مجله کنترل
جلد ۵، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۰، صفحه ۸۰-۶۹

طراحی کنترل‌کننده حداقل واریانس با استفاده از مدل VARX

یوسف علیپوری[۱]، جواد پشتان[۲]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه علم و صنعت ایران، alipouri_yousef@elec.iust.ac.ir

[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه علم و صنعت ایران، jposhtan@iust.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۰/۸/۳، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۰/۹/۳۰)

چکیده: در بسیاری از کاربردهای صنعتی رسیدن به حداقل واریانس در خروجی تضمین کننده کارایی سیستم و موجب بهره وری بالا و کاهش مصرف انرژی است. از این‌رو، موضوع حداقل واریانس موضوعی مهم در مهندسی کنترل محسوب می‌شود. از نظر تئوری کنترل حداقل واریانس کنترل بهینه‌ای است که می‌تواند حداقل واریانس ممکن را تضمین کند. با این وجود، استفاده از این کنترل‌کننده با محدودیت‌هایی همراه است که مهمترین این محدودیت‌ها، نیاز کنترل‌کننده به مدلی دقیق از سیستم و اغتشاش است. مدل‌سازی سیستم‌های چند ورودی- چند خروجی (MIMO) به علت وجود وابستگی بین حلقه‌ها به سادگی نوع تک ورودی- تک خروجی (SISO) نیست. از طرف دیگر وجود اغتشاشات بر این پیچیدگی می‌افزاید. در این مقاله از مدل VARX (Vector ARX) برای شناسایی همزمان سیستم و اغتشاش استفاده شده است. سپس مدل بدست آمده اساس کار طراحی کنترل کننده حداقل واریانس قرار گرفته است. استفاده از مدل شناسایی شده VARX (با استفاده از داده‌های معمول از کار سیستم) برای طراحی کنترل‌کننده، روش پیشنهادی را برای کاربردهای صنعتی مناسب می‌سازد. روش پیشنهاد شده بر روی سیستم آزمایشگاهی ۴ تانک، که سیستمی غیرخطی است، به صورت عملی امتحان شده است. نتایج این تحقیق نشان می‌دهند که با استفاده از این نوع مدل می‌توان کنترل‌کننده حداقل واریانسی برای سیستم MIMO طراحی کرد که به مدل دقیق از سیستم نیاز نداشته باشد و با این وجود، دقت آن در رسیدن به حداقل واریانس در مقایسه با روش دقیق اما پیچیده و مبتنی بر مدل ماتریس اینترکتو، قابل قبول باشد. به علاوه، دقت روش پیشنهادی (مبتنی بر VARX) در رسیدن به حداقل واریانس، نسبت به روش مشابه تحلیل سری زمانی چند متغیره (مبتنی بر VAR) نیز برتری دارد.

کلمات کلیدی: کنترل‌کننده حداقل واریانس، مدل VARX، مدل‌سازی سیستم و اغتشاش، روش سری‌های زمانی، سیستم ۴ تانک.

Designing Minimum Variance Controller using VARX Model

Yusef Alipouri, Javad Poshtan

Abstract: In most industrial applications, attaining minimum output variance certifies the efficiency of system and results in increasing productivity and decreasing energy consuming. Therefore, minimum variance index is considered as one of the main subjects in control engineering field. A minimum variance controller is an optimal controller that provides (theoretically) the minimum possible variance. Designing this controller, however, requires exact models of both the system and disturbance. Due to existence of interactions among loops, modeling MIMO systems is often complicated. Existence of disturbance is another reason for this complication. In this paper, in order to avoid the need for an analytical model of system, VARX model has been used to simultaneous identification of the plant and disturbance. Then, the estimated model is used for designing a minimum variance controller. In this method, operating data of inputs and outputs of the system are the only requirements for identification of the VARX model. The proposed method has been tested on an experimental benchmark such as a four-tank system which has a nonlinear

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.3.7.6]

behavior. The investigation results show that a minimum variance controller can be designed, based on an identified VARX model, for a MIMO system, without any need for an exact model of the system, while at the same time, capable of providing an acceptable minimum variance compared to that precisely obtained using the model-based "Interactor-Matrix" method.

Keywords: Minimum variance controller, VARX model, Modeling plant and disturbance, Time series method, Quadruple-tank benchmark.

۱- مقدمه

هدف اصلی در مهندسی کنترل طراحی کنترل‌کننده‌ای است که موجب تولید خروجی با بهترین کیفیت و کمترین هزینه با در نظر گرفتن محدودیت‌های موجود شود. طراحی، تنظیم و اجرای کنترل‌کننده قدم اصلی در این عرصه است. چندین معیار مثل معیار حداقل واریانس و بسیاری از معیارهای عملکردی دیگر هم‌چون زمان جهش، درصد فراجهش و خطای ماندگار برای ارزیابی عملکرد کنترل‌کننده معرفی شده‌اند. پرکاربردترین این معیارها در محیط صنعتی، معیار حداقل واریانس است. نتیجه تحقیق [۱] اهمیت این معیار را بیشتر نمایان می‌کند. در این تحقیق بیان شده است که معیار مینیمم واریانس حدود ۶۰٪ از CPM (تعیین بهره‌وری حلقه) استفاده شده در صنعت را به خود اختصاص داده است. از بین معیارهای مطرح شده، معیار واریانسِ خروجی بسیار مرتبط با کیفیت محصول تولیدی و مصرف انرژی است. این معیار پایداری کیفیت محصول را تضمین می‌کند، بنابراین در بسیاری از کاربردهای صنعتی هدف کاهش میزان نوسانات در خروجی است.

اغتشاشات تصادفی مانع از حذف کامل تغییرات و به صفر رساندن نوسانات در خروجی می‌شوند از این رو مسئله اساسی در بررسی مسئله حداقل واریانس تعیین میزان حداقل واریانس قابل دسترسی (معیار حداقل واریانس) است. به عبارت دیگر با لحاظ کردن اثر نویز و اغتشاش تا چه میزان نوسانات در خروجی را می‌توان کاهش داد. بهترین روش در این زمینه، روشی است که اطلاعات کمتری از سیستم را نیاز داشته باشد و بتواند با تحلیل داده‌های حلقه بسته میزان حداقل واریانس را تعیین کند. هر روشی که بتواند با اطلاعات کمتر و در عین حال با دقت بیشتری معیار حداقل واریانس را تعیین کند از اولویت بیشتری برخوردار است. عملی بودن روش‌ها در محیط‌های صنعتی محدودیت دیگری است، بنابراین روش‌های پیشنهاد شده باید قابلیت پیاده سازی در محیط صنعتی را نیز دارا باشند.

در معیار حداقل واریانس هدف رسیدن به حداقل واریانس ممکن در خروجی است از این رو تحلیل اثرات اغتشاش و نویز چالش اصلی می‌باشد. واریانس سیگنال خروجی $y(k), k = 1,\ldots,N$ به صورت (۱) تعریف می‌شود.

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\left(y(k)-\bar{y}\right)^2, \quad \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y(k) \qquad (۱)$$

در رابطه (۱)، $\bar{y}$ میانگین داده‌های خروجی، N تعداد کل نمونه‌ها و $y(k)$ نمونه kام خروجی است. برای سیستم‌های با چند خروجی واریانس کل برابر حاصل جمع واریانس تک تک حلقه‌ها تعریف می‌شود.

پایه و اساس معیار حداقل واریانس (شاخص هریس) از شروع نظریه کنترل‌کننده حداقل واریانس در سال ۱۹۷۰ توسط آستروم و بکس [۲]، جنکینس[1] [۳] شروع شد. در این نظریه با دانستن مدل سیستم و مدل اغتشاش می‌توان کنترلی طراحی نمود که منجر به حداقل واریانس شود. نشان داده شده است که این کنترل‌کننده در چه شرایطی حداقل واریانس ممکن را تولید می‌کند [۴]. با وجود اینکه سال‌هاست از معرفی این کنترل‌کننده گذشته، اما هنوز این روش با چندین مشکل اساسی روبه‌روست. این روش به مدل دقیقی از سیستم و اغتشاش نیاز دارد و تولید سیگنال‌های کنترلی خشنی می‌کند که محرک‌ها توانایی اجرای آن‌ها را ندارند. این مشکلات محققان را بر آن داشت که به سراغ روش‌هایی که بتوانند این مشکلات را تقلیل دهند، باشند. مهمترین این مشکلات، نیاز این کنترل‌کننده به اطلاعات کامل از سیستم و اغتشاش است. مدل سازی سیستم و اغتشاش پیچیدگی‌های خاص خود را دارد زیرا که بدست آوردن مدل سیستم برای سیستم‌های چند ورودی-چندخروجی کار ساده‌ای نیست. وجود اغتشاشات بزرگ نیز بر مشکلات مدل‌سازی می‌افزاید. از طرف دیگر در صنعت روش‌هایی مورد نیاز است که بتوانند بدون نیاز به اطلاعات سیستم و نویز در مورد حالات بهینه تصمیم‌گیری کنند.

