مجله کنترل
جلد ۵، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۰، صفحه ۱۰-۱

آنالیز خطای یک سیستم ناوبری اینرسی مبتنی بر شتاب سنج و بدون استفاده از ژیروسکوپ

وحید قاسم زاده[۱]، جعفر حیرانی نوبری[۲]

[۱] فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه فسا، ghvahid61@yahoo.com

[۲] استادیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، nobari@eetd.kntu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۹/۱۱/۱۰، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۰/۸/۱۴)

چکیده: سیستمهای ناوبری اینرسی رایج، اغلب از شتاب‌سنجها جهت اندازه‌گیری شتابهای خطی و از ژیروسکوپها جهت اندازه‌گیری سرعتهای زاویه‌ای استفاده می‌کنند. ژیروسکوپها دارای معایبی نظیر تکنیک ساخت پیچیده، قیمت بالا، حجم زیاد و ... هستند؛ با توجه به این عوامل، شتاب سنجهای ارزان قیمت با اندازه های کوچکتر جایگزین ژیروسکوپها در بعضی از سیستمهای ناوبری اینرسی شده اند. در این مقاله، یک ساختار ۱۰ تایی از شتاب سنجها پیشنهاد می شود که این ساختار توانایی تعیین شتابهای خطی و سرعتهای زاویه‌ای وسیله را به طور کامل دارد. مزایای این روش نسبت به روشهای پیشین، سادگی روابط، و عدم نیاز به انتگرالگیری مستقیم از شتابهای زاویه‌ای وسیله می‌باشد. شتاب سنجهای واقعی دارای خطاهایی نظیر بایاس شتاب سنجها و ناهم محوری محور حساسیت آنها هستند که تاثیر قابل ملاحظه ای در دقت سیستمهای ناوبری دارند؛ بنابراین، این خطاها و تاثیر آنها در ناوبری، در مدلسازی و شبیه سازی در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی و آنالیز خطای ناوبری نشان می دهد که این روش در ناوبریهای کوتاه مدت از دقت مطلوبی برخوردار است.

کلمات کلیدی: ناوبری اینرسی، ژیروسکوپ، شتاب‌سنج، بایاس، ناهم‌محوری.

Error Analyses of Inertial Navigation System Based on Only Accelerometers and Without Gyroscope

Vahid ghasemzadeh, Jafar Heyrani Nobari

Abstract: current inertial navigation systems usually use liner accelerometer and gyroscopes to sense linear accelerations and angular velocity, respectively. The gyroscopes have the disadvantage such as: complicated manufacture technique, high cost, and large volume and so on. Due to these factors the small accelerometers with low cost to replace the gyroscopes in some inertial navigation systems.

In this paper a ten-accelerometer configuration is proposed which can determine linear acceleration an angular velocity completely. The advantages of this method in comparison with previous works are the simplicity of the equations and elimination of direct integration of angular acceleration.

Actual accelerometers have errors such as bias and misalignment which have significant effect on precision of inertial navigation systems. So, these errors and their effect on navigation are considered in modelling and simulation. The obtained results of simulation show that this method has suitable precision in short time navigation systems.

Keywords: Inertial navigation, gyroscope, accelerometer, bias, misalignment

۱- مقدمه

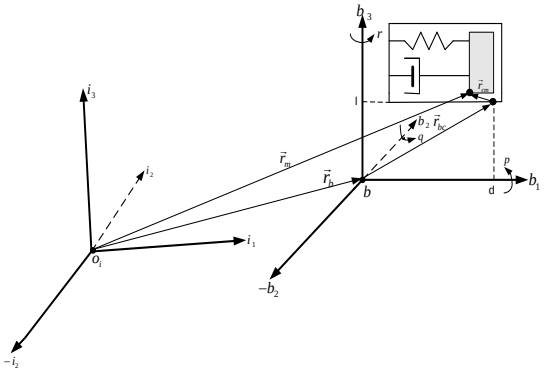
یکی از سیستمهای ناوبری که برای تعیین موقعیت و وضعیت وسایل متحرک به‌کار می‌رود و جایگاه مهمی در این نوع سیستمها دارد، سیستمهای ناوبری اینرسی است. اساس و پایه سیستمهای ناوبری اینرسی، قوانین نیوتن است و محاسبه شتاب وسیله با استفاده از این قوانین انجام می پذیرد. سیستمهای ناوبری اینرسی از لحاظ عملکرد به سیستمهای ناوبری

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.3.1.0]

اینرسی با صفحه پایدار و بدون صفحه پایدار تقسیم می‌شوند. در سیستمهای ناوبری اینرسی با صفحه پایدار، سنسورهای اینرسی(شتاب-سنجها و ژیروسکوپها) بر روی یک جزء پایدار قرار گرفته و از حرکات دورانی وسیله جدا می‌شوند اما در سیستمهای ناوبری بدون صفحه پایدار سنسورهای اینرسی مستقیما به وسیله متصل شده و شتابهای خطی و سرعتهای زاویه‌ای وسیله را در دستگاه مختصات چسبیده به وسیله (دستگاه بدنی) اندازه‌گیری می‌کنند[۱]. ژیروسکوپها، معمولا دارای تکنیک ساخت پیچیده، حجم زیاد، و قیمت بالا هستند این عوامل باعث شده است که تمایل به سمت سیستمهای ناوبری بدون ژیروسکوپ افزایش یابد. برای اولین بار در سال ۱۹۶۵ فردی به نام DiNapoli یک ایده ای برای یک سیستم ناوبری بدون ژیروسکوپ ارایه داد[۲]. در سال ۱۹۶۷، شولر چند ساختار مختلف از شتاب سنجها معرفی نمود[۳]. در سال ۱۹۹۴، فردی به‌نام Chen یک ایده جدید در این زمینه ارایه داد؛ پیشنهاد او این بود که به صورت تئوری برای پیاده‌سازی این نوع سیستم، حداقل به ۶ شتاب‌سنج نیاز است. در طرح او، هر شتاب‌سنج در مرکز سطح‌های یک مکعب قرار می‌گرفت و با استفاده از این ساختار، شتابهای خطی و شتابهای زاویه‌ای وسیله به‌دست آمده و از روی شتابهای زاویه‌ای، سرعتهای زاویه‌ای وسیله با انتگرالگیری از شتابهای خطی محاسبه می‌شدند [۴]. در سال ۲۰۰۳ مقاله‌ای در زمینه ناوبری بدون ژیروسکوپ ارایه شد که در آن با استفاده از ۹ عدد شتاب‌سنج، پارامترهای ناوبری وسیله به طور کامل مشخص می‌شد. مزیت این ساختار نسبت به ساختار Chen این بود که برای محاسبه سرعتهای زاویه‌ای نیازی به انتگراگیری از شتابهای زاویه‌ای وسیله نبود [۵]. کالیبراسیون سنسورهای شتاب سنج یکی از مهم ترین فاکتورها در استفاده کاربردی از شتاب سنجها می باشد که این موضوع در مرجع ششم بررسی شده است [۶]. در این مقاله، ابتدا در قسمت اول عملکرد شتاب سنج شرح داده می شود، سپس در ادامه ساختار ۶ تایی از شتاب سنجها به همراه روابط شتابهای خطی و سرعتهای زاویه ای آن ارایه می شود. این ساختار قادر به تعیین علامت سرعتهای زاویه ای وسیله نیست در نتیجه در ادامه این ساختار با یک ساختار ۱۰ تایی از شتاب‌سنجها جایگزین می گردد که این ساختار و روابط حاکم بر آن، حرکت وسیله را به طور کامل بیان می کند. این ساختار از لحاظ عدم نیاز به انتگراگیری برای سرعتهای زاویه‌ای و سادگی روابط نسبت به سایر روشهایی که قبلا انجام شده‌اند دارای مزیت می‌باشد. بایاس و ناهم‌محوری محور حساسیت شتاب‌سنج که از جمله مهمترین خطاهای موجود در شتاب‌سنج است در ادامه مقاله مدلسازی شده و تاثیر این خطاها در ناوبری مورد بررسی قرار می‌گیرد. در پایان مقاله الگوریتم ناوبری در دستگاه مختصات اینرسی ارایه شده و بر اساس این الگوریتم آنالیز خطای ناوبری همراه با نتایج شبیه‌سازی شرح داده می‌شود.

۲- عملکرد شتاب‌سنج در حالت کلی

شکل (۱)، یک دستگاه مختصات چسبیده به جسم (دستگاه بدنی) را نشان می‌دهد که نسبت به دستگاه مختصات اینرسی با سرعت زاویه-ای ${}^{b}\vec{\omega}_{ib}$ در حال چرخش است. در این شکل، یک شتاب‌سنج مکانیکی ساده که شامل فنر، سرعت‌گیر و جرم آزمون است در صفحه b1b3 قرار گرفته و هدف محاسبه شتاب در نقطه b است.



