

طراحی کنترل کننده‌ی جدول بندی بهره‌ی کلیدزن مقاوم H_2 برای سیستم‌های LPV نامعین کلیدزن

رضا یآوری^۱، سعید شماغداری^{۲*}، آرش صادق‌زاده^۳

^۱ فارغ‌التحصیل دکتری، مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران reza_yavari@elec.iust.ac.ir

^۲ دانشیار، دانشکده‌ی مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران shamaghdari@iust.ac.ir

^۳ استادیار، دانشکده‌ی مهندسی برق، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران a_sadeghzadeh@sbu.ac.ir

پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۱۷

ویرایش: ۱۴۰۰/۰۶/۰۶

دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۱۹

چکیده: در این مقاله، رویکردی جدید به منظور طراحی کنترل کننده‌ی جدول بندی پس خورد خروجی دینامیکی مرتبه کامل کلیدزن مقاوم H_2 برای سیستم‌های پارامتر متغیر خطی (LPV) نامعین کلیدزن ارائه می‌شود. کنترل کننده‌های جدول بندی بهره‌ی کلیدزن مقاوم پیشنهادی (RSGSOF)، علاوه بر تضمین پایداری بهره‌ی H_2 خروجی عملکردی سیستم حلقه بسته‌ی نامعین کلیدزن را کمینه می‌نماید. منطق کلیدزنی هیستریزس که وابسته به پارامترهای جدول بندی است، در طراحی کنترل کننده مورد استفاده قرار می‌گیرد. وابستگی ماتریس‌های فضای حالت سیستم حلقه باز کلیدزن به پارامترهای جدول بندی و هم چنین متغیرهای نامعینی از نوع چند جمله‌ای در نظر گرفته شده است. هم چنین فرض بر آن است که محدوده‌ی تغییرات پارامترهای جدول بندی و نامعینی از پیش معین باشد. رویکرد طراحی به صورت بهینه سازی نامساوی‌های وابسته به پارامتر خطی به همراه جستجوی خطی دو مقدار عددی ارائه می‌شود. سرانجام روش فوق در طراحی کنترل کننده‌ی سیستم تعلیق الکترومغناطیسی (EMS) مورد استفاده قرار گرفته است. بررسی و ارزیابی نتایج این طراحی، قابلیت‌های کاربردی رویکرد کنترلی پیشنهادی در این مقاله را تأیید می‌کند.

کلمات کلیدی: کنترل جدول بندی مقاوم، کنترل کلیدزن، سیستم پیوسته-زمان، سیستم پارامتر متغیر خطی نامعین کلیدزن.

Robust H_2 switching gain-scheduled controller design for switched uncertain LPV systems

Reza Yavari, Saeed Shamaghdari, and Arash Sadeghzadeh

Abstract: In this article, a new approach is proposed to design robust switching gain-scheduled dynamic output feedback (RSGSOF) control for switched uncertain continuous-time linear parameter varying (LPV) systems. The proposed robust switching gain-scheduled controllers are robustly designed so that the stability and H_2 -gain performance of the switched closed-loop uncertain LPV system can be guaranteed even under controller switching determined by scheduling parameters. Hysteresis switching law is exploited for the switching controller synthesis. The system matrices are supposed to depend polynomially on both the scheduling and uncertain parameters which are assumed to belong to intervals with a priori known bounds. The proposed approach is formulated in terms of solutions to a set of parameter-dependent linear matrix inequalities (LMIs) using parameter searches for two scalar values. Finally, the method is applied to electromagnetic suspension (EMS) system to verify the applicability of the presented approach.

Keywords: Robust gain-scheduled control, switching control, continuous-time system, switched uncertain linear parameter-varying system.

