**مجله کنترل**
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۵، شماره ۲، تابستان ۱۴۰۰، صفحه ۱۳۷-۱۱۷

# طراحی هدایت بهینه فاز میانی با استفاده از روش مقیدِ پیش‌بین مبتنی بر مدل با سیگنال کنترل انتشار یافته در حالت تعمیم یافته

امین ابراهیمی فینی[۱]، علی محمدی[۲] ، عبدالرضا کاشانی‌نیا[۳]

[۱]دانشجوی دکترا، مجتمع برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، aminebrahimi@mut.ac.ir

[۲]استادیار، مجتمع برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، alimohammadi@mut.ac.ir

[۳]استادیار، مجتمع برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، akashaninia@mut.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۸/۰۳/۱۳ ویرایش: ۱۳۹۹/۰۶/۲۷ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۷/۲۸

**چکیده:** در این مقاله روش پیش‌بین مبتنی بر مدل با سیگنال کنترل انتشاریافته در حالت تعمیم یافته به منظور در نظر گرفتن قیود میانی روی مقادیر متغیرهای حالت سیستم و قید اندازه سیگنال کنترل توسعه داده شده است. با استفاده از این روش جدید که در این مقاله با عنوان روش مقیدِ پیش‌بین مبتنی بر مدل با سیگنال کنترل انتشار یافته در حالت تعمیم یافته نامیده شده است، به دلیل استفاده از توابع پایه متعامد و در نتیجه کاهش حجم محاسبات می‌توان یک مسأله کنترل بهینه زمان محدود و مقید را به صورت برخط پیاده‌سازی کرد. به منظور ارزیابی کارایی این روش، در این مقاله مسأله هدایت فازمیانی یک موشک پدافندی جهت رسیدن به نقطه‌ی خاصی از فضای سه بعدی مدلسازی شده است. قیود مختلفی از جمله قیود سخت و نرم روی مقادیر میانی و نهایی متغیرهای حالت و قیدهای مختلف روی دامنه فرمان شتاب اعمالی به موشک در بازه‌های زمانی متفاوت از مسیر در نظر گرفته شده است. در همه موارد در نظر گرفته شده روش ارائه شده در این مقاله توانسته است فرامین شتاب بهینه را تولید کند به گونه‌ای که تمام قیود در نظر گرفته شده برای مسیر موشک ارضا شود.

**کلمات کلیدی:** هدایت فاز میانی، روش **GMPSC**، بهینه‌سازی مقید، پیاده‌سازی برخط

# Optimal Midcourse Guidance Design Using Constrained Generalized Model Predictive Spread Control Method

**Amin Ebrahimi Fini, Ali Mohammadi and Abdorreza Kashaninia**

**Abstract:** In this paper, generalized model predictive spread control methodis developed to consider the intermediate constraints on system states and system inputs. Because of using the orthogonal basis functions and thus reducing the computational burden, this new method which is named constrained generalized model predictive spread control can be used in online implementation of a finite-time constrained optimal control problem. For demonstrating the performance of the proposed technique, in this paper an interceptor midcourse guidance problem is formulated to reach a desired point in space. Several constraints are considered such as: hard and soft intermediate and terminal constraints on system states and different constraints on input acceleration command to the interceptor in different time intervals of the trajectory. It is shown that in all the above situations, the proposed method could produce the optimal guidance commands such that all the interceptor trajectory constraints are satisfied.

**Keywords:** Midcourse Guidance, GMPSC Method, Constrained Optimization, Online Implementation.



[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.11.8 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.2.117 ]

## ۱- مقدمه

در حالت کلی پرواز یک موشک پدافندی را می‌توان به سه مرحله یا سه فاز شلیک (فاز بوست)، میانی و نهایی تقسیم‌بندی نمود. هریک از این سه مرحله ویژگی، چالش و هدایت مخصوص به خود را دارد. به پرواز موشک از لحظه شلیک تا زمانی که سرعت آن به اندازه‌ای برسد که قابل کنترل باشد، فاز شلیک گفته می‌شود. در این مرحله سوزش موتور موشک آغاز می‌شود و با افزایش تدریجی سرعت، موشک به یک سرعت عملکردی مناسبی می‌رسد. پس از اتمام فاز شلیک در صورتی که جستجوگر موشک نتوانسته باشد هدف را شناسایی و بر روی آن قفل نماید، فاز میانی هدایت موشک آغاز می‌شود. معمولاً در این فاز پارامترهای فضای درگیری توسط سنسورهایی که در محل شلیک قرار گرفته‌اند، اندازه‌گیری و فرامین هدایت مناسب به موشک ارسال می‌شوند. یکی از اهداف این فاز رساندن موشک به ناحیه‌ای در نزدیکی هدف است به گونه‌ای که در آن ناحیه جستجوگر موشک قادر به کشف و ردگیری هدف باشد. از دیگر اهداف این فاز می‌تواند کمینه‌سازی هدررفت انرژی موشک، افزایش سرعت موشک و ایجاد خطای نشانه‌روی صفر در انتهای فاز باشد. منظور از خطای نشانه‌روی، میزان انحراف مسیر موشک از نقطه‌ای است که پیش‌بینی می‌شود برخورد موشک و هدف در آن نقطه به وقوع بپیوندد. در فاز نهایی غالباً موشک توسط اندازه‌گیری‌های سنسورهای موجود بر روی خود به سمت هدف هدایت می‌شود. بسته به نوع موشک و نوع هدف فاز نهایی می‌تواند از چند ده ثانیه تا چند ثانیه قبل از برخورد آغاز شود. هدف از فاز نهایی از بین بردن خطای انباشته شده در طول فازهای قبلی و کاهش فاصله بین موشک و هدف به حداقل اندازه از قبل تعیین شده است.

مسأله هدایت فاز میانی، عبارتست از یک مسأله تولید مسیر بهینه، تا موشک با گذر از آن مسیر بتواند به معیارهای عملکردی مطلوب مورد نظر دست پیدا کند. در [۱] نشان داده شده است که مسأله تولید مسیر با در نظر گرفتن معادلات سینماتیک و دینامیک موشک منجر به یک مسأله بهینه‌سازی غیرخطی می‌شود که حل آن به صورت تحلیلی بسیار مشکل است. پس از آن دو مسیر متفاوت توسط محققان پیگیری شد. مسیر اول ساده‌سازی مسأله برای بدست آوردن یک پاسخ برخط و شبه‌بهینه بود. در [۳-۲] این کار با استفاده از تئوری اغتشاشات تکین انجام شد. این روش کمک می‌کند تا مسأله هدایت بهینه تبدیل به چند مسأله با درجات پایین‌تر شود که هریک با ترتیب مناسبی حل می‌گردند و در پایان به گونه مناسبی با یکدیگر ترکیب می‌شوند تا پاسخ تقریبی مسأله کلی بدست آید. این روند در هر زمان نمونه‌برداری به ازای اطلاعات به روز شده از موشک و هدف تکرار می‌شود و بنابراین قانون هدایت منتجه یک حالت پسخوردی نیز دارد. ایده اصلی در روش اغتشاشات تکین جداسازی دینامیک‌های کند و تند موجود در مسأله است. البته در مقالاتی اشکالاتی نیز به این روش وارد شده است. مهمترین اشکال وارده این است که حل شبه بهینه با استفاده از این روش خطای نسبتاً قابل توجهی نسبت به حل واقعی مسأله بهینه‌سازی غیرخطی بدست آمده از روش‌های عددی دارد. همچنین در صورت قرار گرفتن قید یا محدودیتی بر روی متغیرهای دینامیکی مسأله، روش اغتشاشات تکین دیگر قادر به پاسخگویی مسأله نخواهد بود [۴-۵]. در همین راستا تعداد دیگری از مقالات با خطی‌سازی معادلات مسأله و استفاده از روش‌های بهینه‌سازی خطی تلاش کرده‌اند تا پاسخ‌های تحلیلی برای هدایت بدست آورند. در واقع در این مقالات تلاش بر این بوده است تا یک قانون تحلیلی ترجیحاً ساده، قابل پیاده‌سازی و ضمناً بهینه برای هدایت موشک استخراج شود. برای مثال در [۶] با استفاده از همین روش یک الگوریتم هدایت برای یک موشک هواپایه که قابلیت کنترل به صورت آیرودینامیکی را دارد ارائه شده است. اگرچه قوانین بدست آمده از این روش عموماً ساده و قابل پیاده‌سازی هستند اما به دلیل خطای زیاد ناشی از خطی‌سازی دینامیک مسأله، غالباً مناسب جهت استفاده در کابردهایی که دقت نهایی از اهمیت خاصی برخوردار است نمی‌باشند.

دسته دیگری از مقالات مسیر دوم، یعنی حل خارج خط مسأله بهینه‌سازی غیرخطی را پیگیری کردند. روش کار در این مقالات بدین صورت است که مسأله بهینه‌سازی غیرخطی به ازای سناریوهای مختلفی از هدف حل می‌شود و از پاسخ‌های بدست آمده برای هدایت موشک در شرایط واقعی استفاده می‌گردد. برای مثال در [۷] گفته شده است که پاسخ‌های بدست آمده به صورت یک پایگاه داده در موشک ذخیره می‌شود و با توجه به سناریوی واقعی هدف از اطلاعات ذخیره شده به ازای آن سناریو برای هدایت موشک استفاده می‌شود و در صورت عدم وجود سناریوی مشابه در اطلاعات ذخیره شده، از درون‌یابی اطلاعات موجود برای هدایت استفاده می‌گردد. و یا در [۸] در کاری مشابه اما این‌بار برای مقابله با یک هدف بالستیک که نیاز به شرایط مناسبی به لحاظ زاویه نسبی بین بردار سرعت موشک و هدف در لحظه شروع فاز نهایی برای افزایش احتمال برخورد وجود دارد، از این راهکار استفاده شده است. نقطه ضعف اینگونه روش‌ها حجم زیاد فضای لازم جهت ذخیره اطلاعات خارج خط و بار محاسباتی جهت میان‌یابی اطلاعات ذخیره شده است. ضمن اینکه به دلیل استفاده از اطلاعات خارج خط، پاسخ‌های بدست آمده در سناریوهای واقعی نسبت به پاسخ بهینه، خطای زیادی دارند.

اخیراً در مراجع یک روش جدید جهت کنترل بهینه سیستم‌های غیرخطی با نام روش برنامه‌ریزی استاتیک پیش بین مبتنی بر مدل[1] یا به اختصار MPSP ارائه شده است [۹]. این روش از ترکیب فلسفه کنترل پیش‌بین غیرخطی و فلسفه روش برنامه‌ریزی پویای تقریبی ([۱۰]) به منظور حل مسأله کنترل بهینه افق محدود با قیود نهایی ارائه شده است. این روش در واقع یک مسأله برنامه‌ریزی پویا را تبدیل به یک مسأله برنامه‌ریزی استاتیک می‌کند که این موضوع پیچیدگی محاسباتی مسأله را بسیار کاهش می‌دهد. در [۹] یک حل بسته برای به روز رسانی تاریخچه سیگنال

[1] Model Predictive Static Programming



[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.11.8 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.2.117 ]

کنترل با استفاده از روش MPSP بدست آمده است. موفقیت این روش در حل مسأله هدایت فاز میانی در مقالات متعددی اثبات شده است ([۱۱-۱۳]) و نشان داده شده است که به دلیل حجم محاسبات مناسب، می‌توان از این روش به صورت برخط جهت هدایت نزدیک بهینه موشک در فاز میانی بهره برد.

در [۱۴] با توسعه و بهبود روش MPSP به منظور کاهش حجم محاسبات جهت پیاده‌سازی برخط، روش پیش‌بین مبتنی بر مدل با سیگنال کنترل انتشار یافته[1]یا به اختصار GMPSC ارائه شده است. در روش GMPSC با بهره‌گیری از توابع پایه متعامد جهت محاسبه سیگنال کنترل، حجم محاسبات برخط نسبت به روش MPSP به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش پیدا کرده است. همچنین نشان داده شده است که با استفاده از توابع پایه متعامد و پیوسته در روش GMPSC، تغییرات هموار و پیوسته سیگنال کنترل تضمین شده است ([۱۴]). همچنین در [۱۴] نشان داده شده است که استفاده از توابع پایه غیر متعامد (برای نمونه در [۱۵و۱۶]) می‌تواند باعث عدم همگرایی نتایج بدست آمده به نتایج بهینه شود.

روش GMPSC مشابه روش MPSP به منظور در نظر گرفتن قید تساوی روی مقادیر نهایی متغیرهای حالت سیستم طراحی شده است. حال آنکه سیستم‌های فیزیکی توانایی پاسخ به ورودی‌های محدود را دارند. به عبارت دیگر ورودی یک سیستم فیزیکی نمی‌تواند مقادیر نامحدودی داشته باشد. بنابراین اندازه سیگنال ورودی یک سیستم همواره می‌تواند در محدوده بین یک مقدار بیشینه و یک مقدار کمینه مقدار داشته باشد و خارج از این محدوده، سیستم وارد ناحیه اشباع می‌گردد. همچنین در کنترل سیستم‌های فیزیکی بسیار مهم است تا بعضی از متغیرهای حالت سیستم در یک محدوده مشخص شده‌ای مقدار داشته باشند. این موضوع می‌تواند به دلیل محدودیت‌های فیزیکی سیستم و یا به دلیل درخواست عملکردی خاص از سیستم مورد نظر باشد. در این موارد روش GMPSC نمی‌تواند پاسخگوی نیاز سیستم باشد. در این مقاله روش GMPSC به گونه‌ای توسعه داده می‌شود که بتوان با استفاده از آن قیود میانی و نهایی روی مقادیر متغیرهای حالت و سیگنال کنترل سیستم را نیز در نظر گرفت. این روش جدید به اختصار روش GMPSC مقید نامیده می‌شود.

در ادامه ابتدا در بخش ۲ ریاضیات روش GMPSC مقید ارائه خواهد شد. در این بخش نحوه مدلسازی قید روی اندازه سیگنال کنترل و قید روی مقادیر متغیرهای حالت جهت اضافه شدن به صورت مسأله اصلی روش GMPSC بیان می‌گردد. سپس در بخش ۳ نحوه حل روش GMPSC مقید بحث و بررسی خواهد شد. در این مقاله از الگوریتم هیلدرث جهت حل روش GMPSC مقید استفاده شده است. در بخش ۴ حل یک مسأله طراحی هدایت فاز میانی با استفاده از روش GMPSC مقید بحث و بررسی شده است و در نهایت در بخش ۵ جمع‌بندی نتایج بدست آمده در این مقاله ارائه شده است.

