانس هستند، می‌توان مبدل را در وضعیت پایدار در نظر گرفت و ضرایب جملات سینوس و کسینوس را در دوطرف معادلات برابر دانست. لذا کافی است تا ابتدا روابط (۲) تا (۴) را در رابطه (۱) جایگذاری نمود و در ادامه ضرایب جملات سینوس، کسینوس و DC رادر طرفین معادلات برابر قرار داد. نتیجه این عملیات در رابطه (۵) مشخص شده است.

$$v_{es} = L_s\left(\frac{di_s}{d_t} - \omega_s i_s\right) + i_s r_s + v_s + \frac{4n}{\pi}\frac{i_{ps}}{i_{pp}}v_{cf} \qquad (۵-الف)$$
$$v_{ec} = L_s\left(\frac{di_c}{d_t} + \omega_s i_s\right) + i_c r_s + v_s + \frac{4n}{\pi}\frac{i_{pc}}{i_{pp}}v_{cf} \qquad (۵-ب)$$
$$i_s = C_s\left(\frac{dV_s}{dt} - \omega_s v_c\right) \qquad (۵-ج)$$
$$i_c = C_s\left(\frac{dV_c}{dt} + \omega_s v_s\right) \qquad (۵-د)$$
$$L_m\left(\frac{di_{ms}}{dt} - \omega_s i_{mc}\right) = \frac{4n}{\pi}\frac{i_{ps}}{i_{pp}}v_{cf} = v_{ps} \qquad (۵-ه)$$
$$L_m\left(\frac{di_{mc}}{dt} + \omega_s i_{ms}\right) = \frac{4n}{\pi}\frac{i_{pc}}{i_{pp}}v_{cf} = v_{pc} \qquad (۵-و)$$
$$v_o = \frac{2}{\pi}r'_c(i_{sp}) + \left(\frac{r'_c}{r_c}\right)v_{cf} - r'_c i_o \qquad (۵-ز)$$

روابط مشخص شده در (۵)، معادلات سیگنال بزرگ مبدل LLC هستند که در شکل ۴ به صورت مداری نشان داده شده اند. در رابطه (۵) متغیرهای حالت جدیدی که ضرایب جملات سینوس و کسینوس از متغیرهای اصلی هستند، مشاهده می‌شوند.



شکل۴: مدار معادل سیگنال بزرگ مبدل رزنانسی سری

۲-۵ حل معادلات در حالت پایدار

در شرایط پایدار، متغیرهای حالت در معادلات (۵) با زمان تغییر نمی کنند. لذا برای یک نقطه کار انتخابی، عبارات شامل مشتق زمانی صفر بوده و مقادیر حالت پایدار به‌دست خواهند آمد (در ادامه با حروف بزرگ نشان داده شده اند). لذا می‌توان معادلات فوق را در حالت کار دائم مطابق معادلات (۶) بیان نمود.

$$-L_s\Omega_s I_c + (r_s + R_e)I_s + V_s - I_{ms}R_e = \frac{4}{\pi}V_{in}\sin\left(\frac{\pi D}{2}\right) \qquad (۶-الف)$$
$$L_s\Omega_s I_s + (r_s + R_e)I_c + V_c - I_{mc}R_e = 0 \qquad (۶-ب)$$
$$I_s + C_s\Omega_s V_c = 0 \qquad (۶-ج)$$
$$I_c - C_s\Omega_s V_s = 0 \qquad (۶-د)$$
$$R_e I_s + L_m\Omega_s I_{mc} - R_e I_{ms} = 0 \qquad (۶-ه)$$
$$R_e I_c - L_m\Omega_s I_{ms} - R_e I_{mc} = 0 \qquad (۶-و)$$

و یا به فرم ماتریسی، مطابق رابطه (۷) نوشت.

$$\begin{bmatrix} r_s + R_e & -L_s\Omega_s & 1 & 0 & -R_e & 0 \\ L_s\Omega_s & r_s + R_e & 0 & 1 & 0 & -R_e \\ 1 & 0 & 0 & C_s\Omega_s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -C_s\Omega_s & 0 & 0 & 0 \\ R_e & 0 & 0 & 0 & -R_e & L_m\Omega_s \\ 0 & R_e & 0 & 0 & -L_m\Omega_s & -R_e \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_s \\ I_c \\ V_s \\ V_c \\ I_{ms} \\ I_{mc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{\pi}V_{in}sin\left(\frac{\pi D}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۷)$$