شکل ۱: عملکرد شتاب سنج درحالت کلی

با توجه به شکل(۱) ، رابطه (۱) برقرار است:

$${}^{i}\vec{r}_m={}^{i}\vec{r}_b+{}^{i}\vec{r}_{bc}+{}^{i}\vec{r}_{cm} \Rightarrow {}^{i}\vec{r}_b={}^{i}\vec{r}_m-{}^{i}\vec{r}_{bc}-{}^{i}\vec{r}_{cm} \qquad (۱)$$

هر کدام از بردارها در (۱) به این صورت تعریف می‌شوند؛

${}^{i}\vec{r}_m$: بردار مکان جرم آزمون شتاب‌سنج، بیان شده در دستگاه اینرسی

${}^{i}\vec{r}_b$: بردار مکان نقطه b بیان شده در دستگاه اینرسی

${}^{i}\vec{r}_{bc}$: بردار مکان از نقطه b تا نقطه c (نقطه‌ای از بدنه)، بیان شده در دستگاه اینرسی

${}^{i}\vec{r}_{cm}$: بردار مکان بدنه شتاب‌سنج و جرم آزمون، بیان شده در دستگاه اینرسی

با دو بار مشتق گیری از رابطه (۱)، رابطه (۲) حاصل می شود.

$${}^{i}\ddot{\vec{r}}_b={}^{i}\ddot{\vec{r}}_m-{}^{i}\ddot{\vec{r}}_{bc}-{}^{i}\ddot{\vec{r}}_{cm} \qquad (۲)$$

${}^{i}\ddot{\vec{r}}_m$ در این رابطه بیانگر شتاب جرم آزمون در دستگاه اینرسی می-باشد. اثبات می‌شود که رابطه (۲) را می‌توان به صورت رابطه (۳) نوشت.

$${}^{b}\vec{f}_b={}^{b}\vec{f}_m-{}^{b}_{i}C\ {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{bc}-{}^{b}_{i}C\ {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{cm} \qquad (۳)$$

در رابطه (۳)، ${}^{b}\vec{f}_m$ بیانگر شتاب جرم آزمون در دستگاه بدنی و ${}^{b}\vec{f}_b$ بیانگر شتاب نقطه موردنظرِ b در دستگاه بدنی و ${}^{b}_{i}C$ ماتریس تبدیل از دستگاه اینرسی به بدنی است. ${}^{b}\vec{\omega}_{ib}$ نیز سرعت زاویه‌ای دستگاه بدنی نسبت به دستگاه اینرسی بیان شده در دستگاه بدنی است. بعد از ساده‌سازی، رابطه (۳) به رابطه (۴) تبدیل می‌شود [۱].

(۴)

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.3.1.0]

بردارهای ${}^b\vec{f}_b$ و ${}^b\vec{f}_m$ و ${}^b\vec{\omega}_{ib}$ و ${}^b\vec{r}_{bc}$ و ${}^b\vec{r}_{cm}$ با توجه به شکل ۱، به صورت $[(f_m)_{b1},(f_m)_{b2},(f_m)_{b3}]^T={}^b\vec{f}_m$ و $[(f_b)_{b1},(f_b)_{b2},(f_b)_{b3}]^T={}^b\vec{f}_b$ و $[p,q,r]^T={}^b\vec{\omega}_{ib}$ و $[l,0,d]^T={}^b\vec{r}_{bc}$ و $[x,0,0]^T=\vec{r}_{cm}$ تعریف می‌شوند. بردار $[x,0,0]^T=\vec{r}_{cm}$ معرف جابجایی جرم آزمون، نسبت به بدنه شتاب-سنج است که با توجه به مکانیزم شتاب سنج به‌کار رفته در شکل ۱، تنها شتاب در راستای محور اول دستگاه بدنی را اندازه‌گیری می کند.

پس از انجام عملیات ریاضی و ساده‌سازی، رابطه (۴) به رابطه (۵)تبدیل میشود.

$$ {}^b\vec{f}_b-{}^b\vec{f}_m=\begin{bmatrix}(f_b)_{b1}-(f_m)_{b1}\\(f_b)_{b2}-(f_m)_{b2}\\(f_b)_{b3}-(f_m)_{b3}\end{bmatrix} =\begin{bmatrix}d(q^2+r^2)-plr-l\dot{q}-x(p^2+r^2)-\ddot{x}\\-q(lr+dp)-d\dot{r}+l\dot{p}-xpq-2r\dot{x}\\l(p^2+q^2)-dpr+d\dot{q}-xpr+2q\dot{x}\end{bmatrix} \qquad (۵)$$

در رابطه (۵)، ${}^b\vec{f}_b$ و ${}^b\vec{f}_m$ شتاب نقطه های b و m در دستگاه بدنی می باشند. این رابطه تقریبا پیچیده و طولانی است. می‌توان آن‌را به نحوی ساده کرد که x و مشتقات آن در مقایسه با سایر عبارتها قابل اغماض و صرف‌نظر کردن باشد؛ این کار با استفاده از ساختار جدیدی از شتاب سنج، تحت عنوان شتاب سنجِ تعادلی امکان‌پذیر است. عملکرد شتاب-سنج تعادلی به این صورت است که وقتی جابجایی x رخ می‌دهد به وسیله یک گشتاور ساز، نیرویی در خلاف جهت جابجایی به جرم آزمون شتاب‌سنج اعمال می‌گردد که باعث برگشتن فنر به سر جای اولش می-شود در نتیجه جابجایی صفر خواهد بود. در ضمن، شتاب اندازه‌گیری شده، متناسب با جریان لازم برای اعمال گشتاور موردنظر است. این کارها توسط یک حلقه فیدبک کنترلی انجام می‌پذیرد [۱]. بنابراین در صورت استفاده از شتاب‌سنج تعادلی، رابطه (۶) حاصل می شود.

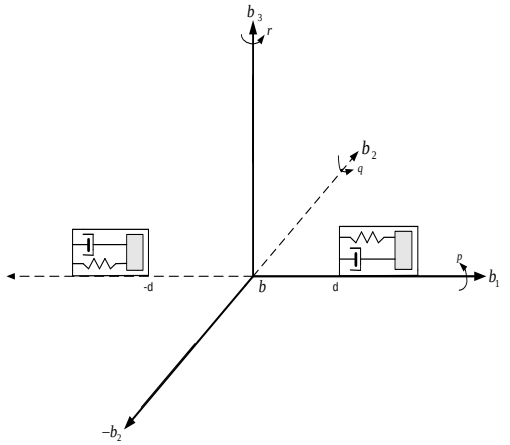
$$\begin{cases}(f_b)_{b1}-(f_m)_{b1}=d(q^2+r^2)-plr-l\dot{q}\\(f_b)_{b2}-(f_m)_{b2}=-q(lr+dp)-d\dot{r}+l\dot{p}\\(f_b)_{b3}-(f_m)_{b3}=l(p^2+q^2)-dpr+d\dot{q}\end{cases} \qquad (۶)$$

در رابطه (۶)، $\dot{p},\dot{q},\dot{r}$ شتاب‌های زاویه‌ای جسم در دستگاه بدنی، p,q,r سرعت‌های زاویه‌ای وسیله، $(f_b)_{b1},(f_b)_{b2},(f_b)_{b3}$ مولفه های شتابهای خطی نقطه b در راستای محورهای دستگاه بدنی، $(f_m)_{b1},(f_m)_{b1},(f_m)_{b1}$ مولفه های شتابهای خطی نقطه‌ای که شتاب‌سنج در آن‌جا قرار گرفته و $[l,0,d]^T$ مختصات نقطه‌ای است که شتاب‌سنج در آن‌جا قرار گرفته است.

۳- ساختار۶ تایی ازشتاب‌سنج‌ها

با ${}^b\vec{f}_b={}^b\vec{f}_m-{}^b(\dot{\vec{\omega}}_{ib}\times(\vec{\omega}_{ib}\times\vec{r}_{bc}))-{}^b(\dot{\vec{\omega}}_{ib}\times\vec{r}_{bc})$
$-{}^b(\vec{\omega}_{ib}\times(\vec{\omega}_{ib}\times\vec{r}_{cm}))-{}^b(\dot{\vec{\omega}}_{ib}\times\vec{r}_{cm})-2{}^b(\vec{\omega}_{ib}\times\dot{\vec{r}}_{cm})-{}^b\ddot{\vec{r}}_{cm}$

توجه به شکل ۲ دو شتاب‌سنج تعادلی m1 و m2 روی محور b1 با فاصله یکسان d از نقطه b که شتاب آن مورد نظر است قرار گرفته‌اند. بردارهای مکان شتاب‌سنج‌ها در دستگاه بدنی عبارتند از: ${}^b\vec{r}_{m1}=[d,0,0]^T$, ${}^b\vec{r}_{m2}=[-d,0,0]^T$ در این صورت چون $l=0$ آن‌گاه رابطه (۶) برای هر شتاب‌سنج، به روابط (۷) و (۸) تبدیل می شوند.