## ۲- بیان ریاضیات روش GMPSC مقید

فرض می‌شود که معادلات فضای حالت یک سیستم دینامیکی غیرخطی کلی در حوزه زمان گسسته به صورت زیر باشد،

$$X_{k+1} = F_k\left(X_k, U_k\right) \quad (۱)$$

$$Y_k = h\left(X_k\right) \quad (۲)$$

که در آن $X \in \Re^n$ ، $U \in \Re^m$ و $Y \in \Re^p$ به ترتیب بردار حالت، بردار کنترل (ورودی) و بردار خروجی سیستم می‌باشند. $F$ یک تابع غیرخطی از متغیرهای حالت و ورودی‌های سیستم و $h$ یک تابع غیرخطی از متغیرهای حالت سیستم است. همچنین $k = 1, 2, ..., N$ شمارنده زمان در فضای سیستم‌های زمان گسسته می‌باشد. مطلوب است که سیگنال کنترلی $U_k$ برای $k = 1, 2, ..., (N-1)$ به‌گونه‌ای محاسبه شود که خروجی سیستم در لحظه نهایی ( $Y_N$ )، به یک مقدار مطلوب از پیش تعیین شده ( $Y_N^*$ ) همگرا شود و یک تابع هزینه از پیش تعیین شده حداقل گردد.

در روش GMPSC برای شروع فرایند یافتن سیگنال کنترلی $U_k$ مناسب که شرایط مورد نظر را برآورده کند، ابتدا لازم است تا یک حدس اولیه در مورد پاسخ $U_k$ به ازای $k = 1, 2, ..., (N-1)$ انجام شود. این حدس اولیه لازم نیست دقیق باشد. روشن است که با اعمال این حدس به سیستم، خروجی نهایی مطلوب به ازای حداقلِ تابع هزینه برآورده نخواهد شد. بنابراین نیاز است تا حدس اولیه انجام شده در مورد سیگنال کنترلی $U_k$ به‌گونه مناسبی بهبود یابد. در روش GMPSC با استفاده از یک الگوریتم تکراری در هر مرحله سیگنال کنترلی $U_k$ بهبود داده می‌شود تا زمانی که خروجی سیستم در لحظه نهایی به خروجی مطلوب از پیش تعیین شده همگرا شود در ضمن تابع هزینه مورد نظر نیز حداقل گردد.

برای این منظور بسط سری تیلورِ خروجی در لحظه نهایی، $Y_N$ ، حول مقدار مطلوبِ خروجی در لحظه نهایی، $Y_N^*$ ، برابر است با،

$$Y_N = Y_N^* + \left[\frac{\partial Y_N}{\partial X_N}\right] \mathrm{d}X_N + \mathrm{HOT} \quad (۳)$$

که در آن HOT[2] بیانگر عبارتهای مرتبه بالاتر در بسط سری تیلور است. با مرتب‌سازی رابطه (۳) خطای خروجی در لحظه نهایی عبارت است از،

$$Y_N - Y_N^* = \left[\frac{\partial Y_N}{\partial X_N}\right] \mathrm{d}X_N + \mathrm{HOT} \quad (۴)$$

[1] Generalized Model Predictive Spread Control

[2] Higher Order Terms



[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.11.8 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.2.117 ]

که با صرف نظر کردن از عبارتهای مرتبه بالاتر در بسط سری تیلور، رابطه (۴) به صورت زیر ساده می‌شود،

$$\Delta Y_N \cong \mathrm{d}Y_N = \left[\frac{\partial Y_N}{\partial X_N}\right]\mathrm{d}X_N \qquad (۵)$$

همچنین با استفاده از رابطه (۱)، خطای حالت‌های سیستم در لحظه $k+1$ عبارت است از،

$$\mathrm{d}X_{k+1} = \left[\frac{\partial F_k}{\partial X_k}\right]\mathrm{d}X_k + \left[\frac{\partial F_k}{\partial U_k}\right]\mathrm{d}U_k \qquad (۶)$$

که در آن $\mathrm{d}X_k$ و $\mathrm{d}U_k$ به ترتیب خطای حالت‌های سیستم و ورودی‌های سیستم در لحظه $k$ می‌باشد. با بسط $\mathrm{d}X_N$ با استفاده از رابطه (۶) و جایگذاری آن در رابطه (۵)،خطای خروجی در لحظه نهایی برابر خواهد بود با،

$$\mathrm{d}Y_N = \left[\frac{\partial Y_N}{\partial X_N}\right]\left(\left[\frac{\partial F_{N-1}}{\partial X_{N-1}}\right]\mathrm{d}X_{N-1} + \left[\frac{\partial F_{N-1}}{\partial U_{N-1}}\right]\mathrm{d}U_{N-1}\right) \qquad (۷)$$

به طور مشابه با بسط $\mathrm{d}X_{N-1}$ با استفاده از رابطه (۶) و جایگذاری آن در رابطه (۷)،خطای خروجی در لحظه نهایی برابر خواهد بود با،

$$\mathrm{d}Y_N = \left[\frac{\partial Y_N}{\partial X_N}\right]\left[\frac{\partial F_{N-1}}{\partial X_{N-1}}\right]\left(\left[\frac{\partial F_{N-2}}{\partial X_{N-2}}\right]\mathrm{d}X_{N-2} + \left[\frac{\partial F_{N-2}}{\partial U_{N-2}}\right]\mathrm{d}U_{N-2}\right) + \left[\frac{\partial Y_N}{\partial X_N}\right]\left[\frac{\partial F_{N-1}}{\partial U_{N-1}}\right]\mathrm{d}U_{N-1}$$

و به همین ترتیب $\mathrm{d}X_{N-2}$ می‌تواند بر حسب $\mathrm{d}X_{N-3}$ و $\mathrm{d}U_{N-3}$ بسط داده شود. با ادامه این فرایند تا $k=1$ خطای خروجی در لحظه نهایی برابر خواهد بود با،

$$\mathrm{d}Y_N = A\mathrm{d}X_1 + B_1\mathrm{d}U_1 + B_2\mathrm{d}U_2 + \cdots + B_{N-1}\mathrm{d}U_{N-1} \qquad (۸)$$

که در آن ماتریس $A$ برابر است با

$$A = \left[\frac{\partial Y_N}{\partial X_N}\right]\left[\frac{\partial F_{N-1}}{\partial X_{N-1}}\right]\cdots\left[\frac{\partial F_1}{\partial X_1}\right]$$

همچنین ماتریس‌های $B_k$ که ماتریس‌های حساسیت نامیده می‌شوند، عبارتند از

$$B_k = \left[\frac{\partial Y_N}{\partial X_N}\right]\left[\frac{\partial F_{N-1}}{\partial X_{N-1}}\right]\cdots\left[\frac{\partial F_{k+1}}{\partial X_{k+1}}\right]\left[\frac{\partial F_k}{\partial U_k}\right] \quad ,$$
$$k = 1, \ldots, (N-1)$$

با فرض اینکه حالت‌های اولیه سیستم مشخص هستند، بنابراین در لحظه اول هیچ خطایی برای حالت‌های سیستم وجود ندارد. بنابراین رابطه (۸) به صورت زیر کاهش پیدا خواهد کرد،

$$\mathrm{d}Y_N = B_1\mathrm{d}U_1 + B_2\mathrm{d}U_2 + \cdots + B_{N-1}\mathrm{d}U_{N-1} \Rightarrow \mathrm{d}Y_N = \sum_{k=1}^{N-1} B_k\mathrm{d}U_k \qquad (۹)$$

که در آن $\mathrm{d}U_k$ برابر است با،

$$\mathrm{d}U_k = U_k^0 - U_k$$

$U_k^0$ در رابطه بالا عبارت است از تاریخچه سیگنال ورودی در مرحله قبل به ازای $k = 1,2,\ldots,(N-1)$ که این سیگنال در مرحله اولِ فرایند تصحیح سیگنال ورودی، برابر با حدس اولیه‌ای است که پیش‌تر توضیحات آن ارائه شد.

توجه شود که در محاسبه رابطه (۹) به صورت ضمنی این فرض در نظر گرفته شده بود که سیگنال ورودی‌های سیستم در هر زمان مستقل از حالت‌ها و ورودی‌های گذشته سیستم است. این فرض به این خاطر است که ورودی سیستم، یک متغیر تصمیم‌گیری است و در نتیجه می‌توان در هر زمان یک تصمیم مستقل به سیستم اعمال نمود.

در رابطه (۹) باید ماتریس‌های حساسیت $B_k$ برای $k = 1,2,\ldots,(N-1)$ محاسبه شوند. محاسبه مستقیم این ماتریس‌ها با استفاده از رابطه ارائه شده برای $B_k$ از نظر محاسباتی بسیار زمان‌بر و سنگین است به خصوص زمانی که $N$ بزرگ انتخاب شود که این موضوع برای پیاده‌سازی برخط چندان مناسب نیست. اما خوشبختانه می‌توان ماتریس‌های حساسیت را به صورت بازگشتی به شیوه‌ای که در ادامه توضیح داده می‌شود، محاسبه نمود. برای این کار در ابتدا ماتریس $B_{N-1}^0$ به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$B_{N-1}^0 = \left[\frac{\partial Y_N}{\partial X_N}\right] \qquad (۱۰)$$

سپس برای $k = (N-2),(N-3),\ldots,1$ ماتریس‌های $B_k^0$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند،

$$B_k^0 = B_{k+1}^0\left[\frac{\partial F_{k+1}}{\partial X_{k+1}}\right] \qquad (۱۱)$$

و سرانجام ماتریس‌های حساسیت $B_k$ برای $k = (N-1),(N-2),\ldots,1$ به صورت زیر بدست خواهند آمد،

$$B_k = B_k^0\left[\frac{\partial F_k}{\partial U_k}\right] \qquad (۱۲)$$



[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.11.8 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.2.117 ]

روابط (۱۰) تا (۱۲) یک روش بازگشتی برای محاسبه ماتریس‌های حساسیت $B_k$ ایجاد می‌کنند که به طور قابل ملاحظه‌ای زمان و حجم محاسبات را برای پیاده‌سازی برخط کاهش می‌دهد.

بردار کنترل $U_k$ و ماتریس حساسیت $B_k$ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد،

$$U_k = \begin{bmatrix} u_1(k) & u_2(k) & \cdots & u_m(k) \end{bmatrix}^T \quad (۱۳)$$

$$B_k = \begin{bmatrix} b_{1k} & b_{2k} & \cdots & b_{mk} \end{bmatrix} \quad (۱۴)$$

که در آن $m$ تعداد ورودی‌ها، $u_i(k)$ ورودی $i$ام ماتریس $U_k$ و $b_{ik}$ ستون $i$ام ماتریس $B_k$ است. مزیت روش GMPSC استفاده از توابع پایه متعامد برای بیان ورودی‌های کنترلی سیستم است. این کار باعث می‌شود حجم محاسبات که در پیاده‌سازی برخط بسیار حائز اهمیت است، به صورت چشمگیری کاهش یابد [۱۴]. با این توضیح سیگنال کنترلی $u_i(k)$ را می‌توان به وسیله مجموعه توابع پایه متعامد $\left\{l_1(k), l_2(k), \ \ldots \ , l_{N_i'}(k)\right\}$ به صورت زیر بیان کرد،

$$u_i(k) = \sum_{j=1}^{N_i'} c_j^i \ l_j^i(k) \quad (۱۵)$$

که در آن $N_i'$ تعداد توابع پایه متعامد به کار رفته به منظور بیان $u_i(k)$ است. همچنین $c_j^i$ها ضرایب توابع پایه هستند که از فرایند بهینه‌سازی بدست خواهند آمد.

رابطه (۱۵) را می‌توان به فرم برداری به صورت زیر بازنویسی کرد،

$$u_i(k) = L_i(k)^T C_i \quad (۱۶)$$

که در آن $L_i(k)$ و $C_i$ به ترتیب بردار توابع پایه $i$ام و بردار ضرایب $i$ ام می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند،

$$L_i(k)^T = \begin{bmatrix} l_1^i(k) & l_2^i(k) & \cdots & l_{N_i'}^i(k) \end{bmatrix}$$
$$C_i^T = \begin{bmatrix} c_1^i & c_2^i & \cdots & c_{N_i'}^i \end{bmatrix}$$

با جایگذاری رابطه (۱۶) در (۱۳)، رابطه زیر بدست خواهد آمد،

$$U_k = \begin{bmatrix} L_1(k)^T C_1 & L_2(k)^T C_2 & \cdots & L_m(k)^T C_m \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} L_1(k) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_2(k) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & L_m(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$U_k = \Omega_k^T \Psi \quad (۱۷)$$

که در آن $\Omega_k$ ماتریسی با بعد $\left(N_1' + N_2' + \cdots + N_m'\right) \times m$ و $\Psi$ برداری با بعد $\left(N_1' + N_2' + \cdots + N_m'\right) \times 1$ می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند،

$$\Omega_k = \begin{bmatrix} L_1(k) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_2(k) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & L_m(k) \end{bmatrix}$$
$$\Psi = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_m \end{bmatrix}^T$$

با جایگذاری رابطه (۱۷) در رابطه (۹) و با یادآوری عبارت $U_k = U_k^0 - \mathrm{d}U_k$، رابطه زیر بدست خواهد آمد،

$$\mathrm{d}Y_N = B_\lambda - \sum_{k=1}^{N-1} B_k \Omega_k^T \Psi = B_\lambda - B_\Omega \Psi \quad (۱۸)$$

که در آن $B_\lambda$ و $B_\Omega$ به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$B_\lambda = \left[\sum_{k=1}^{N-1} B_k U_k^0\right]$$
$$B_\Omega = \sum_{k=1}^{N-1} \begin{bmatrix} b_{1k} L_1(k)^T & b_{2k} L_2(k)^T & \cdots & b_{mk} L_m(k)^T \end{bmatrix} \quad (۱۸)$$

رابطه (۱۸) یک دستگاه معادلات با $\left(N_1' + N_2' + \cdots + N_m'\right)$ مجهول و $p$ معادله است. اگر تعداد معادلات از تعداد مجهولات کمتر باشد ( $p < \left(N_1' + N_2' + \cdots + N_m'\right)$ )، می‌توان قیود عملکردی دیگری به مسأله اضافه نمود. با استفاده از همین موضوع در ادامه قید تابع هزینه، قید روی اندازه سیگنال کنترل و قید روی مقدار هریک از متغیرهای حالت به صورت مسأله مورد بحث اضافه می‌گردد.