۱- مقدمه

در دهه‌های اخیر، رویکرد طراحی جدول‌بندی بهره با کاربردهای موفق به عنوان یکی از مشهورترین روش‌های کنترلی در سیستم‌های عملی مهندسی توجه زیادی را به سوی خود جلب نموده است [۱]. در این میان مدل‌سازی پارامتر متغیر خطی (LPV) با داشتن ظرفیتی مناسب در بیان مدل دینامیکی سیستم‌های غیرخطی و عملی توانسته است در رویکرد مدرن کنترل جدول‌بندی بهره که مبتنی بر تضمین پایداری و حصول عملکرد به صورت کاملاً تحلیلی است، نقش مهمی را ایفا نماید [۲، ۳ و ۴]. مدل‌سازی LPV و رویکرد جدول‌بندی بهره می‌تواند نسبت به روش‌های صرفاً مقاوم به کاهش محافظه‌کاری در نتایج طراحی منجر گردد. در این روش‌ها، محاسبه‌ی سیگنال کنترلی همانند مدل سیستم حلقه‌باز به پارامترهای جدول‌بندی از پیش نامشخص وابسته است. برای مشاهده‌ی نتایج آن می‌توان پژوهش‌های [۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲] را مشاهده نمود. در روش‌های معمول طراحی کنترل‌کننده‌ی جدول‌بندی بهره برای سیستم‌های LPV فرض بر آن است مدل سیستم و هم‌چنین پارامترهای جدول‌بندی به صورت دقیق در دسترس باشند [۱-۱۲].

اما وجود نامعینی در مدل سیستم و هم‌چنین حضور آن در اندازه‌گیری و یا تخمین پارامترهای جدول‌بندی بر اساس پژوهش‌های موجود [۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳ و ۲۴] امری اجتناب‌ناپذیر است. در واقع محدودیت‌های فیزیکی، عملی و فناوری ممکن است باعث شود مقدار دقیق پارامترها و یا مدل واقعی سیستم در دسترس نباشد [۱۳-۲۲]. علاوه بر آن محدود کردن تعداد پارامترهای جدول‌بندی سیستم، می‌تواند استخراج یک مدل LPV در یک سیستم پیچیده‌ی غیرخطی عملی را با نامعینی همراه سازد [۲۳-۲۴]. از سوی دیگر، برای بازه‌ی وسیعی از پارامترهای جدول‌بندی یک کنترل‌کننده‌ی یکتا می‌تواند محافظه‌کاری جدی به نتایج طراحی تحمیل نماید و حتی به عدم جواب برای طراحی منجر شود. به همین علت کنترل‌کننده‌های کلیدزن برای سیستم‌های LPV گسترش داده شده‌اند [۲۵، ۲۶ و ۲۷]. اما باید توجه نمود که ممکن است در بازه‌ی وسیعی از تغییرات پارامترهای جدول‌بندی مدل‌های متفاوتی از سیستم حلقه‌باز استخراج شود. در حقیقت به دست آوردن یک مدل یکتا برای سیستم ممکن است شدنی نباشد یا به سخت‌گیری و حجم بالای نامعینی در مدل‌سازی بینجامد. واضح است هر چه مدل دقیق‌تری با کران نامعینی کوچک‌تری برای سیستم حلقه‌باز استخراج شود، میزان محافظه‌کاری و سخت‌گیری در طراحی کاهش می‌یابد و به عملکرد بهتری برای سیستم حلقه‌بسته منتهی می‌شود [۲۰ و ۲۳]. گرچه در پژوهش‌های [۲۶-۲۷] مدل LPV سیستم دارای کلیدزنی است؛ اما نامعینی به عنوان جز جدایی‌ناپذیر سیستم عملی مهندسی در نظر گرفته نشده است. از سوی دیگر این پژوهش‌ها به طراحی کنترل‌کننده با ساختار پس‌خورد حالت می‌پردازند؛ در حالی که به دلیل محدودیت‌های فیزیکی و عملی ممکن است کلیه‌ی حالت‌های

سیستم برای استفاده در محاسبه‌ی قانون کنترل موجود نباشند. با تکیه بر مطالعات پیشین و با توجه به نیازهای کنونی، رویکردی روشمند جهت انجام طراحی کنترل‌کننده‌ی جدول‌بندی بهره‌ی پس‌خورد خروجی دینامیکی برای سیستم‌های LPV نامعین کلیدزن پیوسته-زمان با وابستگی از درجه‌ی چندجمله‌ای به پارامترهای جدول‌بندی و نامعینی ارائه نشده است و چالشی اساسی محسوب می‌شود.