۲-۶ اعمال اختشاش و خطی سازی

در این مرحله فرض می‌کنیم هر یک از متغیرهای ورودی و حالت شامل یک جزء DC و یک نوسان AC با دامنه کم حول نقطه کار C می‌باشند (نظیر $d = D + \hat{d}$ ، $v_{in} = V_{in} + \hat{v}_{in}$ و $i_{mc} = I_{mc} + \hat{i}_{mc}$). با اعمال این تغییر در روابط (۵) و خطی‌سازی (با صرف نظر کردن از جملات DC و نیز جملاتی که شامل حاصلضرب چند نوسان می‌باشند) به معادلات زیر خواهیم رسید.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.5.2]
[DOI: 10.52547/joc.15.2.97]

$$\frac{d\hat{\imath}_s}{dt} = -\left(\frac{H_{ip}+r_s}{L_s}\right)\hat{\imath}_s - \left(\frac{\Omega_s L_s + H_{ic}}{L_s}\right)\hat{\imath}_c - \frac{1}{L_s}\hat{v}_s + \frac{H_{ip}}{L_s}\hat{\imath}_{ms} + \frac{H_{ic}}{L_s}\hat{\imath}_{mc} - \frac{H_{vcf}}{L_s}\hat{v}_{cf} + \frac{K_1}{L_s}\hat{v}_{in} + \frac{K_2}{L_s}\hat{d} - \omega_0 I_c\,\hat{\omega}_{sn} \quad (۷\text{-الف})$$

$$\frac{d\hat{\imath}_c}{dt} = \left(\frac{\Omega_s L_s - G_{ip}}{L_s}\right)\hat{\imath}_s - \left(\frac{G_{ic}+r_s}{L_s}\right)\hat{\imath}_c - \frac{1}{L_s}\hat{v}_c + \frac{G_{ip}}{L_s}\hat{\imath}_{ms} + \frac{G_{ic}}{L_s}\hat{\imath}_{mc} - \frac{G_{vcf}}{L_s}\hat{v}_{cf} + \omega_0 I_s\,\hat{\omega}_{sn} \quad (۷\text{-ب})$$

$$\frac{d\hat{v}_s}{dt} = \frac{1}{C_s}\hat{\imath}_s - \Omega_s\hat{v}_c - \omega_0 V_c\hat{\omega}_{sn} \quad (۷\text{-ج})$$

$$\frac{d\hat{v}_c}{dt} = \frac{1}{C_s}\hat{\imath}_c + \Omega_s\hat{v}_s + \omega_0 V_c\hat{\omega}_{sn} \quad (۷\text{-د})$$

$$\frac{d\hat{\imath}_{ms}}{dt} = \frac{H_{ip}}{L_m}\hat{\imath}_s + \frac{H_{ic}}{L_m}\hat{\imath}_c - \frac{H_{ip}}{L_m}\hat{\imath}_{ms} - \left(\frac{H_{ic}+L_m\Omega_s}{L_m}\right)\hat{\imath}_{mc} + \frac{H_{vcf}}{L_m}\hat{v}_{cf} - \frac{L_m I_{mc}\omega_0}{L_m}\hat{\omega}_{sn} \quad (۷\text{-ه})$$

$$\frac{d\hat{\imath}_{mc}}{dt} = \frac{G_{ip}}{L_m}\hat{\imath}_s + \frac{G_{ic}}{L_m}\hat{\imath}_c - \frac{(G_{ip}-L_m\Omega_s)}{L_m}\hat{\imath}_{ms} - \frac{G_{ic}}{L_m}\hat{\imath}_{mc} + \frac{G_{vcf}}{L_m}\hat{v}_{cf} + I_{ms}\omega_0\hat{\omega}_{sn} \quad (۷\text{-و})$$

$$\frac{d\hat{v}_{cf}}{dt} = \frac{K_{is}r'_c}{r_c C_f}\hat{\imath}_s + \frac{K_{ic}r'_c}{r_c C_f}\hat{\imath}_c - \frac{K_{is}r'_c}{r_c C_f}\hat{\imath}_{ms} - \frac{K_{ic}r'_c}{r_c C_f}\hat{\imath}_{mc} - \frac{r'_c}{Rr_c C_f}\hat{v}_{cf} \quad (۷\text{-ز})$$

$$\hat{v}_o = r'_c K_{is}\hat{\imath}_s + r'_c K_{ic}\hat{\imath}_c - r'_c K_{is}\hat{\imath}_{ms} - r'_c K_{ic}\hat{\imath}_{mc} + \left(\frac{r'_c}{r_c}\right)\hat{v}_{cf} \quad (۷\text{-ح})$$