## ۲-۱ مدل‌سازی ریاضی قید تابع هزینه جهت اضافه شدن به صورت مسأله اصلی

تابع هزینه زیر به منظور حداقل‌سازی سیگنال کنترل در نظر گرفته می‌شود،

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} U_k^T R U_k \quad (۲۰)$$

که در آن $R$ یک ماتریس مثبت معین به منظور وزن‌دهی اهمیت ورودی‌های سیستم است که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r_m \end{bmatrix}$$

[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.11.8 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.2.117 ]

که در آن $r_i$ها مقادیری مثبت برای $i = 1, 2, \dots, m$ هستند. با کمینه کردن این تابع هزینه می‌توان با اطمینان گفت که تلاش کنترلی حداقل می‌شود.

با جایگذاری رابطه (۱۷)، تابع هزینه (۲۰) به صورت زیر بدست خواهد آمد،

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1} \Psi^T \Omega_k R \Omega_k^T \Psi \qquad (۲۱)$$

با بسط عبارت بالا، رابطه (۲۲) به صورت زیر بدست خواهد آمد،

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\Big(r_1 C_1^T L_1(k) L_1(k)^T C_1 + r_2 C_2^T L_2(k) L_2(k)^T C_2 + \cdots + r_m C_m^T L_m(k) L_m(k)^T C_m\Big) \qquad (۲۲)$$

که در آن $r_i$ها و $C_i$ها مستقل از شمارنده $k$ هستند و بنابراین می‌توان رابطه بالا را به صورت زیر بازنویسی کرد،

$$J = \frac{1}{2}\Bigg( r_1 C_1^T \sum_{k=1}^{N-1}\Big(L_1(k)L_1(k)^T\Big) C_1 + r_2 C_2^T \sum_{k=1}^{N-1}\Big(L_2(k)L_2(k)^T\Big) C_2 + \cdots + r_m C_m^T \sum_{k=1}^{N-1}\Big(L_m(k)L_m(k)^T\Big) C_m \Bigg) \qquad (۲۳)$$

در ابتدای این بخش فرض شد که توابع پایه متعامد هستند. خاصیت تعامد به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N-1} l_i(k) l_j(k) = 1 & , \quad \text{for } i = j \\ \sum_{k=1}^{N-1} l_i(k) l_j(k) = 0 & , \quad \text{for } i \neq j \end{cases} \qquad (۲۴)$$

با استفاده از خاصیت تعامد داریم،

$$\sum_{k=1}^{N-1} L_i(k) L_i(k)^T = I \quad , \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, m \qquad (۲۵)$$

که در آن $I$ ماتریس همانی با بعد $N_i'$ است. با جایگذاری رابطه (۲۵) در (۲۳) و انجام عملیات ریاضی لازم، عبارت $J$ به صورت زیر ساده خواهد شد،

$$J = \frac{1}{2}\Psi^T \mathrm{P}\, \Psi \qquad (۲۶)$$

که در آن P یک ماتریس مربعی با بعد $\left(N_1' + N_2' + \cdots + N_m'\right)$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \bar{R}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{R}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \bar{R}_m \end{bmatrix}, \quad \bar{R}_i = \begin{bmatrix} r_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_i & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r_i \end{bmatrix}_{N_i' \times N_i'}$$

$$\text{for } i = 1, 2, \dots m$$

همان‌طور که در رابطه (۲۶) دیده می‌شود، عبارت $J$ تنها به صورت تابعی از ضرایب توابع پایه درآمده است و به شمارنده $k$ وابستگی ندارد. این موضوع باعث می‌شود که حجم محاسبات و در نتیجه زمان انجام محاسبات در فرایند بهینه‌سازی به شدت کاهش یابد.با مدلسازی قید تابع هزینه در (۲۶)، صورت مسأله بهینه‌سازی این مقاله تا اینجا به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \min & J = \frac{1}{2}\Psi^T \mathrm{P}\, \Psi \\ \text{s.t.} & \mathrm{d}Y_N = B_\lambda - B_\Omega \Psi \end{cases}$$

## ۲-۲ مدل‌سازی ریاضی قید اندازه سیگنال کنترل جهت اضافه شدن به صورت مسأله اصلی

سیستم‌های فیزیکی توانایی پاسخ به ورودی‌های محدود را دارند. به عبارت دیگر ورودی یک سیستم فیزیکی نمی‌تواند مقادیر نامحدودی داشته باشد. بنابراین اندازه سیگنال ورودی یک سیستم همواره می‌تواند در محدوده بین یک مقدار بیشینه و یک مقدار کمینه مقدار داشته باشد و خارج از این محدوده، سیستم وارد ناحیه اشباع می‌گردد. در این قسمت قید روی اندازه سیگنال کنترل به صورت مسأله اصلی این مقاله اضافه می‌شود. به عبارت دیگر سیگنال کنترلی $U_k$برای $k = 1, 2, \dots, (N-1)$ باید به‌گونه‌ای بدست آید که خروجی سیستم در لحظه نهایی ( $Y_N$)، به یک مقدار مطلوب از پیش تعیین شده ( $Y_N^*$) همگرا شود و یک تابع هزینه معین شده‌ای حداقل گردد و دامنه سیگنال کنترل همواره (و یا برای لحظات مشخصی از زمان) در محدوده یک مقدار کمینه و یک مقدار بیشینه باقی بماند.

برای اضافه کردن قید اندازه سیگنال کنترل به مسأله اصلی برای هر لحظه $k$ باید داشته باشیم،

$$\begin{cases} U_{1\min} \le U_1 \le U_{1\max} \\ U_{2\min} \le U_2 \le U_{2\max} \\ \vdots \\ U_{N-1\min} \le U_{N-1} \le U_{N-1\max} \end{cases}$$

با جایگذاری $U_k$ از رابطه (۱۷)، رابطه بالا به صورت زیر در خواهد آمد،



[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.11.8 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.2.117 ]

$$\begin{cases} U_{1\min} \le \Omega_1^T \Psi \le U_{1\max} \\ U_{2\min} \le \Omega_2^T \Psi \le U_{2\max} \\ \vdots \\ U_{N-1\min} \le \Omega_{N-1}^T \Psi \le U_{N-1\max} \end{cases}$$

می‌توان ناتساوی‌های بالا را به صورت یک ناتساوی ماتریسی به صورت زیر بازنویسی نمود،

$$U_{\min} \le \Omega^T \Psi \le U_{\max} \qquad (۲۷)$$

که در آن $\Omega$، $U_{\min}$ و $U_{\max}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند،

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \vdots \\ \Omega_{N-1} \end{bmatrix}, U_{\min} = \begin{bmatrix} U_{1\min} \\ U_{2\min} \\ \vdots \\ U_{N-1\min} \end{bmatrix}, U_{\max} = \begin{bmatrix} U_{1\max} \\ U_{2\max} \\ \vdots \\ U_{N-1\max} \end{bmatrix}$$

در رابطه (۲۷) هر دو نوعِ ناتساوی (کوچکتر از و بزرگتر از) وجود دارد. می‌توان این رابطه را به ناتساوی "کوچکتر از" به صورت زیر تبدیل نمود،

$$\Phi\Psi \le U_L \qquad (۲۸)$$

که در آن $\Phi$ و $U_L$ به صورت زیر تعریف می‌شوند،

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Omega^{\mathrm{T}} \\ -\Omega^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \; U_L = \begin{bmatrix} U_{\max} \\ -U_{\min} \end{bmatrix}$$

بنابراین با اضافه شدن قید اندازه سیگنال کنترل بدست آمده در رابطه بالا، صورت مسأله اصلی این مقاله به صورت زیر در خواهد آمد،

$$\begin{cases} \min \quad J = \dfrac{1}{2}\Psi^T \mathrm{P}\, \Psi \\ \text{s.t.} \;\; \mathrm{d}Y_N = B_\lambda - B_\Omega \Psi \\ \qquad \Phi\Psi \le U_L \end{cases}$$

## ۳-۲ مدل‌سازی ریاضی قید بر روی مقادیر متغیرهای حالت جهت اضافه شدن به صورت مسأله اصلی

در کنترل سیستم‌های فیزیکی بسیار مهم است تا بعضی از متغیرهای حالت سیستم در یک محدوده مشخص شده‌ای مقدار داشته باشند. این موضوع می‌تواند به دلیل محدودیت‌های فیزیکی سیستم و یا به دلیل درخواست عملکردی خاص از سیستم مورد نظر باشد. در این قسمت قید روی مقادیر متغیرهای حالت، به صورت مسأله اصلی این مقاله اضافه می‌شود. به عبارت دیگر سیگنال کنترلی $U_k$ برای $k = 1, 2, \ldots, (N-1)$ باید به‌گونه‌ای محاسبه شود که خروجی سیستم در لحظه نهایی ( $Y_N$ )، به یک مقدار مطلوب از پیش تعیین شده ( $Y_N^*$ ) همگرا شود در حالی که که یک تابع هزینه معین شده‌ای حداقل گردد، دامنه سیگنال کنترل همواره (و یا برای لحظات مشخصی از زمان) در محدوده یک مقدار کمینه و یک مقدار بیشینه باقی بماند و مقدار متغیرهای حالت معین شده‌ای از سیستم همواره (و یا برای لحظات مشخصی از زمان) در یک محدوده مشخص شده‌ای باقی بماند.

برای این منظور فرض می‌شود $V$ تابعی از متغیرهای حالت سیستم است که در حالت کلی در هر لحظه به صورت زیر تعریف می‌گردد،

$$V_k = g\left(X_k\right) \qquad (۲۹)$$

مطلوب است که $V_k$ در هر لحظه بین یک مقدار کمینه و یک مقدار بیشینه باقی بماند. یعنی،

$$V_{k\min} \le V_k \le V_{k\max} \qquad (۳۰)$$

می‌توان بسط سری تیلور $V_k$ حول مقدار آن در مرحله قبل، $V_k^0$، را به صورت زیر بیان نمود،

$$V_k = V_k^0 + \left[\frac{\partial V_k^0}{\partial X_k^0}\right] \mathrm{d}X_k + \mathrm{HOT} \qquad (۳۱)$$

با صرف نظر کردن از عبارتهای مرتبه بالاتر در بسط سری تیلور رابطه (۳۱) به صورت زیر ساده می‌شود،

$$dV_k = -\left[\frac{\partial V_k^0}{\partial X_k^0}\right] \mathrm{d}X_k \qquad (۳۲)$$

که در آن $\mathrm{d}V_k$ برابر است با،

$$\mathrm{d}V_k = V_k^0 - V_k \qquad (۳۳)$$

با جایگذاری رابطه (۶)، رابطه (۳۲) به صورت زیر در خواهد آمد،

$$\mathrm{d}V_k = -\left[\frac{\partial V_k^0}{\partial X_k^0}\right]\left(\left[\frac{\partial F_{k-1}}{\partial X_{k-1}}\right]\mathrm{d}X_{k-1} + \left[\frac{\partial F_{k-1}}{\partial U_{k-1}}\right]\mathrm{d}U_{k-1}\right) \qquad (۳۴)$$

و به همین ترتیب $\mathrm{d}X_{k-1}$ می‌تواند بر حسب $\mathrm{d}X_{k-2}$ و $\mathrm{d}U_{k-2}$ بسط داده شود. با ادامه این فرایند تا $k = 1$، رابطه (۳۴) به صورت زیر در خواهد آمد،

$$\mathrm{d}V_k = a\mathrm{d}X_1 + \bar{b}_1\mathrm{d}U_1 + \bar{b}_2\mathrm{d}U_2 + \cdots + \bar{b}_{k-1}\mathrm{d}U_{k-1} \qquad (۳۵)$$

که در آن ماتریس $a$ برابر است با

$$a = -\left[\frac{\partial V_k^0}{\partial X_k^0}\right]\left[\frac{\partial F_{k-1}}{\partial X_{k-1}}\right]\cdots\left[\frac{\partial F_1}{\partial X_1}\right]\left[\frac{\partial F_1}{\partial X_1}\right]$$

همچنین ماتریس‌های $b_j$ عبارتند از،



[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.11.8 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.2.117 ]

$$\bar{b}_j = -\left[\frac{\partial V_k^0}{\partial X_k^0}\right]\left[\frac{\partial F_{k-1}}{\partial X_{k-1}}\right]\cdots\left[\frac{\partial F_{j+1}}{\partial X_{j+1}}\right]\left[\frac{\partial F_j}{\partial U_j}\right] \quad ,$$
$$j = 1, \ldots, (k-1)$$

با فرض اینکه حالت‌های اولیه سیستم مشخص هستند، بنابراین هیچ خطایی در لحظه اول برای حالت‌های سیستم وجود ندارد. بنابراین رابطه (۳۵) به صورت زیر کاهش پیدا خواهد کرد،

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}V_k = \bar{b}_1 \mathrm{d}U_1 + \bar{b}_2 \mathrm{d}U_2 + \cdots + \bar{b}_{k-1}\mathrm{d}U_{k-1} \\ &\Rightarrow \mathrm{d}V_k = \sum_{j=1}^{k-1} \bar{b}_j \mathrm{d}U_j \end{aligned} \qquad (۳۶)$$

با استفاده از روابط (۳۰) و (۳۳) ، قیود روی مقادیر متغیرهای حالت را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود،

$$V_{k\min} - V_k^0 \le -\mathrm{d}V_k \le V_{k\max} - V_k^0 \qquad (۳۷)$$

با جایگذاری رابطه (۳۶)، رابطه (۳۷) به صورت زیر در خواهد آمد،

$$V_{k\min} - V_k^0 \le -\sum_{j=1}^{k-1} \bar{b}_j \mathrm{d}U_j \le V_{k\max} - V_k^0 \qquad (۳۸)$$