بر همین اساس با توجه به فقدان تحقیقات مناسب در گذشته و نیاز جدی جامعه‌ی کنترلی، کنترل‌کننده‌ی جدول‌بندی بهره‌ی پس‌خورد خروجی دینامیکی کلیدزن مقاوم (RSGSO) برای سیستم LPV نامعین دارای کلیدزنی در این مقاله در نظر گرفته شده است. ایده‌ی اصلی روش پیشنهادی این پژوهش بر دو نیاز عملی کنترلی استوار است که در مراجع پیشین مورد توجه نبوده است: یکی حضور نامعینی در مدل سیستم حلقه‌باز و دیگری داشتن مدل‌های متفاوت از سیستم LPV نامعین در نواحی مختلف پارامتری. فرض بر آن است که ماتریس‌های فضای حالت سیستم حلقه‌باز کلیدزن دارای وابستگی چندجمله‌ای به پارامترهای جدول‌بندی و نامعینی باشند که متغیر با زمان هستند. با تکیه بر منطق کلیدزنی هیستریزس، یک سیستم کنترلی RSGSO با هدف دست‌یابی به عملکرد مطلوب به دست آورده می‌شود. فرض بر آن است پارامترهای جدول‌بندی بتوانند با نرخ تغییرات زمانی دلخواه متغیر با زمان باشند. کنترل‌کننده‌ی مرتبه کامل پس‌خورد خروجی RSGSO فقط به پارامترهای جدول‌بندی وابسته است؛ و از طرفی به مشتق زمانی آن‌ها و هم‌چنین پارامترهای نامعینی وابسته نیست. این کنترل‌کننده طی فرایند بهینه‌سازی نامساوی‌های ماتریسی خطی (LMI) به کمک جستجوی خطی دو-بعدی به دست می‌آید. این سیستم کنترلی پایداری و حصول عملکرد خروجی مبتنی بر بهینه‌سازی (کمینه نمودن) نرم H_2 را تضمین می‌نماید. برای استخراج روابط طراحی کنترل‌کننده، خانواده‌ای از متغیرهای کمکی در قالب یک تبدیل غیرخطی مورد استفاده قرار می‌گیرند که مستقل از متغیرهای لاپانوف هستند. روش بیان‌شده در طراحی سیستم کنترل مورد مطالعه‌ی عددی قرار گرفته است تا کاربردپذیری و میزان مؤثر بودن این رویکرد طراحی نشان داده شود. ارزیابی نتایج ردیابی فرمان‌های اعمالی به سیستم حلقه‌بسته، عملکرد مناسب این روش را تأیید می‌کند.

ساختار مقاله به این صورت است که پس از بیان مقدمه، در بخش ۲ مقدمات ریاضی آورده شده است. در این قسمت، زیربخش‌های نمادگذاری، تعریف‌های ضروری و لم‌های مورد نیاز آورده می‌شود. سپس در بخش بعدی مسئله‌ی مورد نظر تشریح شده است. در ادامه، طراحی سیستم کنترل در بخش ۴ انجام می‌شود. تبدیل مسئله‌ی طراحی به فرایند بهینه‌سازی حل نامساوی‌های ماتریسی خطی موضوع اصلی بخش ۵ است. در بخش ۶، مثال‌های عددی جهت انجام مقایسه و قابلیت‌های کاربردی روش پیشنهادی بیان شده‌اند. در پایان نیز نتیجه‌گیری و منابع موجود در این تحقیق آورده می‌شوند. در پیوست این مقاله نیز مقادیر

$$G^\sigma(\theta, \delta): \begin{cases} \dot{x} = A^\sigma(\theta, \delta)x + B^\sigma(\theta, \delta)w \\ z = C^\sigma(\theta, \delta)x \end{cases} \quad (1)$$

که در آن فرض کنید متغیر جدول‌بندی θ_i تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر بر حسب زمان با کران از پیش معین زیر در ناحیه‌ی j -ام $\theta \in \Theta^{(j)}$ باشد:

$$\Theta^{(j)} := \{\theta \in \mathbb{R}^s : \underline{\theta}_i^{(j)} \leq \theta_i(t) \leq \bar{\theta}_i^{(j)}; i=1, \dots, s, j \in Z_N\} \quad (2)$$

