مجله کنترل- ویژه‌نامه کووید-۱۹
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۴، شماره ۵، ویژه‌نامه کووید-۱۹، صفحه ۷۰-۵۹

تحلیل مدل SQEIAR و طراحی کنترل‌کننده فازی مد لغزشی به منظور تعیین نرخ قرنطینه‌سازی برای پاندمی کووید-۱۹

امیرحسین امیری مهرا[۱]، محسن شفیعی راد[۲]، زهره عباسی[۳]، ایمان زمانی[۴]، زهره اعرابی[۵]

[۱]دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه کاشان a.amirimehra@grad.kashanu.ac.ir

[۲]استادیار گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه کاشان m.shafieirad@kashanu.ac.ir

[۳]دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه کاشان abbasi.z@grad.kashanu.ac.ir

[۴]استادیار گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و الکترونیک، دانشگاه شاهد zamaniiman@shahed.ac.ir

[۵]دانشکده پزشکی، دانشگاه علوم پزشکی کاشان، کاشان، ایران aarabizohreh.academic@gmail.com

تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۹/۱۰/۱۰، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۹/۱۱/۲۵

چکیده: با توجه به شیوع گسترده پاندمی ویروس کرونا (کووید-۱۹) در سراسر جهان، مدل‌های ریاضی می‌توانند به پیش‌بینی و کنترل این پاندمی کمک کنند. از این‌رو، در این مقاله ابتدا یک مدل جامع برای بررسی روند بیماری کووید-۱۹ مبتنی بر افراد مستعد، درمعرض، عفونی (باعلامت و بدون علامت) و بهبودیافته در نظر گرفته می‌شود. سپس با توجه به فقدان هرگونه واکسیناسیون عمومی یا درمان موثر، گروه افراد «در قرنطینه» به مدل مذکور اضافه می‌شود. پس از بررسی مثبت بودن حالات و محاسبه معیار آستانه (R_0) به محاسبه نقاط تعادل (تعادل بدون بیماری و اندمیک) پرداخته و پایداری آن‌ها با استفاده از ماتریس ژاکوبین بررسی می‌شود. در ادامه، توسط یک کنترل‌کننده فازی مد لغزشی، نرخ قرنطینه‌سازی به‌عنوان تنها ورودی کنترلی بیماری تعیین و تنظیم می‌گردد. میزان کارایی کنترل‌کننده نیز در حضور عدم قطعیت پارامترهای مدل بررسی می‌شود که نتایج حاصل، مؤید عملکرد مطلوب آن است. همچنین، تأثیر جامعه آلوده بر سایر جوامع در حضور کنترل‌کننده بررسی خواهد شد. در نهایت، عملکرد و کارایی کنترل‌کننده توسط شبیه‌سازی، مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: کووید-۱۹، مدل‌سازی ریاضی، تحلیل پایداری، قرنطینه، فازی مد لغزشی.

Fuzzy Sliding Mode Controller Design and Analysis of an SQEIAR Epidemic Model for COVID-19 to Determine the Quarantine Rate

Amir Hossein Amiri Mehra, Mohsen Shafieirad, Zohreh Abbasi, Iman Zamani, Zohreh Aarabi

Abstract: According to the global prevalence of coronavirus (COVID-19) pandemic, mathematical models can predict and control the dynamic behavior of the pandemic. Therefore, in this study, a comprehensive model is considered to examine the trend of COVID-19 based on Susceptible, Exposed, Infected (Symptomatic and Asymptomatic), and Recovered individuals. In the absence of a curative treatment or vaccination campaign, the group of "quarantined people" is added to the model. Then, a positivity analysis of states is examined, and the threshold criterion (R_0) is determined. The equilibrium points (disease-free and endemic) are also calculated, and their stability is investigated using the Jacobin matrix. The quarantine rate is regulated as the only control input using the fuzzy sliding mode controller. The efficiency of the controller is also investigated in the presence of uncertainty in model parameters. Also, the impact of the infected community on other communities, considering the controller, will be examined. Finally, the performance and efficiency of the proposed controller are evaluated.

Keywords: COVID-19, Mathematical Modeling, Stability Analysis, Quarantine, Fuzzy Sliding Mode.

نویسنده عهده دار مکاتبات: محسن شفیعی راد

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.5.7.3]
[DOI: 10.52547/joc.14.5.59]

۱- مقدمه

کروناویروس‌ها[1] خانواده بزرگی از ویروس‌ها هستند که می‌توانند عامل ایجاد بیماری‌هایی مانند سرماخوردگی معمولی تا بیماری‌های شدیدتری همچون سارس[2]، مرس[3] شوند [۱]. آخرین نوع از این ویروس، کروناویروس سندروم[4] حاد تنفسی (SARS-CoV-2) است که عامل ابتلا به بیماری کووید-۱۹[5] می‌باشد. علائم بیماری کووید-۱۹ می‌تواند شامل علائم سرماخوردگی عادی تا تب و لرز، سرفه، تنگی نفس، مشکلات حاد تنفسی و مشکلات گوارشی باشد. کروناویروس علاوه بر دستگاه تنفسی می‌تواند ارگان‌های حیاتی دیگر بدن مانند کلیه، قلب و مغز را نیز درگیر کند. همچنین در سالمندان و افراد دارای بیماری‌های زمینه‌ای مانند فشار خون بالا، بیماری‌های قلبی و دیابتی، شدت بیماری بیشتر بوده است [۲و۳].

بیماری کووید-۱۹ در دسامبر ۲۰۱۹ در شهر ووهان چین با همه‌گیری در انسان آغاز شد و در مدتی کوتاه به شکل پاندمی درآمد. همچنین در تاریخ یکم اسفند ۱۳۹۸، دو مورد ابتلا به بیماری کرونا به طور رسمی در کشور ایران گزارش شد [۴]. برای جلوگیری از شیوع ویروس کرونا، دولت ایران محدودیت‌هایی مانند فاصله‌گذاری اجتماعی، لغو تجمعات، محدود کردن سفرها، تعطیلی مدارس، دانشگاه‌ها و مراکز خرید و... را وضع نمود. قرنطینه خانگی افراد نیز به عنوان موثرترین و مهم‌ترین روش جلوگیری از شیوع پاندمی در بسیاری از شهرهای کشور انجام گردید. اما از اردیبهشت ۱۳۹۹ و زمانی‌که محدودیت‌های دولت به تدریج کاهش یافت، تعداد موارد مبتلایان که روندی کاهشی به خود گرفته بود مجدداً افزایش یافت و قله‌ای جدید در تعداد مرگ ومیر و ابتلای بیماران ایجاد شد [۴]. پس از آن در پاییز ۱۳۹۹، ایران شاهد سومین قله در شیوع پاندمی ویروس کرونا بود. در نتیجه، با توجه به روند افزایشی ویروس کرونا، شناخت نحوه عملکرد آن، به منظور اعمال کنترل‌کننده مناسب برای کاهش شیوع، امری ضروری می‌باشد.

از آنجاییکه پیش‌بینی مراحل و روند رشد بیماری با روش‌های معمول به‌سادگی امکان پذیر نیست، در نتیجه از طریق مدل‌سازی و با در نظرگرفتن عوامل موثر در تغییر این روند، می‌توان مراحل رشد پاندمی را پیش‌بینی کرده و به تصمیم‌گیری در مورد مدیریت پاندمی، تخصیص بودجه مناسب، اجرای اقدامات فاصله‌گذاری اجتماعی و ... پرداخت تا بتوان شیوع بیماری را تا زمانیکه واکسن در دسترس عموم قرار گیرد کنترل نمود. با توجه به اهمیت تشخیص روند بیماری کووید-۱۹ در سراسر جهان، استفاده از مدل‌سازی ریاضی در تحلیل عملکرد این بیماری در تحقیقات اخیر بسیار مورد استفاده قرار گرفته است. نویسندگان در [۷-۵] به ساده ترین نوع مدل‌سازی همه‌گیری، شامل افراد مستعد[6]، بیمار[7] و بهبود یافته[8] برای این بیماری پرداخته‌اند که با توجه به ماهیت و طبیعت متفاوت این ویروس، لزوم افزودن گروه‌های جدید برای بررسی دقیق تر بیماری احساس می‌شود. از اینرو، دریس کادا و همکاران در [۸] به مطالعه یک مدل ریاضی برای بررسی بیماری کووید-۱۹ در مراکش پرداخته‌اند که در آن، گروه افراد آلوده به سه دسته «عفونی بدون علائم، عفونی با علائم و عفونی دارای عوارض» تقسیم شده است. مدل مذکور شامل دو استراتژی کنترلی «درمان بیماران آلوده با قرنطینه‌سازی در بیمارستان‌ها» و «استفاده از ماسک برای پوشاندن اعضای حساس بدن» است.

مطالعات دیگری نیز در زمینه مدل‌سازی وبیماری کووید-۱۹ با محوریت بررسی پایداری نقاط تعادل و محاسبه تعداد بازتولید اساسی صورت گرفته است [۹] و [۱۰]. پیو ساموییی و همکاران در [۹] مدلی ریاضی برای پیش بینی و کنترل دینامیک پاندمی کووید-۱۹ در کشور هند معرفی کرده‌اند که شامل افراد «مستعد، بیمار بدون علامت، بیمار با علامت گزارش شده و بیمار با علامت گزارش نشده» است. درنهایت با محاسبه عدد بازتولید اساسی (R_0) به تجزیه و تحلیل پایداری برای نقطه تعادل بدون بیماری و همچنین نقطه تعادل اندمیک[9] پرداخته‌اند. فاچال ندائرو و همکاران [۱۰] نیز مدل ریاضی دیگری با تمرکز ویژه بر انتقال ویروس توسط افراد فوق العاده پخش‌کننده در شهر ووهان چین در نظر گرفته و به پایداری نقطه تعادل بدون بیماری از دیدگاه عدد بازتولید اساسی را بررسی نموده‌اند. نویسندگان در [۱۱] به مدل‌سازی بیماری آنفلوآنزا پرداخته‌اند، اما از آنجاییکه مدل‌سازی بیماری‌های عفونی غالباً مختص یک بیماری خاص نیست، می‌توان اینگونه مدل‌سازی‌ها را با تغییر در پارامترها و گاهاً اضافه و یا کم کردن برخی حالت‌ها به سایر بیماری‌ها از جمله ویروس کرونا نیز گسترش داد. از اینرو، در این مقاله، مدل جامع ذکر شده در [۱۱] که شامل افراد مستعد، در معرض، عفونی (با علامت و بدون علامت) و بهبودیافته است، در نظر گرفته می‌شود. سپس با توجه به سرعت شیوع پاندمی در ایران که همچنان دارای نرخ صعودی است بر لزوم قرنطینه‌سازی به عنوان ابزار کنترل بیماری، تاکید شده و گروه جدیدی به نام افراد قرنطینه شده همانند [۱۲] و [۱۳] که افراد قرنطینه شده را به عنوان یک گروه مجزا در دینامیک در نظر گرفتند، اضافه می‌شود. مدل مذکور، در عین سادگی، گروه‌های درگیر پاندمی و ارتباط آن‌ها با یکدیگر در جامعه را به‌خوبی نمایش می‌دهد.