برای تعیین حداقل واریانس چندین روش (علاوه بر کنترل‌کننده حداقل واریانس) مطرح شده است که روش ماتریس اینترکتور[2] [۵] و روش مبتنی بر تحلیل سری زمانی چند متغیره [۶] از روش‌های شاخص در این زمینه هستند. در این دو روش دیگر نیاز به اعمال کنترل‌کننده برای یافتن حداقل واریانس نیست و با استفاده از خروجی سیستم و مدل دقیق از سیستم می‌توان حداقل واریانس را تخمین زد. روش سری زمانی مشابه روش ماتریس اینترکتور بدون استفاده از کنترل‌کننده مقدار بهینه حداقل واریانس را تخمین می‌زند. روش مبتنی بر تحلیل سری زمانی چند متغیره با استفاده از داده‌های خروجی سیستم، مدلسازی و تحلیل مدل بدست آمده، به مقدار حداقل واریانس می‌رسد. این روش در سال ۱۹۷۸ توسط

[1] Box and Jenkins
[2] interactor

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.3.7.6]

دوریس [۶] معرفی گردید. ویژگی این روش در این است که نیاز به هیچ اطلاعاتی از سیستم ندارد. در واقع می‌توان گفت که این روش تنها روشی است که هیچ اطلاعاتی از سیستم و اغتشاش را نیاز ندارد و حتی به باز کردن حلقه هم نیاز نیست و می‌توان آن را جزء عملی‌ترین روش‌های ارائه شده در این زمینه دانست اما سال‌ها بعد معلوم گردید که این روش یک مشکل اساسی دارد و آن دقت روش است. بدلیل استفاده نکردن از مدل سیستم و اغتشاش در محاسبات این روش با مشکل تخمین مقدار دقیق حداقل واریانس روبه‌رو بود. با وجود این مشکل، این روش تا به امروز استفاده شده و تحقیقات زیاد بر روی آن انجام گرفته و این بدلیل عملی بودن روش در محیط‌های صنعتی بوده است. از اواسط سال ۱۹۹۰ تحقیقات به سمت تعیین حداقل واریانس سیستم MIMO کشیده شد. در سال ۱۹۹۷ موضوعی با نام ماتریس اینترکتور توسط هانگ[1] [۵] مطرح شد که اساس کار شاخص عملکرد چندورودی- چند خروجی قرار گرفت. این روش برای جبران نواقص موجود در روش مبتنی بر تحلیل سری زمانی چند متغیره مطرح شد. به کمک این روش دقت تعیین شاخص مینیمم واریانس افزایش می‌یابد ولی پیچیدگی روش نیز به مراتب بیشتر می‌شود نشان داده شده است که روش ماتریس اینترکتور روشی بسیار دقیق در تخمین مقدار حداقل واریانس است ولی این روش چندین مشکل اساسی دارد از جمله ۱) این روش به مدلی دقیق از سیستم نیاز دارد ۲) کنترل کننده‌ای که بتواند حداقل واریانس را تولید کند را معرفی نمی‌کند ۲) نیاز به محاسبات پیچیده و وقت‌گیر زیادی دارد (چندین الگوریتم برای بدست آوردن ماتریس اینترکتور معرفی شده است) [۷-۹]. روش محاسبه وابسته به مدل سیستم است بنابراین پیاده سازی روش‌های مبتنی بر ماتریس اینترکتور در محیط صنعتی بسیار مشکل خواهد بود. تعیین مقادیر این ماتریس نیز به چالشی بزرگ در تعیین شاخص حداقل واریانس تبدیل شده است. از این‌رو تلاش‌های فراوان صورت گرفت تا بتوان محاسبه این ماتریس را تا حد ممکن کاهش داد یا به طور کلی حذف کرد [۱۰-۱۵] که مطمئناً حذف آن به کاهش دقت منجر خواهد شد. این مشکلات باعث شد که این روش چندان عملی نگردد و چندان استفاده‌ای از آن در صنعت صورت نگیرد. امروزه در بحث حداقل واریانس محققان به دنبال روشی هستند که کمترین نیاز را به ماتریش اینترکتور داشته باشد و در عین حال دقیق بوده و قابلیت اجرا در محیط صنعتی را داشته باشد. برای اجتناب از محاسبه ماتریس اینترکتور یکی از موثرترین راه‌ها تقویت کردن روش‌های کنترل‌کننده حداقل واریانس و روش مبتنی بر تحلیل سری زمانی چند متغیره و تلاش برای برطرف کردن ضعف آن‌هاست.

مشکل اصلی اکثر روش‌های پیشنهاد شده برای تعیین حداقل واریانس نیاز داشتن به مدل دقیق از سیستم و اغتشاش است. برای سیستم‌های تک ورودی-تک خروجی روش‌های مدل‌سازی و شناسایی متنوع هستند، به عنوان مثال در سیستم SISO از مدل‌های خطی ARMAX برای مدل‌سازی سیستم و اغتشاش می‌توان استفاده کرد. یکی از روش‌های موجود در مدل کردن سیستم‌های چند ورودی-چند خروجی استفاده از روش‌های تک ورودی – تک خروجی است یعنی استفاده از چندین مدل ARMAX جدا از هم است [۱۶]. این روش ساده بوده اما دقت بسیار کمی دارد. مدل کردن سیستم چند ورودی-چند خروجی به روش تک ورودی-تک خروجی نه تنها وابستگی بین حلقه‌ها را نادیده می‌گیرد بلکه موجب می‌شود که برای هر حلقه کنترلی، کنترل‌کننده‌ای جدا طراحی و استفاده شود. مطمئناً بهترین روش برای شناسایی و کنترل سیستم MIMO نگاه به آن به صورت چند ورودی-چند خروجی و بدون پیش فرض جداسازی حلقه‌هاست. روش دیگر بدست آوردن ماتریس تابع تبدیل سیستم و اغتشاش یا استفاده از فضای حالت است. محاسبه ماتریس تابع تبدیل نیز پیچیدگی‌های خاص خود را دارد از این‌رو در این نوع مدل‌سازی معمولا توابع تبدیل با درجات کم (۱یا ۲) در نظر گرفته می‌شود که خود موجب کاهش دقت می‌شود. این مدل معمولا از اطلاعات فیزیکی حاکم بر سیستم بدست می‌آید. باید توجه داشت که معادلات فیزیکی برای بسیاری از سیستم‌ها قابل دسترس نیست و علاوه بر این در بدست آوردن چنین معادلاتی فرض‌ها و تقریب‌های فراوانی استفاده می‌شود. برای مدل-سازی سیستم‌های غیر خطی چند ورودی-چند خروجی مشکلات حادتر می‌شود. معمول‌ترین روشی که برای این نوع سیستم‌ها وجود دارد شبکه عصبی [۱۷]، روش‌های فازی [۱۸و۱۹و۲۰] و روش‌های NARMAX [۲۱] است. این مدل‌ها به صورت برخط باید قادر به مدل کردن دقیق سیستم باشند. حتی اگر فرض کنیم این بخش با دقت قابل انجام باشد، این روش‌ها با یک مشکل دیگر مواجه می‌شوند. در این مدل‌ها رابطه مستقیم ورودی‌ها و خروجی‌های سیستم مشخص نیست و بنابراین طراحی کنترل-کننده حداقل واریانس نمی‌تواند به آسانی انجام گیرد.

در روش پیشنهاد شده در این مقاله نوع توسعه یافته روش ARX برای سیستم چند ورودی-چند خروجی پیشنهاد شده است. هدف اصلی در روش پیشنهادی افزایش دقت به همراه عملی‌تر ساختن روش کنترل‌کننده حداقل واریانس برای سیستم‌های چند ورودی-چند خروجی است. در این روش جدا کردن حلقه‌ها لازم نیست و از طرفی دیگر نیاز به حذف کردن یا جدا کردن اطلاعات اغتشاش از داده‌ها نمی‌باشد و اغتشاشات به همراه و همزمان با سیستم شناسایی می‌شوند. در این روش تنها به داده‌های معمول حلقه مورد نیاز است دارد و نیازی به باز کردن حلقه و انجام تست‌های دیگر بر روی سیستم وجود ندارد. این ویژگی موجب می‌شود که کار روزانه حلقه و سیستم متوقف نشود که می‌تواند برای کاربردهای صنعتی بسیار حائز اهمیت باشد. در روش پیشنهاد شده در این مقاله تنها کافیست که از ورودی و خروجی سیستم نمونه برداری شده تا داده‌های حاصل شده از آن توسط مدل VARX تحلیل شود. سپس با استفاده از مدل بدست آمده کنترل‌کننده حداقل واریانس طراحی می‌شود. دقت این مدل بیشتر از ماتریس سیستم، فضای حالت و روش‌های تک متغیره است. به علاوه، با وجود اینکه VARX یک مدل خطی است، اما توانایی مدل

[1] Huang

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.3.7.6]

کردن سیستم‌های غیر خطی را اگر به خوبی شناسایی شده باشد را دارد. در این مدل، رابطه بین ورودی‌ها و خروجی‌ها به صورت مستقیم تعریف می‌شود بنابراین طراحی کنترل‌کننده نیز به سادگی ممکن می‌شود. در این مقاله فرض می‌شود اغتشاشات با دامنه بزرگ بر سیستم اثر می‌گذارند و عملکرد حلقه را شدیدا تحت تاثیر خود قرار می‌دهند. همچنین فرض شده است که هیچ اطلاعاتی از اغتشاشی که بر سیستم اثر می‌گذارد در دسترس نیست.

در ادامه، مدل VARX توضیح داده خواهد شد. در قسمت ۳ روش مبتنی بر تحلیل سری زمانی چند متغیره به طور خلاصه معرفی خواهند شد. در قسمت ۴ کنترل‌کننده حداقل واریانس به کمک مدل VARX بدست خواهد آمد. در فصل ۵ شبیه سازی و نتایج حاصل از امتحان کنترل‌کننده بر روی سه سیستم معیار خطی و سیستم معیار غیر خطی آزمایشگاهی ۴ تانک ارائه خواهد شد. در فصل آخر نتیجه گیری از کل مطالب ارائه خواهد شد.