شکل ۲: دو شتاب‌سنج واقع بر محور b1 در دستگاه مختصات بدنی

روابط مربوط به شتاب‌سنج m1:

$$\begin{cases}(f_b)_{b1}-(f_{m1})_{b1}=d(q^2+r^2)\\(f_b)_{b2}-(f_{m1})_{b2}=-dqp-d\dot{r}\\(f_b)_{b3}-(f_{m1})_{b3}=-dpr+d\dot{q}\end{cases} \qquad (۷)$$

روابط مربوط به شتاب‌سنج m2:

$$\begin{cases}(f_b)_{b1}-(f_{m2})_{b1}=-d(q^2+r^2)\\(f_b)_{b2}-(f_{m2})_{b2}=+dqp+d\dot{r}\\(f_b)_{b3}-(f_{m2})_{b3}=+dpr-d\dot{q}\end{cases} \qquad (۸)$$

از روابط (۷) و (۸) نکات زیر نتیجه می شوند.

۱- اگر معادلات اول از دسته روابط اخیر با هم جمع شوند، شتاب نقطه b در راستای محور b1 ، میانگین خروجی‌های شتاب-سنج m1 و m2 می شود.

$$(f_b)_{b1}=\frac{(f_{m1})_{b1}+(f_{m2})_{b1}}{2} \qquad (۹)$$

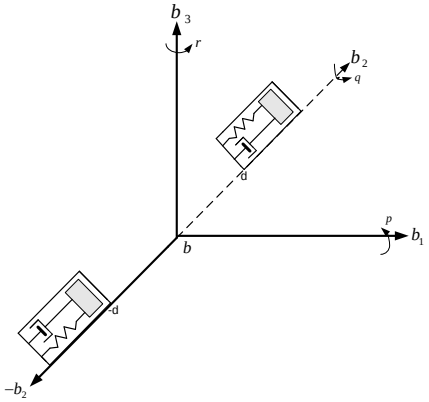
۲- اگر تفاضل معادلات اول از دسته روابط اخیر محاسبه شود رابطه (۱۰) حاصل می شود.

$$(f_{m2})_{b1}-(f_{m1})_{b1}=2d(q^2+r^2) \qquad (۱۰)$$

رابطه (۱۰) بیان می کند که تفاضل سیگنال‌های خروجی دو شتاب-سنج، به سرعت‌های زاویه ای q,r وابسته است. این موضوع از لحاظ فیزیکی نیز منطقی است چراکه هر دو شتاب‌سنج در راستای b1 هستند در نتیجه به یک میزان سرعت زاویه‌ای p را حس می‌کنند پس تفاوت اندازه گیری آنها در سرعت‌های زاویه‌ای وسیله در دو راستای دیگر یعنی q,r است. فرضا دو شتاب‌سنج دیگر m3 و m4 در راستای محور b2

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.3.1.0]

با بردارهای مکان ${}^b\vec{r}_{m2}=[0,-d,0]^T$,${}^b\vec{r}_{m3}=[0,d,0]^T$ مطابق شکل ۳ قرار گرفته اند.



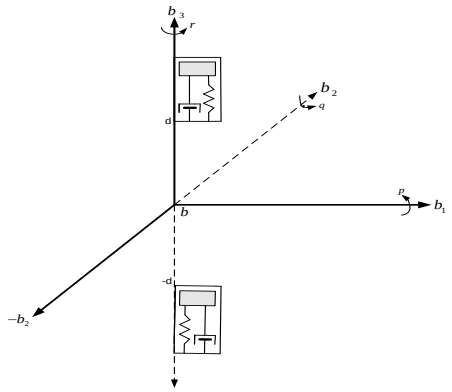
شکل ۳: دو شتاب‌سنج واقع بر محور b2 در دستگاه مختصات بدنی

مطابق قسمت قبل و با توجه به روابط حاکم بر این دو شتاب‌سنج، رابطه (۱۱) نتیجه می شود.

$$\begin{aligned}&(f_b)_{b2}=\frac{(f_{m3})_{b2}+(f_{m4})_{b2}}{2}\\&(f_{m3})_{b2}-(f_{m4})_{b2}=2d(p^2+r^2)\end{aligned}\qquad(۱۱)$$

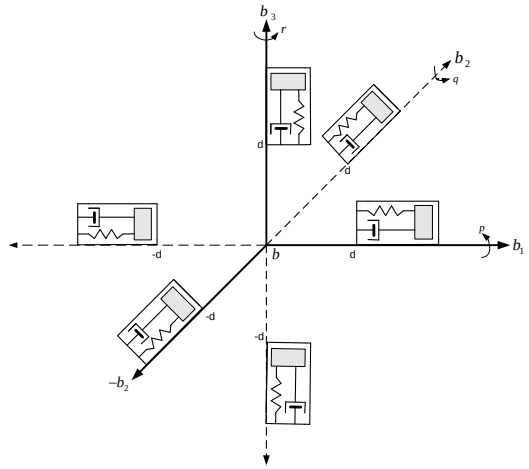
دو شتاب سنج m5 و m6 نیز مطابق شکل ۴ در راستای محور سوم دستگاه بدنی قرار گرفته اند. مشابه قسمت قبل با توجه به روابط حاکم بر این شتاب‌سنج‌ها، شتاب در راستای محور سوم و سرعت‌های زاویه‌ای p و q، به کمک رابطه (۱۲) قابل بیان است.

$$\begin{aligned}&(f_b)_{b3}=\frac{(f_{m5})_{b3}+(f_{m6})_{b3}}{2}\\&(f_{m5})_{b3}-(f_{m6})_{b3}=2d(p^2+q^2)\end{aligned}\qquad(۱۲)$$



شکل ۴: دو شتاب‌سنج واقع بر محور b3 در دستگاه مختصات بدنی

در شکل ۵، ساختار ۶ تایی از شتاب سنجها نشان داده شده است. روابط شتاب‌های خطی و سرعت‌های زاویه‌ای حاکم بر این ساختار نیز در روابط (۱۳) و (۱۴) بیان شده‌اند.



شکل ۵: ساختار ۶ تایی از شتاب‌سنج‌ها واقع در دستگاه مختصات بدنی

شتاب نقطه b در سه راستای محور دستگاه بدنی:

$$\begin{cases}(f_b)_{b1}=\dfrac{(f_{m1})_{b1}+(f_{m2})_{b1}}{2}\\(f_b)_{b2}=\dfrac{(f_{m3})_{b2}+(f_{m4})_{b2}}{2}\\(f_b)_{b3}=\dfrac{(f_{m5})_{b3}+(f_{m6})_{b3}}{2}\end{cases}\qquad(۱۳)$$

سرعت‌های زاویه‌ای در دستگاه بدنی:

$$\begin{aligned}p&=\pm\sqrt{\frac{+(f_{m1})_{b1}-(f_{m2})_{b1}-(f_{m3})_{b2}+(f_{m4})_{b2}-(f_{m5})_{b3}+(f_{m6})_{b3}}{4d}}\\q&=\pm\sqrt{\frac{-(f_{m1})_{b1}+(f_{m2})_{b1}+(f_{m3})_{b2}-(f_{m4})_{b2}-(f_{m5})_{b3}+(f_{m6})_{b3}}{4d}}\\r&=\pm\sqrt{\frac{-(f_{m1})_{b1}+(f_{m2})_{b1}-(f_{m3})_{b2}+(f_{m4})_{b2}+(f_{m5})_{b3}-(f_{m6})_{b3}}{4d}}\end{aligned}$$

(۱۴)

این روابط دارای این اشکال عمده است که برای p,q,r هم مقدار مثبت و هم مقدار منفی به‌دست می‌آید و چون سرعت‌های زاویه‌ای در هر لحظه بایستی به طور دقیق محاسبه شوند پس این اشکال مربوط به علامت سرعتهای زاویه‌ای، یک اشکال اساسی است. برای حل این مشکل، ۴ عدد شتاب‌سنج اضافی به ساختار ۶ تایی ازشتاب‌سنج‌ها اضافه می شود.