همان‌طور که قبلاً توضیح داده شد، $\mathrm{d}U_j$ برابر است با،

$$\mathrm{d}U_j = U_j^0 - U_j$$

با جایگذاری $\mathrm{d}U_j$ از عبارت بالا، رابطه (۳۸) به صورت زیر در خواهد آمد،

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{k-1} \bar{b}_j U_j \le V_{k\max} - V_k^0 + b_\lambda(k-1) \\ &\sum_{j=1}^{k-1} \bar{b}_j U_j \ge V_{k\min} - V_k^0 + b_\lambda(k-1) \end{aligned} \qquad (۳۹)$$

که در آن $b_\lambda(k-1)$ برابر است با،

$$b_\lambda(k-1) = \sum_{j=1}^{k-1} \bar{b}_j U_j^0$$

بسط رابطه (۳۹) برای $k=2$ تا $k=N$ به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\begin{cases} V_{2\min} - V_2^0 + b_\lambda(1) \le \bar{b}_1 U_1 \le V_{2\max} - V_2^0 + b_\lambda(1) \\ V_{3\min} - V_3^0 + b_\lambda(2) \le \bar{b}_1 U_1 + \bar{b}_2 U_2 \le V_{3\max} - V_3^0 + b_\lambda(2) \\ \vdots \\ V_{N\min} - V_N^0 + b_\lambda(N-1) \le \sum_{j=1}^{N-1} \bar{b}_j U_j \le V_{N\max} - V_N^0 + b_\lambda(N-1) \end{cases}$$

ناتساوی‌های بالا را می‌توان به فرم ماتریسی به صورت زیر بازنویسی نمود،

$$V_{\min} \le \bar{B}U \le V_{\max} \qquad (۴۰)$$

که در آن $\bar{B}$، $U$، $V_{\min}$ و $V_{\max}$ به ترتیب برابرند با،

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \cdots & \bar{b}_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \cdots & U_{N-1} \end{bmatrix}^T$$

$$V_{\min} = \begin{bmatrix} V_{2\min} - V_2^0 + b_\lambda(1) \\ V_{3\min} - V_3^0 + b_\lambda(2) \\ \vdots \\ V_{N\min} - V_N^0 + b_\lambda(N-1) \end{bmatrix}$$

$$V_{\max} = \begin{bmatrix} V_{2\max} - V_2^0 + b_\lambda(1) \\ V_{3\max} - V_3^0 + b_\lambda(2) \\ \vdots \\ V_{N\max} - V_N^0 + b_\lambda(N-1) \end{bmatrix}$$

با جایگذاری $U_k$ از رابطه (۱۷)، بردار $U$ به صورت زیر در خواهد آمد،

$$U = \begin{bmatrix} \Omega_1^T \Psi & \Omega_2^T \Psi & \cdots & \Omega_{N-1}^T \Psi \end{bmatrix}^T \qquad (۴۱)$$

رابطه (۴۱) را می‌توان به صورت خلاصه شده زیر نیز بیان کرد،

$$U = \Omega^T \Psi \qquad (۴۲)$$

که در آن $\Omega$ برابر است با،

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1^T & \Omega_2^T & \cdots & \Omega_{N-1}^T \end{bmatrix}$$

با جایگذاری رابطه بدست آمده در (۴۲)، ناتساوی (۴۰) به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$V_{\min} \le \bar{B}\Omega^T \Psi \le V_{\max} \qquad (۴۳)$$

در رابطه (۴۳) هر دو نوع ناتساوی (کوچکتر از و بزرگتر از) وجود دارد. می‌توان این رابطه را به ناتساوی "کوچکتر از" به صورت زیر تبدیل کرد،

$$\bar{\mathrm{B}}\Phi\Psi \le V_L \qquad (۴۴)$$

که در آن $\Phi$ و $V_L$ به صورت زیر تعریف می‌شوند،

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Omega^{\mathrm{T}} \\ -\Omega^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad V_L = \begin{bmatrix} V_{\max} \\ -V_{\min} \end{bmatrix}$$

بنابراین با اضافه شدن قید روی مقادیر متغیرهای حالت بدست آمده در رابطه بالا، صورت مسأله اصلی این مقاله به صورت زیر در خواهد آمد،



[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.11.8 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.2.117 ]

$$\begin{cases} \min & J = \frac{1}{2}\Psi^T \mathrm{P}\ \Psi \\ \text{s.t.} & \mathrm{d}Y_N = B_\lambda - B_\Omega \Psi \\ & \Phi\Psi \le U_L \\ & \bar{\mathrm{B}}\Phi\Psi \le V_L \end{cases}$$

که با ترکیب ناتساوی قید سیگنال کنترل و ناتساوی قید متغیرهای حالت در یک عبارت ناتساوی، می‌توان صورت مسأله اصلی این مقاله را به صورت ساده شده زیر بازنویسی کرد،

$$\begin{cases} \min & J = \frac{1}{2}\Psi^T \mathrm{P}\ \Psi \\ \text{s.t.} & \mathrm{d}Y_N = B_\lambda - B_\Omega \Psi \\ & \begin{bmatrix} I \\ \bar{B} \end{bmatrix} \Phi\Psi \le \begin{bmatrix} U_L \\ V_L \end{bmatrix} \end{cases} \qquad (۴۵)$$

در بخش‌های قبل مدلسازی ریاضی روش پیش‌بین مبتنی بر مدل با سیگنال کنترل انتشار یافته در حالت تعمیم یافته به منظور در نظر گرفتن قیود کنترل و حالت انجام شد. در بخش بعد روش حل این مسأله بررسی می‌شود.

## ۳- حل روش GMPSC مقید

برای حل مسأله بدست آمده در (۴۵) که در واقع یک مسأله بهینه‌سازی مقید زمان محدود است، روش‌های گوناگونی وجود دارد. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش SQP[1]، روش IP[2]، روش Active Set و روش برنامه‌ریزی مربعی هیلدرث[3] اشاره کرد. در این مقاله از الگوریتم هیلدرث جهت حل (۴۵) استفاده شده است. در کنترل پیش‌بین استفاده از الگوریتم هیلدرث جهت حل مسأله بهینه‌سازی برخط رایج است. ضمن اینکه این روش به دلیل حجم محاسبات کم برای پیاده‌سازی برخط بسیار مناسب است [۱۷]. در ادامه به صورت خلاصه نحوه عملکرد الگوریتم هیلدرث توضیح داده می‌شود.

روش هیلدرث الگوریتمی ساده برای حل مسأله دوگان برنامه‌ریزی مربعی است. در مسأله دوگان می‌توان به صورت سیستماتیک قیدهای غیرفعال را شناسایی کرد و سپس آن‌ها را از پاسخ حذف نمود. با فرض اینکه مسأله اولیه برنامه‌ریزی مربعی به صورت زیر باشد،

$$\begin{cases} \min & J = \frac{1}{2} X^T E X + X^T F \\ \text{s.t.} & MX \le \gamma \end{cases} \qquad (۴۶)$$

آنگاه اثبات می‌شود که مسأله دوگان به صورت زیر بدست خواهد آمد،

$$\begin{cases} \min & \bar{J} = \frac{1}{2}\lambda^T H \lambda + \lambda^T K + \frac{1}{2} F^T E^{-1} F \\ \text{s.t.} & \lambda \ge 0 \end{cases} \qquad (۴۷)$$

که در آن ماتریس‌های $H$ و $K$ به صورت زیر تعریف می‌شوند،

$$H = ME^{-1}M^T \quad , \quad K = \gamma + ME^{-1}F \qquad (۴۸)$$

لازم به ذکر است که حل مسأله دوگان به دلیل ساده‌تر بودن قیدها از حل مسأله اولیه بسیار راحت‌تر است [۱۷].

همانگونه که قبل‌تر گفته شد روش هیلدرث الگوریتمی ساده برای حل مسأله دوگان برنامه‌ریزی مربعی است. در این الگوریتم جهت حرکت در راستای بردارهای پایه‌ی $e_i = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1 \quad \cdots \quad 0]$ از فضای n بعدی است. در هر مرحله یکی از عناصر بردار $\lambda$ تغییر می‌کند. بدین گونه که با داشتن $\lambda \ge 0$ توجه به یک عنصر $\lambda_i$ معطوف می‌شود و فرض می‌گردد که تابع هدف فقط از این عنصر تشکیل شده است و با این فرض حداقل‌سازی تابع هدف انجام می‌شود. اگر این حداقل سازی نیازمند این بود که $\lambda_i < 0$ باشد، $\lambda_i$ مساوی صفر قرار داده می‌شود و در غیر اینصورت تابع هدف کاهش پیدا می‌کند و به عنصر بعدی ($\lambda_{i+1}$) مورد بررسی قرار می‌گیرد. اگر یک دور این کار برای تمامی عناصر $\lambda$ انجام شود، آنگاه الگوریتم هیلدرث یک گام به جلو رفته است و از $\lambda^m$ به $\lambda^{m+1}$ منتقل شده است که در آن $m$ شمارنده گام الگوریتم است. به طور خلاصه این روش می‌تواند به صورت زیر نمایش داده شود [۱۷]،

$$\lambda_i^{m+1} = \max\left(0, \omega_i^{m+1}\right) \qquad (۴۹)$$

که در آن $\omega_i^{m+1}$ برابر است با

$$\omega_i^{m+1} = \frac{-1}{h_{ii}}\left[ k_i + \sum_{j=1}^{i-1} h_{ij}\lambda_j^{m+1} + \sum_{j=i+1}^{n} h_{ij}\lambda_j^m \right] \qquad (۵۰)$$

در رابطه (۵۰) $h_{ij}$، $ij$امین عنصر از ماتریس $H$ و $k_i$، $i$امین عنصر از بردار $K$ می‌باشد.

## ٤- طراحی هدایت فاز میانی با استفاده از روش GMPSC مقید

[1] Sequential Quadratic Programming
[2] Interior Point
[3] Hildreth's Quadratic Programming Procedure



[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.11.8 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.2.117 ]

## ۴-۱ معادلات حرکت مدل جرم نقطه‌ای یک موشک پدافندی در فضای سه بعدی

معادلات حرکت مدل جرم نقطه‌ای یک موشک پدافندی در فضای سه بعدی را می‌توان به صورت زیر بیان نمود،

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= V(t)\cos\gamma(t)\cos\phi(t)\\
\dot{y}(t) &= V(t)\cos\gamma(t)\sin\phi(t)\\
\dot{z}(t) &= V(t)\sin\gamma(t)\\
\dot{V}(t) &= -\frac{D(t)}{m} - g\sin\gamma(t)\\
\dot{\phi}(t) &= \frac{a_y(t)}{V(t)\cos\gamma(t)}\\
\dot{\gamma}(t) &= \frac{a_z(t) - g\cos\gamma(t)}{V(t)}
\end{aligned} \qquad (۵۱)$$

که در این روابط $x$، $y$ و $z$ موقعیت موشک در دستگاه اینرسی می‌باشد. دستگاه اینرسی دستگاه چسبیده به پرتابگر و نقطه مرجع یک نقطه از پرتابگر در نظر گرفته شده است (این دستگاه در شکل ۱ نشان داده شده است). همچنین $V$، $D$، $g$ و $m$ به ترتیب نشان‌دهنده‌ی سرعت موشک، نیروی پسا، شتاب جاذبه و جرم موشک می‌باشند و $\phi$ و $\gamma$ مطابق شکل ۱زوایای مسیر پرواز موشک می‌باشند. همچنین $a_y$ و $a_z$ شتاب‌های جانبی موشک می‌باشند که با استفاده از روابط زیر با نیروهای برایِ وارد بر موشک ارتباط دارند،

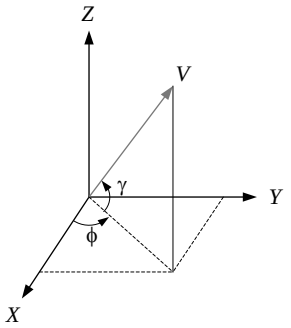
$$a_y = \frac{L_y}{m}$$
$$a_z = \frac{L_z}{m}$$

در مدل در نظر گرفته شده در رابطه (۵۱) فرض شده است که نیروی پیشران موشک برابر صفر است. در نظر گرفتن این فرض برای طراحی هدایت فاز میانی لازم نیست اما به دلیل اینکه معمولا در فاز میانی سوخت موشک به اتمام رسیده است در اینجا این فرض انجام شده است. با این فرض جرم موشک نیز با زمان تغییر نخواهد کرد.نیروهای برا و پسایِ موشک به ترتیب به صورت یک رابطه خطی و یک رابطه درجه دوم بر حسب زاویه حمله به صورت زیر در نظر گرفته شده است،

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C L_\alpha \alpha \qquad (۵۲)$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(CD_0 + KCL_\alpha^2\alpha^2\right) \qquad (۵۳)$$

که در آن $\rho$ چگالی هوا، $S$ سطح مقطع مرجع موشک، $CL_\alpha$ ضریب نیروی برا، $\alpha$ زاویه حمله، $CD_0$ ضریب نیروی پسا و $K$ ضریب پسایِ القایی است.




شکل۱: دستگاه اینرسی به کار رفته برای نوشتن معادلات حرکت موشک

در رابطه (۵۱) زمان به عنوان متغیر مستقل در معادلات حالت موشک در نظر گرفته شده است. بنابراین پیش‌بینی دقیق زمان نهایی برای انتشار حالت‌ها لازم است. این پیش‌بینی بسیار مشکل است اما می‌دانیم که در انتهای فاز میانی موشک باید به نقطه خاصی از فضا برسد. بنابراین می‌توان به جای زمان از یکی از متغیرهای مربوط به موقعیت موشک به عنوان متغیر مستقل استفاده کرد. اگر متغیر $x$ به عنوان متغیر مستقل انتخاب شود آنگاه معادلات سیستم در رابطه (۵۱) به صورت زیر در خواهد آمد،

$$\begin{aligned}
t'(x) &= \frac{1}{V(x)\cos\gamma(x)\cos\phi(x)}\\
y'(x) &= \tan\phi(x)\\
z'(x) &= \frac{\tan\gamma(x)}{\cos\phi(x)}\\
V'(x) &= -\frac{D(x) + mg\sin\gamma(x)}{mV(x)\cos\gamma(x)\cos\phi(x)}\\
\phi'(x) &= \frac{a_y(x)}{V^2(x)\cos^2\gamma(x)\cos\phi(x)}\\
\gamma'(x) &= \frac{a_z(x) - g\cos\gamma(x)}{V^2(x)\cos\gamma(x)\cos\phi(x)}
\end{aligned} \qquad (۵۴)$$

در روابط بالا علامت پرایم، بیان‌کننده مشتق نسبت به متغیر x است.