۲- مدل VAR/VARX

مدل‌های VAR و VARX توسعه یافته مدل‌های تک متغیره AR و ARX هستند. مدل AR برای مدل کردن سری‌های زمانی و ARX برای مدل کردن سیستم‌ها استفاده می‌شود. مدل ARX را می‌توان به صورت باز شده در رابطه (۲) مشاهده کرد.

$$y(t)+a_1y(t-1)+\cdots+a_py(t-p)=b_1u(t-1)+\cdots+ +b_du(t-d)+e(t) \quad (۲)$$

که $e(t)$ نویز سفید است که بیانگر خطای مدل‌سازی نیز می‌باشد، p و d به ترتیب حداکثر درجه تاخیر خروجی و ورودی در مدل هستند. a_i و b_i ضرایب ثابت مجهول هستند. ماتریس ضرایب $A(q), B(q)$ را می‌توان به صورت رابطه (۳) تعریف کرد.

$$\begin{aligned} &A(q)y(t)=B(q)u(t)+e(t)\\ &A(q)=1+a_1q^{-1}+\cdots+a_pq^{-p}.\\ &B(q)=1+b_1q^{-1}+\cdots+b_dq^{-d} \end{aligned} \quad (۳)$$

این مدل دارای پارامترهای مجهولی است که مقادیر آن‌ها باید توسط الگوریتم مناسبی تخمین زده شود.

$$\theta=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\cdots a_p & b_1\cdots b_d\end{bmatrix}^T \quad (۴)$$

اگر در مدل ARX ورودی u حذف شود مدل AR بدست خواهد آمد.

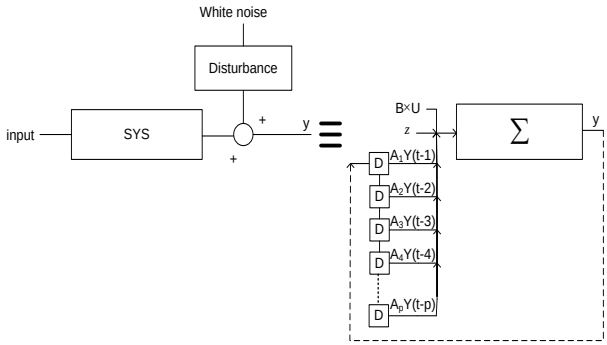
$$y(t)+a_1y(t-1)+\cdots+a_py(t-p)=e(t). \quad (۵)$$

اگر در رابطه (۵) ضرایب مجهول a_i به ماتریس‌های مجهول A_i و داده‌های $y(t)$ به بردار $\underline{Y}(t)$ تبدیل شود انگاه مدل AR به مدل VAR توسعه می‌یابد. رابطه (۶) مدل VAR را نمایش می‌دهد [۶].

$$\begin{aligned} \underline{Y}(t)&=\sum_{i=1}^{p}A_i\underline{Y}(t-i)+\underline{z}+\underline{\varepsilon}(t)=A_1\underline{Y}(t-1)+A_2\underline{Y}(t-2)+\cdots\\ &\quad+A_p\underline{Y}(t-p)+\underline{z}+\underline{\varepsilon}(t)\\ A_i&=\begin{bmatrix}a_{11}^i & \cdots & a_{1n}^i\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}^i & \cdots & a_{nn}^i\end{bmatrix},\qquad \underline{Y}(t)=\begin{bmatrix}y_1(t)\\ \vdots\\ y_n(t)\end{bmatrix},\\ \underline{\varepsilon}(t)&=\begin{bmatrix}e_{11}(t) & \cdots & e_{n1}(t)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ e_{1n}(t) & \cdots & e_{nn}(t)\end{bmatrix},\qquad \underline{z}=\begin{bmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۶)$$

در (۶) پارامترهای: p درجه مدل، n تعداد سری، z_i مقدار متوسط سری (اگر میانگین سری حذف نشده باشد) و $\underline{Y}(t)$ برداری از مقادیر خروجی‌ها در لحظه t و $\underline{\varepsilon}(t)$ خطای مدل‌سازی در لحظه t هستند. a_{jk}^i پارامترهای ثابت و مجهول مدل هستند که مقادیر آنها باید توسط الگوریتم مناسب تعیین گردد [۲۲و۲۳].

مدل VARX نوع توسعه یافته و چندمتغیره‌ی ARX است که برای مدل‌سازی سیستم‌های چند ورودی–چندخروجی به تازگی بکار گرفته شده است [۲۴–۲۸]. در این نوع مدل، سیستم اصلی به همراه اغتشاش وارد شده به آن با استفاده از مدل VARX مدل می‌شود (شکل ۱).



شکل ۱: مدل VARX برای مدلسازی همزمان سیستم و اغتشاش

شکل (۱) ورودی‌ها و خروجی‌های مدل VARX را نمایش می‌دهد که جهت مدل‌سازی توأم سیستم و اغتشاش استفاده شده است.

مشابه مدل VAR می‌توان مدل VARX را به صورت زیر تعریف کرد.

$$\begin{aligned} \underline{Y}(t)=\sum_{i=1}^{p}A_i\underline{Y}(t-i)+\sum_{i=0}^{d}B_i\underline{U}(t-i)+\underline{z}+\underline{\varepsilon}(t)=A_1\underline{Y}(t-1)+\cdots+\\ +A_p\underline{Y}(t-p)+B_1U(t-1)+\ldots B_dU(t-d)+\underline{z}+\underline{\varepsilon}(t) \end{aligned} \quad (۷)$$

این مدل مشابه مدل VAR است (رابطه ۶) و فقط قسمت ورودی به آن اضافه شده است.

از ویژگی‌های اصلی مدل VARX می‌توان به این موارد اشاره کرد که این مدل وابستگی موجود در سیستم چند ورودی–چند خروجی را نیز مدل می‌کند، توانایی مدل کردن برخی سیستم‌های غیر خطی را، اگر به خوبی شناسایی شده باشد، را دارد، اما از طرف دیگر این مدل دارای پارامترهای مجهول فراوانی است. اگر درجه مدل ۳۰ و تعداد خروجی‌ها ۵ باشد دراین صورت باید مقادیر ۷۵۵ پارامتر به صورت دقیق تخمین زده شوند. تخمین دقیق پارمترهای این نوع مدل را مشکل اصلی استفاده از آن می-

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.3.7.6]

توان دانست. از این‌رو روش‌های بسیار برای تخمین پارامترها به تازگی پیشنهاد شده‌اند [۲۲و۲۳]. برای مدل‌سازی در این مقاله از الگوریتم Maximum Likelihood (ML) [۲۹] استفاده شده است.

رابطه (۷) را می‌توان با فرض (۸) به فرم بسته (۹) نوشت.

$$\phi_i = A_i \quad 1 \le i \le p \tag{۸}$$

$$\underline{Y}(t) = \phi_1 \underline{Y}(t-1) + \cdots + \phi_p \underline{Y}(t-p) + \underline{z} + B(q^{-1})\underline{U}(t) + \underline{\varepsilon}(t)$$
$$\underline{Y}(t) = \phi(q^{-1})\underline{Y}(t-1) + B(q^{-1})\underline{U}(t-1) + \underline{\varepsilon}(t) + \underline{z} \tag{۹}$$

که

$$\phi(q^{-1}) = \phi_1 + \cdots + \phi_p q^{-p+1}$$
$$B(q^{-1}) = B_1 + \cdots + B_d q^{-d+1}$$

با استفاده از این رابطه می‌توان کنترل‌کننده حداقل واریانس را بدست آورد.

۳- روش مبتنی بر تحلیل سری زمانی چند متغیره

اگر مدلی (VAR) به صورت (۱۰) برای سری زمانی چند متغیره، با استفاده از روش‌های شرح داده شده در فصل قبل، تخمین زده شده باشد:

$$\underline{Y}(t) = \phi \underline{Y}(t-1) + \underline{\varepsilon}(t), \qquad m \langle n \tag{۱۰}$$

می‌توان واریانس (۱۱) را با استفاده از رابطه (۱) محاسبه کرد.

$$\mathrm{var}_{\min}(\underline{Y}) = E(\underline{\varepsilon}(t)^2) \tag{۱۱}$$

به عبارتی حداقل واریانس خروجی برابر با واریانس خطای مدل‌سازی است [۶].

دیده می‌شود که در روش مبتنی بر تحلیل سری زمانی چند متغیره تنها نیاز به مدلی از سری زمانی وجود دارد و هیچ نیازی به باز کردن حلقه و یا اطلاعات سیستم و اغتشاش نیست، بنابراین روش مبتنی بر تحلیل سری زمانی چند متغیره روشی بسیار ساده و عملی برای بدست آوردن شاخص حداقل واریانس است. روش پیشنهاد شده تکمیل شده روش تحلیل سری زمانی چند متغیره است که به جای استفاده از مدل VAR از مدل VARX استفاده می‌کند، بنابراین علاوه بر داده‌های خروجی سیستم از داده‌های سیگنال کنترل نیز برای مدل سازی استفاده می‌کند. تفات اصلی دو روش (روش پیشنهاد شده و روش مبتنی بر تحلیل سری زمانی چند متغیره) در این است که در روش پیشنهاد شده کنترل‌کننده بهینه‌ای با استفاده از مدل VARX طراحی می‌شود ولی در روش مبتنی بر تحلیل سری زمانی تنها از روی مدل VAR و با استفاده از رابطه (۱۱) حداقل واریانس تخمین زده می‌شود. نتایج نشان دهنده برتری روش پیشنهادی نسبت به روش تحلیلی سری زمانی چند متغیره در تعیین حداقل واریانس است. علاوه‌براین در روش پیشنهادی علاوه بر تعیین حداقل واریانس روش رسیدن به حداقل واریانس نیز مشخص می‌شود. این مورد در دو روش تحلیل سری زمانی چند متغیره و روش ماتریس اینترکتور وجود ندارد.

روش ماتریس اینترکتور روشی است که نیاز به مقدمه و توضیحات اولیه دارد بنابراین از توضیحات بیشتر در مورد این روش اجتناب می‌کنیم در صورت نیاز به مرجع [۱و۷و۸و۹] رجوع شود.