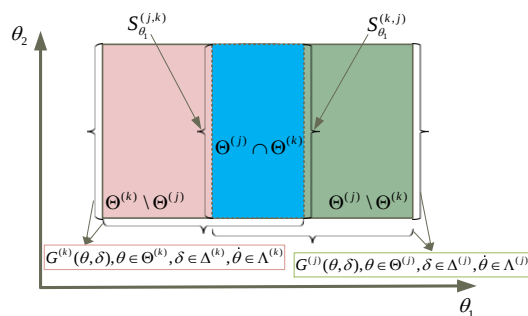
علاوه بر آن، برای پارامترهای نامعینی $\delta \in \Delta^{(j)}$ تصور نمایید که:

$$\Delta^{(j)} := \{\delta \in \mathbb{R}^{N_\delta} : \underline{\delta}_i^{(j)} \leq \delta_i(t) \leq \bar{\delta}_i^{(j)}; i=1, \dots, N_\delta, j \in Z_N\} \quad (3)$$

هم‌چنین برای محدوده‌ی تغییرات نرخ زمانی پارامترهای جدول‌بندی $\dot{\theta} \in \Lambda^{(j)}$ در رابطه‌ی (۴) به صورت زیر داریم:

$$\Lambda^{(j)} := \{\dot{\theta} \in \mathbb{R}^s : \underline{\omega}_i^{(j)} \leq \dot{\theta}_i(t) \leq \bar{\omega}_i^{(j)}; i=1, \dots, s, j \in Z_N\} \quad (4)$$

از سوی دیگر، $\sigma(\theta) \in Z_N$ سیگنال کلیدزنی با منطق کلیدزنی هیستریزس است که دارای مقادیر گسسته‌ی طبیعی (عدد صحیح مثبت) بر حسب پارامترهای جدول‌بندی است. برای درک چگونگی کارکرد قانون کلیدزنی زمانی هیستریزس، می‌توان شکل ۱ و توضیحات مربوط به آن را در ادامه ملاحظه نمود. تصور نمایید مجموعه‌ی Θ توسط سطوح کلیدزنی $S^{(j,k)}$ به تعداد N زیرناحیه‌ی $\{\Theta^{(j)}\}_{j \in Z_N}$ تقسیم‌بندی شود که در آن $Z_N := \{1, 2, \dots, N-1, N\}$ است. این کار با تقسیم Θ_i (تصویر مجموعه‌ی Θ_i روی محور مختصات i -امین پارامتر جدول‌بندی) به N_i بازه با نواحی همپوشانی بین هر دو بازه‌ی مجاور صورت می‌گیرد که در آن داریم: $N = \prod_{i=1}^s N_i$ ، $\Theta = \bigcup_{j \in Z_N} \{\Theta^{(j)}\}$ ، $\Delta = \bigcup_{j \in Z_N} \{\Delta^{(j)}\}$ و $\Lambda = \bigcup_{j \in Z_N} \{\Lambda^{(j)}\}$.



شکل ۱: تقسیم‌بندی Θ در قالب مجموعه‌ای دو-بعدی.

در شکل ۱ بیان‌گر سطح کلیدزنی بین دو ناحیه‌ی $\Theta^{(j)}$ و $\Theta^{(k)}$ در جهت پارامتر جدول‌بندی θ_1 است. اگر شرط (۵) برقرار نباشد، آن‌گاه دو ناحیه‌ی $\Theta^{(j)}$ و $\Theta^{(k)}$ در جهت پارامتر جدول‌بندی θ_1 مجاور هم هستند.

$$\text{int}(\Theta^{(k)} \cap \Theta^{(j)}) \neq \emptyset, \quad \Theta_{\theta_1}^{(k)} \neq \Theta_{\theta_1}^{(j)} \quad (5)$$

که در آن $\Theta_{\theta_1}^{(j)}$ بیان‌گر تصویر ناحیه‌ی $\Theta^{(j)}$ روی محور θ_1 و عملگر $\text{int}(\cdot)$ ناحیه‌ی داخلی یک مجموعه است. به عنوان مثال شکل ۱ را در

عددی عناصر طراحی موجود در فضای حالت سیستم کنترلی در مثال عددی ۲ ارائه خواهند شد.

۲- معرفی مقدمات ریاضی

در این بخش ابتدا نمادهای مورد استفاده در این مقاله تعریف می‌شوند. سپس تعریف‌های مورد نیاز از جمله بهره‌ی عملکرد H_2 بیان خواهند شد. در انتها هم لم‌های مورد استفاده در طراحی ارائه می‌شوند.