همان‌طور که قبل‌تر فرض شده بود، معادلات حالت سیستم باید در فضای گسسته بیان شوند. مدل بیان شده برای سیستم در رابطه (۵۴) را می‌توان به صورت زیر به صورت گسسته بیان نمود،

$$\begin{aligned}
t_{k+1} &= t_k + h\frac{1}{V_k\cos\gamma_k\cos\phi_k}\\
y_{k+1} &= y_k + h\tan\phi_k\\
z_{k+1} &= z_k + h\frac{\tan\gamma_k}{\cos\phi_k}\\
V_{k+1} &= V_k - h\frac{D_k + mg\sin\gamma_k}{mV_k\cos\gamma_k\cos\phi_k}\\
\phi_{k+1} &= \phi_k + h\frac{a_{yk}}{V_k^2\cos^2\gamma_k\cos\phi_k}\\
\gamma_{k+1} &= \gamma_k + h\frac{a_{zk} - g\cos\gamma_k}{V_k^2\cos\gamma_k\cos\phi_k}
\end{aligned} \qquad (۵۵)$$



[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.11.8 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.2.117 ]

در روابط بالا $h$ بیان‌کننده اندازه گام گسسته‌سازی است که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$h = \frac{x_d - x_1}{N-1} \qquad (۵۶)$$

که در آن $x_1$ و $x_d$ به ترتیب مقدار متغیر $x$ در گام اول ($k=1$) و گام نهایی ($k=N$) می‌باشند.

با مقایسه رابطه (۵۵) با رابطه (۱) داریم،

$$X_k = \begin{bmatrix} t_k & y_k & z_k & V_k & \phi_k & \gamma_k \end{bmatrix}^T \qquad (۵۷)$$

$$U_k = \begin{bmatrix} L_{yk} & L_{zk} \end{bmatrix}^T \qquad (۵۸)$$

$$F_k = \begin{bmatrix} t_k + h\dfrac{1}{V_k \cos\gamma_k \cos\phi_k} \\ y_k + h\tan\phi_k \\ z_k + h\dfrac{\tan\gamma_k}{\cos\phi_k} \\ V_k - h\dfrac{D_k + mg\sin\gamma_k}{mV_k\cos\gamma_k\cos\phi_k} \\ \phi_k + h\dfrac{a_{yk}}{V_k^2\cos^2\gamma_k\cos\phi_k} \\ \gamma_k + h\dfrac{a_{zk} - g\cos\gamma_k}{V_k^2\cos\gamma_k\cos\phi_k} \end{bmatrix} \qquad (۵۹)$$

## ۲-۴ انتخاب توابع ضربه زمان گسسته و لژاندر به عنوان توابع پایه در روش GMPSC مقید

همان‌طور که قبل‌تر در بخش ۲ نیز توضیح داده شد، مزیت روش GMPSC استفاده از توابع پایه متعامد برای بیان ورودی‌های کنترلی سیستم است. این کار باعث می‌شود حجم محاسبات که در پیاده‌سازی برخط بسیار حائز اهمیت است، به صورت چشمگیری کاهش یابد. در [۱۴] نتایج روش GMPSC یک بار با استفاده از توابع ضربه زمان گسسته و یک بار با استفاده از توابع متعامد لژاندر نشان داده شده است. همچنین در [۱۴] نشان داده شده است که روش GMPSC بر مبنای توابع ضربه زمان گسسته و روش MPSP، به ازای $N' = N-1$ کاملاً با هم یکسان هستند و هیچ گونه تفاوت ماهیتی ندارند. در حالیکه استفاده از توابع پایه لژاندر، حجم محاسبات روش GMPSC را نسبت به روش MPSP به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد. با توجه به این توضیحات در این مقاله نیز از توابع ضربه زمان گسسته و توابع متعامد لژاندر به عنوان توابع پایه در روش GMPSC مقید استفاده شده است. در ادامه نحوه تولید توابع متعامد لژاندر به صورت بازگشتی توضیح داده می‌شود.

در [۱۸] توابع متعامد لژاندر گسسته $P_m(k,N)$ به صورت عبارت صریح زیر داده شده است،

$$P_m(k,N) = \sum_{j=0}^{m} b(m,j)\frac{k^{(j)}}{N^{(j)}} \qquad (۶۰)$$

که در آن $b(m,j)$ برابر است با،

$$b(m,j) = (-1)^j \binom{m}{j}\binom{m+j}{j}$$

و $m = 0, 1, 2, \dots, N$ درجه تابع لژاندر را نشان می‌دهد. همچنین $\Gamma^{(j)}$ فاکتوریل مرتبه $j$ عبارت $\Gamma$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\Gamma^{(j)} = \Gamma(\Gamma-1)(\Gamma-2)\cdots(\Gamma-j+1)$$

توابع لژاندر که به صورت بالا تعریف شد در حوزه گسسته به ازای $k = 0, 1, 2, \dots, N$ متعامد هستند؛ یعنی می‌توان گفت،

$$\sum_{k=0}^{N} P_m(k,N)P_l(k,N) = 0 \quad \text{for } m \neq l \qquad (۶۱)$$

برای تولید توابع لژاندر می‌توان مستقیماً از رابطه (۶۰) استفاده کرد. اما این روش مستقیم نیازمند حجم محاسبات زیادی است. برای این منظور می‌توان از رابطه بازگشتی زیر که در [۱۸] ارائه شده است و نیازمند حجم محاسبات کمتری است استفاده کرد،

$$\begin{aligned}&(m+1)(N-m)P_{m+1}(k,N) = \\ &(2m+1)(N-2k)P_m(k,N) \\ &-m(N+m+1)P_{m-1}(k,N)\end{aligned} \qquad (۶۲)$$

که این رابطه برای $m = 0, 1, 2, \dots, N$ و برای شرایط اولیه زیر برقرار است،

$$P_0(k,N) = 1$$
$$P_1(k,N) = \frac{N-2k}{N}$$



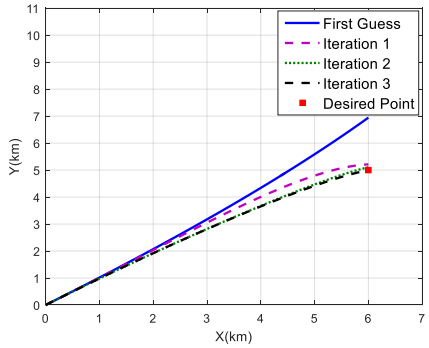
[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.11.8 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.2.117 ]

## ۴-۳ طراحی هدات بهینه فاز میانی با استفاده از روش GMPSC مقید به صورت حلقه باز

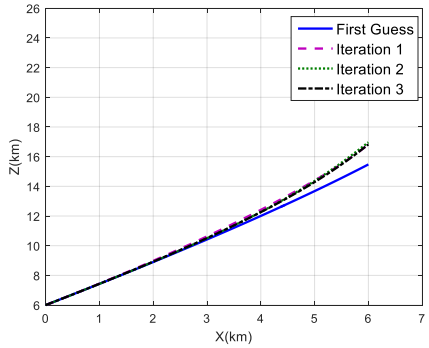
در این بخش عملکرد روش GMPSC مقید به صورت حلقه باز با استفاده از شبیه‌سازی بررسی می‌شود. حلقه باز بودن در این بخش به این معناست که سیگنال کنترل بهینه برای سیستم مورد نظر بعد از چند تکرار جهت تصحیح حدس اولیه، برای کل مسیر مورد نظر محاسبه شده و تماماً به سیستم مورد نظر اعمال می‌شود.برای این منظور از مدل ریاضی ارائه شده در بخش ۴-۱ استفاده می‌شود.همچنین تابع هزینه مطابق رابطه (۲۰) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود،

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\begin{bmatrix} a_{yk} & a_{zk}\end{bmatrix} R \begin{bmatrix} a_{yk} \\ a_{zk}\end{bmatrix}$$

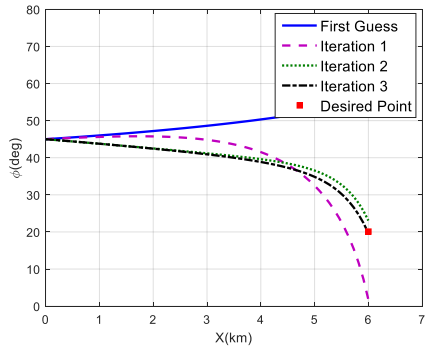
که در این مقاله ماتریس $R$ در رابطه بالا، به صورت ماتریس همانی در نظر گرفته شده است. شرایط اولیه و شرایط نهایی مطلوب در نظر گرفته شده برای موشک در جدول ۱ نشان داده شده است. همچنین پارامترهای فیزیکی در نظر گرفته شده برای موشک در جدول ۲ بیان شده‌اند. همان‌گونه که در جدول ۱ مشاهده می‌شود برای چهار متغیر حالت ( $x$ ، $y$ ، $\phi$ و $\gamma$ ) شرایط نهایی مطلوب به صورت کاملاً دقیق مشخص شده است و برای متغیر حالت $z$ ، شرایط نهایی مطلوب به صورت یک محدوده کمینه و بیشینه مطلوب تعیین شده است. به عبارت دیگر برای چهار متغیر حالت ( $x$ ، $y$ ، $\phi$ و $\gamma$ )قیود سخت نهایی و برای متغیر حالت $z$ ، قید نرم نهایی در نظر گرفته شده است. همچنین برای متغیر حالت $V$ مقدار نهایی مشخصی تعیین نشده است. در مثال اول فرض می‌کنیم هیچ‌گونه محدودیتی روی اندازه سیگنال‌های شتاب وجود ندارد. همان‌طور که بیان شد سیگنال کنترل بهینه برای سیستم مورد نظر بعد از چند تکرار جهت تصحیح حدس اولیه بدست می‌آید. در شکل ۲ روند همگرایی موقعیت و زوایای مسیر پرواز موشک به ازای سه تکرار نشان داده شده است. همچنین در شکل ۳ این موضوع برای فرامین شتاب جانبی موشک نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود هرچه تعداد تکرارها افزایش پیدا کند، دقت پاسخ بدست آمده نیز بیشتر می‌شود. همچنین مشاهده می‌شود که به ازای سه تکرار، دقت جواب‌های بدست آمده در ارضای قیود نهایی قابل قبول می‌باشد. در ادامه این بخش به جهت جلوگیری از شلوغ شدن شکل‌های ترسیم شده، تنها نتایج تکرار آخر نشان داده شده است.



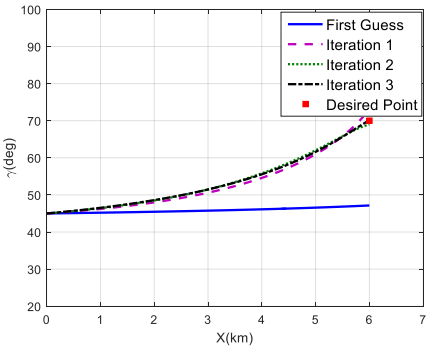

۲-الف)




۲-ب)




۲-ج)




۲-د)

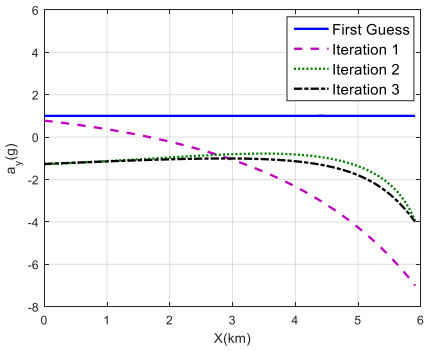
شکل۲: موقعیت موشک و زوایای مسیر پرواز آن به ازای تکرارهای مختلف روش GMPSC مقید به صورت حلقه با



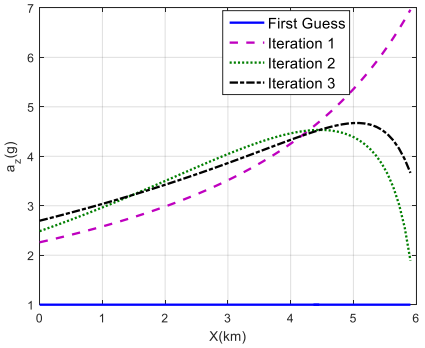
[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.11.8 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.2.117 ]

جدول ۱: شرایط اولیه و شرایط نهایی مطلوب موشک

| | موقعیت $X$ (km) | موقعیت $Y$ (km) | موقعیت $Z$ (km) | سرعت $V$(m/s) | $\phi$(deg) | $\gamma$ (deg) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| شرایط اولیه | 0 | 0 | 6 | 1300 | 45 | 45 |
| شرایط نهایی مطلوب | 6 | 5 | $10 < z < 18$ | – | 20 | 70 |




۳-الف)




۳-ب)

شکل۳: فرامین شتاب جانبی موشک به ازای تکرارهای مختلف روش GMPSC مقید به صورت حلقه باز

در شکل ۴ موقعیت موشک و زوایای مسیر پرواز آن بدست آمده با استفاده از روش GMPSC مقید بر مبنای توابع ضربه زمان گسسته نشان داده موشک برای هر سه حالت در صفحه $X-Y$ بدست آمده است.در شکل ۴-ب مشاهده می‌شود $z$ موشک در لحظه نهایی در حالت قید نرم نهایی،