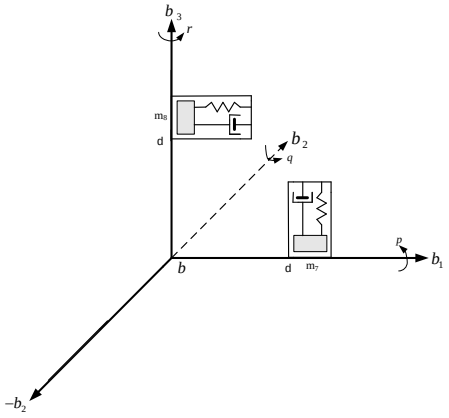
۴- تعیین علامت سرعتهای زاویه‌ای

برای تعیین علامت سرعت‌های زاویه‌ای ابتدا راه حلی برای تعیین علامت q پیشنهاد می شود. بدین منظور دو شتاب‌سنج اضافی m7 و m8 روی محورهای اول و سوم دستگاه بدنی مطابق شکل ۶ قرار گرفته‌اند. با توجه به شکل ۶ ملاحظه می‌شود که شتاب‌سنج m7، شتاب نقطه b در راستای محور b3 و شتاب‌سنج m8 شتاب نقطه b در راستای محور b1 را اندازه‌گیری می‌کند. مشابه با روابطی که قبلا برای شتاب-سنج‌های m1,…,m6 به‌دست آورده شد، شتاب نقطه b در راستای

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.3.1.0]

محور b1 و b3 بر حسب خروجی شتاب‌سنجهای m7 و m8 مطابق رابطه (۱۵) به دست می آید.

$$\begin{aligned}(f_b)_{b3} &= (f_{m7})_{b3} - dpr + d\dot{q}\\ (f_b)_{b1} &= (f_{m8})_{b1} - dpr - d\dot{q}\end{aligned} \qquad (۱۵)$$



شکل ۶: دو شتاب‌سنج اضافی برای تعیین علامت q

با استفاده از رابطه (۱۵) شتاب زاویه ای $\dot{q}$ به صورت زیر به دست می آید.

$$\dot{q} = \frac{(f_b)_{b3} - (f_b)_{b1} + (f_{m8})_{b1} - (f_{m7})_{b3}}{2d} \qquad (۱۶)$$

باید توجه کرد که شتابهای خطی $(f_b)_{b1}$, $(f_b)_{b3}$ قبلا توسط ساختار ۶ تایی شتاب‌سنج‌ها به‌دست آورده شده‌اند؛ در نتیجه شتاب زاویه ای $\dot{q}$ بر حسب خروجی شتاب‌سنج‌ها از رابطه (۱۷) محاسبه می شود.

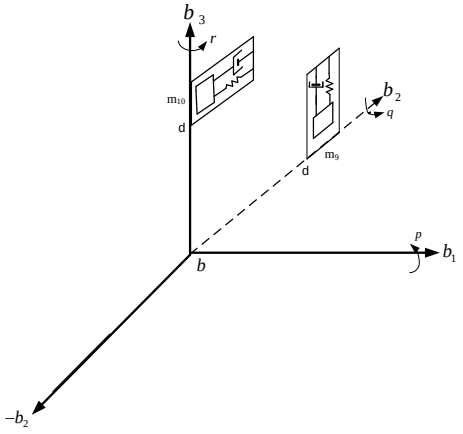
$$\begin{aligned}\dot{q} = &\frac{-(f_{m1})_{b1} - (f_{m2})_{b1} + (f_{m5})_{b3}}{4d}\\ &+ \frac{(f_{m6})_{b3} - 2(f_{m7})_{b3} + 2(f_{m8})_{b1}}{4d}\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

با انتگرال‌گیری از $\dot{q}$ مقدار q مشخص می‌شود (هم از لحاظ مقدار و هم از لحاظ علامت) اما در قسمت قبل، q از لحاظ مقدار محاسبه شد (رابطه (۱۴)) و تنها علامت دقیق آن نامشخص بود، علامت آن نیز از رابطه (۱۷) مشخص می‌شود. برای تعیین p نیز مطابق شکل ۷ دو شتاب سنج m9 و m10 در راستای محورهای b2 و b3 قرار داده می شوند.

دو شتاب‌سنج m9 و m10 شتاب نقطه b را در دو راستای b3 و b2 اندازه‌گیری می کنند(شکل ۷) که از رابطه (۱۸) به دست می آیند.

$$\begin{aligned}(f_b)_{b3} &= (f_{m9})_{b3} - dqr - d\dot{p}\\ (f_b)_{b2} &= (f_{m10})_{b2} - dqr + d\dot{p}\end{aligned} \qquad (۱۸)$$

با استفاده از رابطه (۱۸) و مشابه با قسمت قبل، شتاب زاویه ای $\dot{p}$ از رابطه (۱۹) به دست می‌آید.

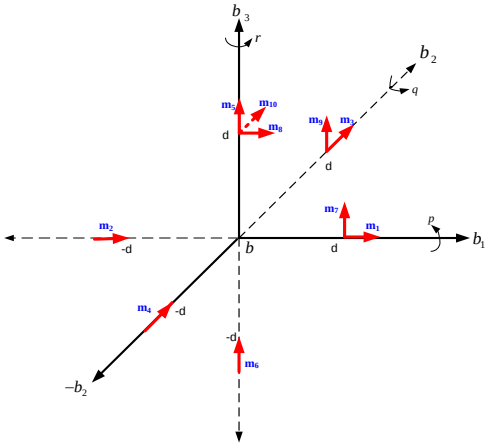


شکل ۷: دو شتاب‌سنج اضافی برای تعیین علامت p

با انتگرالگیری از $\dot{p}$ ، سرعت زاویه‌ای p در هر لحظه از لحاظ مقدار و علامت مشخص می‌شود، البته مقدار p از رابطه (۱۴) و علامت آن از رابطه (۱۹) قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned}\dot{p} = &\frac{(f_{m3})_{b2} + (f_{m4})_{b2} - (f_{m5})_{b3}}{4d}\\ &+ \frac{-(f_{m6})_{b3} + 2(f_{m9})_{b3} - 2(f_{m10})_{b2}}{4d}\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

تعیین علامت r از رابطه $(f_b)_{b3} = (f_{m7})_{b3} - dpr + d\dot{q}$ (قسمت اول رابطه ۱۵)قابل محاسبه است البته مقادیر $\dot{q}$ و p به طور دقیق از روابط مربوطه به دست آمده اند. مقدار عددی r نیز از رابطه (۱۴) به دست می آید در نتیجه مولفه سوم سرعت زاویه ای (r)، از لحاظ علامت و مقدار به طور کامل مشخص خواهد شد. به این ترتیب یک ساختار جدید ۱۰ تایی از شتاب‌سنج‌ها طراحی شد که به طور کامل، حرکت وسیله را از لحاظ حرکت خطی و حرکت دورانی، توصیف و مشخص می‌نماید و در نتیجه می‌توان به پیاده سازی ناوبری پرداخت. ساختار ۱۰ تایی از شتاب‌سنج‌ها در شکل (۸) نشان داده شده است و کلیه روابط حاکم بر این ساختار از رابطه (۲۰) قابل بیان است.



شکل ۸: ساختار ۱۰ تایی از شتاب‌سنج‌ها

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.3.1.0]

$$
\begin{aligned}
(f_b)_{b1} &= \frac{(f_{m1})_{b1}+(f_{m2})_{b1}}{2}\\
(f_b)_{b2} &= \frac{(f_{m3})_{b2}+(f_{m4})_{b2}}{2}\\
(f_b)_{b3} &= \frac{(f_{m5})_{b3}+(f_{m6})_{b3}}{2}\\
p &= \pm\sqrt{\frac{+(f_{m1})_{b1}-(f_{m2})_{b1}-(f_{m3})_{b2}+(f_{m4})_{b2}-(f_{m5})_{b3}+(f_{m6})_{b3}}{4d}}\\
q &= \pm\sqrt{\frac{-(f_{m1})_{b1}+(f_{m2})_{b1}+(f_{m3})_{b2}-(f_{m4})_{b2}-(f_{m5})_{b3}+(f_{m6})_{b3}}{4d}}\\
r &= \pm\sqrt{\frac{-(f_{m1})_{b1}+(f_{m2})_{b1}-(f_{m3})_{b2}+(f_{m4})_{b2}+(f_{m5})_{b3}-(f_{m6})_{b3}}{4d}}\\
\dot{q} &= \frac{-(f_{m1})_{b1}-(f_{m2})_{b1}+(f_{m5})_{b3}+(f_{m6})_{b3}-2(f_{m7})_{b3}+2(f_{m8})_{b1}}{4d}
\end{aligned}
\qquad (۲۰)
$$

۵- ۱ مدلسازی خطاهای شتاب‌سنج‌ها و تاثیر آنها در ناوبری

خطاهایی که در این مقاله، مدلسازی آنها ارایه می شود، عبارتنداز:

۱- بایاس شتاب‌سنجها ۲- ناهم‌محوری محور حساسیت شتاب‌سنجها.