حال می‌توان معادلات فوق را در قالب معادلات حالت زیر نوشت:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (۸\text{-الف})$$

$$y = Cx + Du \quad (۸\text{-ب})$$

$$x = [\hat{\imath}_s\ \hat{\imath}_c\ \hat{v}_s\ \hat{v}_c\ \hat{\imath}_{ms}\ \hat{\imath}_{mc}\ \hat{v}_{cf}]^T \quad (۸\text{-ج})$$

$$u = [\hat{v}_{in}\ \hat{d}\ \hat{\imath}_o\ \hat{\omega}_{sn}]^T \quad (۸\text{-د})$$

$$y = [\hat{v}_o] \quad (۸\text{-ه})$$

که مقادیر ماتریس‌های A, B, C و D به شرح زیر به‌دست خواهند آمد.

$$A = \begin{bmatrix} -\left(\frac{H_1+r_s}{L_s}\right) & \left(\frac{\Omega_s L_s - H_2}{L_s}\right) & -\frac{1}{L_s} & 0 & \frac{H_1}{L_s} & \frac{H_2}{L_s} & -\frac{H_3}{L_s} \\ -\left(\frac{\Omega_s L_s + G_1}{L_s}\right) & -\left(\frac{G_2+r_s}{L_s}\right) & 0 & -\frac{1}{L_s} & \frac{G_1}{L_s} & \frac{G_2}{L_s} & -\frac{G_3}{L_s} \\ \frac{1}{C_s} & 0 & 0 & \Omega_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_s} & -\Omega_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{H_1}{L_m} & \frac{H_2}{L_m} & 0 & 0 & -\frac{H_1}{L_m} & -\left(\frac{H_2 - L_m\Omega_s}{L_m}\right) & \frac{H_3}{L_m} \\ \frac{G_1}{L_m} & \frac{G_2}{L_m} & 0 & 0 & -\frac{(G_1+L_m\Omega_s)}{L_m} & -\frac{G_2}{L_m} & \frac{G_3}{L_m} \\ \frac{K_3 r'_c}{r_c C_f} & \frac{K_4 r'_c}{r_c C_f} & 0 & 0 & -\frac{K_3 r'_c}{r_c C_f} & -\frac{K_4 r'_c}{r_c C_f} & -\frac{r'_c}{Rr_c C_f} \end{bmatrix} \quad (۹\text{-الف})$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{K_1}{L_s} & \frac{K_2}{L_s} & 0 & \omega_0 I_c \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_0 I_s \\ 0 & 0 & 0 & \omega_0 V_c \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_0 V_s \\ 0 & 0 & 0 & \omega_0 I_{mc} \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_0 I_{ms} \\ 0 & 0 & -\frac{r'_c}{r_c C_f} & 0 \end{bmatrix} \quad (۹\text{-ب})$$

$$C = [\,r'_c K_3\ \ r'_c K_4\ \ 0\ \ 0\ \ -r'_c K_3\ \ -r'_c K_4\ \ \frac{r'_c}{r_c}\,] \quad (۹\text{-ج})$$

$$D = [0\ \ 0\ \ -r'_c\ \ 0] \quad (۹\text{-د})$$

تابع انتقال مبدل (ولتاژ خروجی بازای تغییرات هر یک از پارامترهای ورودی نظیر تغییر فرکانس سوئیچینگ) نیز به کمک رابطه (۱۰) قابل محاسبه خواهد بود.

$$G_p(s) = C(SI - A)^{-1}B + D \quad (۱۰)$$

۳- پیاده‌سازی روابط

یک مبدل رزنانسی با مشخصات ارائه شده در جدول ۱ درنظر گرفته شده است. دیاگرام بود برای این مبدل بازای ورودیهای مختلف در شکل ۵ رسم شده است. در شکل فوق ورودیها به ترتیب عبارتند از $\hat{v}_{in}$، $\hat{d}$، $\hat{\imath}_o$ و $\hat{\omega}_{sn}$. بدیهی است که دیاگرام بود تابع نقطه کار مبدل بوده و با تغییر برخی پارامترها نظیر ولتاژ ورودی، جریان بار (ناشی از تغییر اندازه مقاومت بار)، تغییر خواهد نمود. شکل ۶ این تغییرات را برای $G_d = \hat{v}_o/\hat{d}$ در سه نقطه کار مختلف مشخص نموده است.