طولانی شدن پاندمی نه تنها باعث بالا رفتن آمار مرگ ومیر می‌شود، بلکه هزینه‌های هنگفت درمانی و بهداشتی برای جلوگیری از انتشار ویروس در جامعه را افزایش داده و پیامدهای اقتصادی زیان باری خواهد داشت. در این راستا، نویسندگان در [۱۴]، دینامیک پاندمی ویروس کرونا را با استفاده از مدل شامل افراد مستعد، در معرض، عفونی و حذف شده با نرخ تماس غیرخطی مدل کرده‌اند. سپس به منظور کنترل انتقال پاندمی، ضریب تابع تماس غیرخطی را به عنوان ورودی کنترلی اتخاذ کرده و با استراتژی مد لغزشی به کنترل این ضریب پرداخته‌اند. به دلیل ماهیت

[1] Coronaviruses
[2] SARS
[3] MERS
[4] Syndrome
[5] COVID-19
[6] Susceptible
[7] Infected
[8] Recovered
[9] Endemic

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.5.7.3]
[DOI: 10.52547/joc.14.5.59]

بیماری ویروس کرونا، در نظر گرفتن گروه افراد عفونی بی علامت می‌تواند مدل را به دنیای واقعی نزدیک‌تر کند که در [۱۴] این گروه در نظرگرفته نشده است و از آنجاییکه نرخ تماس مستقیماً قابل کنترل نیست، ابتدا باید قرنطینه اعمال گردد تا در نتیجه آن نرخ تماس کاهش یابد، پس لزوم در نظر گرفتن یک گروه به نام «افراد قرنطینه شده» احساس می‌گردد. همچنین مطالعات دیگری در زمینه کنترل مد لغزشی با رویکرد بیماری‌های پاندمیک و اپیدمیک، بدون در نظر گرفتن قرنطینه‌سازی، انجام شده است که می‌توان به [۱۱]، [۱۵] و [۱۶] اشاره کرد. درهرحال از آنجاییکه تنها راه جلوگیری از انتشار ویروس کرونا تا یافتن واکسن مؤثر، اعمال قرنطینه است، پس مدل‌های مذکور قابلیت کمتری برای نشان دادن ویژگی‌های این پاندمی داشته و برای بررسی این بیماری نیاز به در نظر گرفتن قرنطینه در مدل احساس می‌شود. در نتیجه در مقاله پیش رو، گروه جدیدی با نام «افراد قرنطینه شده» به مدل ارائه شده در [۱۱] اضافه می‌شود تا بتوان بطور مستقیم به جلوگیری از انتشار ویروس کمک کرد [۱۲] و [۱۳].

با توجه به اینکه کنترل مد لغزشی دارای دقت بالا، قابلیت تنظیم پارامترها به شکل آسان و مقاومت در حضور عدم قطعیت محدود در پارامترها است، در مطالعه پیش رو نرخ تماس به عنوان عدم قطعیت در نظر گرفته شده و سپس نرخ قرنطینه‌سازی به عنوان یک ورودی کنترلی حاصل از مد لغزشی به مدل اعمال می‌گردد. با اینکه کنترل مد لغزشی از مزایای زیادی برخوردار است، اما همواره مسئله چترینگ[1] ناشی از ناپیوستگی تابع علامت[2] در سیگنال کنترل ورودی باعث ایجاد مشکل می‌گردد و گاهی اوقات می‌تواند عملکرد سیستم را ناپایدار سازد. روش‌های مختلفی برای کاهش چترینگ پیشنهاد شده که یکی از این روش‌ها، جایگزینی تابع علامت با یک تقریب پیوسته مانند توابع اشباع[3] یا تانژانت هیپربولیک است. لازم به ذکر است، استفاده از کنترل مد لغزشی مرتبه بالاتر [۱۷]، شبکه‌های عصبی [۱۸] و [۱۹]، و روش لایه مرزی نازک [۲۰] در همسایگی سطح لغزش نیز می‌تواند اثر چترینگ را از بین ببرد اما یک خطای ثابت حالت ماندگار به‌وجود می‌آید. یکی دیگر از روش‌های حذف چترینگ در استراتژی مد لغزشی، استفاده از منطق فازی به عنوان یک تکنیک کنترل هوشمند مبتنی بر دانش بشر و محاسبات ریاضی کمتر می‌باشد که آن را به یک روش کنترلی آسان تبدیل کرده است. این منطق از استدلال تقریبی استفاده می‌کند و عبارات زبانی را به رابطه بین متغیرهای سیستم اعمال می‌کند [۲۱]. نویسندگان در [۲۲] ابتدا یک کنترل کننده مد لغزشی برای مدل کوادکوپتر طراحی کردند سپس بهره سوئیچینگ کنترل کننده مد لغزشی را بر اساس تکنیک کنترل فازی تنظیم کرده‌اند. همچنین در [۲۳] از کنترل فازی در تنظیم بلادرنگ ضریب سطح لغزش به منظور اصلاح عملکرد (زمان نشست و فراجهش کمتر) استفاده شده است. حذف چترینگ با استفاده از منطق فازی به دو صورت «فازی کردن لایه مرزی» و «فازی کردن ضریب تابع علامت» انجام می‌شود که در این مطالعه از روش دوم استفاده می‌شود. با توجه به وجود عدم قطعیت در پارامترهای مدل مورد استفاده در مقاله پیش رو، می‌توان از [۲۴] برای مطالعه بیشتر در رابطه با کنترل فازی سیستم‌های دارای عدم قطعیت استفاده کرد. همچنین خوانندگان برای مطالعه بیشتر در مورد کنترل فازی مد لغزشی به [۲۵-۲۷] ارجاع داده می‌شوند.

علاوه بر طراحی کنترل‌کننده توسط منطق فازی می‌توان از آن، جهت مدل‌سازی سیستم نیز استفاده نمودکه در [۲۸] و [۲۹] به آن پرداخته شده است. همچنین برای بررسی پایداری کنترل‌کننده در سیستم فازی می‌توان از [۳۰-۳۲] استفاده کرد. اگر علاوه بر تأثیر زمان، تأثیر جابجایی در مکان نیز در شیوع بیماری در نظر گرفته شود، یک مدل اپیدمیک دو بعدی حاصل خواهد شد که با معادلات دیفرانسیل جزئی قابل توصیف است. برای آشنایی بیشتر با این نوع معادلات به [۳۳-۳۵] مراجعه شود.

این مقاله در ادامه به این صورت سازماندهی می‌شود: در بخش ۲، بیان مسئله مورد نظر به همراه معرفی مدل سیستم تشریح می‌گردد. در بخش ۳، نقاط تعادل بدون بیماری و اندمیک مدل پاندمی و عدد بازتولید اساسی محاسبه شده و تحلیل پایداری نقاط تعادل با استفاده از ماتریس ژاکوبین[4] بیان شده است. تأثیر نرخ قرنطینه‌سازی در شیوع وکنترل پاندمی و چالش‌های اعمال این نرخ در بخش ۴ مورد بحث قرار می‌گیرد. در بخش ۵، کنترل‌کننده فازی مد لغزشی بر روی مدل دارای عدم قطعیت در پارامتر اعمال می‌شود. در ادامه، در بخش ۶ تأثیر جامعه آلوده بر جوامع دیگر بحث شده و سپس به منظور بررسی عملکرد کنترل‌کننده، شبیه‌سازی عددی در بخش ۷ انجام می‌شود. در نهایت، نتیجه‌گیری و جمع بندی در بخش ۸ ارائه خواهد شد.

۲- بیان مسئله

مدلی که در این پژوهش مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته، مدل SQEIAR[5] برگرفته از [۱۲] است. مدل مذکور در نهایت سادگی تمام گروه‌های درگیر با ویروس کرونا را در برگرفته و ارتباط آن‌ها را بخوبی مشخص کرده است. حالت‌ها (گروه‌ها) شامل افراد مستعد (S)، قرنطینه شده (Q)، درمعرض (E)، بیمار با علامت (I)، بیمار بی‌علامت (A) و بهبودیافته (R) هستند. که در آن افراد مستعد (گروه S) به کسانی گفته می‌شود که مستعد ابتلا به پاندمی هستند ولی هنوز آلوده نیستند، افراد قرنطینه شده (گروه Q) نیز شامل گروهی از افراد است که در قرنطینه به سر می‌برند. با وجود کشف و تزریق واکسن مدت زمان و میزان مصونیت افراد در برابر ویروس کاملاً شناخته شده نیست. بنابراین همچنان لزوم اجرای قرنطینه‌سازی افراد مستعد امری ضروری است [۱۳]. در این مدل، «افراد در معرض» (گروه E) بیانگر افرادی هستند که درمعرض پاندمی قرار دارند (آلوده‌اند اما هنوز عفونی نیستند و توانایی انتقال بیماری را ندارند)، «افراد بیمار» (گروه I) نیز به افراد عفونی همراه با علائم بیماری گفته می‌شود.