ابتدا بایاس شتاب سنج بررسی می شود؛ با فرض این که شتاب‌سنج دارای خطای بایاس δf_{bias} است، خطای سرعت δV و خطای موقعیت δP در مدت زمان t با سرعت اولیه و مکان اولیه‌ی صفر، از رابطه (۲۱) به دست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
\delta V &= \delta f_{bias}\times t\\
\delta P &= \frac{1}{2}\delta f_{bias}\times t^2
\end{aligned}
\qquad (۲۱)
$$

در این قسمت ساختار ۱۰ تایی از شتاب سنج‌هایی با وجود خطای بایاس بررسی می شود. هدف به‌دست آوردن خطای موجود در شتاب-های خطی و سرعت‌های زاویه‌ای وسیله ناشی از بایاس شتاب‌سنج‌ها می باشد. فرضا که شتاب‌سنجها، دارای بایاس $(\delta f_{bias})_k$ باشند (k شماره شتاب سنج است). در این صورت خطای شتاب خطی جسم، ناشی از بایاس شتاب‌سنج‌ها مطابق رابطه (۲۲) خواهد بود.

$$
\begin{cases}
((\Delta f_b)_{b1})_{bias} = \dfrac{(\delta f_{bias})_1+(\delta f_{bias})_2}{2}\\
((\Delta f_b)_{b2})_{bias} = \dfrac{(\delta f_{bias})_3+(\delta f_{bias})_4}{2}\\
((\Delta f_b)_{b3})_{bias} = \dfrac{(\delta f_{bias})_5+(\delta f_{bias})_6}{2}
\end{cases}
\qquad (۲۲)
$$

برای سادگی اگر فرض شود شتاب سنجها دارای بایاس یکسان δf_{bias} باشند آنگاه ثابت می شود که خطای شتاب وسیله در سه راستای محورها دستگاه بدنی برابر با $((\Delta f_b)_{b3})_{bias}$ و $((\Delta f_b)_{b2})_{b\ i}$ و $((\Delta f_b)_{b1})_{bias}$ در ساختار ۱۰ تایی شتاب‌سنج‌ها به میزان δf_{bias} خواهد بود. این میزان خطا پس از انتقال از دستگاه بدنی به دستگاه اینرسی توسط ماتریس دوران، باعث ایجاد خطا در سرعت و موقعیت وسیله خواهد شد.

برای بررسی تاثیر خطای بایاس شتاب‌سنج‌ها در سرعت‌های زاویه‌ای ابتدا مربع خطای سرعت زاویه‌ای به‌دست آورده می شود و سپس در بدترین حالت، خطاهای سرعت زاویه‌ای ناشی از بایاس را می توان مشخص نمود؛ به عنوان مثال برای $\Delta^2 p$ (مربع خطای سرعت زاویه‌ای) پس از ساده سازی، رابطه (۲۳) به دست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
(\Delta^2 p)_{bias} = &\frac{(\delta f_{bias})_1-(-\delta f_{bias})_2+(\delta f_{bias})_3}{4d}\\
&+\frac{(\delta f_{bias})_4-(-\delta f_{bias})_5-(-\delta f_{bias})_6}{4d}
\end{aligned}
\qquad (۲۳)
$$

بافرض مشابه بودن شتاب سنجها از لحاظ میزان بایاس، خطای سرعتهای زاویه ای $(\Delta p)_{bias}$ و $(\Delta q)_{bias}$ و $(\Delta r)_{bias}$ ناشی از بایاس مطابق رابطه (۲۴) به دست می آید.

$$
\begin{cases}
(\Delta p)_{bias} = \pm\sqrt{1.5\dfrac{\delta f_{bias}}{d}}\\
(\Delta q)_{bias} = \pm\sqrt{1.5\dfrac{\delta f_{bias}}{d}}\\
(\Delta r)_{bias} = \pm\sqrt{1.5\dfrac{\delta f_{bias}}{d}}
\end{cases}
\qquad (۲۴)
$$

نحوه تاثیر خطای سرعت‌های زاویه‌ای نیز در ناوبری به این ترتیب است که ابتدا کواترنین‌ها دارای خطا می‌شوند، خطای کواترنین‌ها ناشی از خطاهای سرعت زاویه‌ای $(\Delta p)_{bias}$ و $(\Delta q)_{bias}$ و $(\Delta r)_{b\,i\,a}$ مطابق رابطه (۲۵) به دست می آید.

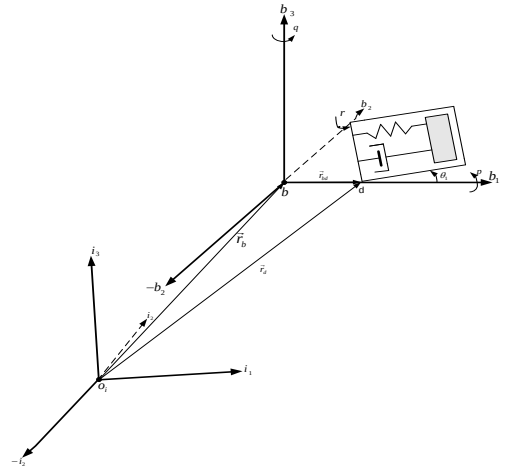
$$
\begin{bmatrix}\Delta\dot{\varepsilon}_1\\ \Delta\dot{\varepsilon}_2\\ \Delta\dot{\varepsilon}_3\\ \Delta\dot{\varepsilon}_4\end{bmatrix}
=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & +(\Delta r)_{bias} & -(\Delta q)_{bias} & +(\Delta p)_{bias}\\ -(\Delta r)_{bias} & 0 & +(\Delta p)_{bias} & +(\Delta q)_{bias}\\ +(\Delta q)_{bias} & -(\Delta p)_{bias} & 0 & +(\Delta r)_{bias}\\ -(\Delta p)_{bias} & -(\Delta q)_{bias} & -(\Delta r)_{bias} & 0\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\Delta\varepsilon_1\\ \Delta\varepsilon_2\\ \Delta\varepsilon_3\\ \Delta\varepsilon_4\end{bmatrix}
\qquad (۲۵)
$$

که در این رابطه، $(\Delta p)_{bias}$ و $(\Delta q)_{bias}$ و $(\Delta r)_{bias}$ از رابطه (۲۴) به دست می آید و $\Delta\varepsilon_1$, $\Delta\varepsilon_2$, $\Delta\varepsilon_3$, $\Delta\varepsilon_4$ خطای کواترنین‌ها می-باشد. خطای کواترنین‌ها باعث می‌شود که ماتریس دوران دارای خطا شده و در نتیجه شتاب منتقل شده به دستگاه مختصات اینرسی و در نتیجه سرعت و موقعیت وسیله با خطا همراه خواهد شد.

۵-۲ ناهم‌محوری

فرض شود که محور حساسیت شتاب سنج دقیقا در راستای محور $\vec{b}_1$ نیست و یک ناهم‌محوری به اندازه بردار $\vec{\theta}_1$ بین محور حساسیت شتاب‌سنج و محور $\vec{b}_1$ وجود دارد؛ برای سادگی فرض می‌شود که مطابق شکل (۹) این بردار در صفحه b_1b_3 قرار گرفته است. قبل از آن-که به تجزیه و تحلیل این ناهم‌محوری پرداخته شود، ذکر این نکته در رابطه با عملکرد شتاب‌سنج حائز اهمیت است که اگر شتاب‌سنجی در نقطه d قرار گرفته باشد آن‌چه شتاب‌سنج اندازه‌گیری می‌کند و نشان می‌دهد تصویر شتاب نقطه d در راستای محور حساسیتش است. از لحاظ ریاضی این تصویر، از حاصلضرب داخلی بردار شتاب و بردار محور حساسیت شتاب‌سنج حاصل می‌شود.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.3.1.0]



شکل ۹: شتاب‌سنج در دستگاه بدنی و دستگاه اینرسی همراه با ناهم‌محوری

بردار شتاب نقطه d ($\vec{f}_d$) و بردار محور حساسیت شتاب-سنج ($S\vec{\theta}_1$) برای شتاب‌سنج شکل (۹) مطابق رابطه (۲۶) قابل بیان است.

$$\left(\vec{f}_d\right)=\begin{bmatrix}(f_d)_{b1}\\(f_d)_{b2}\\(f_d)_{b3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(f_b)_{b1}-d(q^2+r^2)\\(f_b)_{b2}+dqp+d\dot{r}\\(f_b)_{b3}+dpr-d\dot{q}\end{bmatrix} \qquad (۲۶)$$

$$S\vec{\theta}_1=\begin{bmatrix}\cos\theta_1\\0\\\sin\theta_1\end{bmatrix}$$

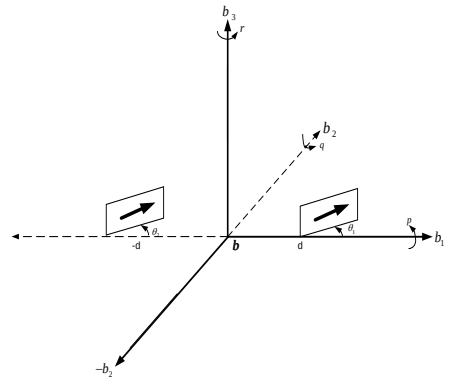
در نتیجه سیگنال خروجی شتاب سنج ($\left(\vec{f}_d\right)_{\theta_1}$) از رابطه (۲۷) به دست می آید.

$$\left(\vec{f}_d\right)_{\theta_1}=\left(\vec{f}_d\right)^T\bullet S\vec{\theta}_1 \qquad (۲۷)$$
$$=\cos\theta_1\left((f_b)_{b1}-d(q^2+r^2)\right)+\sin\theta_1\left((f_b)_{b3}+dpr-d\dot{q}\right)$$