۴- طراحی کنترل‌کننده حداقل واریانس

برای رسیدن به حداقل واریانس باید رابطه (۱۲) حداقل گردد.

$$J = E\{[r - \underline{Y}(t)]^2\}, \quad 1 \le t \le t_{total} \tag{۱۲}$$

در این رابطه r بیانگر ورودی مبناست و t_{total} بیانگر کل زمان نمونه برداری شده است. در کنترل‌کننده رگولاتوری ورودی مبنا صفر فرض می‌شود بنابراین خواهیم داشت:

$$J = E\{\underline{Y}^2(t)\}, \quad 1 \le t \le t_{total} \tag{۱۳}$$

حال می‌توان از مدل شناسایی شده‌ی VARX (رابطه (۹)) برای رسیدن به حداقل واریانس استفاده کرد.

$$\min_{u(t)} J(t) = \min_{u(t)} E\{\underline{Y}^2(t)\}$$
$$= \min_{u(t)} E\{[\phi(q^{-1})\underline{Y}(t-1) + B(q^{-1})\underline{U}(t-1) + \underline{z} + \underline{\varepsilon}(t)]^2\} \tag{۱۴}$$

برای حداقل ساختن تابع هزینه فوق می‌توان سیگنال کنترل را به صورت زیر بدست آورد.

$$\underline{U}(t) = -B(q^{-1})^{-1} \times [\phi(q^{-1})\underline{Y}(t) + \underline{z}] \Rightarrow \min_{u(t)} J(t) = E\{\underline{\varepsilon}(t)^2\} \tag{۱۵}$$

بنابراین $\underline{U}(t)$ (سیگنال کنترلی) بدست آمده می‌تواند موجب کم شدن نوسانات خروجی شود هر چند این نوسانات به دلیل وجود ترم نویز $\underline{\varepsilon}(t)$ نمی‌تواند به طور کامل حذف شود. طبق رابطه (۱۵) کمترین واریانسی که در خروجی می‌توان رسید برابر با واریانس خطای تخمین است.

فرض می‌کنیم (۱۶) رابطه گسسته حاکم بر دینامیک سیستم باشد که G و G_d توابع تبدیل مربوط به ورودی و اغتشاش هستند.

$$\underline{Y}(t+1) = G\underline{U}(t) + G_d \underline{v}(t) \tag{۱۶}$$

با قرار دادن U از رابطه (۱۵) و $Y(t)$ از رابطه (۹) در (۱۶) رابطه (۱۷) بدست می‌آید.

$$\underline{Y}(t+1) = G(-B(q^{-1})^{-1} \times [\phi(q^{-1})\underline{Y}(t) + \underline{z}]) + G_d \underline{v}(t) \tag{۱۷}$$

اگر مدل VARX تخمین دقیقی از این سیستم باشد با استفاده از رابطه (۹) و مقایسه آن با رابطه (۱۶) می‌توان چنین نوشت:

$$G = \frac{B(q^{-1})}{(I_n - q^{-1}\phi(q^{-1}))}. \tag{۱۸}$$

با جایگذاری رابطه بالا در رابطه (۱۷) خواهیم داشت:

$$(I_n - q^{-1}\phi(q^{-1}))\underline{Y}(t+1) = -[\phi(q^{-1})\underline{Y}(t) + \underline{z}] + G_d \underline{v}(t)$$
$$\Downarrow \tag{۱۹}$$
$$\underline{Y}(t+1) = -\underline{z} + G_d \underline{v}(t)$$

در عبارت فوق $\underline{Z}$ باید برابر مقدار میانگین اغتشاش باشد و به این ترتیب مقدار میانگین حاصل از اغتشاش حذف می‌شود. بنابراین واریانس خروجی برابر خواهد بود با:

$$\sigma_y^2 = E((-\underline{b} + G_d \underline{v}(t))^2) \tag{۲۰}$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.3.7.6]

طبق رابطه (۲۰) مقدار حداقل واریانس بدست آمده از کنترل کننده حداقل واریانس برابر واریانس اغتشاش اعمال شده بر روی سیستم است. این دقیقا همان نتیجه‌ای است که از روش مبتنی بر تحلیل سری زمانی چند متغیره (رابطه (۱۱)) بدست آمده است. بنابراین روش پیشنهادی را می‌توان توسعه یافته روش مبتنی بر تحلیل سری زمانی چند متغیره دانست. نتایج نشان دهنده برتری روش پیشنهادی نسبت به روش تحلیل سری زمانی چند متغیره دارد. در قسمت بعدی نتایج بدست آمده دقت سه روش تحلیل سری زمانی چند متغیره، ماتریس اینترکتور و روش پیشنهادی مقایسه خواهند شد.

۵-۱ نتایج شبیه‌سازی

برای نشان دادن توانایی روش پیشنهاد شده، سه سیستم MIMO خطی از مراجع مختلف در نظر گرفته شده است. این سیستم‌ها بسیار پرکاربرد در زمینه حداقل واریانس هستند. میزان واریانس خروجی در این سه سیستم به اندازه کافی بزرگ انتخاب شده است که کار مدل‌سازی را سخت و پیچیده می‌کند. در قدم اول باید مدلی دقیق برای سیستم تخمین زده شود. از آنجایی که مدل VARX همانند مدل ARX برای رسیدن به دقت کافی نیاز به درجات بالایی دارد، در این قسمت هر مدل از درجه ۳۰ در نظر گرفته شده است. برای تخمین این پارامترهای مجهول نیاز به داده‌هایی از ورودی و خروجی‌های سیستم وجود دارد. بنابراین باید سیستم با یک ورودی مناسب تحریک شود. سیگنال تحریک پله (شکل ۲) برای بدست آوردن داده‌های شناسایی به سیستم اعمال و خروجی‌ها مربوط به آن ضبط می‌شوند. می‌توان از داده‌های کاری معمول سیستم نیز استفاده کرد (اگر به قدر کافی غنی باشند) [۲۹]. نتایج بدست آمده از کنترل‌کننده حداقل واریانس با نتایج بدست آمده از روش ماتریس اینترکتور و روش مبتنی بر تحلیل سری زمانی چند متغیره مقایسه شده است.

سیستم اول از مرجع [۳۰] گرفته شده ست. مدل سیستم و اغتشاش در (۲۱) آورده شده است. فرض بر آن است که در شبیه سازی هیچ اطلاعاتی از سیستم و اغتشاش در دسترس نیست به جزء داده‌های خروجی سیستم که در شکل ۳ رسم شده است. اغتشاش، نویز سفید گوسی چند متغیره با میانگین صفر و واریانس I_n می‌باشد.

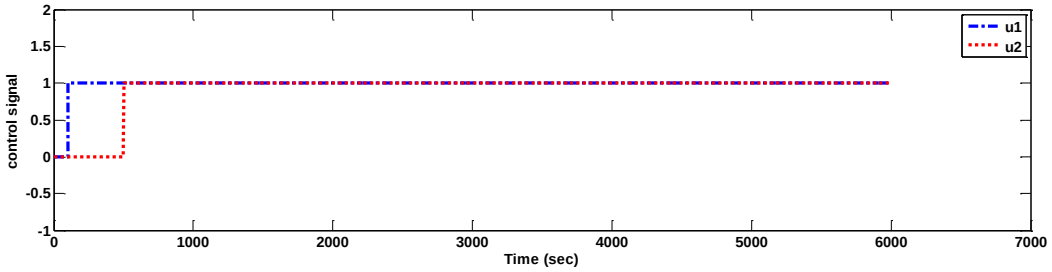
$$G=\begin{bmatrix}\frac{q^{-1}}{1-0.4q^{-1}} & \frac{q^{-2}}{1-0.1q^{-1}}\\ \frac{0.3q^{-1}}{1-0.1q^{-1}} & \frac{q^{-2}}{1-0.8q^{-1}}\end{bmatrix}$$
$$D=\begin{bmatrix}\frac{1}{1-0.5q^{-1}} & \frac{-0.6}{1-0.5q^{-1}}\\ \frac{0.5}{1-0.5q^{-1}} & \frac{1}{1-0.5q^{-1}}\end{bmatrix} \qquad (۲۱)$$

با استفاده از الگوریتم ML مدل VARX تخمین زده شده است (جدول ۱). پس از بدست آوردن مدل VARX با استفاده از رابطه (۱۵) می‌توان کنترل‌کننده حداقل واریانس را بدست آورد و بعد از اعمال کنترل‌کننده، خروجی سیستم به صورت شکل ۴ بدست می‌آید. در نتیجه مقدار حداقل واریانس ممکن را می‌توان از محاسبه واریانس خروجیِ حاصله با استفاده از رابطه (۱) بدست آورد.

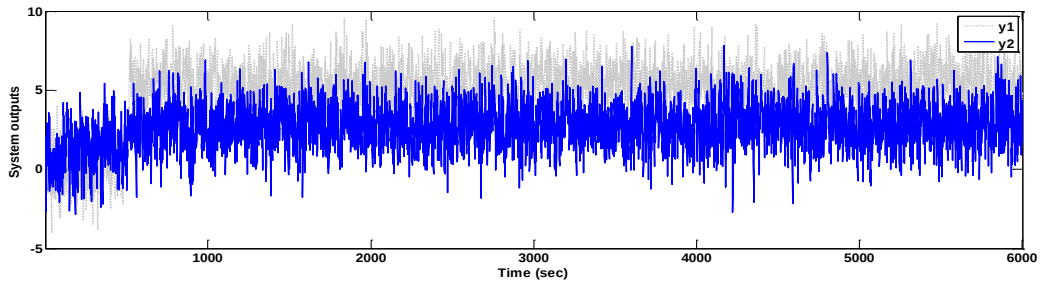
$$\min_{u(t)} J = trace\left(\mathrm{var}\{y(t)\}\right) = 1.6057 + 1.4258 = 3.031 \qquad (۲۲)$$

واریانس حلقه ۲ واریانس حلقه ۱

در رابطه (۲۲) *trace* بیانگر جمع عناصر بر روی قطر اصلی و $var\{y(t)\}$ بیانگر ماتریس واریانس $y(t)$ است .
مقدار دقیق واریانس، برای همین سیستم که از روش ماتریس اینترکتور بدست آمده است، برابر ۲.۹۹۹۰ در مقاله [۳۰] گزارش شده است. روش مبتنی بر تحلیل سری زمانی چند متغیره میزان حداقل واریانس را ۲.۵۲ بدست می‌آورد. دیده می‌شود که اختلاف روش پیشنهادی با مقدار دقیق ناچیز بوده و با در نظر گرفتن وجود اغتشاشات بزرگ، نتیجه بسیار قابل قبول است. همین روال را می‌توان بر روی دو سیستم دیگر نیز انجام داد. سیستم بعدی بر گرفته از مرجع [۳۱] می‌باشد که مدل سیستم و اغتشاش در (۲۳) دیده می‌شود.