[1] Chattering
[2] Sign Function
[3] Saturation Function
[4] Jacobian Matrix
[5] Susceptible-Quarantine-Exposed-Infected-Asymptomatic-Recovered

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.5.7.3]
[DOI: 10.52547/joc.14.5.59]

همچنین به‌دلیل دوره نهان بیماری، افراد بیماری هستند که علائمی از بیماری را در خود نشان نمی‌دهند اما می‌توانند به‌راحتی ویروس را به سایرین منتقل کنند. از اینرو در نظر گرفتن این افراد به عنوان یک گروه مجزا می‌تواند مدل‌سازی را به دنیای واقعی نزدیکتر کند. در نتیجه به حاملان ویروس بدون هیچ‌گونه علامت قابل توجه نیز «افراد بی علامت» (گروه A) گویند. افراد بهبودیافته از ویروس نیز با نام «افراد بهبود یافته» (گروه R) شناخته می‌شوند. در نهایت، N نشان‌دهنده‌ی کل جمعیت است. معادلات فضای حالت این مدل به صورت زیر می‌باشند:

$$\dot{S}(t) = \big(1 - S(t)\big)\mu - \beta\Lambda(t)S(t) - \lambda S(t) \quad (۱\text{-الف})$$

$$\dot{Q}(t) = \lambda S(t) - \mu Q(t) \quad (۱\text{-ب})$$

$$\dot{E}(t) = \beta\Lambda(t)S(t) - (\kappa + \mu)E(t) \quad (۱\text{-ج})$$

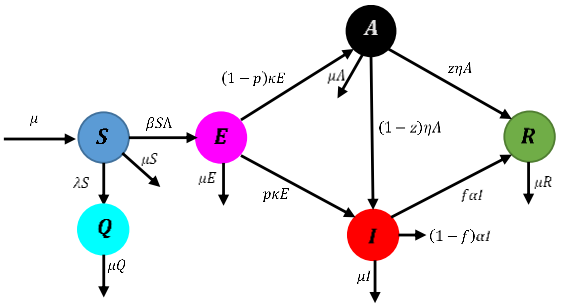
$$\dot{I}(t) = (1 - z)\eta A(t) - (\alpha + \mu)I(t) + p\kappa E(t) \quad (۱\text{-د})$$

$$\dot{A}(t) = (1 - p)\kappa E(t) - (\eta + \mu)A(t \quad (۱\text{-ه})$$

$$\dot{R}(t) = z\eta A(t) + f\alpha I(t) - \mu R(t) \quad (۱\text{-و})$$

بطوریکه، $N(t) = S(t) + Q(t) + E(t) + I(t) + A(t) + R(t)$ و $\Lambda(t) = \varepsilon E(t) + (1 - q)I(t) + \delta A(t)$. شرایط اولیه به صورت $\big(S(0), Q(0), E(0), I(0), A(0), R(0)\big) = (S_0, Q_0, E_0, I_0, A_0, R_0)$ و مثبت در نظر گرفته شده‌اند. همچنین تمام پارامترها دارای عدم قطعیت هستند و مقداری بین صفر و یک دارند.

همانطور که در شکل (۱) نشان داده شده است، افراد مستعد با نرخ λ به گروه افراد قرنطینه شده می‌روند. افراد درمعرض (E)، با نرخ κ به پاندمی مبتلا شده و سپس به دو گروه عفونی باعلامت (I) و بدون علامت (A) تقسیم می‌شوند. کسر p از اشخاص درمعرض به گروه عفونی باعلامت و مابقی (کسر $(1-p)$) به گروه بدون علامت می‌روند. کسر z از افراد بدون علامت (A) گروه خود را با نرخ η ترک می‌کنند و به گروه بهبودیافته (R) می‌روند و کسر $(1-z)$ به گروه افراد عفونی باعلامت (I) منتقل می‌شوند. همچنین، کسر f از افراد عفونی باعلامت با نرخ α بهبود پیدا کرده و کسر $(1-f)$ از آن‌ها در اثر ابتلا به ویروس کرونا می‌میرند. نرخ تولد (مرگ طبیعی) توسط μ نشان داده شده است. در هر گروه به استثنای افراد بهبودیافته، افراد با نرخ μ به‌طور طبیعی فوت می‌کنند و افراد بهبودیافته نیز با نرخ μ ترخیص می‌شوند.



شکل ۱: بلوک دیاگرام مدل SQEIAR [۱۲].

برای بررسی همواره مثبت بودن حالات (تعداد افراد) در دینامیک مذکور از قضیه زیر استفاده می‌شود:

قضیه ۱- اگر تمام شرایط اولیه بزرگتر یا مساوی صفر باشند، آنگاه پاسخ‌های $A(t), I(t), E(t), Q(t), S(t)$ و $R(t)$ در سیستم (۱) به ازای زمان‌های $t \geq 0$ همواره مثبت هستند.

اثبات- با توجه به معادله (۱-الف) و دانستن $S(t) < 1$، می‌توان نوشت:

$$\dot{S}(t) \geq -(\beta\Lambda(t) + \lambda)S(t)$$

سپس،

$$\dot{S}(t) + (\beta\Lambda(t) + \lambda)S(t) \geq 0$$

حال اگر دو طرف ناتساوی را در $e^{\int_0^t(\beta\Lambda(s)+\lambda)ds}$ ضرب کنیم، داریم:

$$\dot{S}(t)e^{\int_0^t(\beta\Lambda(\vartheta)+\lambda)d\vartheta} + (\beta\Lambda(t) + \lambda)S(t)e^{\int_0^t(\beta\Lambda(\vartheta)+\lambda)d\vartheta} \geq 0$$

که می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\frac{d\left(S(t)e^{\int_0^t(\beta\Lambda(\vartheta)+\lambda)d\vartheta}\right)}{dt} \geq 0$$

حال با انتگرال گیری از دو طرف ناتساوی در بازه ۰ تا t داریم:

$$S(t) \geq S(0)e^{-\int_0^t(\beta\Lambda(\vartheta)+\lambda)d\vartheta} \geq 0$$

در نتیجه $S(t)$ همواره مثبت است. برای سایر حالات (Q, E, I, A, R) نیز به طریق مشابه می‌توان اثبات کرد که همواره مثبت هستند. یعنی، $Q(t) \geq 0$ ،$Q(0)e^{-\int_0^t \mu d\vartheta} \geq 0$ ،$E(t) \geq E(0)e^{-\int_0^t(\kappa+\mu)d\vartheta} \geq 0$ ،$I(t) \geq I(0)e^{-\int_0^t(\alpha+\mu)d\vartheta} \geq 0$ ،$A(t) \geq A(0)e^{-\int_0^t(\eta+\mu)d\vartheta} \geq 0$ و $R(t) \geq R(0)e^{-\int_0^t(\eta_1)d\vartheta} \geq 0$ ■.

۳- محاسبه نقاط تعادل، معیار آستانه (R_0) و تحلیل پایداری

در این بخش، نقاط تعادل مدل پیشنهاد شده در دو حالت بدون بیماری و اندمیک محاسبه و پایداری این نقاط مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد. نقاط تعادل از برابر با صفر قرار دادن معادلات (۱) به فرم زیر بدست می‌آیند:

$$Q_{DFS} = (N, 0, 0, 0, 0, 0) \quad (۲)$$

که Q_{DFS} تعادل بدون بیماری و یا پاسخ بدون بیماری[1] نامیده می‌شود. نقطه تعادل اندمیک[2] (پاسخ اندمیک) نیز به صورت زیر بدست می‌آید:

$$Q_{ES} = (S^*, Q^*, E^*, I^*, A^*, R^*) = \left(\frac{\mu+\kappa}{\beta}\left[\frac{1}{\varepsilon+(1-q)c_2+\delta c_1}\right], \frac{\lambda}{\mu}S^*, \frac{1-S^*-Q^*}{1+c_1+c_2+\frac{z\eta}{\mu}c_1+\frac{f\alpha}{\mu}c_2}, c_2E^*, c_1E^*, [\frac{z\eta}{\mu}c_1 + \frac{f\alpha}{\mu}c_2]E^*\right) \quad (۳)$$

که در آن، $c_1 = \frac{\kappa(1-p)}{\mu+\eta}$ و $c_2 = \frac{p\kappa+\eta(1-z)c_1}{\mu+\alpha}$ می‌باشد. برای بررسی میزان مسری بودن یک بیماری از تعریفی به نام عدد بازتولید اساسی[3] استفاده

[1] Disease Free Solution
[2] Endemic Solution
[3] Basic Reproduction Number

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.5.7.3]
[DOI: 10.52547/joc.14.5.59]

می‌شود. عدد بازتولید اساسی (R_0) بیانگر تعداد افراد عفونی ثانویه تولید شده توسط یک فرد بیمار در طول دوره‌ی عفونی خود است. در واقع می‌توان R_0 را پارامتر دوشاخگی[1] برای مدل (۱) در نظر گرفت.

قضیه ۲- اگر $R_0 < 1$ باشد، نقطه تعادل بدون بیماری $(N,0,0,0,0,0)$ بطور محلی پایدار مجانبی و اگر $R_0 > 1$ باشد بطور محلی ناپایدار است[۳۶].

با توجه به قضیه ۲، اگر R_0 کمتر از یک باشد، هر فرد آلوده به‌طور متوسط کمتر از یک فرد را آلوده می‌کند و از این‌رو عفونت از بین می‌رود (پاسخ بدون بیماری). از سوی دیگر، اگر R_0 بیشتر از یک باشد، پاتوژن[2]، توانایی حمله به جمعیت مستعد را دارد [۳۷] و بیماری به مرحله پاندمی می‌رسد (پاسخ اندمیک). در ادامه به محاسبه عدد بازتولید اساسی مدل مذکور طبق [۳۶] پرداخته خواهد شد.

ظهور عفونت و انتقال آن از سه گروه A ,I و E می‌باشد. لذا به منظور محاسبه R_0 داریم: $\mathcal{F}_i$ نرخ ظهور عفونت‌های جدید در گروه i، $\mathcal{V}_i^+$ نرخ انتقال افراد به گروه i، $\mathcal{V}_i^-$ نرخ انتقال افراد از گروه i. فرض بر این است که هر تابع حداقل دو بار در هر متغیر پیوسته مشتق‌پذیر باشد. مدل انتقال بیماری با شرایط اولیه مثبت به صورت زیر می‌باشد:

$$\dot{x}_i = f_i(x) = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x) \qquad i = 1, \dots, n \qquad (۴)$$

بطوریکه $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i^- - \mathcal{V}_i^+$. شرایط ذکر شده در [۳۶] این اجازه را می‌دهد که R_0 طبق F و V که در ادامه بیان شده‌اند محاسبه شود. F و V ماتریس‌هایی $m \times m$، غیرمنفی و ناویژه هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$V = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}\right] \quad , \quad F = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}\right] \quad , \quad 1 \le i.j \le m \qquad (۵)$$

F و V برای این مدل به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta(1-q) & \beta\delta & \beta\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \mu+\alpha & -(1-z)\eta & -p\kappa \\ 0 & \mu+\eta & -(1-p)\kappa \\ 0 & 0 & \mu+\kappa \end{bmatrix}$$

در نهایت عدد بازتولید اساسی برابر است با:

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{1}{S^*} = \frac{1}{\frac{\mu+\kappa}{\beta}\left[\frac{1}{\varepsilon+(1-q)c_2+\delta c_1}\right]} = \frac{\beta}{\mu+\kappa}[\varepsilon + (1-q)c_2 + \delta c_1] \qquad (۶)$$

که $\rho(Y)$، ماکزیمم قدر مطلق مقادیر ویژه می‌باشد (شعاع طیفی ماتریس Y).