۲-۱- نمادگذاری

نمادهای مورد استفاده در این پژوهش در زیر آورده شده است:

$\mathbb{R}$	مجموعه اعداد حقیقی
$\mathbb{R}_+$	مجموعه اعداد حقیقی مثبت
$\mathbb{R}^n$	مجموعه بردارهای حقیقی با بعد n
$\mathbb{R}^{n \times m}$	مجموعه ماتریس‌های با ابعاد $n \times m$
S^n	مجموعه ماتریس‌های متقارن $n \times n$
S_+^n	مجموعه ماتریس‌های متقارن مثبت معین $n \times n$
X^T	ترانپوز ماتریس X
$\langle X \rangle$	بیان کوتاه عبارت $X + X^T$
X^{-1}	معکوس ماتریس X
$X < Y (X > Y)$	منفی (مثبت) معین بودن ماتریس $X - Y$
I	ماتریس واحد با ابعاد مناسب
0	ماتریس صفر با ابعاد مناسب
$\text{tr}(X)$	مجموع عناصر قطری ماتریس X
$\text{diag}(\cdot)$	الحاق قطری عناصر ورودی و غیرقطری صفر
$E\{\cdot\}$	عملگر امید ریاضی
δ_d	تابع ضربی دلتای دیراک
$\min(\cdot)$	مقدار کمینه‌ی (بهینه‌سازی) متغیر ورودی
$\dot{x}(t)$	نرخ (مشتق) زمانی سیگنال $x(t)$
$x(t)$	برداری حالت‌های سیستم حلقه‌بسته
$x_p(t)$	برداری حالت‌های سیستم حلقه‌باز
$x_c(t)$	برداری حالت‌های سیستم کنترل
$u(t)$	برداری ورودی کنترل
$w(t)$	برداری اغتشاش خارجی
$z(t)$	برداری خروجی عملکردی
$y(t)$	برداری خروجی اندازه‌گیری
$\delta(t)$	برداری پارامترهای نامعینی
$\theta(t)$	برداری پارامترهای جدول‌بندی
$\sigma(t)$	سیگنال کلیدزنی با مقادیر گسسته‌ی طبیعی
Z_N	مجموعه اعداد طبیعی $\{1, 2, \dots, N\}$
$A \cup B, A \cap B, A \setminus B$	اجتماع، اشتراک و تفاضل دو مجموعه

۲-۲- بیان تعریف‌ها

فضای حالت سیستم حلقه‌بسته‌ی LPV نامعین کلیدزن را (با در نظر گرفتن نمادگذاری بخش قبل) به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$P(\theta) > 0, \forall \theta \in \Theta \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{P}(\theta) - \langle A(\theta, \delta)P(\theta) & * \\ -C(\theta, \delta)P(\theta) & I_{n_z} \end{bmatrix} > 0, \forall (\theta, \delta, \dot{\theta}) \in \Theta \times \Delta \times \Lambda \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} P(\theta) & * \\ B(\theta, \delta)^T & H(\theta) \end{bmatrix} > 0, \forall (\theta, \delta) \in \Theta \times \Delta \quad (11)$$

$$\text{tr}(H(\theta)) < \nu^2, \forall \theta \in \Theta \quad (12)$$

آن گاه سیستم حلقه بسته ی موجود در رابطه ی (۱) با $\sigma = 1$ نوع غیر کلیدزن) پایدار نمایی می شود و شرط بهره ی عملکردی H_2 در قید (۶) با سطح کمینه ی ν به ازای $\forall (\theta, \delta, \dot{\theta}) \in \Theta \times \Delta \times \Lambda$ برقرار خواهد شد.

لم ۳- به ازای مقدار مثبت داده شده ی ν و تمامی مقادیر $j \neq k \in Z_N$ فرض کنید خانواده ای از ماتریس های پیوسته ی مشتق پذیر وابسته به پارامتر $P^{(j)}(\theta) \in S^{2n}$ ، ماتریس های $G^{(j)}(\theta) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ و $H^{(j)}(\theta) \in S^{n_w}$ و هم چنین مقدار عددی $\lambda \in \mathbb{R}_+$ موجود باشند، به گونه ای که شرایط (۱۳)–(۱۷) در زیر برقرار گردند:

$$P^{(j)}(\theta) > 0, \forall \theta \in \Theta^{(j)} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{P}^{(j)}(\theta) - \langle A^{(j)}(\theta, \delta)F^{(j)}(\theta) & * & * \\ -C^{(j)}(\theta, \delta)F^{(j)}(\theta) & I_{n_z} & * \\ \left\{ G^{(j)}(\theta) - P^{(j)}(\theta) - \lambda F^{(j)}(\theta)^T A^{(j)}(\theta, \delta)^T \right\} & -\lambda F^{(j)}(\theta)^T C^{(j)}(\theta, \delta)^T & \lambda \langle F^{(j)}(\theta) \rangle \end{bmatrix} > 0, \forall (\theta, \delta, \dot{\theta}) \in \Theta^{(j)} \times \Delta^{(j)} \times \Lambda^{(j)} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} P^{(j)}(\theta) & * \\ B^{(j)}(\theta, \delta)^T & H^{(j)}(\theta) \end{bmatrix} > 0, \forall (\theta, \delta) \in \Theta^{(j)} \times \Delta^{(j)} \quad (15)$$

$$\text{tr}(H^{(j)}(\theta)) < \nu^2, \forall \theta \in \Theta^{(j)} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} P^{(j)}(\theta) & * \\ P^{(j)}(\theta) & P^{(k)}(\theta) \end{bmatrix} \geq 0, \forall \theta \in S^{(j,k)}, j \neq k \in Z_N \quad (17)$$

آن گاه سیستم حلقه بسته در رابطه ی (۱) با قانون کلیدزنی هیستریزس پایدار نمایی می شود و شرط بهره ی عملکردی H_2 در قید (۶) با سطح کمینه ی ν به ازای $\forall (\theta, \delta, \dot{\theta}) \in \Theta \times \Delta \times \Lambda$ برقرار خواهد شد.

اثبات لم ۱- با ضرب نامساوی (۱۱) از سمت چپ در ماتریس غیر تکیین (رتبه کامل ردیفی)

$$\begin{bmatrix} I_{2n+n_z} \\ A^{(j)}(\theta, \delta)^T & C^{(j)}(\theta, \delta)^T \end{bmatrix}^T \quad (18)$$

و ترانهاده ی آن (رتبه کامل ستونی) از سمت راست داریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{P}^{(j)}(\theta) - \langle A^{(j)}(\theta, \delta)P^{(j)}(\theta) & * \\ -C^{(j)}(\theta, \delta)P^{(j)}(\theta) & I_{n_z} \end{bmatrix} > 0, \quad (19)$$

$$\forall (\theta, \delta, \dot{\theta}) \in \Theta^{(j)} \times \Delta^{(j)} \times \Lambda^{(j)}$$

حال با تکیه بر نتیجه به دست آمده و در نظر گرفتن لم ۲ از پژوهش [۶] برای تضمین پایداری و عملکرد H_2 در قالب حل LMI، با برقراری

نظر بگیرد. در این شکل، طبق این تعریف دو ناحیه ی $\Theta^{(j)}$ و $\Theta^{(k)}$ در جهت پارامتر جدول بندی θ_1 مجاوراند.

در ادامه در طراحی سیستم کنترل معیار عملکردی بهره ی H_2 به صورت تعریف ۱ بیان می شود [۶].

تعریف ۱ (عملکرد H_2) - برای تمامی مقادیر مجاز $(\theta, \delta, \dot{\theta})$ ، قید بهره ی عملکردی H_2 در سیستم حلقه بسته ی (۱) با خروجی عملکردی $z(t)$ برای مقدار مثبت ν و ورودی اغتشاش $w(t) = w_0 \delta_d(t)$ در رابطه ی (۶) تعریف می شود.

$$\sup_{\forall (\theta, \delta, \dot{\theta}) \in \Theta \times \Delta \times \Lambda} \left(E \left\{ \int_0^\infty z(t)^T z(t) dt \right\} \right) \leq \nu^2 \quad (6)$$

که در آن داریم: $E\{w_0 w_0^T\} = I_{n_w}$.

۳-۲- لم های اساسی

در این قسمت لم های اساسی مورد نیاز برای فرایند طراحی بیان می شوند. برای جلوگیری از ایجاد غیرخطی گری متغیرهای طراحی به دلیل ضرب شدن این عامل ها در یکدیگر، لم ۱ را در نظر گرفته شده است. سپس در حالت غیر کلیدزن ($\sigma(t) \in Z_1$) مفاهیم تحلیل پایداری و تضمین قید عملکردی بهره ی H_2 در مرجع [۶] برای سیستم نامعین بسط داده می شود. سپس به عنوان یکی از ابزارهای اساسی طراحی کنترل کننده برای سیستم LPV نامعین کلیدزن، لم ۳ جهت تضمین پایداری و قید عملکردی تعریف ۱ ارائه خواهد شد.