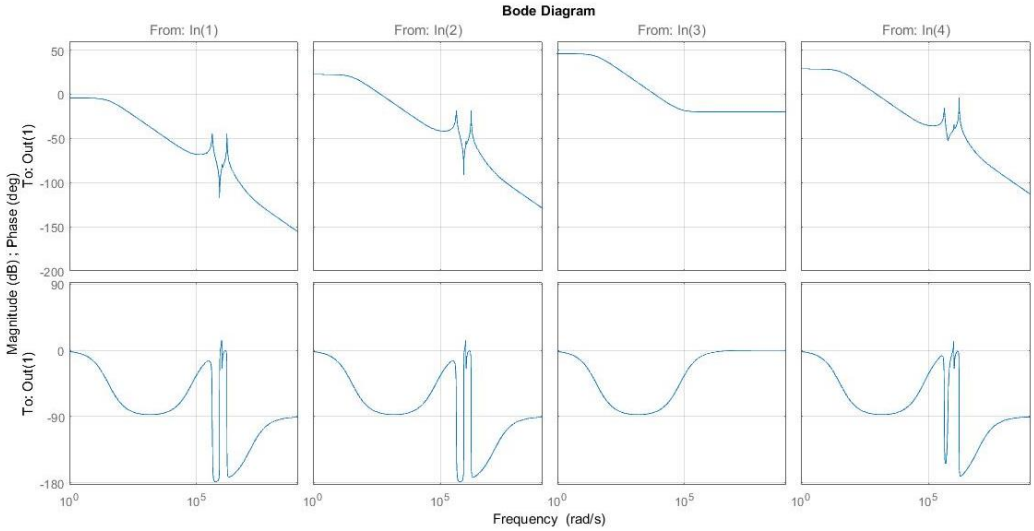
جدول۱: مشخصات مبدل ایزوله رزنانسی سری

پارامتر	نماد	مقدار
ولتاژ وردی (ولت)	Vi	۲۸
ولتاژ خروجی	Vo	۱۲
مقدار بار خروجی (اهم)	R	۵
سلف رزنانس (میکروهانری)	Ls	۳۰
خازن رزنانس (نانوفاراد)	Cs	۱۰۰
اندوکتانس مغناطیس کنندگی ترانسفورماتور (میکروهانری)	Lm	۱۵۴
فرکانس سوئیچینگ (کیلوهرتز)	fs	۱۰۰
خازن خروجی (میکروفاراد)	Cf	۱۵۰
مقاومت معادل سری با خازن خروجی یا ESR (اهم)	rc	۰.۰۱
مقاومت سری در مدار رزنانس (اهم)	rs	۰.۱
نسبت تبدیل ترانسفورماتور (np/ns)	n	۰.۸۳