در ادامه، پایداری دو نقطه تعادل اندمیک و بدون بیماری، با روش خطی سازی توسط ماتریس ژاکوبین حول نقاط تعادل بررسی می‌شود.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{S}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{S}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{S}}{\partial E} & \frac{\partial \dot{S}}{\partial I} & \frac{\partial \dot{S}}{\partial A} & \frac{\partial \dot{S}}{\partial R} \\ \frac{\partial \dot{Q}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial E} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial I} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial A} & \frac{\partial \dot{Q}}{\partial R} \\ \frac{\partial \dot{E}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{E}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{E}}{\partial E} & \frac{\partial \dot{E}}{\partial I} & \frac{\partial \dot{E}}{\partial A} & \frac{\partial \dot{E}}{\partial R} \\ \frac{\partial \dot{I}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{I}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{I}}{\partial E} & \frac{\partial \dot{I}}{\partial I} & \frac{\partial \dot{I}}{\partial A} & \frac{\partial \dot{I}}{\partial R} \\ \frac{\partial \dot{A}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{A}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{A}}{\partial E} & \frac{\partial \dot{A}}{\partial I} & \frac{\partial \dot{A}}{\partial A} & \frac{\partial \dot{A}}{\partial R} \\ \frac{\partial \dot{R}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial Q} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial E} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial I} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial A} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial R} \end{bmatrix} \qquad (۷)$$

$$= \begin{bmatrix} -\mu-\beta\Lambda-\lambda & 0 & -\beta\varepsilon S & -\beta S(1-q) & -\beta\delta S & 0 \\ \lambda & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta\Lambda & 0 & -(\mu+\kappa)+\beta\varepsilon S & \beta S(1-q) & \beta\delta S & 0 \\ 0 & 0 & p\kappa & -(\mu+\alpha) & (1-z)\eta & 0 \\ 0 & 0 & (1-p)\kappa & 0 & -(\mu+\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f\alpha & z\eta & \mu \end{bmatrix}$$

با استفاده از ماتریس ژاکوبین و پارامترهای جدول ۱ و $\lambda = \varepsilon = 0$، به‌ازای نقطه تعادل بدون بیماری، برخی مقادیر ویژه، مثبت هستند که موجب ناپایداری نقطه تعادل بدون بیماری می‌شود، بدان معنا که بیماری خود به خود ریشه کن نمی‌شود. همچنین با محاسبه مقادیر ویژه به ازای نقطه تعادل اندمیک و منفی شدن آن‌ها نتیجه گرفته می‌شود که نقطه تعادل اندمیک پایدار است، به این معنی که شیوع بیماری در جامعه ادامه دارد. از طرفی با قرار دادن پارامترهای جدول ۱ در معادله (۶)، $R_0 > 1$ می‌شود که خود گواهی دوباره بر پایداری نقطه تعادل اندمیک است. در نتیجه نیاز به استفاده از یک کنترل‌کننده، برای رسیدن به نقطه تعادل بدون بیماری امری ضروری است.

جدول ۱: مقادیر پارامترهای مدل SQEIAR [۱۲].

پارامترها	مقادیر	پارامترها	مقادیر	پارامترها	مقادیر
μ	۰/۰۵	p	۰/۱	κ	۰/۵۴
f	۰/۹۶۵	δ	۱	α	۰/۳
z	۰/۰۲	q	۰/۵	η	۰/۳

٤- تأثیر نرخ قرنطینه‌سازی در شیوع و کنترل پاندمی

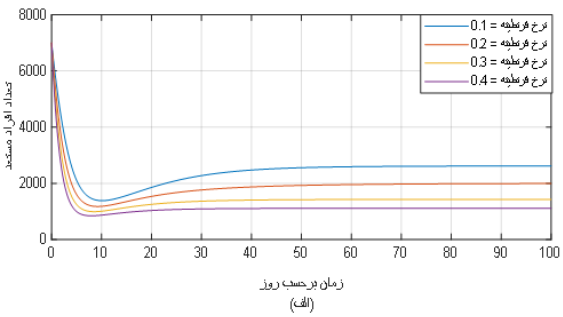
گسترش سریع ویروس کرونا باعث ایجاد یک پاندمی جهانی شده است. اما باید این نکته را در نظر گرفت که زمان عرضه واکسن در ایران و حتی موثر بودن و میزان مصونیت آن هنوز به طور قطع مشخص نشده است، همچنین تولید انبوه آن مستلزم صرف زمان و هزینه است، از این‌رو، قرنطینه و اقدامات مبتنی بر قرنطینه همچنان می‌تواند از شیوع بیشتر این بیماری جلوگیری کند. درک اینکه چگونه اقدامات قرنطینه و نرخ قرنطینه‌سازی افراد در مدل مذکور در محدودکردن گسترش ویروس در جامعه موثر است، می‌تواند بینش ارزشمندی در مورد چگونگی سرکوب شیوع بیماری در اختیار ما قرار دهد.

[1] Bifurcation
[2] Pathogen

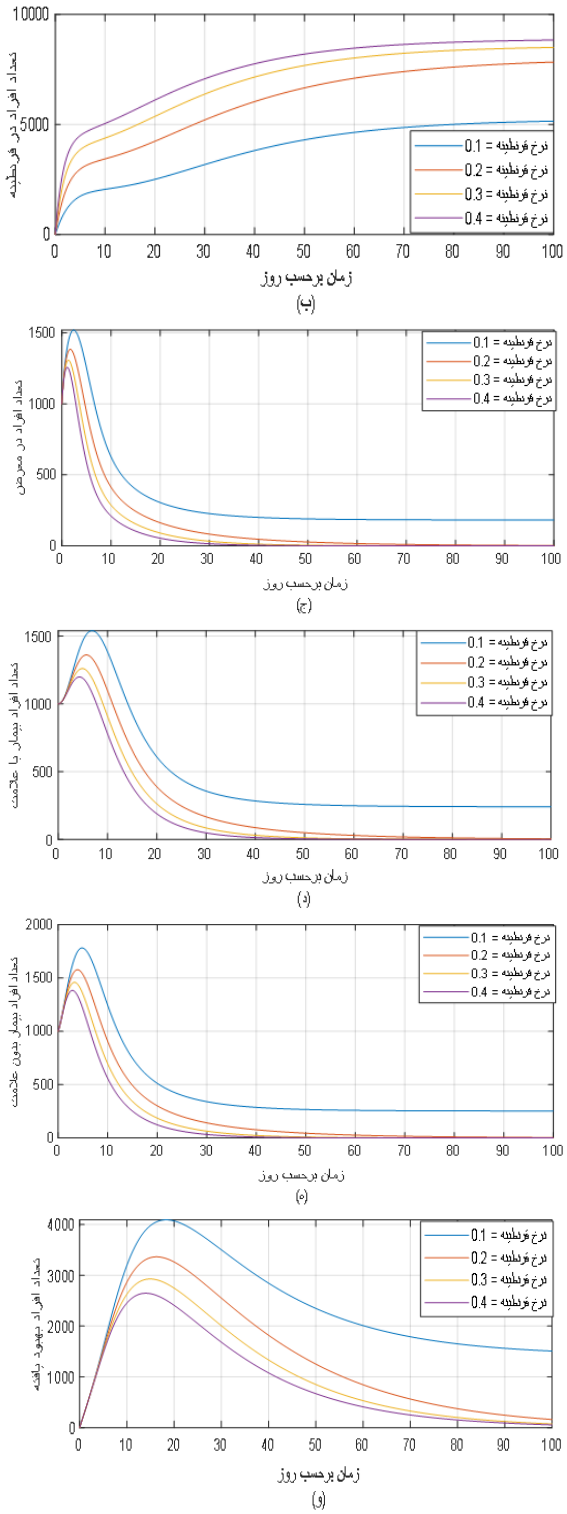
[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.5.7.3]
[DOI: 10.52547/joc.14.5.59]

در این راستا، در این بخش سعی بر آن شده که تأثیر نرخ قرنطینه‌سازی را مستقیماً روی افراد مستعد بررسی کرده تا در نتیجه آن بتوان اثرات بر سایر گروه‌های جامعه را نیز به طور غیر مستقیم مشاهده و بررسی نمود. در شکل (۲)، تأثیر نرخ قرنطینه‌سازی در مدت ۱۰۰ روز روی تمام گروه‌های مدل، در نظر گرفته شده است. همانطور که در شکل (۲-الف) مشاهده می‌کنید، با در نظر گرفتن ۷۰۰۰ نفر به عنوان مقدار اولیه برای افراد مستعد از کل جمعیت ۱۰۰۰۰ نفری که به عنوان یک جامعه آماری در نظر گرفته شده است، اگر با نرخ ۰/۱ قرنطینه‌سازی انجام گیرد، با توجه به شکل (۲-ب)، تنها حدود ۵۰۰۰ نفر قرنطینه خواهند شد. پس همچنان حدود ۲۰۰۰ نفر فرد مستعد در جامعه خواهند بود. همچنین از آنجاییکه نرخ تماس یک در نظرگرفته شده است (هر فرد در جامعه در واحد زمان تنها با یک فرد دیگر در ارتباط باشد) در نتیجه تقریباً تعداد ۲۰۰۰ نفر همچنان در جامعه حضور داشته و با سایر گروه‌ها، مخصوصا افراد عفونی (با علامت و بی علامت) ارتباط دارند که خود موجب شیوع گسترده بیماری می‌شود. اما همچنان که نرخ قرنطینه‌سازی بالا می‌رود تعداد افراد قرنطینه شده بیشتر شده و ارتباطات در جامعه محدود می‌شود که به نزولی شدن روند بیماری کمک شایانی خواهد کرد.