برای شتاب‌سنجی که در فاصله d– از نقطه b با ناهم‌محوری $\vec{\theta}_2$ (در صفحه b_1b_3) قرار گرفته است عملیات فوق تکرار می‌شود، سیگنال خروجی شتاب‌سنج دوم ($\left(\vec{f}_{-d}\right)_{\theta_2}$) به‌صورت رابطه (۲۸) خواهد بود.

$$\left(\vec{f}_{-d}\right)_{\theta_2}=\left(\vec{f}_{-d}\right)^T\bullet S\vec{\theta}_2 \qquad (۲۸)$$
$$=\cos\theta_1\left((f_b)_{b1}+d(q^2+r^2)\right)+\sin\theta_1\left((f_b)_{b3}-dpr+d\dot{q}\right)$$

دو شتاب‌سنج واقع بر محور $\vec{b}_1$ با وجود ناهم‌محوری در محور حساسیت آنها در شکل (۱۰) نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۰: شتاب‌سنج‌های واقع بر محور $\vec{b}_1$ همراه با ناهم‌محوری

شتاب نقطه b در راستای محور $\vec{b}_1$ برابر با میانگین سیگنالهای خروجی شتابسنجهای ۱ و ۲ می باشد که از رابطه (۲۹) به دست می آید.

$$(f_b)_{b1\ misalignment}=\frac{(f_d)_{\theta_1}+(f_{-d})_{\theta_2}}{2} \qquad (۲۹)$$

به این ترتیب خطای شتاب نقطه b در راستای $\vec{b}_1$ ناشی از ناهم-محوری شتاب‌سنج‌ها به صورت رابطه (۳۰) محاسبه می شود.

$$(\Delta f_b)_{b1\ misalignment}=(f_b)_{b1\ misalignment}-(f_b)_{b1\ no\ misalignment}$$
$$=\frac{(f_d)_{b1\theta1}+(f_{-d})_{b1\theta_2}}{2}-\frac{(f_d)_{b1}+(f_{-d})_{b1}}{2}$$

$$=\frac{(\cos\theta_1+\cos\theta_2-2)(f_b)_{b1}+(\sin\theta_1+\sin\theta_2)(f_b)_{b3}}{2}+\frac{(\sin\theta_1-\sin\theta_2)(dpr-d\dot{q})}{2} \qquad (۳۰)$$

در رابطه (۳۰) $(\Delta f_b)_{b1\ missaleing}$ خطای شتاب نقطه b در راستای محور b1 با وجود ناهم محوری، $(f_b)_{b1\ misalignment}$ شتاب نقطه b در راستای محور b1 با وجود ناهم محوری، $(f_b)_{b1\ no\ misalignment}$ شتاب نقطه b در راستای محور b1 بدون ناهم محوری شتابسنجها می باشند. مشابه این روابط برای جفت شتاب‌سنج‌های واقع بر محور b2 و محور b3 نیز می‌توان به‌دست آورد. فرض شود محورهای حساسیت دو شتاب‌سنج واقع بر محور b2 به اندازه θ_3 , θ_4 (واقع در صفحه b_2b_3) نسبت به محور b2 دارای انحراف باشند، در این صورت خروجی این دو شتاب‌سنج به صورت روابط (۳۱) و (۳۲) خواهند بود.

خروجی شتاب‌سنج سوم با وجود ناهم محوری در محور حساسیت آن:

$$\left(\vec{f}_d\right)_{\theta_3}=\begin{bmatrix}(f_b)_{b1}+dqp-d\dot{r}\\(f_b)_{b2}-d(p^2+r^2)\\(f_b)_{b3}+dpr+d\dot{p}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0\\\cos\theta_3\\\sin\theta_3\end{bmatrix}$$
$$=\cos\theta_3\left((f_b)_{b2}-d(p^2+r^2)\right)+\sin\theta_3\left((f_b)_{b3}+dpr+d\dot{p}\right) \qquad (۳۱)$$

خروجی شتاب‌سنج چهارم با وجود ناهم محوری در محور حساسیت آن:

$$\left(\vec{f}_d\right)_{\theta_4}=\begin{bmatrix}(f_b)_{b1}-dqp+d\dot{r}\\(f_b)_{b2}+d(p^2+r^2)\\(f_b)_{b3}-dpr-d\dot{p}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0\\\cos\theta_3\\\sin\theta_3\end{bmatrix}$$
$$=\cos\theta_4\left((f_b)_{b2}+d(p^2+r^2)\right)+\sin\theta_4\left((f_b)_{b3}-dpr-d\dot{p}\right) \qquad (۳۲)$$

شتاب نقطه b در راستای محور $\vec{b}_2$ با وجود ناهم محوری ($(f_b)_{b2\ misalignment}$) مطابق رابطه (۳۳) به دست می آید.

$$(f_b)_{b2\ misalignment}=\frac{(f_d)_{\theta_3}+(f_{-d})_{\theta_4}}{2} \qquad (۳۳)$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.3.1.0]

در نتیجه خطای شتاب نقطه b در راستای محور $\vec{b}_2$ با وجود ناهم محوری($(\Delta f_b)_{b2\ missalignment}$) بر اساس رابطه (۳۴) خواهد بود.

$$\begin{aligned}(\Delta f_b)_{b2\ missalignment} &= (f_b)_{b2\ missalignment} - (f_b)_{b2\ no missalignment} \\ &= \frac{(f_d)_{b2\theta_3} + (f_{-d})_{b2\theta_4}}{2} - \frac{(f_d)_{b2} + (f_{-d})_{b2}}{2} \\ &= \frac{(\cos\theta_3 + \cos\theta_4 - 2)(f_b)_{b2} + (\sin\theta_3 + \sin\theta_4)(f_b)_{b3}}{2} + \frac{(\sin\theta_3 - \sin\theta_4)(dpr - d\dot{p})}{2}\end{aligned} \quad (۳۴)$$

فرض اینکه محورهای حساسیت دو شتاب‌سنج واقع بر محور b3 به اندازه θ_6 , θ_5 (واقع در صفحه b_1b_3) نسبت به محور b3 دارای انحراف باشند، در این‌صورت خروجی این دو شتاب‌سنج با وجود ناهم محوری در آنها از روابط (۳۵) و (۳۶) به دست می آیند.

خروجی شتاب‌سنج پنجم با وجود ناهم محوری در محور حساسیت آن:

$$\begin{aligned}(\vec{f}_d)_{\theta_5} &= \begin{bmatrix}(f_b)_{b1} + dpr + d\dot{q} \\ (f_b)_{b2} \\ (f_b)_{b3} - d(p^2+q^2)\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}\sin\theta_5 \\ 0 \\ \cos\theta_5\end{bmatrix} \\ &= \cos\theta_5\left((f_b)_{b3} - d(p^2+q^2)\right) + \sin\theta_5\left((f_b)_{b1} + dpr + d\dot{q}\right)\end{aligned} \quad (۳۵)$$

خروجی شتاب‌سنج ششم با وجود ناهم محوری در محور حساسیت آن:

$$\begin{aligned}(\vec{f}_{-d})_{\theta_5} &= \begin{bmatrix}(f_b)_{b1} - dpr - d\dot{q} \\ (f_b)_{b2} \\ (f_b)_{b3} + d(p^2+q^2)\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}\sin\theta_6 \\ 0 \\ \cos\theta_6\end{bmatrix} \\ &= \cos\theta_6\left((f_b)_{b3} + d(p^2+q^2)\right) + \sin\theta_6\left((f_b)_{b1} - dpr - d\dot{q}\right)\end{aligned} \quad (۳۶)$$

در این صورت شتاب نقطه b در راستای محور $\vec{b}_3$ برابر با میانگین این دو سیگنال خواهد بود.

$$(f_b)_{b3\ missalignment} = \frac{(f_d)_{\theta_5} + (f_{-d})_{\theta_6}}{2} \quad (۳۷)$$

در نتیجه خطای شتاب نقطه b در راستای محور $\vec{b}_3$ ناشی از ناهم‌محوری($(\Delta f_b)_{b3\ missalignment}$) مطابق رابطه (۳۸) به دست می آید.

$$\begin{aligned}(\Delta f_b)_{b3\ missalignment} &= (f_b)_{b3\ missalignment} - (f_b)_{b3\ missalignment} \\ &= \frac{(f_d)_{b3\theta_5} + (f_{-d})_{b3\theta_6}}{2} - \frac{(f_d)_{b3} + (f_{-d})_{b3}}{2} \\ &= \frac{(\cos\theta_5 + \cos\theta_6 - 2)(f_b)_{b3} + (\sin\theta_5 + \sin\theta_6)(f_b)_{b1}}{2} + \frac{(\sin\theta_5 - \sin\theta_6)(dpr + d\dot{q})}{2}\end{aligned} \quad (۳۸)$$