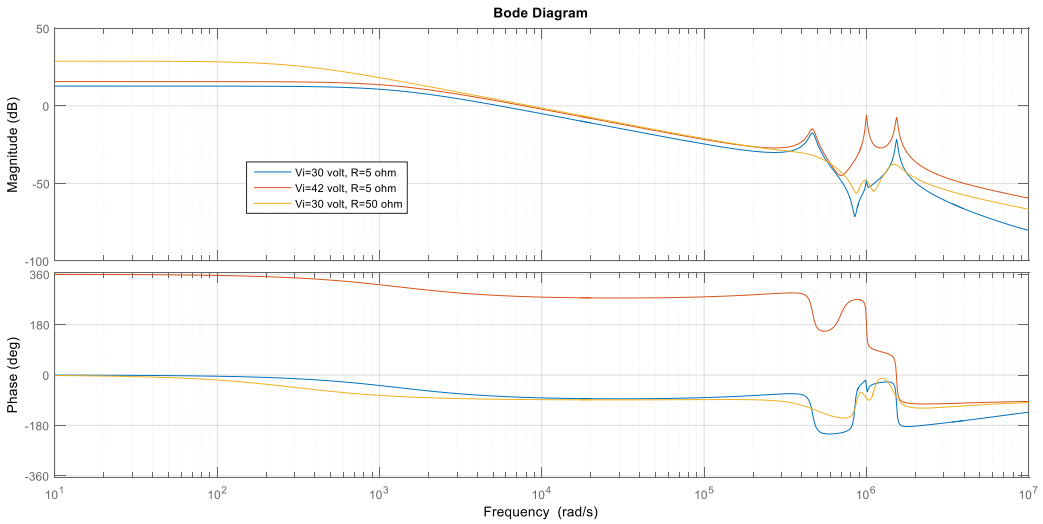
۴- پیاده سازی سخت افزاری

برای مقایسه نتایج محاسباتی با عملی، یک نمونه مبدل رزنانسی ایزوله سری با مشخصاتی مشابه آنچه در جدول ۱ آمده است، طراحی و پیاده‌سازی شده است. اما برای صحت سنجی معادلات حالت به‌دست آمده در ۹، روش میدل‌بروک (Middlebrook) پیشنهاد شده است [۱۲]. به کمک روش فوق می‌توان تابع انتقال حلقه باز سیستم (اندازه و فاز) را به‌دست آورد. در [۱۳] و [۱۴] جزئیاتی از پیاده سازی روش میدل‌بروک و اجرای مناسب آن در مبدل‌های سوئیچینگ متداول نظیر باک، ارائه شده است. در ادامه این مقاله، ابتدا روش میدل‌بروک تشریح داده شده و سپس منحنی اندازه و فاز تابع انتقال حلقه باز از روش فوق به‌دست آمده که نهایتا با نتایج حاصل از پیاده‌سازی روابط استخراج شده در محیط متلب (شکل ۵) مقایسه خواهند شد.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.5.2]
[DOI: 10.52547/joc.15.2.97]



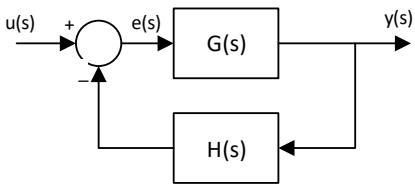
شکل۵: دیاگرام بود مبدل رزنانسی سری برای نسبت خروجی به ورودیهای مختلف



شکل۶: دیاگرام بود تابع انتقال $\hat{v}_o/\hat{d}$ در سه شرایط کاری مختلف

۴-۱ روش میدل‌بروک

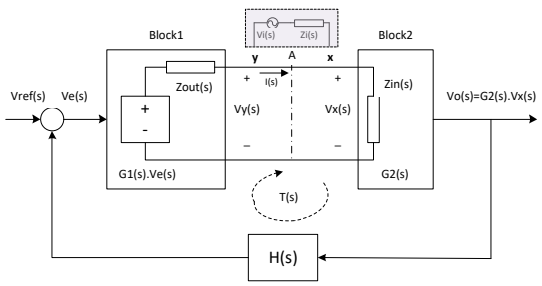
تابع انتقال یک سیستم حلقه بسته مطابق شکل ۷ را درنظر بگیرید.



شکل۷: سیستم حلقه بسته

$$G_t(s) = {y(s)}/{u(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s).H(s)} = \frac{G(s)}{1+T(s)} \qquad (۱۱)$$

در رابطه فوق حاصلضرب $G(s).H(s)$ با عنوان تابع انتقال حلقه (باز) خوانده شده و با $T(s)$ نشان داده می‌شود. در بررسی پایداری سیستم فوق، می‌توان به کمک دیاگرام بود رفتار اندازه و فاز $T(s)$ را به جای منظور نمودن بهره کلی سیستم مورد ارزیابی قرار داد. هرگاه مطابق شکل ۸ از یک نقطه (نقطه A) تابع انتقال G را به دو قسمت تفکیک کنیم. در نتیجه می‌توان تابع انتقال حلقه (باز) را مطابق رابطه (۱۲) نوشت.



شکل۸: تفکیک تابع انتقال رو به جلو در یک سیستم حلقه بسته به دو قسمت

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.5.2]
[DOI: 10.52547/joc.15.2.97]

$$T(s) = G1(s).\frac{Zin(s)}{Zin(s)+Zout(s)}.G2(s).H(s) \qquad (۱۲)$$

که در رابطه فوق G1 و G2 به ترتیب توابع انتقال بلوک‌های شماره یک و دو هستند. اما در عمل برای محاسبه تابع انتقال، یک ولتاژ اغتشاش با فرکانس مشخص (منبع $V_i(s)$ با امپدانس $Z_i(s)$)، مطابق آنچه در شکل ۸ نشان داده شده است به محل تفکیک (بین دو نقطه x و y) اعمال می‌کنیم. نقطه تفکیک باید ویژگی‌های خاصی داشته باشد که در ادامه به آن اشاره خواهد شد. سپس باید ولتاژ در نقاط x و y را توسط اسیلوسکوپ یا نظایر آن اندازه‌گیری نمود ($V_x(s)$ و $V_y(s)$). نسبت ولتاژ درنقطه y به ولتاژ در نقطه x را تابع انتقال حاصل از اندازه‌گیری یا $T_v(s)$ می‌نامیم. حال می‌توان به کمک شکل ۸ ، رابطه‌ی بین $T_v(s)$ و $T(s)$ (تابع انتقال حلقه باز سیستم) را مطابق زیر به دست آورد:

$$V_e(s) = -H(s).G2(s).V_x(s) \qquad (۱۳\text{-الف})$$

$$V_y(s) = G1(s).V_e(s) + I(s).Zout(s) \qquad (۱۳\text{-ب})$$

$$V_y(s) = V_x(s).G1(s).G2(s).H(s) + I(s).Zout(s) \qquad (۱۳\text{-ج})$$

$$I(s) = V_x(s)/Zin(s) \qquad (۱۳\text{-د})$$

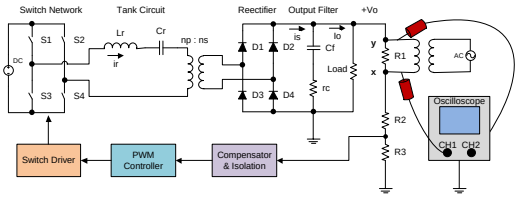
$$V_y(s) = V_x(s).G1(s).G2(s).H(s) + V_x(s).Zout(s)/Zin(s) \qquad (۱۳\text{-ه})$$

$$T_v(s) = V_y(s)/V_x(s) = G1(s).G2(s).H(s) + Zout(s)/Zin(s) \qquad (۱۳\text{-و})$$

$$T_v(s) = T(s)\left(1+\frac{Zout(s)}{Zin(s)}\right)+\frac{Zout(s)}{Zin(s)} \qquad (۱۳\text{-ز})$$

مطابق رابطه (۱۳-ز)، $T_v(s)$ یا همان تابع انتقال اندازه گیری شده توسط ابزارهای اندازه‌گیری (نظیر Vector Analyzer)، با مقدار تئوری $T(s)$ مرتبط می‌باشد. هرگاه نسبت امپدانس خروجی و ورودی در نقطه‌ای که اغتشاش اعمال می‌شود، به مراتب کوچکتر از یک باشد، مقدار $T_v(s)$ و $T(s)$ برابر خواهند شد. مناسب‌ترین نقطه برای اعمال ولتاژ اغتشاش در یک مبدل، محل نمونه برداری از ولتاژ خروجی است (در مسیر فیدبک). در این نقطه بدلیل وجود خازن بزرگ در خروجی (امپدانس کوچک در فرکانس‌های بالا) و نیز مقاومت بار (امپدانس کوچک در فرکانس‌های پائین) مقدار $Z_{out}(s)$ بسیار کوچک خواهد بود. از طرف دیگر بدلیل وجود امپدانس بالا در مسیر فیدبک (غالبا از مرتبه ده کیلو اهم به بالا) مقدار $Z_{in}(s)$ در مقایسه با $Z_{out}(s)$ بسیار بزرگ است. لذا در عمل این نقطه محل مناسبی برای اعمال ولتاژ اغتشاش خواهد بود.

شکل ۹ نمایی از چگونگی اعمال ولتاژ و نقاط اندازه‌گیری را نشان میدهد. سیگنال اغتشاش یک سیگنال سینوسی با فرکانس مشخص و دامنه کوچک (در مقایسه با دامنه ولتاژ خروجی) است که از طریق یک ترانس ایزوله به دو سر یک مقاومت (R1) که اهم کمی دارد اعمال می‌شود. کانال یک اسیلوسکوپ، ولتاژ ورودی و کانال دوم آن، ولتاژ خروجی را اندازه‌گیری می‌کنند. کافی است برای فرکانس‌های مختلف شکل موج‌های نقاط فوق را اندازه‌گیری کرده و مقدار اندازه و فاز آن‌ها را مشخص نمود. دیاگرام بود (Bode) با کمک این اطلاعات قابل رسم است.