شکل ۲ : سیگنال تحریک سیستم

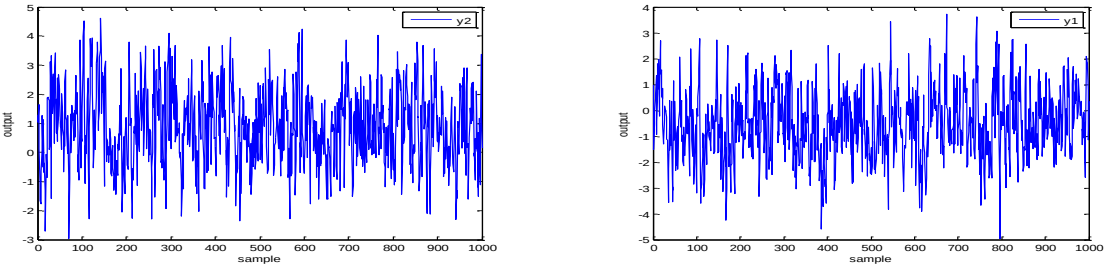


شکل ۳ : خروجی سیستم (۲۱)

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.3.7.6]

جدول ۱ : مقادیر پارامترهای مدل VARX برای سیستم (۲۱)

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
Z	$\begin{bmatrix}0.00243\\0.01638\end{bmatrix}$	B	$\begin{bmatrix}0.80858\\2.26558\end{bmatrix}$	Q	$\begin{bmatrix}1.29592 & -0.08375\\-0.0837 & 1.22639\end{bmatrix}$
A_1	$\begin{bmatrix}0.527296 & 0.0241524\\-0.00489 & 0.517368\end{bmatrix}$	A_2	$\begin{bmatrix}-0.01180 & 0.000673\\0.007170 & -0.00283\end{bmatrix}$	A_3	$\begin{bmatrix}-0.001319 & 0.0011629\\0.013171 & -0.002549\end{bmatrix}$
A_4	$\begin{bmatrix}0.013817 & 0.015088\\-0.02366 & 0.011436\end{bmatrix}$	A_5	$\begin{bmatrix}0.006765 & 0.004006\\0.016006 & 0.007113\end{bmatrix}$	A_6	$\begin{bmatrix}-0.005724 & 0.000661\\0.0121499 & 0.003754\end{bmatrix}$
A_7	$\begin{bmatrix}-0.018142 & 0.009627\\0.0094982 & 0.010611\end{bmatrix}$	A_8	$\begin{bmatrix}-0.007546 & 0.009415\\-0.013662 & -0.02851\end{bmatrix}$	A_9	$\begin{bmatrix}0.018408 & 0.006266\\0.000995 & 0.007352\end{bmatrix}$
A_{10}	$\begin{bmatrix}0.025365 & 0.014883\\0.008898 & 0.001847\end{bmatrix}$	A_{11}	$\begin{bmatrix}-0.00712 & -0.01483\\0.012500 & 0.012131\end{bmatrix}$	A_{12}	$\begin{bmatrix}-0.01053 & 0.011111\\-0.00798 & -0.02085\end{bmatrix}$
A_{13}	$\begin{bmatrix}0.0013258 & 0.0233859\\0.0016724 & 0.0011123\end{bmatrix}$	A_{14}	$\begin{bmatrix}0.009317 & -0.01166\\-0.00765 & -0.00685\end{bmatrix}$	A_{15}	$\begin{bmatrix}-0.01283 & -0.00458\\0.002286 & 0.025462\end{bmatrix}$
A_{16}	$\begin{bmatrix}0.001833 & -0.00413\\-0.01810 & 0.010554\end{bmatrix}$	A_{17}	$\begin{bmatrix}-0.00462 & -0.02102\\0.029801 & -0.01127\end{bmatrix}$	A_{18}	$\begin{bmatrix}0.013892 & 0.021423\\0.000449 & -0.00487\end{bmatrix}$
A_{19}	$\begin{bmatrix}-0.00694 & -0.00770\\0.013489 & 0.008231\end{bmatrix}$	A_{20}	$\begin{bmatrix}-0.02077 & -0.01779\\-0.02353 & 0.0097009\end{bmatrix}$	A_{21}	$\begin{bmatrix}0.013219 & 0.010878\\0.000254 & -0.01099\end{bmatrix}$
A_{22}	$\begin{bmatrix}-0.01760 & -0.01181\\0.023713 & 0.002636\end{bmatrix}$	A_{23}	$\begin{bmatrix}-0.02478 & 0.012135\\-0.00701 & -0.01551\end{bmatrix}$	A_{24}	$\begin{bmatrix}-0.01432 & -0.00278\\0.022291 & -0.00634\end{bmatrix}$
A_{25}	$\begin{bmatrix}0.001571 & 0.0264534\\-0.00051 & 0.0164275\end{bmatrix}$	A_{26}	$\begin{bmatrix}-0.00040 & -0.01860\\-0.01663 & 0.015120\end{bmatrix}$	A_{27}	$\begin{bmatrix}-0.01885 & 0.011313\\0.011968 & 0.005899\end{bmatrix}$
A_{28}	$\begin{bmatrix}0.021563 & 0.0133816\\-0.00113 & 0.0021475\end{bmatrix}$	A_{29}	$\begin{bmatrix}-0.00773 & -0.00935\\-0.00718 & -0.01389\end{bmatrix}$	A_{30}	$\begin{bmatrix}0.004296 & 0.0098861\\0.004983 & -0.00312\end{bmatrix}$



شکل ۴ : خروجی سیستم بعد از اعمال کنترل‌کننده حداقل واریانس

$$G=\begin{bmatrix}\dfrac{12.8e^{-s}}{16.7s+1} & \dfrac{-18.9e^{-3s}}{21.0s+1}\\ \dfrac{6.6e^{-7s}}{10.9s+1} & \dfrac{-19.4e^{-3s}}{14.4s+1}\end{bmatrix}$$
$$D=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{1-0.4q^{-1}} & \dfrac{0.7}{1-0.3q^{-1}}\\ \dfrac{-0.3}{1-0.6q^{-1}} & \dfrac{1}{1-0.5q^{-1}}\end{bmatrix} \qquad (۲۳)$$

این سیستم به صورت گسسته در نظر گرفته شده است و تابع تبدیل G با زمان نمونه برداری ۱ ثانیه گسسته سازی شده است. حدود ۶۰۰۰ نمونه از خروجی گرفته شده است که برای شناسایی استفاده شده است و پارامترهای مدل با استفاده از الگوریتم ML تخمین زده شده است. خروجی سیستم همراه با خروجی مدل در شکل ۵ دیده می‌شود.

دیده می‌شود که مدل به خوبی توانسته است داده‌های خروجی را دنبال کند. بعد از بدست آوردن کنترل‌کننده و اعمال آن در حلقه، خروجی حلقه‌ها به صورت شکل ۶ ظاهر می‌شوند.

در نتیجه مقدار کل واریانس خروجی که حاصل جمع واریانس تک تک حلقه‌هاست برابر مقدار ۳.۰۸ است.

$$\min_{u(t)} J = trace\left(\mathrm{var}\{y(t)\}\right)=1.6581+1.4287=3.0868 \qquad (۲۴)$$

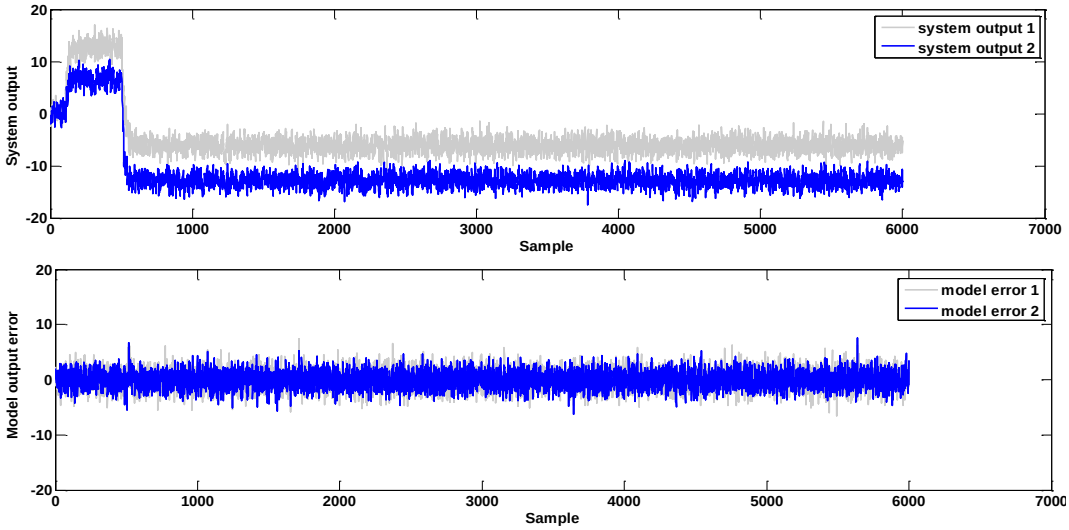
مقدار حداقل واریانس برای این سیستم با استفاده از روش ماتریس اینترکتور در مقاله [۳۱] برابر ۲.۸۶۲۴ گزارش شده است. در این مورد نیز نتیجه نزدیک و قابل قبول است. مقدار حداقل واریانس بدست آمده توسط روش مبتنی بر تحلیل سری زمانی چند متغیره برابر ۳.۱۵۴۱ بدست آمده است.