لم ۱ [۱۹]- برای ماتریس متقارن $\Pi^\sigma(\theta, \delta)$ و ماتریس های $\Psi_1^\sigma(\theta, \delta)$ ، $\Psi_2^\sigma(\theta, \delta)$ و $\Psi_3^\sigma(\theta, \delta)$ با ابعاد مناسب، اگر ماتریس مثبت معین $\Sigma^\sigma(\theta, \delta)$ که دارای ابعاد سازگار است موجود باشد به گونه ای که نامساوی (۸) برقرار بماند، آن گاه نامساوی (۷) برقرار می شود.

$$\Pi^\sigma(\theta, \delta) + \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ -\Psi_1^\sigma(\theta, \delta)^T \Psi_1^\sigma(\theta, \delta) & 0 & * \\ 0 & -\Psi_3^\sigma(\theta, \delta)^T \Psi_2^\sigma(\theta, \delta) & 0 \end{bmatrix} > 0 \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi^\sigma(\theta, \delta) & * \\ \left[\Psi_1^\sigma(\theta, \delta) \quad \Sigma^\sigma(\theta, \delta) \Psi_2^\sigma(\theta, \delta) \quad \Psi_3^\sigma(\theta, \delta) \right] & \Sigma^\sigma(\theta, \delta) \end{bmatrix} > 0 \quad (8)$$

نکته ۱: برای سیستم LPV نامعین غیر کلیدزن لم ۲ با استفاده از تحقیق [۶] بسط و توسعه می یابد. برای این حالت با در نظر گرفتن $\sigma = 1$ فرض نماید در مدل فضای حالت (۱) ماتریس های سه گانه ی حلقه بسته ی $(A^\sigma(\theta, \delta), B^\sigma(\theta, \delta), C^\sigma(\theta, \delta))$ با عناصر نوع غیر کلیدزن $(A(\theta, \delta), B(\theta, \delta), C(\theta, \delta))$ در ناحیه ی یکنای $\theta \in \Theta$ جایگزین شوند. با تکیه بر مفاهیم لم ۲، برای بخش طراحی لم ۳ استخراج می گردد.

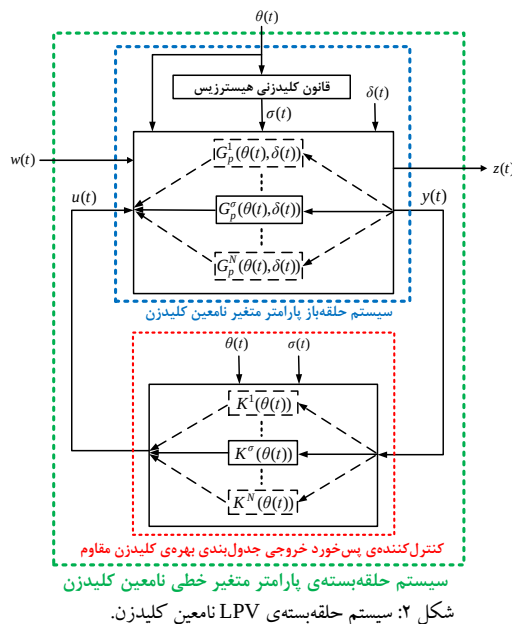
لم ۲ [۶]- به ازای مقدار مثبت داده شده ی ν ، فرض کنید ماتریس پیوسته ی مشتق پذیر وابسته به پارامتر $P(\theta) \in S^{2n}$ و ماتریس $H(\theta) \in S^{n_w}$ موجود باشند، به گونه ای که شرایط (۹)–(۱۲) در زیر برقرار گردند:

زیرسیستم حلقه‌باز فعال شده برای یک ناحیه‌ی جدول بندی محلی مفروض است که قبلاً معرفی شد.