تأثیر نرخ قرنطینه‌سازی را بر سایر گروه‌های جامعه نیز می‌توان تحلیل نمود. برای مثال در شکل (۲-ج) با افزایش نرخ قرنطینه‌سازی، تعداد افرادی که در معرض بیماری قرار دارند روند نزولی گرفته و در نهایت تقریباً پس از ۷۰ روز تعداد آن‌ها به صفر می‌رسد. تعداد افراد عفونی با علامت و بدون علامت مشخص شده در شکل‌های (۲-د) و(۲-ه) بیانگر کاهش تعداد آن‌ها در اثر نرخ قرنطینه‌سازی بالاتر است، به این صورت که نرخ قرنطینه‌سازی به‌طور مستقیم روی تعداد افراد مستعد تأثیر گذاشته و آن‌ها را کم می‌کند و در نتیجه، هر چقدر تعداد افراد مستعد در جامعه کمتر باشند، تعداد افراد کمتری نیز عفونی می‌شوند (عفونی با علامت یا بدون علامت). که باعث ریشه‌کنی تدریجی بیماری در طول یک دوره تقریباً سه ماهه خواهد شد. با مشاهده شکل (۲-و) به این نتیجه می‌رسیم که هر چقدر تعداد افراد کمتری بیمار شوند، تعداد افراد کمتری نیز بهبود پیدا می‌کنند. در نهایت، پس از حدود ۱۰۰ روز، افراد بهبودیافته با نرخ ترخیص μ از گروه افراد بهبودیافته خارج می‌شوند. نتایج حاصل، تأثیر نرخ قرنطینه‌سازی را نشان می‌دهند.



(الف)



(ب) (ج) (د) (ه) (و)

شکل ۲: تأثیر نرخ قرنطینه‌سازی بر مدل SQEIAR

با این حال، با وجود چالش‌هایی که در اعمال قرنطینه در اکثر کشورها وجود دارد، بررسی این موضوع که با هر نرخ قرنطینه‌سازی، جامعه چگونه تحت تأثیر قرار خواهد گرفت حائز اهمیت است. در واقع نرخ قرنطینه‌سازی ثابت محدودیت‌هایی در پیش دارد چرا که اگر نرخ قرنطینه‌سازی زیاد در نظر گرفته شود امکان پیاده سازی آن با توجه به هزینه‌های اقتصادی که در دوران قرنطینه، هم جامعه و هم مسئولان امر

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.5.7.3]
[DOI: 10.52547/joc.14.5.59]

متحمل می‌شوند، دشوار است. همچنین اعمال قرنطینه با نرخ بالا فقط برای مدت زمان محدود کارساز است، چرا که کشور عملاً بعد از چندین ماه قرنطینه به حالت تعطیل درآمده و ضررهای جبران ناپذیری بر جامعه وارد خواهد شد. از طرف دیگر، قرنطینه‌سازی با نرخ پایین باعث ماندگاری بیماری می‌شود و عملاً تأثیری بر کاهش شیوع بیماری نخواهد داشت. همچنین پارامترهای مدل پاندمیک همواره با عدم قطعیت‌های ناخواسته همراه هستند، زیرا پارامترهای انتشار بیماری و نرخ‌های انتقال، مرگ و میر و نرخ تماس بین افراد مختلف در جامعه ثابت نیستند و ممکن است بسته به شرایط اجتماعی و همچنین جهش بیماری تغییر کنند. از این‌رو نرخ قرنطینه‌سازی را می‌توان متغیر با زمان در نظر گرفت تا در صورت نیاز، کاهش یا افزایش پیدا کند. در واقع این نرخ را می‌توان به صورت یک ورودی کنترلی به سیستم اعمال نمود که در بخش بعد به آن پرداخته خواهد شد.

۵- طراحی کنترل‌کننده فازی مد لغزشی

پس از مدل‌سازی بیماری کووید-۱۹، برای ریشه‌کن کردن عفونت در جامعه به صورت عملی، از روش قرنطینه‌سازی افراد مستعد استفاده می‌شود که در مدل‌سازی ریاضی به عنوان نرخ ورودی کنترلی، به مدل وارد می‌گردد، بطوریکه نرخ انتقال افراد مستعد به گروه افراد قرنطینه شده توسط کنترل‌کننده مشخص خواهد شد. با در نظر گرفتن نرخ قرنطینه‌سازی به عنوان یک ورودی کنترلی می‌توان به کنترل مستقیم افراد مستعد و کنترل غیرمستقیم افراد عفونی برای تعقیب مقادیر نهایی آن‌ها که همان به صفر همگرا شدن و ریشه‌کن شدن بیماری است پرداخت. مد لغزشی یکی از روش‌های کنترل مقاوم جهت مقابله با نامعینی‌های مدل است. از آنجاییکه سیستم مذکور دارای پارامترهای عدم قطعیت ولی محدود است، این روش مناسب می‌باشد. در این نوع استراتژی بایستی حالت‌ها به سطحی به نام سطح لغزش نزدیک شده و بر روی آن نگه داشته شوند و در نهایت به نقطه تعادل همگرا شوند. پس در ابتدا سطح لغزش را یافته و سپس با قوانینی که برای کنترل‌کننده یافت می‌شود می‌توان سیستم را به سمت نقطه تعادل برد. طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی شامل دو مرحله [۳۸] است:

۱- طراحی سطح لغزش[1] که باعث می‌شود مرتبه‌ی سیستم کاهش یابد (به جای کار بر روی دینامیک سیستم بر روی دینامیک خطای آن کار می‌کنیم) و بستری مقاوم را در حرکت سیستم به سمت نقطه تعادل فراهم سازد.

۲- انتخاب سیاست کنترلی مناسب که سیستم را به سمت این سطح حرکت داده و قرار گرفتن و باقی ماندن بر روی آن را تضمین کند.

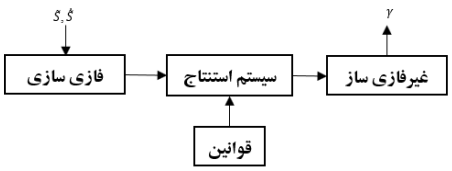
معادله (۱-الف) را می‌توان برحسب ورودی کنترلی (نرخ قرنطینه-سازی $\lambda(t)$) به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\lambda(t) = -\frac{\dot{S}(t)}{S(t)} + \frac{(1-S(t))\mu}{S(t)} - \beta\Lambda(t) \qquad (۸)$$

سطح لغزش برای حالت افراد مستعد به فرم $\tilde{S} = S - S_d$ در نظر گرفته می‌شود. $\tilde{S}$ برابر با مقدار خطای حالت افراد مستعد نسبت به مقدار مطلوب S_d است که در این مقاله یک تابع پیوسته و مشتق پذیر ($S_d = S_0 e^{-\alpha t}$) در نظر گرفته شده است. مشتق سطح لغزش نیز به صورت $\dot{\tilde{S}} = \dot{S} - \dot{S}_d$ محاسبه می‌شود. قانون کنترل با استفاده از قضیه لیاپانوف[2] بدست می‌آید، به این منظور کاندیدای درجه دو تابع لیاپانوف برای سطح لغزش (خطا) برابر با $V = \frac{1}{2}\tilde{S}^2$ است. سپس مشتق تابع لیاپانوف (V) با معادله $\dot{V} = \tilde{S}\dot{\tilde{S}} = \tilde{S}(\dot{S} - \dot{S}_d)$ نشان داده می‌شود. برای پایداری سطح لغزش و منفی شدن مشتق تابع لیاپانوف بایستی $\dot{S} = -\xi\tilde{S} + \dot{S}_d$ که در آن ξ یک پارامتر ثابت و مثبت است. قانون کنترلی مد لغزشی برای نرخ قرنطینه‌سازی $\lambda(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda(t) = \frac{-(\dot{S}_d - \xi\tilde{S})}{S(t)} + \frac{(1-S(t))\hat{\mu}}{S(t)} - \hat{\beta}\hat{\Lambda} + \gamma\frac{sgn(\tilde{S})}{S(t)} \qquad (۹)$$

که در آن $\hat{\beta}$، $\hat{\mu}$ و $\hat{\Lambda}$ مقادیر عدم قطعیت مدل پاندمی ویروس کرونا هستند که نسبت به مقادیر واقعی نامعلوم مربوطه دارای خطاهای محدود هستند. نکته قابل توجه در بحث کنترل مد لغزشی، پدیده‌ی چترینگ ناشی از ناپیوستگی سیگنال کنترل (تابع علامت) است. از اینرو، از منطق فازی برای فازی کردن بهره مقاوم[3] (γ) کنترل‌کننده پیشنهادی استفاده می‌شود. شکل (۳) سیستم منطق فازی را به صورت کلی نشان می‌دهد.



شکل ۳: بلوک دیاگرام منطق فازی

در شکل (۳) و در مرحله فازی‌سازی، ورودی‌ها را به مجموعه‌های فازی تبدیل کرده و به هر مقدار ورودی فازی درجه عضویتی (بین ۰ تا ۱) اختصاص می‌دهد. برای تعیین توابع عضویت نیاز به دانستن بازه تغییرات ورودی و خروجی است. برای بدست آوردن تخمین مناسبی از کران بالا و پایین $\tilde{S}$ و $\dot{\tilde{S}}$ با دانستن $\tilde{S} = S - S_d$، $\tilde{S}_{min} = S_{min} - S_{d_{max}}$ و $\tilde{S}_{max} = S_{max} - S_{d_{min}}$، همچنین با انتخاب $S_d = S_0 e^{-\alpha t}$ و $S \in [0,1]$ داریم $\tilde{S}_{min} = -S_0$ و $\tilde{S}_{max} = 1$ به طریق مشابه و با توجه به $\dot{S}_d = S_0 e^{-\alpha t}$ و رابطه (۱-الف)، $\dot{S}_{min}|_{S=S_0} \approx -S_0$ و $\dot{S}_{max}|_{S=0} = \mu$ است. در نتیجه:

$$\dot{\tilde{S}}_{min} = -S_0$$
$$\dot{\tilde{S}}_{max} = \mu + \alpha S_0 \leq \mu + S_0$$

که بصورت تقریبی داریم:

$$\tilde{S}, \dot{\tilde{S}} \in [-S_0, S_0]$$

پایگاه قوانین نیز متشکل از قوانین اگر-آنگاه است. یک قانون فازی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

- اگر سطح لغزش و تغییرات سطح لغزش هر دو مثبت باشند آنگاه مقدار γ زیاد است.