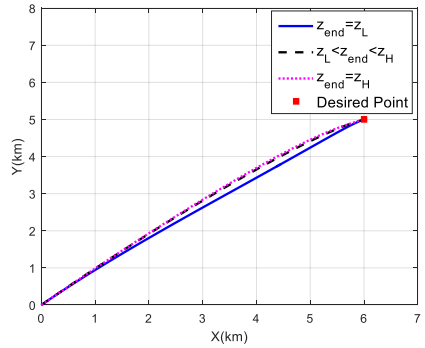
جدول ۲: پارامترهای فیزیکی موشک ([۱۹])

| پارامتر | توصیف | مقدار | واحد |
|---|---|---|---|
| $\rho$ | چگالی هوا | 0.7 | $\mathrm{kg/m^3}$ |
| $K$ | ضریب پسای القایی | 0.01 | – |
| $S$ | سطح مقطع مرجع | 0.02 | $\mathrm{m^2}$ |
| $CD_0$ | ضریب نیروی پسای صفر | 0.4 | – |
| $CL_\alpha$ | ضریب نیروی برا | 7 | $\mathrm{rad^{-1}}$ |
| $m$ | جرم موشک | 100 | kg |

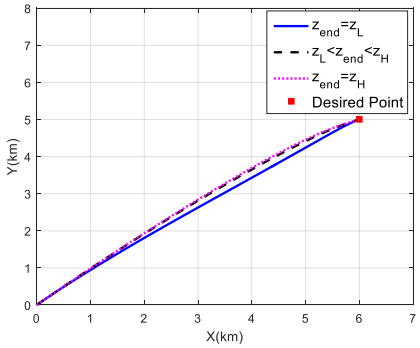
شده است. همچنین در شکل ۵ فرامین شتاب جانبی موشک در راستای افقی ( $a_y$ ) و عمودی ( $a_z$ ) ترسیم شده‌اند. جهت مقایسه بهتر در هریک از شکل‌های ترسیم شده، نتایج بدست آمده در حالتی که بر روی $z$ قیود سخت نهایی وجود دارد نیز رسم شده است. به عبارت دیگر در شکل‌های۴ و ۵ منحنی مشکی (خط‌چین)مربوط به حالتی است که بر روی $z$ قید نرم نهایی در نظر گرفته شده است. منحنی آبی (توپر) حالتی است که بر روی $z$ قید سخت نهایی به صورت $z_{\mathrm{end}} = 10\mathrm{km}$ در نظر گرفته شده است و منحنی بنفش (نقطه‌چین) مربوط به حالتی است که بر روی $z$ قید سخت نهایی به صورت $z_{\mathrm{end}} = 18\mathrm{km}$ در نظر گرفته شده است. همان‌طور که در شکل ۴-الف مشاهده می‌شود شرایط نهایی مطلوب برای موقعیت در محدوده مطلوب تعیین شده در فرض مسأله قرار گرفته است و در حالت‌های قید سخت نهایی به شرایط نهایی مطلوب رسیده است.در شکل‌های ۴-ج و ۴-د نیز زوایای مسیر پرواز موشک ترسیم شده‌اند.در این دو شکل نیز مشاهده می‌شود که مقادیر نهایی مطلوب $\phi$ و $\gamma$ نیز به مقادیر مطلوب تعیین شده در فرض مسأله همگرا شده‌اند. همچنین در شکل ۵ فرامین شتاب جانبی موشک در راستای افقی ( $a_y$ ) و عمودی ( $a_z$ ) ترسیم شده‌اند. با توجه به اینکه در فرض اول هیچ گونه محدودیتی بر روی مقادیر فرمان شتاب موشک اعمال نشده است مشاهده می‌شود که در شکل‌های ۴-الف و ۴-ب، فرامین شتاب جانبی بدون هیچ گونه قید یا محدودیتی بدست آمده‌اند.



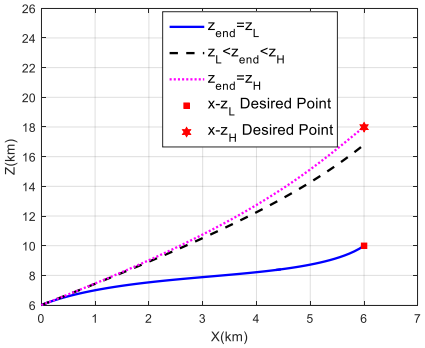
[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.11.8 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.2.117 ]



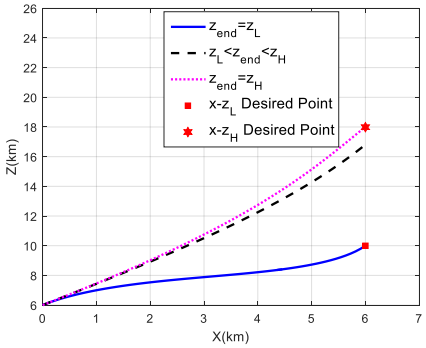

۴-الف)




۵-الف)

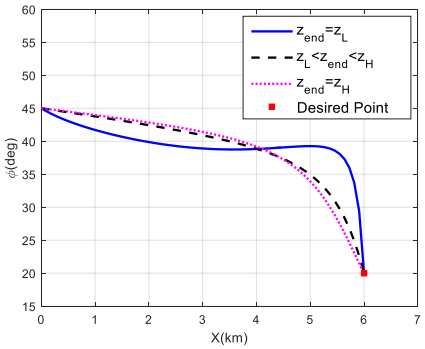



۴-ب)

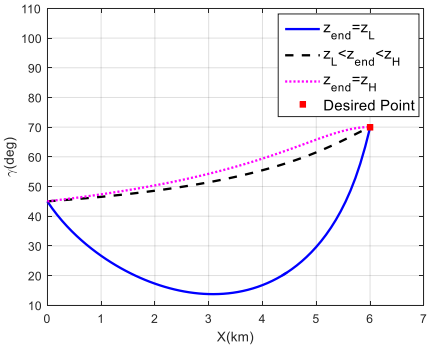



۵-ب)

شکل۵: مقایسه فرامین شتاب جانبی موشک به ازای قیود نرم و سخت روی z




۴-ج)




۴-د)

شکل۴: مقایسه موقعیت موشک و زوایای مسیر پرواز آن به ازای قیود نرم و سخت روی z

در حالت دوم فرض وجود محدویت بر روی اندازه سیگنال کنترل بررسی می‌شود. برای این منظور مسیر پروازی موشک از منظر موقعیت $x$ به سه بخش کاملاً مساوی تقسیم می‌شود و فرض می‌گردد که محدودیت فرمان شتاب $a_y$ در هریک از این سه بخش به صورت زیر باشد:

$$\begin{cases} |a_y| \le 1g & 0 \le x \le 2 \\ |a_y| \le 2g & 2 \le x \le 4 \\ |a_y| \le 3g & 4 \le x \le 6 \end{cases} \qquad (۶۳)$$

همچنین فرض می‌شود محدودیت فرمان شتاب $a_z$ در هریک از این سه بخش به صورت زیر باشد:

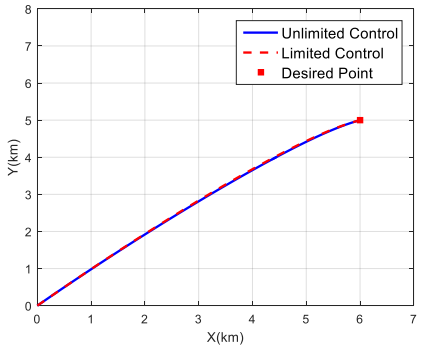
$$\begin{cases} |a_z| \le 3g & 0 \le x \le 2 \\ |a_z| \le 4g & 2 \le x \le 4 \\ |a_z| \le 5g & 4 \le x \le 6 \end{cases} \qquad (۶۴)$$

همچنین سایر فرضیات روی مقادیر اولیه و مقادیر نهایی مطلوب متغیرهای حالت مطابق جدول ۱ در نظر گرفته می‌شود. با حل این مسأله با استفاده از روش GMPSC مقید بر مبنای توابع ضربه زمان گسسته، نتایج بدست آمده در شکل‌های ۶ و ۷ نمایش داده شده است. جهت مقایسه، نتایج بدست آمده در حالت وجود قید روی اندازه سیگنال کنترل با نتایج حالت بدون وجود قید روی اندازه سیگنال کنترل مقایسه شده است. در شکل ۶ مشاهده

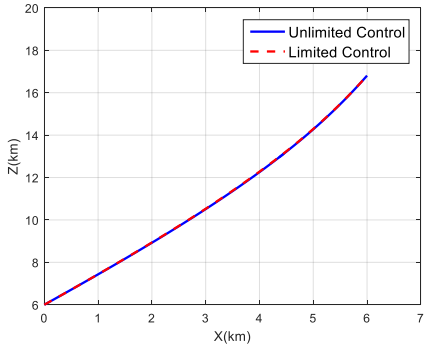


[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.11.8 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.2.117 ]

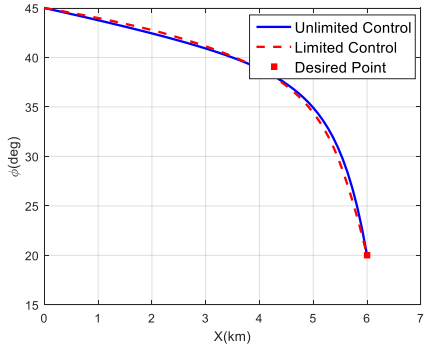
می‌شود که شرایط نهایی مطلوب متغیرهای حالت $x$، $y$، $\phi$ و $\gamma$ مطابق آنچه در جدول ۱ قید شده است، حاصل گردیده است.همچنین مقدار نهایی متغیر حالت $z$ نیز در محدوده $[10,18]\text{km}$ قرار گرفته است.در شکل ۷ فرامین شتاب جانبی موشک ترسیم شده است. همان‌طور که در این شکل نیز مشاهده می‌شود فرامین شتاب بدست آمده در هریک از سه بخش مسیر در محدودیت‌های در نظر گرفته شده در (۶۰) و (۶۱) صدق می‌کنند.



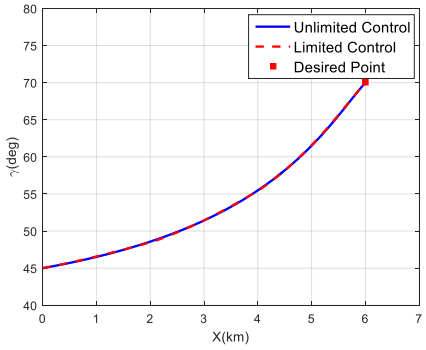

۶-الف)




۶-ب)

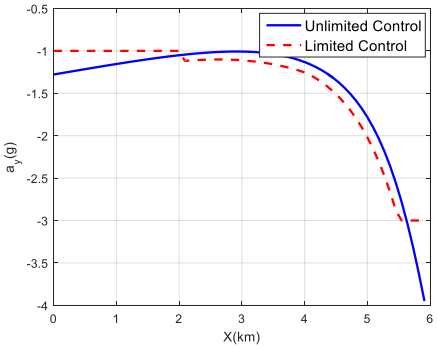



۶-ج)

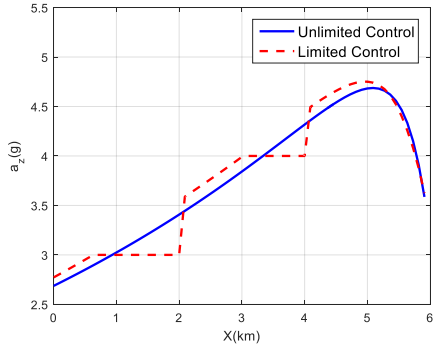



۶-د)

شکل۶:مقایسه موقعیت موشک و زوایای مسیر پرواز آن به ازای وجود یا عدم وجود محدودیت روی اندازه سیگنال کنترل




۷-الف)




۷-ب)

شکل۷:مقایسه فرامین شتاب جانبی موشک به ازای وجود یا عدم وجود محدودیت روی اندازه سیگنال کنترل

در دو حالت قبل نتایج با استفاده از روش GMPSC مقید و بر مبنای توابع ضربه زمان گسسته حاصل شد. در بخش ۴-۲ توضیح داده شد که روش GMPSC بر مبنای توابع ضربه زمان گسسته و روش MPSP به ازای $N'=N-1$ کاملاً با هم یکسان هستند و هیچ‌گونه تفاوت ماهیتی با هم ندارند. در حالیکه استفاده از توابع پایه لژاندر، حجم محاسبات روش

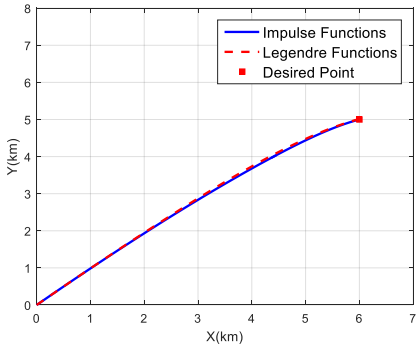


[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.11.8 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.2.117 ]

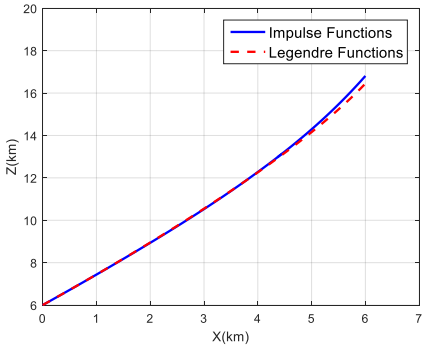
GMPSC را نسبت به روش MPSP به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد. در ادامه صورت مسأله حالت دوم را یک بار با استفاده از روش GMPSC

مقید بر مبنای توابع ضربه زمان گسسته و یک بار نیز با استفاده از روش GMPSC مقید بر مبنای توابع لژاندر حل می‌شود.