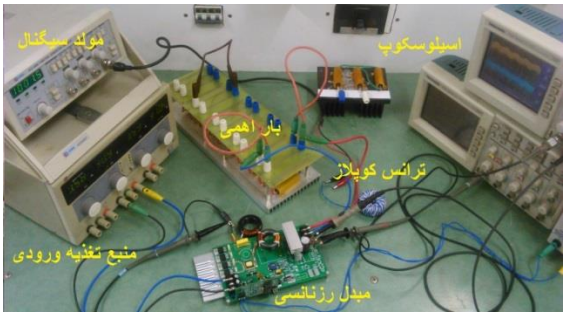


شکل۹: چگونگی اعمال ولتاژ اغتشاش و اندازه‌گیری ولتاژ در نقاط X و Y

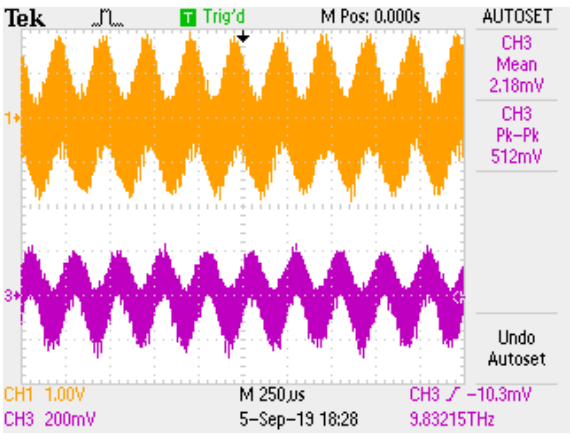
۲-۴ اندازه‌گیری های عملی

شکل ۱۰ چیدمان آزمون برای مبدل پیاده‌سازی شده را نشان میدهد. سیگنال سینوسی توسط یک سیگنال ژنراتور در فرکانس‌های مختلف تولیدشده و توسط ترانس کوپلاژی که در شکل مشخص شده، به دو سر یک مقاومت که در مسیر فیدبک اضافه شده است اعمال میگردد. ولتاژ های دو سر ترانس توسط اسیلوسکوپ خوانده شده و در قالب فایل اکسل ذخیره می‌شوند. به کمک نرم افزار متلب و ماژول CFTool، اطلاعات اندازه و فاز برای هر سیگنال (ورودی و خروجی) در فرکانس‌های مختلف استخراج می‌شوند. با استفاده از این داده هامی‌توان منحنی بود تابع انتقال حلقه باز مبدل را رسم نمود.

شکل ۱۱ نمونه از ولتاژهای اندازه‌گیری شده توسط اسیلوسکوپ را نشان میدهد. در شکل ۱۲ منحنی‌های بود مبدل که از دو طریق محاسباتی و اندازه‌گیری حاصل شده اند، نشان داده شده و مقایسه شده‌اند.

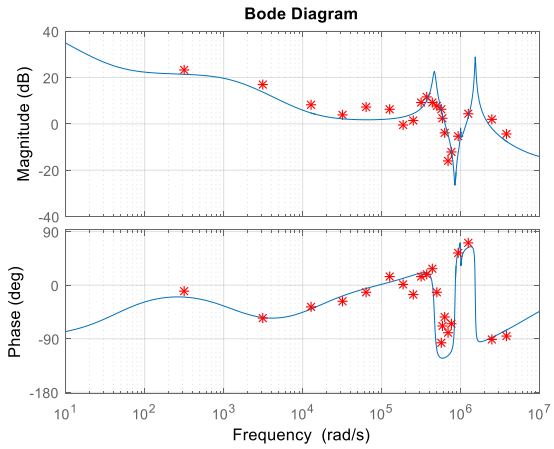


شکل۱۰: نمایی از چیدمان آزمون



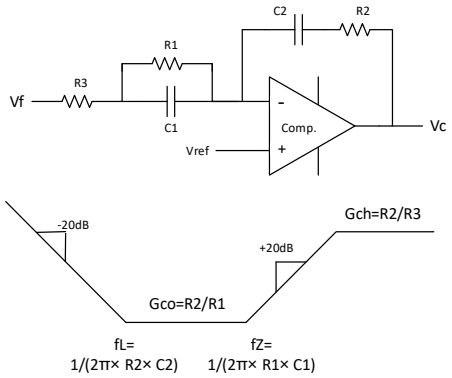
شکل۱۱: نمونه از ولتاژهای اندازه‌گیری شده در فرکانس $4kHz$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.5.2]
[DOI: 10.52547/joc.15.2.97]



شکل۱۲: مقایسه داده های اندازه‌گیری شده با نتایج حاصل از پیاده سازی روابط در محیط متلب

لازم به ذکر است که برای رسم منحنی بود، بروش محاسباتی، باید تابع انتقال جبران کننده نیز لحاظ شود. بعبارت دیگر تابع انتقال حلقه باز از حاصلضرب معادله ۱۰ در تابع انتقال جبران ساز ، به‌دست خواهد آمد. جبران ساز استفاده شده در این مبدل در شکل ۱۳ نشان داده شده است. تابع انتقال این جبران‌ساز بر اساس مقادیر پیاده‌سازی شده در رابطه (۱۴) ارائه شده است.



شکل۱۳: جبران ساز

$$G_c = \frac{V_C}{(V^+ - V^-)} = \frac{V_C}{(V_{ref} - V_f)} = \frac{(1+R_1C_1s)(1+R_2C_2s)}{C_2s\left(R_1R_3C_1s + (R_1+R_3)\right)} = \frac{2.564(s^2 + 35267.8 \times s + 1598767)}{s^2 + 23214.1 \times s} \quad (۱۴)$$