[1] Sliding Surface
[2] Lyapunov
[3] Robust Gain

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.5.7.3]
[DOI: 10.52547/joc.14.5.59]

که درآن سطح لغزش و تغییرات آن به عنوان ورودی و γ خروجی سیستم کنترل فازی است. در ادامه، سایر قوانین فازی در جدول ۲ آورده شده‌اند.

جدول۲: جدول قواعد فازی

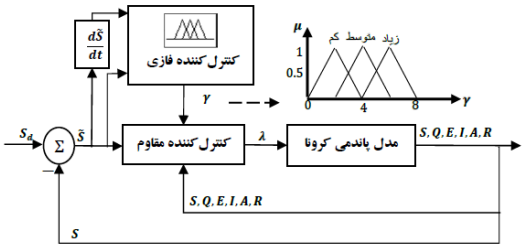
تغییرات سطح لغزش / سطح لغزش	$\dot{\tilde{S}}>0$	$\dot{\tilde{S}}=0$	$\dot{\tilde{S}}<0$
$\tilde{S}>0$	زیاد	متوسط	کم
$\tilde{S}=0$	متوسط	صفر	متوسط
$\tilde{S}<0$	کم	متوسط	زیاد

خروجی نیز توسط یک غیرفازی‌ساز از یک مجموعه فازی به یک متغیر یا مقدار حقیقی تبدیل می‌شود. بازه تغییرات خروجی γ را نیز به صورت تقریبی و مناسب بین صفر تا هشت در نظر می‌گیریم. علاوه بر این خروجی فازی را می‌توان با کمک غیرفازی‌ساز میانگین مرکز[1] به‌صورت زیر بدست آورد:

$$\gamma=\frac{\sum_{j=1}^{m} w_j c_j}{\sum_{j=1}^{m} w_j}=\nu^T\psi$$

بطوریکه، $w_j=\prod_{i=1}^{n}\mu_{F_i^j}(x_i)$ و $\nu=[c_1,\dots,c_m]^T$ و $\psi=\frac{[w_1,\dots,w_m]^T}{\sum_{j=1}^{m} w_j}$ است. m و n به ترتیب تعداد کل قوانین فازی و متغیرهای ورودی هستند. c_j مرکز تابع عضویت در قسمت آنگاه قانون jام را نشان می‌دهد. $\mu_{F_i^j}$ نشان دهنده مقدار عضویت متغیر زبانی x_i به مجموعه فازی F_i در قانون j ام است. w_j نیز وزن قانون jام را نشان می‌دهد و ψ بردار وزن است.

شکل (۴) نشان‌دهنده سیستم حلقه بسته مدل، در حضور کنترل‌کننده فازی مد لغزشی می‌باشد:



شکل ۴: بلوک دیاگرام استراتژی کنترل فازی مد لغزشی برای شیوع ویروس کرونا

قبلا اثبات شد که اگر ورودی کنترلی به صورت رابطه (۹) بدست آید مشتق تابع لیاپانوف منفی شده و $\tilde{S}=0$ می‌شود، در نتیجه $S\longrightarrow S_d$، و از آنجاییکه $S_{d_{t\to\infty}}=0$ است. بنابراین تعداد افراد مستعد کاهش یافته و به صورت مجانبی به صفر همگرا می‌شود.

از آنجا که متغیر S کاهش یافته و به صفر میل می‌کند، باتوجه به معادله‌ی (۱-ج) می‌توان گفت که پس از یک زمان محدود نامعادله‌ی $\beta S\Lambda<(\mu+\kappa)E$ بدست می‌آید. در واقع، $\dot{E}$ پس از مدت زمان محدود، منفی می‌شود $(\dot{E}<0)$ با اطمینان از اینکه $(E\geq 0)$ است می‌توان گفت بعد از یک بازه زمانی تعداد افراد درمعرض به صفر می‌رسد $(E\to 0)$. به بیان دیگر، پاسخ $\dot{E}(t)=-(\kappa+\mu)E(t)$ که یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است برابر با $E(t)=E(0)e^{-(\kappa+\mu)t}$ می‌باشد و با توجه به مثبت بودن شرایط اولیه به صفر می‌رسد. با صفر شدن S و E، معادله‌ی (۱-ه) پس از یک فاصله زمانی محدود به $\dot{A}(t)=-(\eta+\mu)A(t)$ تبدیل خواهد شد که ترم $-(\eta+\mu)A$، A را کاهش می‌دهد و با همان استدلالی که برای افراد در معرض انجام شد می‌توان نتیجه گرفت که A محدود باقی‌مانده و به صفر همگرا می‌شود $(\mathrm{A}\to 0)$. برای افراد بیمار با علامت نیز همین نتیجه‌گیری صادق است. واضح است که پس از گذشتن مدت زمان محدود، سه گروه اصلی در شیوع بیماری به صفر می‌رسند و در واقع بیماری ریشه‌کن خواهد شد $(E=I=A=0)$.

۶- تأثیر جامعه آلوده بر سایر جوامع

بی‌شک روابط بین کشورها (و شهرها) از عوامل مهم شیوع پاندمی ویروس کرونا در دنیا می‌باشد که نمی‌توان به راحتی و بدون تحلیل از این مسئله گذشت. چرا که نرخ بالای انتقال این بیماری موجب شده که به سرعت در جوامع و کشورها پخش شده و کنترل آن به سختی انجام گیرد. طبیعتاً تأثیر جوامع بر یکدیگر متأثر از روابط بین گروه‌های مختلف افراد (مستعد، در معرض، عفونی و بهبود یافته) در این جوامع است. اگر فرض کنیم افراد عفونی باعلامت، هم در جامعه مبدأ و هم در جامعه مقصد، اجازه رفت و آمد نداشته و به نوعی در کشور (شهر) خود ایزوله باشند، افراد مستعد، در معرض، عفونی بدون علامت و بهبود یافته با یک نرخ یکسان به جمعیت جامعه مقصد اضافه می‌شوند (از جامعه مبدأ به مقصد می‌روند). در نتیجه می‌توان معادلات (۱) به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\dot{S}(t)=\big(1-S(t)\big)\mu-\beta\Lambda(t)S(t)-\lambda(t)S(t)+\alpha' S'(t) \quad (۱۰\text{-الف})$$
$$\dot{Q}(t)=\lambda(t)S(t)-\mu Q(t) \quad (۱۰\text{-ب})$$
$$\dot{E}(t)=\beta\Lambda(t)S(t)-(\kappa+\mu)E(t)+\alpha' E'(t \quad (۱۰\text{-ج})$$
$$\dot{I}(t)=(1-z)\eta A(t)-(\alpha+\mu)I(t)+p\kappa E(t) \quad (۱۰\text{-د})$$
$$\dot{A}(t)=(1-p)\kappa E(t)-(\eta+\mu)A(t)+\alpha' A'(t) \quad (۱۰\text{-ه})$$
$$\dot{R}(t)=z\eta A(t)+f\alpha I(t)-\mu R(t)+\alpha' R'(t) \quad (۱۰\text{-و})$$

که α' نرخ انتقال از جامعه مبدأ به مقصد است و $x'(t)=[S'(t),E'(t),A'(t),R'(t)]$ حالت‌های مربوط به جامعه مبدأ هستند. نکته‌ای که باید در نظر داشت این است که نرخ انتقال برای تمامی گروه‌ها یکسان فرض شده است، چراکه افراد جامعه به صورت یک توزیع یکنواخت امکان جابجایی دارند و شرط خاصی برای رفت و آمد روی افراد نیست.

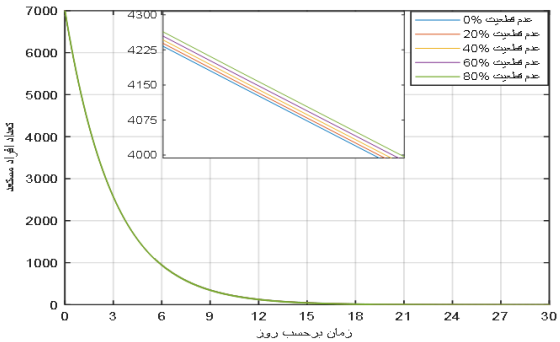
۷- شبیه‌سازی عددی

هدف از این بخش، بررسی و شبیه‌سازی تأثیر اعمال کنترل‌کننده فازی مد لغزشی بر روی مدل دارای عدم قطیت می‌باشد. مقادیر پارامترهای مدل در جدول ۱ آورده شده‌اند. از اینرو، تأثیر اعمال کنترل‌کننده بر تعداد افراد

[1] Center Average Defuzzifier (CAD)

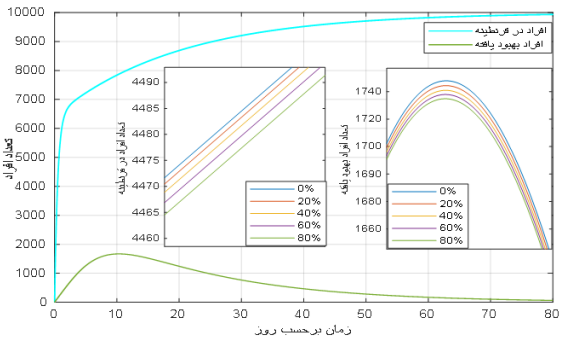
[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.5.7.3]
[DOI: 10.52547/joc.14.5.59]

مستعد در حضور عدم قطعیت‌های متفاوت در شکل (۵) بیان شده است. همانگونه که مشخص است در اثر اعمال کنترل‌کننده، در مدت زمان بسیار کمتر از ۱۰۰ روز تعداد افراد مستعد به مرور کم و به صفر همگرا شده که بیانگر این است، کنترل‌کننده مقاوم توانسته با در نظر گرفتن عدم قطعیت در پارامترها از صفر تا ۸۰ درصد بخوبی عمل کرده و تعداد افراد مستعد را در بازه زمانی تقریباً ۳۰ روز به صفر برساند.