سیستم سوم، سیستمی است که در بسیاری از مراجع از جمله [۱و۳۲] در زمینه معیار حداقل واریانس مورد استفاده قرار گرفته است. مدل سیستم و اغتشاش در رابطه (۲۵) دیده می‌شود.

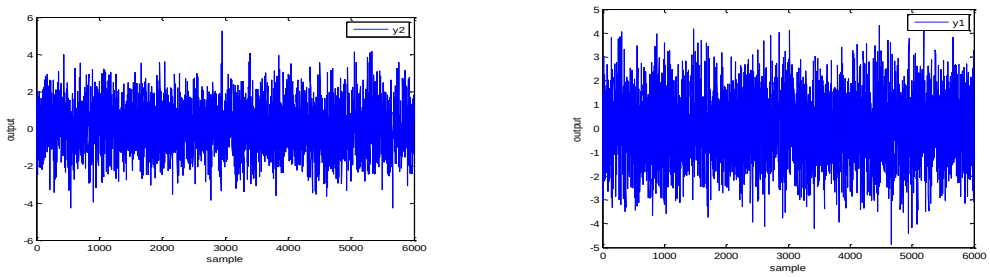
$$G=\begin{bmatrix}\dfrac{q^{-(d-1)}}{1-0.4q^{-1}} & \dfrac{0.7q^{-d}}{1-0.1q^{-1}}\\ \dfrac{0.3q^{-(d-2)}}{1-0.1q^{-1}} & \dfrac{q^{-(d-1)}}{1-0.8q^{-1}}\end{bmatrix}$$
$$D=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{1-0.5q^{-1}} & \dfrac{-0.6q^{-1}}{1-0.6q^{-1}}\\ \dfrac{0.5q^{-1}}{1-0.7q^{-1}} & \dfrac{1}{1-0.8q^{-1}}\end{bmatrix} \qquad (۲۵)$$

زمان نمونه برداری ۱ ثانیه و میزان تاخیر $d=6$ (مشابه با مرجع [۳۲]) در نظر گرفته شده است.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.3.7.6]



شکل ۵: خروجی سیستم و خطای مدل حاصل از نمونه برداری از خروجی سیستم (۲۳)



شکل ۶: خروجی سیستم (۲۳) بعد از اعمال کنترل‌کننده حداقل واریانس

پس از تعیین مدل و محاسبه کنترل‌کننده و اعمال آن بر روی سیستم خروجی حداقل واریانس بدست می‌آید. حداقل واریانسی که این نوع کنترل‌کننده بدست آورده است برابر است با:

$$\min_{u(t)} J = trace(\mathrm{var}\{y(t)\}) = 1.8411 + 2.9782 = 4.8194 \qquad (۲۶)$$

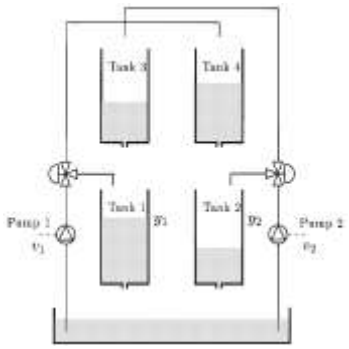
مقدار حداقل واریانس در مقالات [۱و۳۲] برابر ۴.۸۳ گزارش شده است. و روش مبتنی بر تحلیل سری زمانی چند متغیره حداقل واریانس ممکن را ۴.۹۵۱۴ نشان می‌دهد.

از نتایج بدیهی است که روش طراحی کنترل‌کننده مینیمم واریانس با استفاده از مدل VARX دقت قابل قبولی داشته و از طرف دیگر از سیستم اطلاعات چندانی نیاز نیست و تنها با استفاده از داده ورودی‌ها و خروجی‌های معمول سیستم عمل شناسایی را می‌توان انجام داد و سپس مقدار حداقل واریانس ممکن را قابل محاسبه است. این روش نیاز به مدل‌سازی‌های پیچیده را می‌تواند رفع کند و طراحی کنترل-کننده حداقل واریانس را برای سیستم MIMO دقیق‌تر و ساده‌تر سازد.

۵-۲ نتایج آزمایشگاهی

در این بخش نشان داده می‌شود که کنترل‌کننده طراحی شده به روش VARX قابل اعمال بر روی سیستم غیر خطی آزمایشگاهی ۴ تانک می‌باشد. روش پیشنهاد شده بر روی سیستم آزمایشگاهی ۴ تانک که یک سیستم غیر خطی، ۲ ورودی- ۲ خروجی با اندرکنش شدید بین حلقه‌ها و دارای پاسخ زمانی کند است، امتحان شده است.

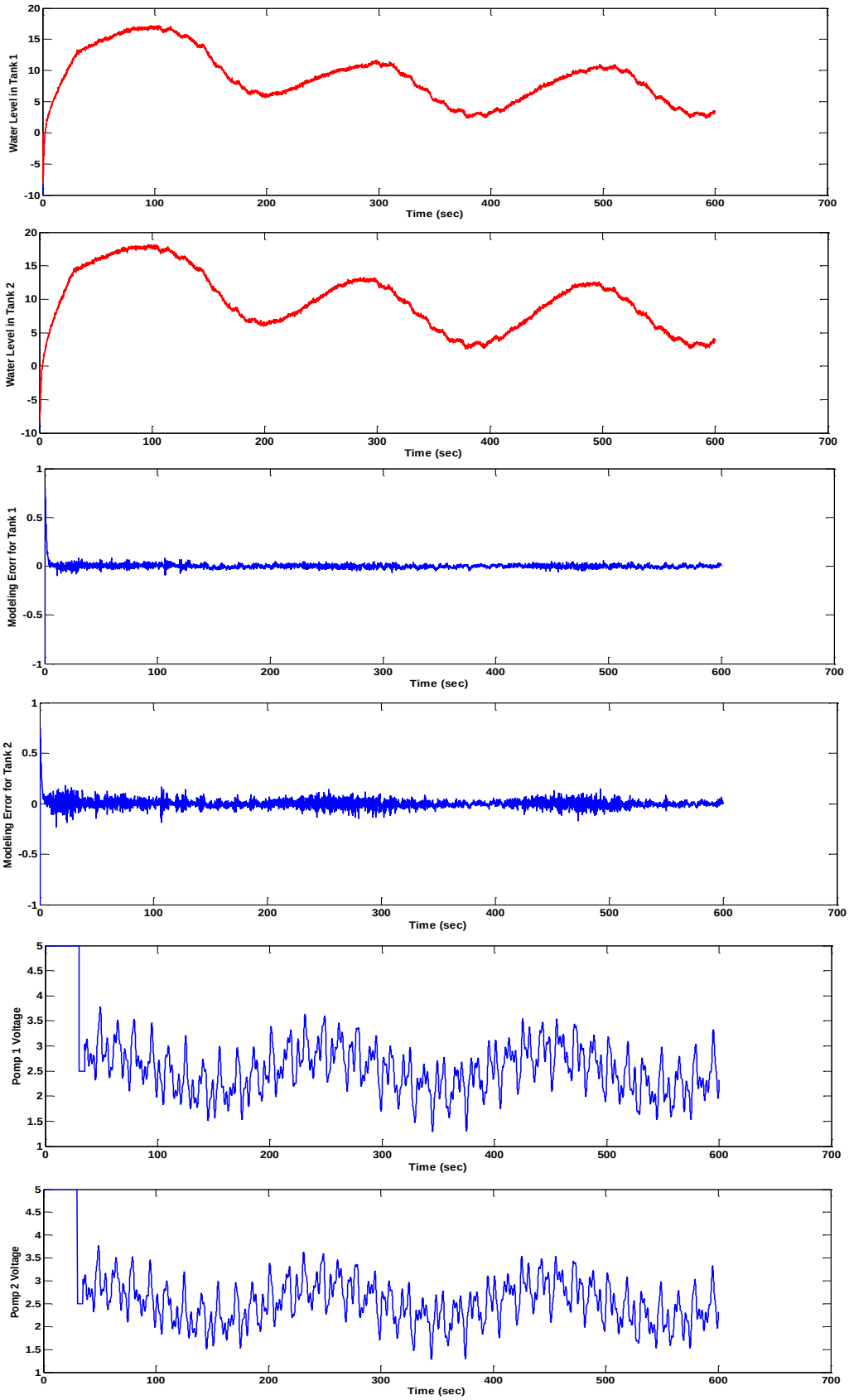
معادلات ریاضی حاکم بر سیستم معیار ۴ تانک نشان داده شده در شکل (۷) را می‌توان به صورت روابط (۲۷) نوشت [۳۳].