خطاهای شتاب نقطه b در سه راستای محورهای دستگاه بدنی ناشی از ناهم‌محوری شتاب‌سنج‌ها در رابطه (۳۹) آمده است.

$$\begin{cases}(\Delta f_b)_{b1\ missalignment} = \dfrac{(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 - 2)(f_b)_{b1} + (\sin\theta_1 + \sin\theta_2)(f_b)_{b3}}{2} + \dfrac{(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)(dpr - d\dot{q})}{2} \\ (\Delta f_b)_{b2\ missalignment} = \dfrac{(\cos\theta_3 + \cos\theta_4 - 2)(f_b)_{b2} + (\sin\theta_3 + \sin\theta_4)(f_b)_{b3}}{2} + \dfrac{(\sin\theta_3 - \sin\theta_4)(dpr - d\dot{p})}{2} \\ (\Delta f_b)_{b3\ missalignment} = \dfrac{(\cos\theta_5 + \cos\theta_6 - 2)(f_b)_{b3} + (\sin\theta_5 + \sin\theta_6)(f_b)_{b1}}{2} + \dfrac{(\sin\theta_5 - \sin\theta_6)(dpr + d\dot{q})}{2}\end{cases} \quad (۳۹)$$

این ناهم‌محوریها موجب می‌شوند که خطایی در خروجیهای شتاب-سنج‌ها به‌وجود آید که باعث خطا در سرعت و موقعیت وسیله خواهد شد. در ادامه به تاثیر خطای ناهم‌محوری شتاب‌سنجها در سرعتهای زاویه-ای وسیله پرداخته می شود. ساختار ۱۰تایی از شتاب سنجها که در قسمت قبل بیان شد، سرعت‌های زاویه‌ای وسیله را به کمک روابط (۴۰) نتیجه می‌دهد.

$$\begin{aligned}p_{no\ misalignment} &= \pm\sqrt{\frac{+(f_{m1})_{b1} - (f_{m2})_{b1} - (f_{m3})_{b2} + (f_{m4})_{b2} - (f_{m5})_{b3} + (f_{m6})_{b3}}{4d}} \\ q_{no\ misalignment} &= \pm\sqrt{\frac{-(f_{m1})_{b1} + (f_{m2})_{b1} + (f_{m3})_{b2} - (f_{m4})_{b2} - (f_{m5})_{b3} + (f_{m6})_{b3}}{4d}} \\ r_{no\ misalignment} &= \pm\sqrt{\frac{-(f_{m1})_{b1} + (f_{m2})_{b1} - (f_{m3})_{b2} + (f_{m4})_{b2} + (f_{m5})_{b3} - (f_{m6})_{b3}}{4d}}\end{aligned} \quad (۴۰)$$

رابطه (۴۰) با این فرض به‌دست آمده است که محورهای حساسیت شتاب‌سنج‌ها، دقیقا در راستای محورهای دستگاه بدنی باشند. فرض شود شتاب‌سنج‌های $m_1, m_2, ..., m_6$ دارای ناهم‌محوری به میزان $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_6$ باشند که در قسمت قبل این زاویه‌ها معرفی شدند. سرعتهای زاویه ای وسیله با وجود ناهم محوری در شتاب سنجها ($p_{misalignment}, q_{misalignment}, r_{misalignment}$) از رابطه (۴۱) قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned}p_{misalignment} &= \pm\sqrt{\frac{+(f_d)_{\theta1} - (f_{-d})_{\theta2} - (f_d)_{\theta3} + (f_{-d})_{\theta4} - (f_d)_{\theta5} + (f_{-d})_{\theta6}}{4d}} \\ q_{misalignment} &= \pm\sqrt{\frac{-(f_d)_{\theta1} + (f_{-d})_{\theta2} + (f_d)_{\theta3} - (f_{-d})_{\theta4} - (f_d)_{\theta5} + (f_{-d})_{\theta6}}{4d}} \\ r_{misalignment} &= \pm\sqrt{\frac{-(f_d)_{\theta1} + (f_{-d})_{\theta2} - (f_d)_{\theta3} + (f_{-d})_{\theta4} + (f_d)_{\theta5} - (f_{-d})_{\theta6}}{4d}}\end{aligned} \quad (۴۱)$$

در رابطه (۴۱) پارامترهای $(f_d)_{\theta1}$, $(f_{-d})_{\theta2}, ..., (f_{-d})_{\theta6}$ معرف سیگنالهای خروجی شتاب‌سنج‌ها با وجود ناهم‌محوری در آنها میباشند. خطای سرعت‌های زاویه‌ای ناشی از ناهم‌محوری شتاب‌سنجها با محورهای دستگاه بدنی از رابطه (۴۲) به دست می آید.

$$\begin{aligned}(\Delta p)_{misalignment} &= p_{\ misalignment} - p_{no\ misalignment} \\ (\Delta q)_{misalignment} &= q_{\ misalignment} - q_{no\ misalignment} \\ (\Delta r)_{misalignment} &= r_{\ misalignment} - r_{no\ misalignment}\end{aligned} \quad (۴۲)$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.3.1.0]

در رابطه (۴۲)، $(\Delta p)_{misalignment}$ و $(\Delta q)_{misalignment}$ و $(\Delta r)_{misalignment}$ خطای سرعت‌های زاویه‌ای ناشی از ناهم‌محوری شتابسنجها می باشند. این خطاها ضمن تاثیرگذاری بر روی مقادیر کواترنین‌ها و ماتریس دوران، در نهایت باعث ایجاد خطا سرعت و موقعیت وسیله خواهند شد. به این ترتیب خطاهای ناشی از بایاس شتاب سنجها و ناهم محوری محور حساسیت شتاب سنجها، مدل سازی شده و میزان تاثیر این خطاها در شتابهای خطی و سرعتهای زاویه ای وسیله ای به دست آورده شدند.

۶- شبیه‌سازی و نتایج

در این قسمت یک حرکت کلی را مورد بررسی می شود، اگر حرکت وسیله در دستگاه بدنی دارای شتاب خطی ${}^b\vec{a}(t)=[a_x(t),a_y(t),a_z(t)]^T$ و سرعت زاویه‌ای ${}^b\vec{\omega}_{ib}=[p(t),q(t),r(t)]^T$ باشد، در این صورت برای به‌دست آوردن کواترنین‌ها باید معادلات دیفرانسیلی در رابطه (۴۳) را حل کرد که در حالت کلی، شکل بسته‌ای نمی‌توان به‌دست آورد و لازم است به صورت عددی حل شوند و سپس ماتریس دوران از رابطه (۴۴) محاسبه می شوند.

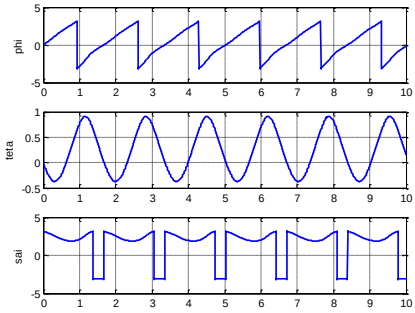
$$\begin{bmatrix}\dot P_1\\ \dot P_2\\ \dot P_3\\ \dot P_4\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & +r & -q & +p\\ -r & 0 & +p & +q\\ +q & -p & 0 & +r\\ -p & -q & -r & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\\ P_4\end{bmatrix},\ P_j=2\varepsilon_j\ ,\ j=1,2,3,4 \qquad (۴۳)$$

$${}^i_bC_\varepsilon=\begin{bmatrix}1-2(\varepsilon_2{}^2+\varepsilon_3{}^2) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_3\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_4)\\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_3\varepsilon_4) & 1-2(\varepsilon_1{}^2+\varepsilon_3{}^2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\varepsilon_1\varepsilon_4)\\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\varepsilon_2\varepsilon_4) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_4) & 1-2(\varepsilon_1{}^2+\varepsilon_2{}^2)\end{bmatrix} \qquad (۴۴)$$

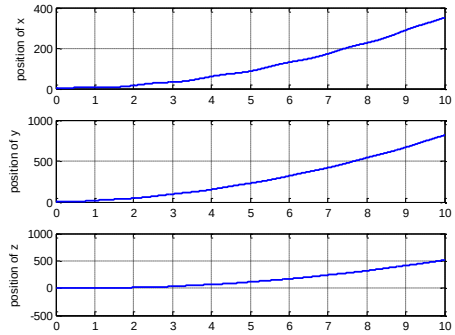
در رابطه (۴۳)، $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ معرف کواترنینها می باشند و در رابطه (۴۴)، ${}^i_bC_\varepsilon$ بیانگر ماتریس دوران از دستگاه بدنی به دستگاه اینرسی می باشد. فرض شود اندازه‌گیری‌های زیر توسط ساختار شتاب-سنج‌ها در دستگاه بدنی به صورت زیر انجام شده است.