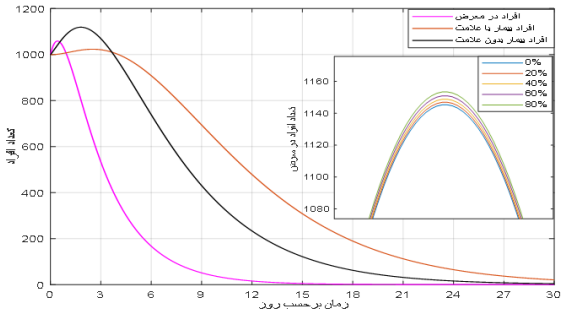


شکل ۵: تأثیر اعمال کنترل‌کننده بر تعداد افراد مستعد در حضور عدم قطعیت‌های متفاوت

با توجه به شکل (۶) با اعمال کنترل‌کننده (قرنطینه افراد مستعد در جامعه) همزمان با کاهش تعداد افراد مستعد و انتقال آن‌ها به گروه افراد قرنطینه شده، افراد در قرنطینه افزایش می‌یابند. همچنین با توجه به شکل (۷) با اعمال قرنطینه و کاهش افراد مستعد در جامعه، افراد کمتری در معرض بیماری قرار می‌گیرند، در نتیجه آن، تعداد افراد کمتری نیز عفونی (با علامت، بدون علامت) می‌شوند و در نهایت تعداد کمتری نیز بهبود پیدا می‌کنند (شکل ۶). همانطورکه مشخص است عدم قطعیت‌ها به خوبی توسط کنترل‌کننده مهار شده و اختلاف تعداد نفرات در عدم قطعیت‌های مختلف، مقداری کمتر از ۲۰ نفر در هر گروه است.

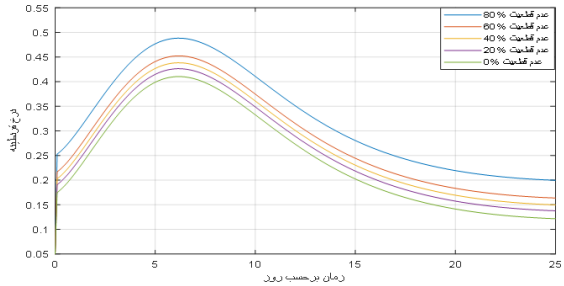


شکل ۶: تأثیر اعمال کنترل‌کننده بر تعداد افراد قرنطینه شده و بهبودیافته در حضور عدم قطعیت‌های متفاوت



شکل ۷: تأثیر اعمال کنترل‌کننده بر تعداد افراد در معرض و عفونی (باعلامت و بدون علامت) در حضور عدم قطعیت‌های متفاوت

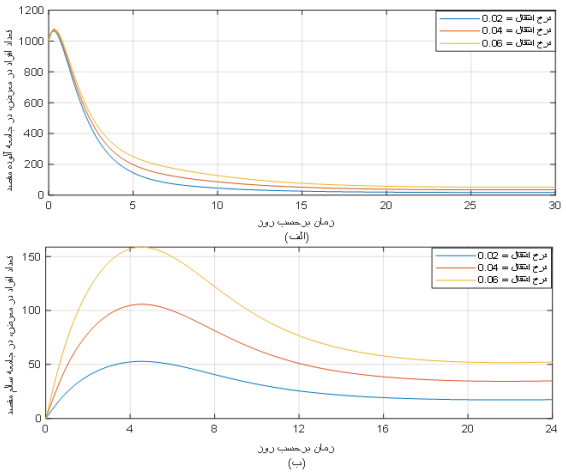
در شکل (۸)، ورودی کنترلی (نرخ قرنطینه‌سازی) اعمال شده به سیستم نشان داده شده است. هرگاه در پارامترها عدم قطعیتی وجود نداشته باشد پس از شروع اعمال قرنطینه، ابتدا نرخ قرنطینه سازی افزایش پیدا کرده تا بتواند از شیوع بیشتر پاندمی جلوگیری کند و با اعمال حداکثر تلاش کنترلی (نرخ قرنطینه‌سازی) برابر با ۰/۴۱ در بازه زمانی روز ششم تا هفتم می‌توان افراد را قرنطینه‌سازی کرد. تعداد افراد مستعد در طول زمان کاهش می‌یابد و به تلاش کنترلی کمتری نیاز است. نرخ قرنطینه‌سازی متغیر با زمان، متناسب با شیوع پاندمی به صورت تطبیق‌پذیر افزایش داشته و با عبور از پیک بیماری کاهش می‌یابد.



شکل ۸: نرخ قرنطینه‌سازی در حضور عدم قطعیت‌های متفاوت

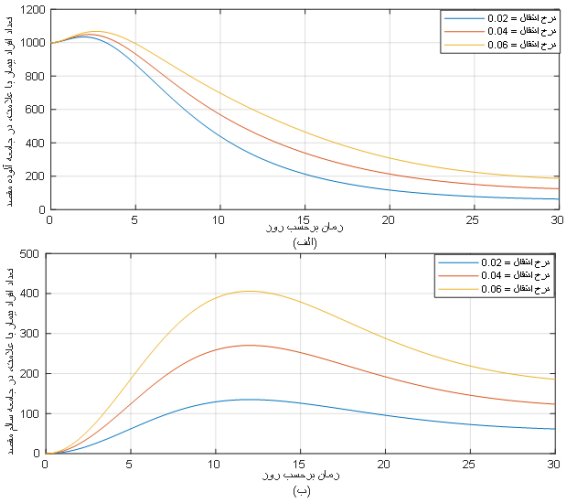
تأثیر جوامع بر یکدیگر به دو بخش «تأثیر جامعه بیمار بر جامعه سالم» و «تأثیر جامعه بیمار بر بیمار» تقسیم شده است. همچنین با توجه به مقاوم بودن کنترل‌کننده و عدم تأثیر آن‌چنانی عدم قطعیت‌ها بر روند کنترل، در این بخش برای سادگی و کاهش پیچیدگی بصری عکس‌ها، از عدم قطعیت ثابت استفاده کردیم و عملکرد کنترل‌کننده را به ازای نرخ‌های انتقال مختلف مورد بررسی قرار دادیم. با توجه به شکل (۹) و به ازای نرخ‌های انتقال مختلف، در جامعه آلوده مقصد، پیک افراد در معرض تا روز دوم ادامه داشته و بعد از آن روند نزولی در پیش گرفته است، در صورتیکه در جامعه سالم مقصد، این پیک در روز پنجم اتفاق افتاده و بعد از آن روند شیوع، کاهشی شده است. دلیل این امر می‌تواند عدم آمادگی جامعه سالم برای مواجه با اپیدمی باشد، یا از دیدگاه کنترلی، صفر بودن نرخ قرنطینه‌سازی به عنوان ورودی در روز اول و افزایش تدریجی آن باشد.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.5.7.3]
[DOI: 10.52547/joc.14.5.59]

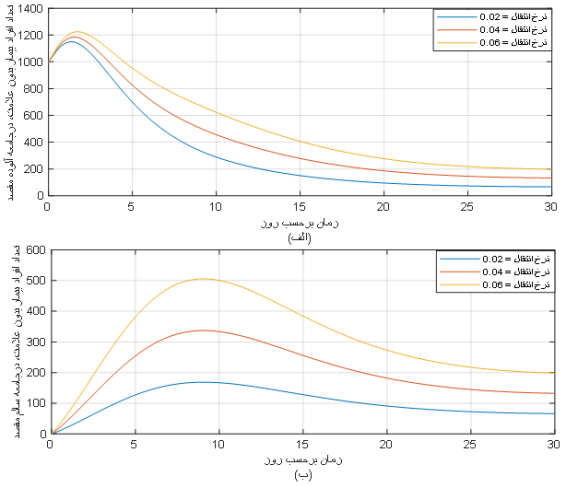


شکل ۹ : تأثیر کنترل‌کننده بر تعداد افراد در معرض در دو جامعه آلوده و سالم به ازای نرخ‌های انتقال متفاوت

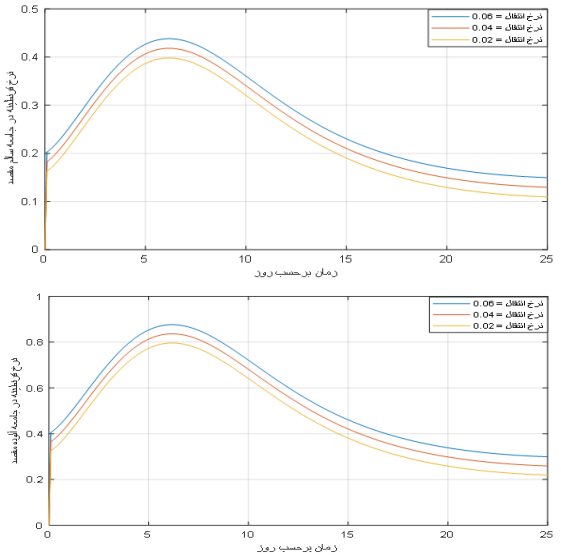
این مسئله برای افراد عفونی در جامعه سالم جدی تر می‌شود، چرا که شوک اولیه ناشی از انتقال افراد جامعه آلوده مبدأ بر جامعه سالم بیشتر از تأثیر آن بر جامعه آلوده بوده است، با توجه به شکل (۱۰) به ازای نرخ انتقال ۰/۰۶ تغییرات افزایشی در جامعه آلوده در حدود ۱۰۰ نفر بوده است و بعد از حدود ۴ روز روندی کاهشی در پیش گرفته است، در صورتی که روند افزایشی بیماران در جامعه سالم تا حدود ۴۰۰ نفر است و زمان رسیدن به این پیک در حدود ۱۲ روز اتفاق افتاده که نشان دهنده تأثیر مخرب جامعه آلوده بر جامعه سالم است. افراد بیمار بدون علامت نیز با توجه به شکل (۱۱) روندی مشابه با افراد بیمار باعلامت داشته و زمان رسیدن به پیک بیماری و کنترل آن‌ها در جامعه سالم طولانی‌تر از جامعه بیمار است. با توجه به شکل (۱۲)، ورودی‌های کنترلی (نرخ قرنطینه‌سازی) به ازای نرخ‌های انتقال بزرگتر، افزایش داشته است. همچنین علیرغم تغییرات بیشتر افراد بیمار در جامعه سالم، افزایش این نرخ در جامعه سالم نسبت به جامعه آلوده کمتر بوده است و حداکثر این نرخ در حدود ۰/۴۵ است، درحالی که در جامعه بیمار این نرخ تا ۰/۹ افزایش یافته است.