شکل ۷: شماتیک سیستم معیار ۴ تانک [۱۶]

$$\begin{aligned}
\frac{dh_1}{dt} &= -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{2gh_1} + \frac{a_3}{A_1}\sqrt{2gh_3} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1}\upsilon_1 \\
\frac{dh_2}{dt} &= -\frac{a_2}{A_2}\sqrt{2gh_2} + \frac{a_4}{A_2}\sqrt{2gh_4} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2}\upsilon_2 \\
\frac{dh_3}{dt} &= -\frac{a_3}{A_3}\sqrt{2gh_3} + \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3}\upsilon_2 \\
\frac{dh_4}{dt} &= -\frac{a_4}{A_4}\sqrt{2gh_4} + \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4}\upsilon_1
\end{aligned} \qquad (۲۷)$$

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.3.7.6]



شکل ۸: خروجی سیستم و مدل به همراه خطای مدلسازی و سیگنال کنترلی استفاده شده برای شناسایی

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.3.7.6]

در رابطه (۲۷)، A_i سطح مقطع تانک iام، a_i سطح مقطع شیر خروجی و h_i ارتفاع مایع داخل تانک iام می‌باشد. v_i ولتاژ اعمال شده به پمپ i است. پارامترهای ثابت سیستم به صورت زیر هستند.

$A_1, A_3 = 138.9^{cm^2}$; $A_2, A_4 = 138.9^{cm^2}$, $a_1, a_3 = 0.0502^{cm^2}$,
$a_2, a_4 = 0.0502^{cm^2}$, $g = 981^{cm/s^2}$

مقادیر اولیه سیستم نیز به صورت زیر است:

$h_1^0 = 11^{cm}, h_2^0 = 11.2^{cm}, h_3^0 = 5.8^{cm}, h_4^0 = 3.2^{cm}$
$v_1^0 = 2.7^V, v_2^0 = 2.7^V$
$k_1 = 32.29^{cm^3/Vs}, k_2 = 21.48^{cm^3/Vs}$
$\gamma_1 = 0.255, \gamma_2 = 0.180$

زمان نمونه برداری ۰.۱ثانیه در نظر گرفته شده است. خروجی‌های مدل، ارتفاع تانک‌های ۱و ۲ می‌باشند و هدف ثابت نگاه داشتن ارتفاع مایع در آن‌ها با در نظر گرفتن اثر اغتشاشات بر روی پمپ ۱ و ۲ است. اثر اغتشاش را می‌توان به صورت (۲۸) مدل کرد.

$$\begin{aligned}
\frac{dh_1}{dt} &= -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{2gh_1} + \frac{a_3}{A_1}\sqrt{2gh_3} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1}(\upsilon_1 + d_1)\\
\frac{dh_2}{dt} &= -\frac{a_2}{A_2}\sqrt{2gh_2} + \frac{a_4}{A_2}\sqrt{2gh_4} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2}(\upsilon_2 + d_2)\\
\frac{dh_3}{dt} &= -\frac{a_3}{A_3}\sqrt{2gh_3} + \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3}(\upsilon_2 + d_2)\\
\frac{dh_4}{dt} &= -\frac{a_4}{A_4}\sqrt{2gh_4} + \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4}(\upsilon_1 + d_1)
\end{aligned} \qquad (۲۸)$$

که d_1 و d_2 اغتشاش وارد شده به سیستم هستند ارتفاع تانک ۱ و ۲ به عنوان خروجی‌های سیستم فرض شده‌اند.

$$y_1 = h_1, y_2 = h_2 \qquad (۲۹)$$

در مرحله اول باید مدل VARX مناسب برای این سیستم تخمین زده شود. برای این منظور داده‌های حلقه باز سیستم جمع‌آوری شده و با استفاده از آن‌ها مدل VARX تخمین زده شده است. در شکل ۸ داده‌های جمع‌آوری شده برای شناسایی به همراه خروجی مدل، خطای مدل‌سازی و سیگنال ورودی نمایش داده شده است.

مقادیر پارامترهای مدل VARX برای سیستم ۴ تانک در جدول ۲ ذکر شده‌اند. در این جدول Q بیانگر ماتریس واریانس خطای مدل‌سازی است.

جدول ۲ : مقادیر پارامترهای مدل VARX برای سیستم ۴ تانک

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
Z	$\begin{bmatrix}-0.04451\\-0.04977\end{bmatrix}$	B	$\begin{bmatrix}0.01905\\0.02205\end{bmatrix}$
Q	$\begin{bmatrix}0.0178 & -0.0177\\0.0177 & 0.0186\end{bmatrix}$	A_1	$\begin{bmatrix}0.99742 & -0.0368\\0.4040 & 0.54161\end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix}0.02030 & -0.03682\\-0.15887 & 0.18097\end{bmatrix}$	A_3	$\begin{bmatrix}-0.02311 & 0.05979\\-0.24965 & 0.28065\end{bmatrix}$

با استفاده از مدل VARX تخمین زده شده (جدول ۲) کنترل‌کننده حداقل واریانس طبق رابطه (۱۵) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
y_1(t+1) &= \left[\begin{matrix}0.044 - 0.997y_1(t) + 0.036y_2(t) - 0.02y_1(t-1) +\\ +0.036y_1(t-1) + 0.023y_1(t-2) - 0.059y_2(t-2)\end{matrix}\right] \Big/ 0.019\\
y_2(t+1) &= \left[\begin{matrix}0.049 - 0.4040y_1(t) - 0.541y_2(t) + 0.158y_1(t-1) -\\ -0.186y_1(t-1) + 0.249y_1(t-2) - 0.28y_2(t-2)\end{matrix}\right] \Big/ 0.022
\end{aligned} \qquad (۳۰)$$

برای امتحان کردن کارایی کنترل‌کننده حداقل واریانس، آزمایشی طراحی شده است. در این آزمایش در ۵۰۰ ثانیه اول سیستم به صورت حلقه باز با مقادیر مرجع ثابت (۲.۷و۲.۷) کار می‌کند تا خروجی به مقدار تعادل خود برسد سپس از ثانیه ۵۰۰ام اغتشاش سینوسی بر روی سیگنال کنترل (ولتاژ پمپ‌ها) اعمال می‌شود و از ثانیه ۱۰۰۰ تا ۱۵۰۰ کنترل‌کننده حداقل واریانس (رابطه (۳۰)) برای حذف اثر اغتشاش اعمال می‌شود تا سطح آب دو تانک ۱ و ۲ در نقطه تعادل (۱۱و۱۱.۲) ثابت نگه داشته شود. شکل ۹ نتایج بدست آمده از این آزمایش را نمایش می‌دهد.

در شکل ۹ ارتفاع ۲ تانک خروجی و سیگنال کنترلی نمایش داده شده است. کنترل‌کننده حداقل واریانس توانسته واریانس خروجی را به مقدار چشمگیری کاهش دهد.

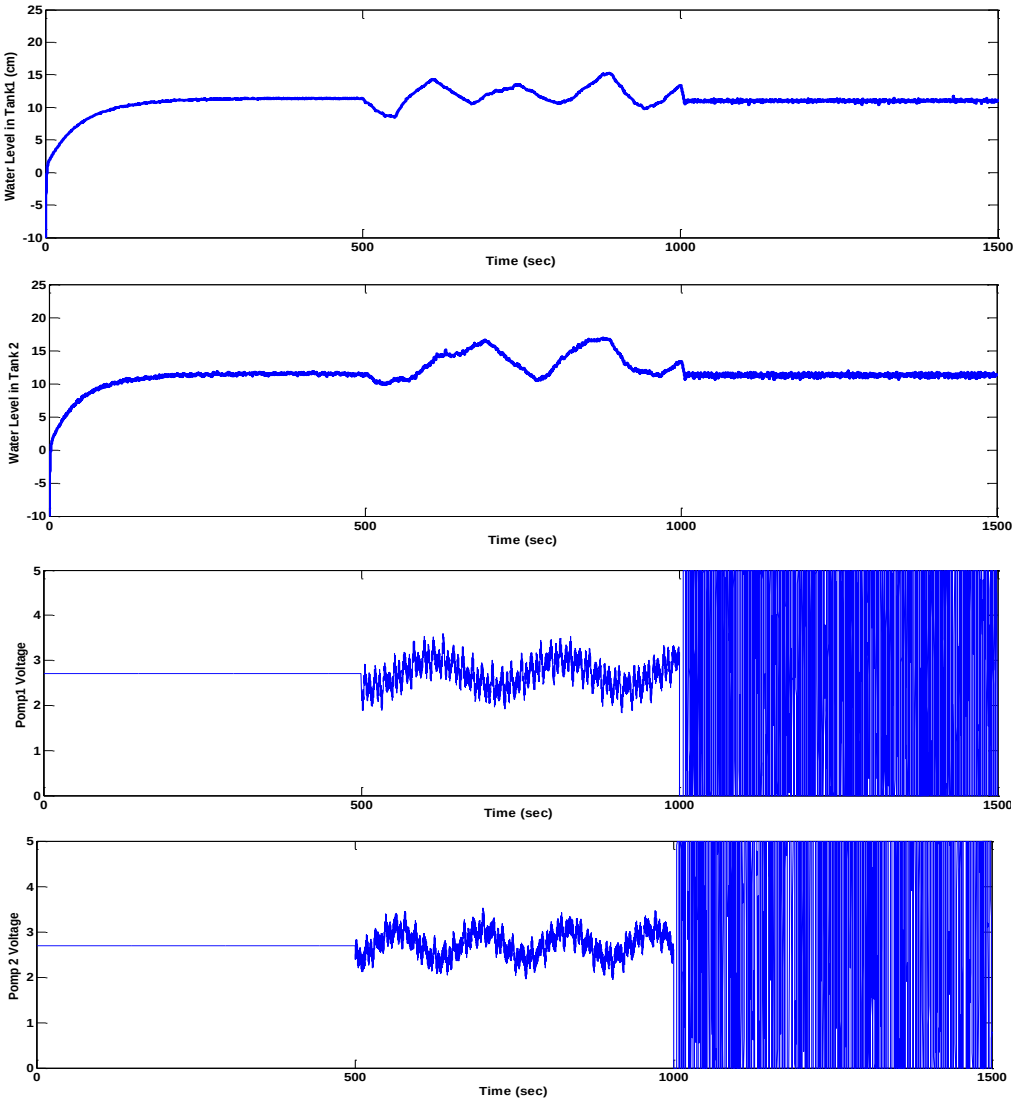
یکی از مشکلات استفاده از کنترل‌کننده حداقل واریانس تولید سیگنال خشن بوسیله این کنترل‌کننده است. این مورد در شکل ۹ نیز دیده می‌شود با این وجود، محرک‌ها توانسته‌اند به سیگنال کنترلی پاسخ داده و نوسانات خروجی را به مقدار چشمگیری کاهش دهند. سیگنال خشن تولید شده در شکل ۹ می‌تواند موجب استحلاک محرک‌ها شود، بنابراین تحقیقات بعدی در این زمینه بر روی کاهش نوسانات سیگنال کنترل انجام خواهد شد.