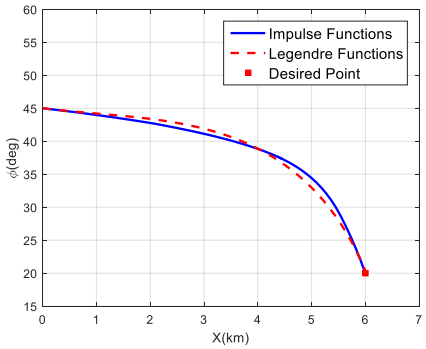
نتایج بدست آمده از این دو روش در شکل‌های ۸ و ۹ نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود در هر دو حالت قیود نهایی سخت روی متغیرهای حالت ( $x$ ، $y$ ، $\phi$ و $\gamma$ )، قید نرم نهایی روی $z$ و قیود میانی در نظر گرفته شده روی اندازه سیگنال کنترل برآورده شده‌اند. البته در حالتی که از توابع لژاندر به عنوان توابع پایه استفاده شده است مشاهده می‌شود که قیود نهایی سخت به خصوص روی متغیر حالت $\gamma$ کمی با خطا ارضا شده است. مقایسه مقدار خطای ایجاد شده در ارضای شرایط مطلوب نهایی در روش GMPSC مقید در دو حالت توابع ضربه و توابع لژاندر در جدول ۳ نشان داده شده است. با توجه به نتایج جدول ۳ مشاهده می‌شود در حالتی که از توابع لژاندر در روش GMPSC مقید استفاده شده است، در ارضای قیود نهایی خطای بیشتری نسبت به حالتی که از توابع ضربه استفاده شده، ایجاد شده است. جهت بررسی علت این موضوع باید توجه شود که در شبیه‌سازی انجام شده با استفاده از روش GMPSC مقید بر مبنای توابع لژاندر، از چهار تابع لژاندر برای انتشار سیگنال کنترل استفاده شده است ( $m = 0,1,2,3$ مطابق رابطه (۶۰)). به عبارت دیگر فرامین هدایت از ترکیب خطی چهار تابع هموار لژاندر با ضرایب مختلف حاصل شده است. بنابراین بهترین فرامین هدایتی که الگوریتم هدایت توانسته است با استفاده از این توابع لژاندر برای سیستم تولید کند به گونه‌ای که قیود جدول (۱) و محدودیت‌های (۶۳) و (۶۴) برآورده شوند، مطابق شکل ۹ بدست آمده‌اند. لازم به ذکر است که با افزایش تعداد توابع لژاندر جهت انتشار سیگنال کنترل، نتایج بدست آمده به نتایج روش GMPSC مقید بر مبنای توابع ضربه میل می‌کند که البته با افزایش حجم محاسبات همراه است. همچنین دقت نمایید که در روش GMPSC مقید بر مبنای توابع ضربه زمان گسسته، $N' = 60$ در نظر گرفته شده است. این در حالی است که در روش GMPSC مقید بر مبنای توابع لژاندر $N' = 4$ انتخاب شده است. به عبارت دیگر در حالتی که از توابع لژاندر به عنوان توابع پایه استفاده شده است نسبت به حالتی که توابع ضربه زمان گسسته به عنوان توابع پایه انتخاب شده است، حجم محاسبات پانزده برابر کاهش پیدا کرده است که این موضوع باعث کاهش چشمگیر حجم محاسبات در روش GMPSC مقید بر مبنای توابع لژاندر جهت پیاده‌سازی برخط می‌گردد.



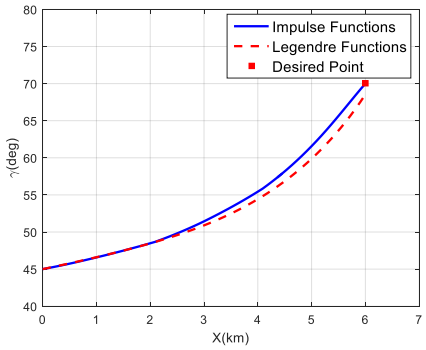

۸-الف)




۸-ب)




۸-ج)




۸-د)

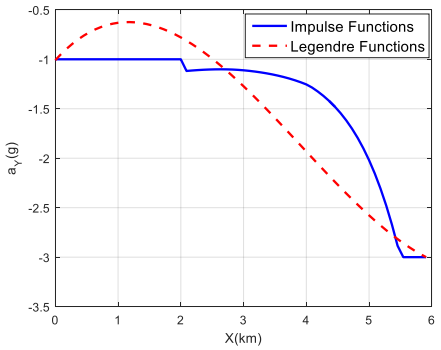
شکل۸:مقایسه موقعیت موشک و زوایای مسیر پرواز آن به ازای توابع ضربه و توابع لژاندر در روش GMPSC مقید



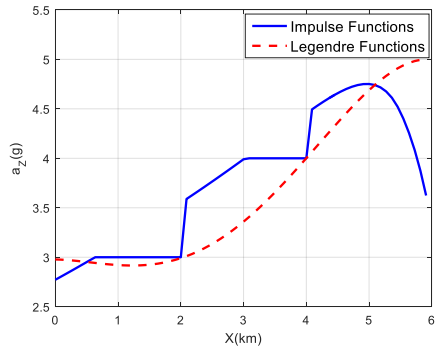
[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.11.8 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.2.117 ]

جدول ۳: مقایسه مقدار خطای ایجاد شده در ارضای شرایط مطلوب نهایی در روش GMPSC مقید در دو حالت توابع ضربه و توابع لژاندر

| | موقعیت $X$ (km) | موقعیت $Y$ (km) | $\phi$(deg) | $\gamma$ (deg) |
|---|---|---|---|---|
| شرایط اولیه | 0 | 0 | 0.02 | 0.01 |
| شرایط نهایی مطلوب | 0 | 13 | 0.38 | 1.46 |




۹-الف)




۹-ب)

شکل۹:مقایسه فرامین شتاب جانبی موشک به ازای توابع ضربه و توابع لژاندر در روش GMPSC مقید

## ۴-۴ طراحی هدایت بهینه فاز میانی با استفاده از روش GMPSC مقید به صورت حلقه بسته

در این بخش عملکرد روش GMPSC مقید به صورت حلقه بسته بررسی می‌شود. جهت اجرای این روش به صورت حلقه بسته مشابه روش‌های مرسوم کنترل پیش‌بین، باید در هر مرحله از اجرا و با توجه به شرایط فعلی سیستم وشرایط مطلوب نهایی، سیگنال کنترل بهینه محاسبه شده و اولین مقدار از سیگنال کنترل بهینه بدست آمده به سیستم اعمال شود. سپس سیستم با این مقدار ورودی یک گام به جلو رفته و دوباره در گام بعد این فرایند تکرار شود. نکته مهم در اجرای حلقه بسته روش GMPSC مقید حجم محاسبات و مدت زمانی است که طول می‌کشد تا در هر مرحله سیگنال کنترل بهینه به روز رسانی شود. به عبارت دیگر هرچه حجم محاسبات و در نتیجه زمان لازم برای انجام محاسبات کمتر باشد، این امکان وجود دارد که با فرکانس بالاتری بتوان سیگنال کنترل را به روز رسانی نمود. در ادامه عملکرد روش GMPSC مقید به صورت حلقه بسته در طراحی هدایت بهینه فاز میانی بررسی می‌شود.

شرایط اولیه و نهایی موشک جهت انجام شبیه‌سازی فاز میانی به صورت حلقه بسته با استفاده از روش GMPSC مقید مطابق جدول ۴ انتخاب شده است. در شکل ۱۰ نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی حلقه بسته روش GMPSC مقید به ازای سه حالت مختلف زیر نشان داده شده است (مطابق جدول ۵)،

**حالت اول**- طراحی بدون در نظر گرفتن محدودیت‌ها روی اندازه سیگنال کنترلی و شبیه‌سازی بدون در نظر گرفتن محدودیت‌ها روی اندازه سیگنال کنترلی

**حالت دوم**- طراحی بدون در نظر گرفتن محدودیت‌ها روی اندازه سیگنال کنترلی و شبیه‌سازی با در نظر گرفتن محدودیت‌ها روی اندازه سیگنال کنترلی

**حالت سوم**- طراحی با در نظر گرفتن محدودیت‌ها روی اندازه سیگنال کنترلی و شبیه‌سازی با در نظر گرفتن محدودیت‌ها روی اندازه سیگنال کنترلی

با توجه به اینکه سناریوی جدول ۴ به گونه‌ای انتخاب شده است که حرکت موشک تماماً در صفحه $X-Z$ قرار داشته باشد بنابراین از رسم متغیر $Y$ و سیگنال هدایت $a_y$ به دلیل صفر بودن در شکل ۱۰ صرف نظر شده است. در این شکل منحنی آبی رنگ (توپر) حالتی است که در آن هیچ‌گونه محدودیتی روی اندازه سیگنال کنترل در روش GMPSC مقید وجود نداشته است. مشاهده می‌شود که قیود نهایی در نظر گرفته شده در جدول ۴ به خوبی برآورده شده‌اند. منحنی سبز رنگ (خط‌چین) حالتی است که در آن محدودیت تنها به هنگام پیاده‌سازی روش اعمال شده است و در هنگام طراحی فرض بر این بوده است که هیچ‌گونه محدودیتی وجود ندارد. اندازه محدودیت در نظر گرفته شده به صورت زیر است،

$$|a_z| \le 2g \qquad (۶۵)$$

با توجه به منحنی سبز رنگ (خط‌چین) مشاهده می‌شود که به دلیل در نظر گرفتن اشباع شتاب در پیاده‌سازی، در $\gamma$ نهایی نسبت به مقدار مطلوب



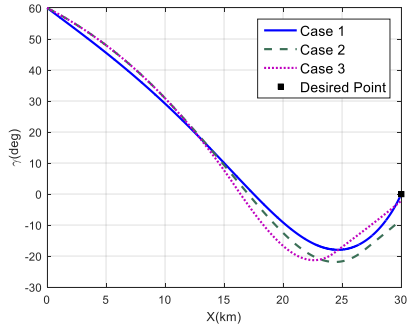
[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.11.8 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.2.117 ]

تعیین شده ۱۰ درجه خطا ایجاد شده است. در نهایت منحنی بنفش رنگ (نقطه‌چین) حالتی است که در آن محدودیت روی اندازه سیگنال کنترل (رابطه (۶۵)) هم در طراحی و هم در پیاده‌سازی در نظر گرفته شده است. در این حالت خطای ایجاد شده در $\gamma$ نهایی نسبت به مقدار مطلوب تعیین شده حدود ۲ درجه است که نسبت به حالت دوم بسیار کمتر شده است.

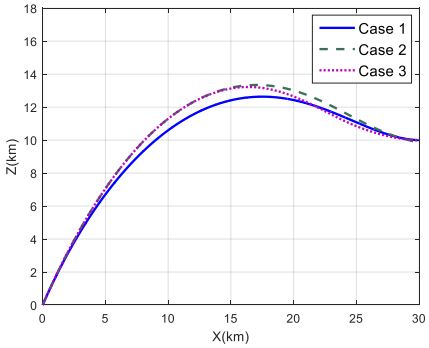
لازم به ذکر است در حالت سوم که در آن محدودیت روی اندازه سیگنال کنترل هم در طراحی و هم در پیاده‌سازی در نظر گرفته شده است، ۲ درجه خطا در $\gamma$ نهایی نسبت به مقدار مطلوب ایجاد شده است. علت اصلی بروز این خطا، سطح اشباعی است که برای فرمان هدایت در رابطه (۶۵) در نظر گرفته شده است. در شکل ۱۰ نیز مشاهده می‌شود که در حالتی که هیچ‌گونه محدودیتی در اندازه شتاب وجود ندارد (منحنی آبی رنگ و توپر)، $\gamma$ نهایی با دقت بسیار خوبی به مقدار مطلوب نهایی در نظر گرفته شده رسیده است. جهت بررسی دقیق‌تر این موضوع بار دیگر حالت سوم جدول ۵ را این بار به ازای محدودیت زیر شبیه‌سازی کردیم،

$$|a_z| \le 2.5g \qquad (۶۶)$$

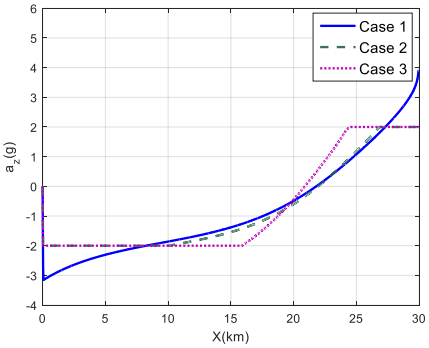
مقایسه نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی روش GMPSC مقید به ازای دو صورت مختلف از محدودیت روی اندازه سیگنال کنترل (روابط (۶۵) و (۶۶)) در شکل ۱۱ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با بزرگتر شدن محدودیت در اندازه سیگنال کنترل، خطای ایجاد شده در $\gamma$ نهایی نسبت به مقدار مطلوب تعیین شده بسیار کمتر شده است (حدود ۰.۵ درجه).



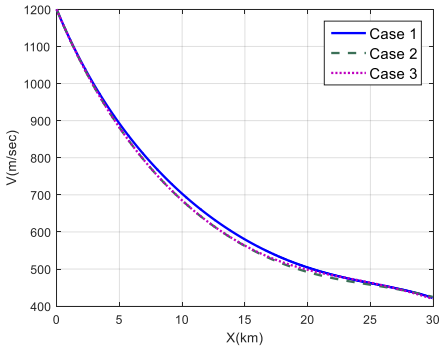

۱۰-الف)




۱۰-ب)




۱۰-ج)




۱۰-د)

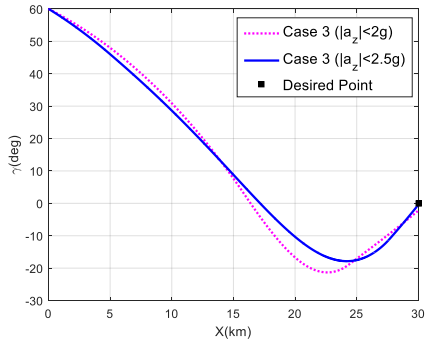
شکل ۱۰:نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی حلقه بسته روش GMPSC مقید در سه حالت مختلف

جدول ۴: شرایط اولیه و شرایط نهایی مطلوب موشک جهت بررسی روش GMPSC مقید به صورت حلقه بسته

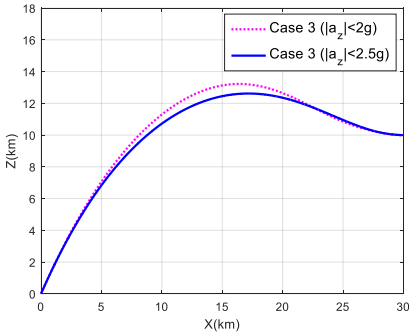
| | موقعیت $X$ (km) | موقعیت $Y$ (km) | موقعیت $Z$ (km) | سرعت $V$(m/s) | $\phi$(deg) | $\gamma$ (deg) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| شرایط اولیه | 0 | 0 | 0 | 1200 | 0 | 60 |
| شرایط نهایی مطلوب | 30 | 0 | $8 < z < 10$ | – | 0 | 0 |