$${}^b\vec{a}(t)=[50,10,10]^T\,(\frac{m}{s^2})\ ,\ {}^b\vec{\omega}_{ib}=[1,2,3]^T\,(\frac{rad}{s})$$

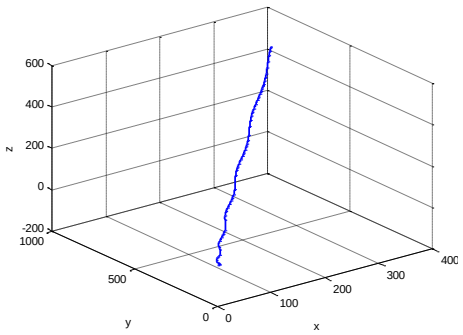
نمودار مربوط به زوایای اویلر و کواترنین‌های مربوط به این سناریوی حرکتی پس مدت ۱۰ ثانیه شبیه سازی، به صورت شکل‌های (۱۱) و (۱۲) خواهد بود. موقعیت وسیله در راستای محورهای دستگاه اینرسی و مسیر حرکت آن در این دستگاه در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ آمده است. اگر شتاب‌سنج‌ها دارای بایاس به اندازه $1\mu\ \frac{m}{s^2}$ و ناهم محوری به اندازه حداکثر ۰.۱ درجه باشند خطاهای موقعیت وسیله در راستای محورهای x و y و z با استفاده از روابط خطای شتابهای خطی و سرعتهای زاویه ای به ترتیب ۰.۴۵- و ۲.۰۴- و ۲.۹۸- خواهد بود. پس از شبیه سازی به کمک نرم افزار matlab/simulink خطای موقعیت وسیله پس از ۱۰ ثانیه ناوبری نیز به صورت شکل ۱۴ است.



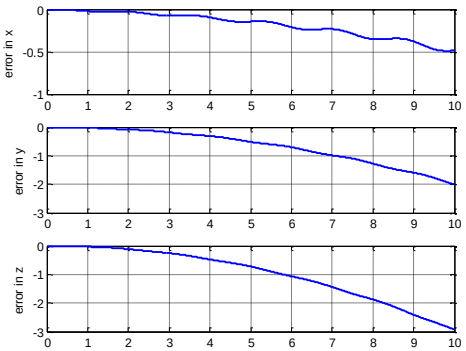
شکل ۱۱: زوایای اویلر با استفاده از شبیه‌سازی



شکل ۱۲: موقعیت جسم در راستای هر محور دستگاه مختصات اینرسی



شکل ۱۳: مسیر حرکت جسم در دستگاه مختصات اینرسی



شکل ۱۴: خطای موقعیت در دستگاه مختصات اینرسی ناشی از بایاس و ناهم‌محوری

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.3.1.0]

با توجه به شکل ۱۴ مشاهده می شود که خطای موقعیت پس از ۱۰ثانیه ناوبری در راستای محورهای x و y و z به ترتیب به اندازه ۰.۵- و ۲- و ۳- خواهد بود که بسیار به مقادیری که مستقیما از روابط خطای شتابهای خطی و سرعتهای زاویه ای به دست آمده اند، نزدیک می باشد.

۷- نتیجه گیری

در این مقاله ابتدا یک ساختار ۱۰ تایی از شتاب‌سنجها ارایه شد که قادر به اندازه‌گیری شتابهای خطی و سرعتهای زاویه‌ای وسیله است. بایاس و ناهم‌محوری شتاب‌سنجها که از مهمترین خطاهای شتاب-سنجهاست در این مقاله مدلسازی شده و تاثیر آنها در ناوبری مورد آنالیز مورد بررسی قرار گرفت. در پایان مقاله با ارایه یک مثال، نتایج شبیه-سازی ارایه شد. نتایج شبیه سازی گویای این موضوع است که این ساختار از دقت تقریبا مطلوبی برای ناوبریهای کوتاه مدت برخوردار است.

۸- فهرست علایم و متغیرها

${}^b\vec{\omega}_{ib}$: سرعت زاویه ای دستگاه مختصات بدنی نسبت به دستگاه مختصات اینرسی

${}^b\vec{f}_b$: شتاب نقطه b در دستگاه بدنی

${}^b\vec{f}_m$: شتاب جرم آزمون در دستگاه بدنی

${}^b_iC$: ماتریس تبدیل از دستگاه مختصات اینرسی به دستگاه مختصات بدنی

${}^i\vec{r}_m$: بردار مکان جرم آزمون شتاب‌سنج، بیان شده در دستگاه اینرسی

${}^i\vec{r}_b$: بردار مکان نقطه b بیان شده در دستگاه اینرسی

${}^i\vec{r}_{bc}$: بردار مکان از نقطه b تا نقطه c (نقطه‌ای از بدنه)، بیان شده در دستگاه اینرسی

${}^i\vec{r}_{cm}$: بردار مکان بدنه شتاب‌سنج و جرم آزمون، بیان شده در دستگاه اینرسی

$(f_b)_{bj}$: مولفه jام شتاب خطی نقطه b در راستای محور jام دستگاه بدنی، (j=1,2,3)

$(f_m)_{bj}$: مولفه jام شتاب خطی مرکز جرم شتاب سنج در راستای محور jام دستگاه بدنی، (j=1,2,3)

p : سرعت زاویه ای وسیله حول محور اول دستگاه مختصات بدنی

q: سرعت زاویه ای وسیله حول محور دوم دستگاه مختصات بدنی

r: سرعت زاویه ای وسیله حول محور سوم دستگاه مختصات بدنی

$(f_{mn})_{bj}$: مولفه jام شتاب خطی وسیله، اندازه گیری شده توسط شتاب سنج nام، (j=1,2,3 و n=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)

d: فاصله شتاب سنج تا مرکز جرم وسیله

δf_{bias}: بایاس شتاب سنج

δP: خطای موقعیت وسیله

t: زمان

$(\delta f_{bias})_k$: بایاس شتاب سنج kام، (k=1,2,3,4,5,6)

$((\Delta f_b)_{bj})_{bias}$: خطای مولفه jام شتاب نقطه b ناشی از بایاس شتابسنج

$(\Delta p)_{bias}, (\Delta q)_{bias}, (\Delta r)_{bias}$: خطای سرعتهای زاویه ای وسیله ناشی از بایاس شتاب سنج

$\Delta\varepsilon_i$: خطای کواترنینها، (i=1,2,3,4)

$S\vec{\theta}_k$: بردار محور حساسیت شتاب سنج kام

$(f_b)_{bj\ missalignment}$: مولفه jام شتاب نقطه b با وجود ناهم محوری شتاب سنج

$(f_d)_{\theta_k}$ یا $(f_{-d})_{\theta_k}$: خروجی شتاب سنج kام با وجود ناهم محوری θ_k در محور حساسیت آن، (k=1,2,3,4,5,6)

$(\Delta f_b)_{bj\ missalignment}$: خطای مولفه jام شتاب نقطه b ناشی از ناهم محوری

$p_{no\ misalignment}, q_{no\ misalignment}, r_{no\ misalignment}$: سرعت زاویه ای وسیله در دستگاه مختصات بدنی بدون ناهم محوری شتاب سنجها

$p_{misalignment}, q_{misalignment}, r_{misalignment}$: سرعت زاویه ای وسیله در دستگاه مختصات بدنی با ناهم محوری شتاب سنجها

$(\Delta p)_{misalignment}$ و $(\Delta q)_{misalignment}$ و $(\Delta r)_{misalignment}$:خطای سرعت زاویه ای وسیله در دستگاه مختصات بدنی ناشی از ناهم محوری شتاب سنجها

${}^i_bC_\varepsilon$: ماتریس دوران از دستگاه مختصات بدنی به دستگاه مختصات اینرسی بیان شده بر حسب کواترنینها

مراجع

[1] Titterton, D.H. Strapdown inertial navigation technology (2nd Edition), Institution of Engineering and Technology, 2004.

[2] L.D. DiNapoli, "The Measurement of Angular Velocities without the Use of Gyros," hiladelphia: The Moore School of Electrical Engineering University of Pennsylvania, pp. 34-41,1965.

[3] Alfred R. Schuler, "Measuring Rotational Motion with Linear Accelerometers," IEEE Trans. on AES, 1967,vol.3, no. 3, pp. 465-472.

[4] Chin-Woo Tan, Kirill Mostov, Pravin Varaiya, "Feasibility of a Gyroscope-free Inertial Navigation System for Tracking Rigid Body Motion", Department of Electrical Engineering and Computer SciencesUniversity of California, Berkeley, May 2000.

[5] Qi Wang, Mingli Ding and Peng Zhao, "A New Scheme of Non – Gyro Inertial Measurement Unit for Estimation Angular Velocity" 2003 IEEE.

[6] Akeila, E., Salcic, Z., Swain, A., "Implementation, calibration and testing of GFINS models based on six-accelerometer cube", Proc. of TENCON 2008.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.3.1.0]