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله دو هدف اصلی که عبارتند از استخراج معادلات حالت برای یک مبدل ایزوله رزنانسی و صحه گذاری آن توسط روش میدل-بروک، با جزئیات مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به غیرخطی بودن مبدل رزنانسی و نیز تغییرات سریع مقادیر متغییرهای حالت حین هر یک از حالات سوئیچینگ، استفاده از توابع توصیف گسترده و خطی سازی معادلات حاصل از این توابع پیشنهاد و استفاده گردید. برای صحه گذاری معادلات به‌دست آمده، یک مبدل رزنانسی ایزوله سری، طراحی و پیاده سازی شده است. دیاگرام بود برای معادلات حالت به‌دست آمده و بر اساس مقادیر المان‌های پیاده سازی شده ترسیم و با داده‌های اندازه‌گیری شده مقایسه شده‌است. برای صحه‌گذاری، منحنی‌های اندازه و فاز برای تابع انتقال حلقه-بازِ مبدل با بکارگیریِ روش میدل‌بروک اندازه‌گیری و ترسیم شده است. به منظور استفاده از روش فوق، ایجاد برخی تغییرات در سخت افزار ضروری است که جزئیات آن همراه با تشریح کامل روش فوق در مقاله ارائه شده است. نهایتا نتایج حاصل از سخت افزار، با داده‌های حاصل از پیاده‌سازی معادلات به‌دست آمده در محیط متلب مقایسه شده‌اند. این مقایسه صحت معادلات حالت به‌دست آمده را تایید می کند.

مراجع

[1] Y. Wang, L. Yang, G. Li, S. Tu, “A Parameter Selection Method for Multi-Element Resonant Converters with a Resonant Zero Point,” Journal of Power Electronics, Vol. 18, No. 2, pp. 332-342, March 2018.

[2] R.W. Erickson, D. Maksimovic, Fundamentals of Power Electronics, 2th Ed. , Kluwer Academic Publishers, pp. 213-247, 2004.

[3] M.Z. Youssef, H. Pinheiro, “A Sampled-Data Reduced Order Dynamic Model for a Self-Sustained Series-Parallel Resonant Converter,” European Power Electronics and Drives, Vol. 15, Issue 1, 2005.

[4] M.E. Elbuluk, G.C. Verghese, J.G. Kassakian, “Sampled-data modeling and digital control of resonant converters,” IEEE TRANSACTIONS ON POWER ELECTRONICS. Vol 3. no 3, JULY 1988. pp. 344 – 354.

[5] Y. Murakami, T. Sato, K. Nishijima, T. Nabeshima, “Small Signal Analysis of LLC Current Resonant Converters Using Equivalent Source Model,” IECON 2016 - 42nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, Florence, Italy, 23-26 Oct. 2016.

[6] E.X. Yang, F.C. Lee, M.M. Jovanovic, “Small-signal modeling of series and parallel resonant converters,” APEC '92 Seventh Annual Applied Power Electronics Conference and Exposition, Boston, MA, USA, 23-27 Feb. 1992.

[7] K. Aditya, S. Williamson, “Linearization and Control of Series-Series Compensated Inductive Power Transfer System Based on Extended Describing Function Concept, “ Energies, Vol. 9, Issue 11, 17 November 2016.

[8] S. Tian, F.C. Lee, Q. Li, “Simplified Equivalent Circuit Model of Series Resonant Converter,” IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 31, Issue 5, May 2016.

[9] H.P. Park, J.H. Jung, “Modeling and Feedback Control of LLC Resonant Converters at High Switching Frequency,” Journal of power

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.5.2]
[DOI: 10.52547/joc.15.2.97]

electronics, Vol. 16, Issue 3, pp. 849-860, May 2016.

[10] C.H. Chang, E.C. Chang, C.A. Cheng, H.L. Cheng, S.C. Lin, “Small Signal Modeling of LLC Resonant Converters Based on Extended Describing Function,” 2012 International Symposium on Computer, Consumer and Control, Taichung, Taiwan, 4-6 June 2012.

[11] J. Ma, X. Wei, L. Hu, J. Zhang, “Small-Signal Modeling of the LLC Half-Bridge Resonant Converter,” Journal of Circuits, Systems and Computers vol. 28, no. 04, 2019.

[12] R.D. Middlebrook, "Measurement of Loop Gain in Feedback Systems," International Journal of Electronics, Vol. 38, No. 4, pp. 485-512, 1975.

[13] H. Choi, “Practical feedback loop design considerations for switched mode power supplies,” Fairchild Semiconductor Power Seminar, pp. 489-498, 2010-2011.

[14] Y. Panov, M.M. Jovanovic, “Small-signal measurement techniques in switching power supplies,” Nineteenth Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC 2004), Anaheim, CA, USA, 22-26 Feb. 2004.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-14]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.5.2]
[DOI: 10.52547/joc.15.2.97]