باید دقت شود که این سیستم، یک سیستم غیر خطی است و کنترل-کننده طراحی شده به کمک مدل خطی VARX توانسته است این سیستم را به خوبی کنترل کند که این نشان دهنده دقت VARX در مدل کردن این سیستم غیر خطی می‌باشد. به دلیل غیر خطی بودن سیستم، دو روش ماتریس اینترکتور و روش مبتنی بر تحلیل سری زمانی چند متغیره قابل اجرا نیستند.

۸- نتیجه‌گیری

در این تحقیق روشی جدید بر مبنای مدل VARX برای طراحی کنترل-کننده حداقل واریانس ارائه شد. در بسیاری از روش‌ها مشکل اصلی بر سر راه کاربردی شدن روش‌ها، در اختیار نبودن مدلی دقیق از سیستم و اغتشاش است. بدست آوردن مدل دقیق از سیستم و اغتشاش برای سیستم‌های چند ورودی-چند خروجی بسیار مشکل بوده و وجود اغتشاشات شدید این مشکل را حادتر می‌کند. در این تحقیق سعی شد که با بهره گرفتن از مدل VARX مدل‌سازی سیستم و اغتشاش همزمان صورت گیرد تا نیاز به حذف اغتشاش نباشد و پیچیدگی مدل‌سازی کاهش یابد. از مدل بدست آمده برای طراحی کنترل کننده حداقل واریانس استفاده شد. هدف اصلی از ارائه این روش معرفی روشی است که بتواند طراحی کنترل‌کننده مینیمم واریانس را ساده‌تر سازد و بدون نیاز به محاسبه ماتریس اینترکتور بتواند مقدار حداقل واریانس را به صورت دقیق تعیین کند. حذف ماتریس اینترکتور از محاسبات مربوط به حداقل واریانس به چالشی بزرگ تبدیل شده است که تقویت روش‌هایی همچون کنترل‌کننده حداقل واریانس می‌تواند راه‌حلی برای این چالش باشد. روش پیشنهاد شده بر روی سه سیستم خطی و یک سیستم غیر

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.3.7.6]



شکل ۹ : خروجی سیستم و سیگنال کنترل در سه حالت حلقه باز، در اثر اغتشاش و بعد از اعمال کنترل‌کننده حداقل واریانس حاصل از مدل VARX

خطی آزمایشگاهی ۴ تانک امتحان شد و نتایج نشان دهنده دقت مناسب روش پیشنهادی در تخمین حداقل واریانس بودند. تحقیقات بعدی می‌تواند در راستای مانع شدن از تولید سیگناهای خشن توسط این کنترل‌کننده صورت گیرد.

مراجع

[1] M. Jelali, Control System Performance Monitoring Assessment, Diagnosis and Improvement of Control Loop Performance in Industrial Automation, Springer, 2010.

[2] K. J. Astrom, Introduction to Stochastic Control Theory. New York: Academic Press, 1970.

[3] G. Box and G. M. Jenkins, Time Series Analysis: Forecasting and Control. Holden-Day, 1970.

[4] J. Martensson, C. R. Rojas and H. Hjalmarsson, "Conditions when minimum variance control is the optimal experiment for identifying a minimum variance controller," Automatica 47, 578–583, 2011.

[5] B. Huang and S. L. Shah, "Practical issues in multivariable feedback control performance assessment," Proc. IFAC ADCHEM, Banff, Canada, pp 429–434, 1997.

[6] W. Devries and S. Wu, "Evaluation of process control effectiveness and diagnosis of variation in paper basis weight via multivariate time-series analysis," IEEE Trans Automat Control 23:702–708, 1978.

[7] M. Rogozinski, A. Paplinski and M. Gibbard, "An algorithm for calculation of nilpotent interactor matrix for linear multivariable systems," IEEE Trans Automat Control 32:234–237, 1987.

[8] B. Huang, S. Shah, L. Badmus and A. Vishnubhotla, "Control Performance Assessment: An Enterprise Asset Management Solution," www.matrikon.com/download/ products /lit /processdoctor _pa_eam. pdf. , 1999.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]
[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.3.7.6]

[9] B. Huang, Multivariate Statistical Methods for Control Loop Performance Assessment, PHD thesis, University of Alberta, Canada, 1997.

[10] B. Huang, S. X. Ding and N. Thornhill, "Practical solutions to multivariate feedback control performance assessment problem: reduced a priori knowledge of interactor matrices," Journal of Process Control 15, 573–583, 2005.

[11] R. Kadali and B. Huang, "Multivariate controller performance assessment without interactor matrix—a subspace approach," IEEE Trans on Control Systems Technology, Vol. 15, No. 1, 2007.

[12] S. J. Qin and J. Yu, "Recent developments in multivariable controller performance monitoring," Journal of Process Control 17, 221–227, 2007.

[13] B. Huang and S. L. Shah, "Practical issues in multivariable feedback control performance assessment," IFAC ADCHEM, Banff, Canada, p.p. 429–434, 1997.

[14] S. L. Shah, C. Mohtadi and D. Clarke, "Multivariable adaptive control without a priori knowledge of the delay matrix," Systems & Control Letters 9:295–306, 1987.

[15] H. Xia, P. Majecki, A. Ordys and M. Grimble, "Performance assessment of MIMO systems under partial information", Proceeding of The American Control Conference Boston, Massachusetts, 2004.

[16] V. Filipovic, "Decentralized stochastic minimum variance controller," Proceedings of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation - MED2002 Lisbon, Portugal, 2002.

[17] K. A. Florakis, S. D. Fassois and F. M. Hemez, "MIMO LMS.ARMAX identification of vibrating structures. part II: a critical assessment," Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 15, No. 4, pp. 737-758, 2001.

[18] Z. Zhang, L. S. Hu and X. L. Zhang, "Performance Assessment of Nonlinear Control Systems Based on Fuzzy Modeling," IEEE conference on Fuzzy, 2009.

[19] X. J. Liu and F. L. Rosano, "Generalized Minimum Variance Control of Steam-Boiler Temperature using Neuro-Fuzzy Approach," Proceedings of the 5'WorId Congress on Intelligent Control and Automation. Hangzhou, China, 2004.

[20] B. K. Lee, C. H. Chiu and B. S. Chen, "Adaptive Minimum Variance Control for Stochastic Fuzzy T-S ARMAX MODEL," Proceedings of the Seventh International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Kunming, 12-15 July, 2008.

[21] T. J. Harris and W. Yu, "Controller assessment for a class of non-linear systems," Journal of Process Control 17, 607–619, 2007.

[22] R. Ostermark, "Genetic hybrid tuning of VARMAX and state space algorithms," Soft Computing 14:91–99, 2010.

[23] J. Penm and R. D. Terrell, "The recursive fitting of subset VARX model," Journal of Time Series Analysis, Vol. 14, No. 6, 1993.

[24] A. Chiuso, G. Pillonetto and G. D. Nicolao, "Subspace identification using predictor estimation via Gaussian regression," 47th IEEE Conference on Decision and Control, CDC, 2008.

[25] C. Horvath, P. S. Leeflang, J. E. Wieringa and D. R. Wittink, "Competitive reaction and feedback effects based VARX models of pooled store data," International Journal of Research in Marketing, Vol. 22, No. 4, 2005.

[26] J. D. Hios and S. D. Fassois, "Identification of a global model describing the temperature effects on the dynamics of a smart composite beam", in Proceedings of ISMA, Leuven, Belgium, paper ID 230, 2006.

[27] J. S. Sakellariou and S. D. Fassois, "A functional pooling framework for the identification of systems under multiple operating conditions", in Proceedings of the 15th Mediterranean Control Conference, Athens, Greece, 2007.

[28] A. Chiuso, "The role of vector autoregressive modeling in predictor-based subspace identification," Automatica, Vol. 43, No. 6, P.P. 1034-1048, 2007.

[29] L. Ljung, System identification: Theory for the user. Prentice Hall, New Jersey, 1987.

[30] H. Xia, P. Majecki, A. Ordys and M. Grimble, "Performance assessment of MIMO systems under partial information", Proceeding of the 2004 American Control Conference Boston, Massachusetts, June 30 - July 2, 2004.

[31] X. Wang, B. Huang and T. Chen, "Multirate Minimum Variance Control Design and Control Performance Assessment: A Data-Driven Subspace Approach", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 15, No. 1, 2007.

[32] H. Xia, P. Majecki, A. Ordys and M. J. Grimble, "Performance assessment of MIMO systems based on I/O delay information," Journal of Process Control 16:373–383, 2006.

[33] K. H. Johansson, "The Quadruple-Tank Process: A Multivariable Laboratory Process with an Adjustable Zero," IEEE Trans. on Control Systems Technology, Vol. 8, No. 3, May, 2000.

[Downloaded from joc-isice.ir on 2026-11-02]

[DOR: 20.1001.1.20088345.1390.5.3.7.6]