شکل ۱۰ : تأثیر کنترل‌کننده بر تعداد افراد بیمار با علامت در دو جامعه آلوده و سالم به ازای نرخ‌های انتقال متفاوت



شکل ۱۱ : تأثیر کنترل‌کننده بر تعداد افراد بیمار بدون علامت در دو جامعه آلوده و سالم به ازای نرخ‌های انتقال متفاوت



شکل ۱۲: نرخ قرنطینه‌سازی به ازای نرخ‌های انتقال متفاوت

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله به دلیل لزوم قرنطینه افراد مستعد، مدلی شامل افراد قرنطینه شده به عنوان یک گروه جدید در نظر گرفته شده است. این مدل شامل افراد مستعد، در معرض، عفونی با علامت و بدون علامت و افراد بهبود یافته است. از آنجاییکه نرخ قرنطینه‌سازی ثابت می‌تواند با چالش‌هایی همراه باشد، از استراتژی مقاوم مد لغزشی برای بدست آوردن نرخ قرنطینه‌سازی افراد مستعد به عنوان یک ورودی کنترلی استفاده شده و بهره مقاوم آن با استفاده از منطق فازی بدست آمده است که موجب کاهش چترینگ سیگنال کنترلی و در نهایت ریشه‌کنی بیماری گردیده است. در ادامه، ارزیابی مدل ارائه شده در حضور کنترل‌کننده و با در نظرگرفتن عدم قطعیت‌های مختلف برای مقادیر پارامترها انجام شده است. سپس تأثیر جامعه آلوده بر جوامع آلوده و سالم مورد بررسی قرار گرفته و در نهایت برای ارزیابی عملکرد کنترل‌کننده و تأیید نتایج تئوری ارائه شده، شبیه‌سازی با استفاده از نرم افزار MATLAB® انجام شده است. با توجه به

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.5.7.3]
[DOI: 10.52547/joc.14.5.59]

کشف واکسن کرونا، به عنوان تحقیقات آینده با ارتقاء مدل‌سازی مذکور و در نظر گرفتن افراد واکسینه شده به عنوان یک گروه مستقل و واکسیناسیون به عنوان استراتژی کنترلی، می‌توان پژوهش را توسعه بخشید.

مراجع

[۱] مرکز تحقیقات ویروس شناسی (www.vrc.sbmu.ac.ir)

[2] World Health Organization (WHO) (www.who.int/ar/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019-farsi)

[3] Centers for Disease Control and Prevention (CDC) (https://www.cdc.gov/coronavirus/2019-ncov/long-term-effects.html)

[4] "Iran Reports Its First 2 Cases of the New Coronavirus", New York Times. Archived from the original on 19 February 2020. Retrieved 19 February 2020.

[5] Cooper, I., Mondal, A. and Antonopoulos, C.G., "A SIR Model Assumption for The Spread of COVID-19 in Different Communities", Chaos, Solitons & Fractals, 139, p.110057, 2020.

[6] Comunian, A., Gaburro, R. and Giudici, M., "Inversion of an SIR-Based Model: A Critical Analysis About the Application To COVID-19 Epidemic", Physica D: Nonlinear Phenomena, 413, p.132674, 2020.

[7] Abbasi, Z., Zamani, I., Amiri Mehra, A.H., and Shafieirad, M., "Optimal Control of SEIR Epidemic Model Considering Nonlinear Transmission Rate and Time Delay", In 2021 7th International Conference on Control, Instrumentation and Automation (ICCIA). IEEE, 2021.

[8] Kada, D., Kouidere, A., Balatif, O., Rachik, M. and Labriji, E.H., "Mathematical Modeling of The Spread of COVID-19 Among Different Age Groups in Morocco: Optimal Control Approach for Intervention Strategies", Chaos, Solitons & Fractals, p.110437, 2020.

[9] Samui, P., Mondal, J. and Khajanchi, S., "A Mathematical Model for COVID-19 Transmission Dynamics with A Case Study of India", Chaos, Solitons & Fractals, 140, p.11017, 2020.

[10] Ndairou, F., Area, I., Nieto, J.J. and Torres, D.F., "Mathematical Modeling of COVID-19 Transmission Dynamics with a Case Study of Wuhan". Chaos, Solitons & Fractals, p.109846, 2020.

[11] Amiri Mehra, A.H., Zamani, I., Abbasi, Z. and Ibeas, A., "Observer-Based Adaptive PI Sliding Mode Control of Developed Uncertain SEIAR Influenza Epidemic Model Considering Dynamic Population", Journal of Theoretical Biology, 482, p.109984, 2019.

[12] Abbasi, Z., Zamani, I., Amiri Mehra, A.H., Shafieirad, M. and Ibeas, A., "Optimal Control Design of Impulsive SQEIAR Epidemic Models with Application to COVID-19", Chaos, Solitons & Fractals, 139, p.110054, 2020.

[13] Amiri Mehra, A.H., Shafieirad, M, Abbasi, Z. and Zamani, I., "Parameter Estimation and Prediction of COVID-19 Epidemic Turning Point and Ending Time of a Case Study on SIR/SQAIR Epidemic Models", Computational and Mathematical Methods in Medicine, 2020, 2020.

[14] Rohith, G. and Devika, K.B., "Dynamics and Control of COVID-19 Pandemic with Nonlinear Incidence Rates", Nonlinear Dynamics, 101(3), pp.2013-2026, 2020.

[15] Xiao, Y., Xu, X. and Tang, S., "Sliding Mode Control of Outbreaks of Emerging Infectious Diseases", Bulletin of Mathematical Biology, 74(10), pp.2403-2422, 2012.

[16] Ibeas, A., de la Sen, M. and Alonso-Quesada, S., "Sliding Mode Robust Control of SEIR Epidemic Models", In 2013 21st Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE). pp. 1-6. IEEE, 2013.

[17] Ozer, H.O., Hacioglu, Y., Yagiz, N., "Controlling the Building Model Using High Order Sliding Mode Control Optimized by Multi Objective Genetic Algorithm", Periodicals of Engineering and Natural Sciences, 5(3), 2017.

[18] Yakut, O. and Alli, H., "Neural Based Sliding-Mode Control with Moving Sliding Surface for the Seismic Isolation of Structures", Journal of Vibration and Control, 17(14), pp.2103-2116, 2011.

[19] Li, Z., Deng, Z. and Gu, Z., "New Sliding Mode Control of Building Structure Using RBF Neural Networks", In 2010 Chinese Control and Decision Conference. pp. 2820-2825. IEEE, 2010.

[20] Adhikari, R. and Yamaguchi, H., "Sliding Mode Control of Buildings with ATMD", Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 26(4), pp.409-422, 1997.

[21] Baghaei, K., Ghaffarzadeh, H., Hadigheh, A. and Dias-da-Costa, D., "Chattering-Free Sliding Mode Control with A Fuzzy Model for Structural Applications", 2019.

[22] Samantaray, J. and Chakrabarty, S., "A Fuzzy Sliding Mode Control Design for Quadcopter", In International Conference on Unmanned Aerial System in Geomatics. pp. 191-200, 2019, April.

[23] Ardakani, F.F., Vatankhah, R. and Sharifi, M., "Fuzzy Sliding-Mode Control of a Human Arm in The Sagittal Plane with Optimal Trajectory", ETRI Journal, 40(5), pp.653-663, 2018.

[24] Zamani, I., Amiri Mehra, A.H., Abbasi, Z. and Shafiee, M., "Robust Stability for Affine TS Fuzzy Impulsive Control Systems Subject to Parametric Uncertainties", In 2019 27th Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE). pp. 1102-1107. IEEE, 2019.

[25] Lin, B., Su, X. and Li, X., "Fuzzy Sliding Mode Control for Active Suspension System with Proportional Differential Sliding Mode Observer", Asian Journal of Control, 21(1), pp.264-276, 2019.

[26] Palm, R., 1992, "Sliding Mode Fuzzy Control", In [1992 Proceedings] IEEE International Conference on Fuzzy Systems. pp. 519-526. IEEE, 1992.

[27] Ha, Q.P., Nguyen, Q.H., Rye, D.C. and Durrant-Whyte, H.F., "Fuzzy Sliding-Mode Controllers with Applications", IEEE Transactions on Industrial Electronics, 48(1), pp.38-46, 2001.

[28] Zamani, I. and Zarif, M.H., "Nonlinear Controller for Fuzzy Model of Double Inverted Pendulums". World Academy of

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.5.7.3]
[DOI: 10.52547/joc.14.5.59]

Science, Engineering and Technology, 1(10), pp.1596-1602, 2007.
[29] Zamani, I. and Shafie, M., "Fuzzy Affine Impulsive Controller". In 2009 IEEE International Conference on Fuzzy Systems. pp. 361-366, 2009.
[30] Zamani, I. and Zarif, M.H., "An Approach for Stability Analysis of TS Fuzzy Systems Via Piecewise Quadratic Stability", International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 6(9), pp.4041-4054, 2010.
[31] Zamani, I. and Zarif, M.H., "On the Continuous-Time Takagi–Sugeno Fuzzy Systems Stability Analysis", Applied Soft Computing, 11(2), pp.2102-2116, 2011.
[32] Zamani, I. and Sadati, N., "Fuzzy Large-Scale Systems Stabilization with Nonlinear State Feedback Controller", 2009 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 5156-5161.
[33] Shafieirad, M., Shafiee, M. and Abedi, M., "Recursive Identification of Continuous Two-Dimensional Systems in The Presence of Additive Colored Noise", IETE Journal of Research, 60(1), pp.74-84, 2014.
[34] Shafieirad, M., Shafiee, M. and Abedi, M., "Estimation of Space and Time Shifts in Continuous 2-D Systems Using Instrumental Variable", Canadian Journal of Electrical and Computer Engineering, 37(1), pp.42-47, 2014.
[35] Shafieirad, M., Shafiee, M. and Abedi, M., "Identification of Linear Partial Difference Equations with Constant Coefficients", Journal of Basic and Applied Scientific Research, 3(1), pp.655-660, 2013.
[36] Van Den Driessche, P., Watmough, J., "Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission", Mathematical Biosciences, 180, (1), pp. 29-48, 2002.
[37] Hernandez-Vargas, A. E. and Meyer-Hermann, M., "Innate Immune System Dynamics to Influenza Virus", IFAC Proceedings Volumes, 45, (18), pp. 260-265. 2012.
[38] Slotine, J. J. E., Li, W., "Applied Nonlinear Control", Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 199, 1991.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-09]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1399.14.5.7.3]
[DOI: 10.52547/joc.14.5.59]