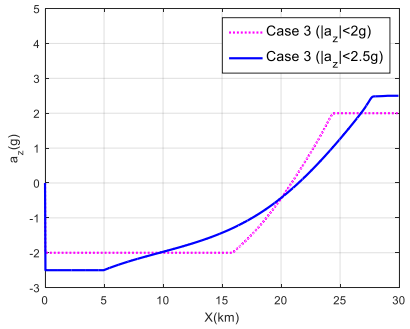
[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.11.8 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.2.117 ]



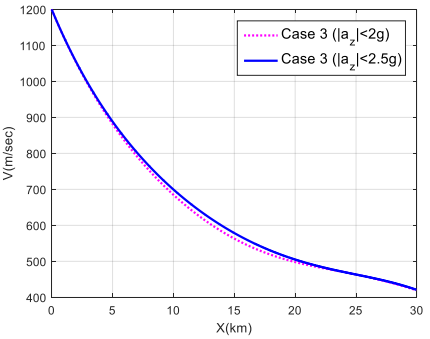

۱۱-الف)




۱۱-ب)




۱۱-ج)




۱۱-د)

شکل ۱۱:نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی حلقه بسته روش GMPSC مقید به ازای محدودیت‌های متفاوت سیگنال کنترل

جدول ۵: حالت‌های مختلف در نظر گرفته شده جهت بررسی روش GMPSC مقید

| | در نظر گرفتن محدودیت در اندازه سیگنال کنترل | |
|---|---|---|
| | طراحی | پیاده‌سازی |
| حالت اول | × | × |
| حالت دوم | × | ✓ |
| حالت سوم | ✓ | ✓ |

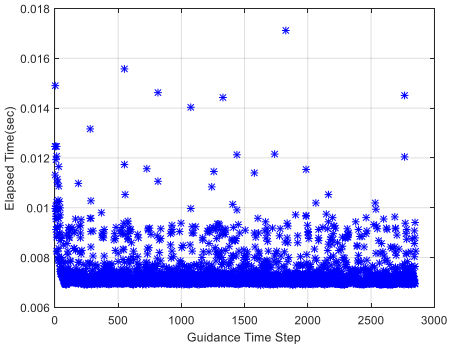
در ارتباط با نحوه انجام شدن شبیه‌سازی GMPSC مقید حلقه بسته و نتایج بدست آمده در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ ذکر چند نکته ضروری است. نکته اول اینکه معادلات موشک با فرکانس یک کیلو هرتز (زمان نمونه برداری یک میلی ثانیه) اجرا شده‌اند. همچنین فرکانس به روز رسانی سیگنال هدایت ۵۰ هرتز انتخاب شده است. به عبارت دیگر هر ۲۰ میلی ثانیه یکبار سیگنال هدایت به روز رسانی می‌شود. نکته دیگر اینکه از توابع پایه لژاندر با $N'=4$ برای شبیه‌سازی روش GMPSC مقید استفاده شده است. همچنین جهت کاهش حجم محاسبات در هر گام فقط با یکبار تکرار، سیگنال کنترل بهبود داده شده است. جهت توضیح بیشتر نکته آخر یادآوری می‌شود که همانگونه که قبلا نیز توضیح داده شده است روش GMPSC مقید همواره از یک حدس اولیه برای رسیدن به سیگنال کنترل بهینه شروع می‌شود و طی یک فرایند تکراری سیگنال کنترل بهبود داده می‌شود تا به پاسخ بهینه همگرا شود. هر چه تعداد تکرارها بیشتر باشد دقت پاسخ‌های بدست آمده نیز بیشتر می‌شود. هرچند که افزایش تکرارها دقت پاسخ بدست آمده را افزایش می‌دهد اما متقابلا حجم محاسبات و در نتیجه زمان لازم برای انجام محاسبات نیز افزایش پیدا می‌کند که این موضوع جهت پیاده‌سازی برخط هدایت چندان مناسب نیست.

در شکل ۱۲-الف مدت زمانی که صرف شده است تا محاسبات هدایت با استفاده از روش GMPSC مقید در هر گام انجام شود، بدست آمده است. این مقادیر با استفاده از یک کامپیوتر خانگی تحت ویندوز با مشخصات RAM 4GB و Processor Core i3 و با استفاده از نرم‌افزار متلب نسخه R2015b بدست آمده است. همچنین در شکل ۱۲-ب نحوه توزیع مدت زمان صرف شده نشان داده شده است. همان‌گونه که در این دو شکل مشاهده می‌شود مدت زمان لازم برای انجام محاسبات فرمان هدایت همواره کمتر از ۲۰ میلی ثانیه بوده است و به طور میانگین مدت زمان صرف شده در همه گام‌ها حدود ۷ میلی ثانیه بوده است. بنابراین فرکانس ۵۰ هرتز انتخاب شده برای به روز رسانی سیگنال هدایت جهت شبیه‌سازی‌های انجام شده در این بخش مناسب بوده است. همچنین با توجه به اینکه میانگین مدت زمان صرف شده در همه گام‌ها حدود ۷ میلی ثانیه

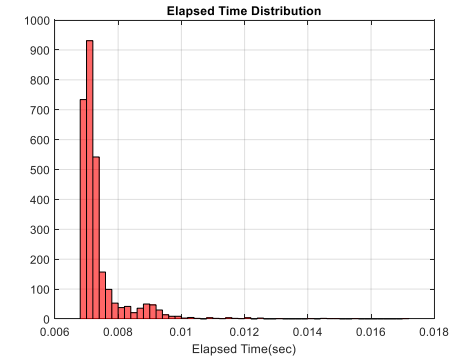


[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.11.8 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.2.117 ]

بوده است و با توجه به اینکه زمان صرف شده در حدود ۹۹ درصد گام‌ها زیر ۱۰ میلی ثانیه بوده است بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که گام‌هایی که زمان صرف شده در آن‌ها بیشتر از ۱۰ میلی ثانیه بوده است احتمالا به علت عملکرد ویندوز باشد و در نتیجه فرکانس به روز رسانی سیگنال هدایت تا ۱۰۰ هرتز (یا هر ۱۰ میلی ثانیه یکبار) نیز قابل افزایش است.




۱۲-الف)




۱۲-ب)

شکل۱۲:الف) زمان صرف شده در هر گام برای انجام محاسبات هدایت ب) نحوه توزیع زمان صرف شده در هر گام برای انجام محاسبات هدایت

## ٤- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله روش GMPSC به منظور در نظر گرفتن قید روی اندازه سیگنال کنترل و قید روی مقادیر متغیرهای حالت در هر لحظه توسعه داده شد. این روش که در این مقاله به نام روش GMPSC مقید نامگذاری گردید همه امتیازات روش GMPSC را داراست. از جمله این امتیازات می‌توان به حجم محاسبات کم به دلیل بهره‌گیری از توابع پایه متعامد اشاره کرد که این موضوع امکان پیاده‌سازی برخط را در این روش فراهم می‌کند. همچنین استفاده از توابع پایه پیوسته و هموار، تضمین می‌کند سیگنال کنترل نیز پیوسته و هموار باقی بماند. علاوه بر این روش GMPSC مقید قادر است اثر قید روی حالت‌های سیستم و سیگنال کنترل را در هر لحظه از زمان در نظر بگیرد. نشان داده شد که روش GMPSC مقید به یک مسأله بهینه‌سازی مقید منجر می‌شود. در این مقاله از الگوریتم هیلدرث که یک الگوریتم ساده برای حل مسأله دوگان برنامه‌ریزی مربعی است، جهت حل روش GMPSC مقید استفاده شد. جهت ارزیابی روش GMPSC مقید، از این روش برای حل یک مسأله هدایت فاز میانی مقید به صورت حلقه باز و حلقه بسته استفاده گردید. در حالت حلقه باز ابتدا روند همگرایی نتایج روش GMPSC مقیدبه پاسخ بهینه در اثر تکرارهای مختلف نشان داده شد.سپس قیدهای مسأله روی موقعیت نهایی موشک در صفحه $X-Y$ و وضعیت بردار سرعت موشک در لحظه نهایی در نظر گرفته شد. همچنین فرض شد که مقدار نهایی $z$ موشک بین یک ارتفاع حداقل و یک ارتفاع حداکثر قرار گیرد. در مثال بعد همین مسأله با حضور قید روی اندازه فرامین شتاب موشک بحث و بررسی شد. در هر دو مثال روش GMPSC مقید توانست فرامین بهینه جهت هدایت موشک را تولید نماید به گونه‌ای که همه قیود در نظر گرفته شده ارضا شوند. در مثال سوم نتایج روش GMPSC مقید بر مبنای توابع ضربه زمان گسسته با نتایج حاصل از این روش بر مبنای توابع لژاندر مقایسه شد. مشاهده شد که در حالتی که از توابع لژاندر به عنوان توابع پایه استفاده شده است نسبت به حالتی که توابع ضربه زمان گسسته به عنوان توابع پایه انتخاب شده است، قیود نهایی اندکی دچار خطا شده است اما حجم محاسبات پانزده برابر کاهش پیدا کرده است که این موضوع جهت پیاده‌سازی برخط بسیار مهم است. در قسمت بعد مسأله هدایت فاز میانی با استفاده از روش GMPSC مقید به صورت حلقه بسته مورد بررسی قرار گرفت. جهت انجام این کار قید مشخصی بر روی اندازه سیگنال کنترل در نظر گرفته شد و در سه حالت مختلف برای در نظر گرفتن این قید در طراحی و یا پیاده‌سازی، روش GMPSC مقید به صورت حلقه بسته مورد ارزیابی قرار گرفت. برای این منظور معادلات موشک با فرکانس یک کیلو هرتز اجرا شد و فرکانس به روز رسانی فرامین هدایت، ۵۰ هرتز انتخاب گردید. نشان داده شد در حالتی که محدودیت روی اندازه سیگنال کنترل هم در طراحی و هم در پیاده‌سازی در نظر گرفته شده است، با دقت بسیار خوبی قیود مسأله برآورده شده است. همچنین نشان داده شد که زمان انجام محاسبات هدایت با استفاده از یک پردازنده معمولی، در همه گام‌ها کمتر از ۲۰ میلی ثانیه می‌باشد که این موضوع نشان دهنده این است که در کاربردهایی که مسأله مورد نظر دینامیک سریعی دارد، مانند هدایت فاز میانی موشک، روش GMPSC مقید این توانایی را داردکه به صورت برخط جهت محاسبه فرامین بهینه پیاده‌سازی شود.

## مراجع

[1] D. E. Kirk, Optimal control theory: An introduction, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, republished by Dover Publications in 2004.

[2] B. Sridhar and N. K. Gupta, "Missile Guidance Laws Based on Singular Perturbation Methodology, "Journal of Guidance and Control, vol. 3, no. 2, pp. 158-165, 1980.

[3] J. J. Dougherty and J. L. Speyer, "Near Optimal Guidance Law for Ballistic Missile Interception,"



[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.11.8 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.2.117 ]

Journal of Guidance and Control, vol. 20, no. 2, pp. 355-362, 1997.

[4] R. R. Kumar and H. Seywald, "Near-Optimal Three-Dimensional Air-to-Air Missile Guidance Against Maneuvering Target," Journal of Guidance and Control, vol. 18, no. 3, pp. 457-464, 1995.

[5] H. S. Shin, A. Tsourdos, B. A. White and M. J. Tahk, "Earliest Intercept Geometry Guidance to Improve Mid-Course Guidance in Area Air-Defence," IEEE 17th Mediterranean Conference on Control & Automation, Makedonia Palace, Thessaloniki, Greece, 2009.

[6] P. Garnell,Guided Weapon Control Systems, 2nd ed. New York: Pergamon, 1980.

[7] F. Imado and T. Kuroda, "Optimal Midcourse Guidance for Medium Range Air-to-Air Missiles," Journal of Guidance and Control, vol. 13, no. 4, pp. 603-608, 1990.

[8] F. Imado and T. Kuroda, "Optimal Missile Guidance System against a Hypersonic Target," AIAA Journal, pp. 1006-1011, 1992.

[9] R. Padhi and M. Kothari, "Model predictive static programming: A computationally efficient technique for suboptimal control design," International Journal of Innovative Computing, Information and Control, vol. 5, no. 2, pp. 399-411, 2009.

[10] W. Powell, Approximate Dynamic Programming: Solving the Curses of Dimensionality, Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley, 2011.

[11] P. Dwivedi, A. Bhattacharyya and R. Padhi, "Computationally efficient suboptimal mid course guidance using model predictive static programming (mpsp)," IFAC Proceedings, vol. 41, no. 2, pp. 3550-3555, 2008.

[12] P. Dwivedi, R. Padhi, A. Bhattacharya and R. N. Bhattacharjee, "Suboptimal midcourse model predictive spread acceleration guidance," In: Proceedings of the International Conference and Exhibition in Aerospace Engineering. Bangalore, India, 2009.

[13] P. Dwivedi, A. Bhattacharya and R. Padhi, "Suboptimal midcourse guidance of interceptors for high-speed targets with alignment angle constraint," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 34, no. 3, pp. 860-877, 2011.

[14] A. Ebrahimi, A. Mohammadi and A. Kashaninia, "Suboptimal midcourse guidance design using generalized model predictive spread control," Transaction of the Institute of Measurement and Control, 2020.

[15] S. Mondal, and R. Padhi, "Angle-constrained terminal guidance using quasi-spectral model predictive static programming," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 41, no. 3, pp. 783-791, 2017.

[16] S. Mondal and R. Padhi, "State and Input Constrained Missile Guidance using Spectral Model Predictive Static Programming," AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Kissimmee, Florida, 2018.

[17] L. Wang, Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB, 1st ed., Springer Publishing Company, Incorporated, 2009.

[18] C. P. Neuman and D. I. Schonbach, "Discrete (legendre) orthogonal polynomials–a survey," International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 8, no. 4, pp. 743-770, 1974.

[19] N. Indig and J. Z. Ben-Asher, "Near-optimal spatial midcourse guidance law with an angular constraint," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 37, no. 1, pp. 214-223, 2014.

[ Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09 ]
[ DOR: 20.1001.1.20088345.1400.15.2.11.8 ]
[ DOI: 10.52547/joc.15.2.117 ]