در این مقاله، هدف طراحی کنترل کننده‌ی مرتبه کامل جدول بندی بهره‌ی پس‌خورد خروجی کلیدزن برای سیستم حلقه‌باز LPV نامعین کلیدزن (۲۱) است؛ به گونه‌ای که پایداری نمایی و سطح کمینه‌ی بهره‌ی عملکردی H_2 طبق قید (۶) به ازای تمامی مقادیر مجاز پارامترهای جدول بندی و متغیرهای نامعینی تضمین شود. ساختار کنترلی پس‌خورد خروجی کلیدزن RSGSOF، شامل خانواده‌ای از کنترل کننده‌های دینامیکی مرتبه کامل پس‌خورد خروجی (RGSOF) است. آرایش فضای حالت دینامیکی مرتبه کامل آن در رابطه‌ی (۲۳) داده شده است.

$$K^\sigma(\theta(t)) : \begin{cases} \dot{x}_c = A_c^\sigma(\theta)x_c + B_c^\sigma(\theta)y \\ u = C_c^\sigma(\theta)x_c \end{cases} \quad (23)$$

که در آن $x_c \in \mathbb{R}^n$. همان گونه که ملاحظه می‌شود ماتریس‌های کنترل کننده $(A_c^\sigma(\theta(t)), B_c^\sigma(\theta(t)), C_c^\sigma(\theta(t)))$ برای هر مقدار $\sigma \in Z_N$ به پارامترهای جدول بندی اندازه‌گیری $\theta(t)$ وابسته هستند و به مقادیر پارامترهای نامعینی یعنی $\delta(t)$ وابسته نیستند. سرانجام با اعمال کنترل کننده‌ی کلیدزن (۲۳)، یک سیستم حلقه‌بسته‌ی LPV نامعین کلیدزن در آرایش موجود در رابطه‌ی (۱) با قانون کلیدزنی هیستریزس و سیگنال کلیدزنی σ به دست می‌آید که در آن $x := [x_p^T \ x_c^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ نمایشی از سیستم حلقه‌بسته در شکل ۲ آورده شده است. ماتریس‌های سیستم حلقه‌بسته‌ی LPV نامعین کلیدزن (۱) در رابطه‌ی (۲۴) داده شده‌اند.



شرایط موجود در (۱۳)–(۱۶)، پایداری نمایی و شرط بهره‌ی عملکردی (۶) برای سیستم حلقه‌بسته‌ی کلیدزن (۱) تضمین می‌شود. اما برای توابع چندگانه‌ی لیاپانوف سیستم حلقه‌بسته $V_{cl}^\sigma(x) = x^T P^\sigma(\theta)^{-1} x$ جهت تضمین پایداری باید شرط غیرافزایشی بودن آن‌ها در لحظات کلیدزنی در سطوح $S^{(j,k)}(\theta)$ تأیید گردد؛ یعنی $V_{cl}^{(k)}(x(t^+)) \leq V_{cl}^{(j)}(x(t))$ (سیگنال $\sigma(t^+)$ حد زمانی سمت راست σ در لحظه‌ی t است). بنابراین در تغییر از مجموعه پارامترهای جدول بندی از $\Theta^{(j)}$ به $\Theta^{(k)}$ باید شرط $P^{(k)}(\theta)^{-1} \leq P^{(j)}(\theta)^{-1}$ با توجه به قانون کلیدزنی هیستریزس برقرار بماند. به کمک لم مکمل شر داریم:

$$\begin{bmatrix} P^{(j)}(\theta)^{-1} & * \\ I & P^{(k)}(\theta) \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall \theta \in S^{(j,k)}, j \neq k \in Z_N \quad (20)$$

متعاقباً با ضرب رابطه‌ی (۲۰) از سمت چپ در $\text{diag}(P^{(j)}(\theta), I)$ و از سمت راست در ترانواده‌ی آن، در نهایت رابطه‌ی (۱۷) به دست می‌آید که منتهی به تأیید شرط $V_{cl}^{(k)}(x(t^+)) \leq V_{cl}^{(j)}(x(t))$ در لحظات کلیدزنی $S^{(j,k)}(\theta)$ خواهد شد و اثبات تکمیل می‌شود.

۳- بیان مسئله

مدل فضای حالت سیستم حلقه‌باز پارامتر متغیر خطی نامعین دارای کلیدزنی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$G_p^\sigma(\theta(t), \delta(t)) : \begin{cases} \dot{x}_p = A_p^\sigma(\theta, \delta)x_p + B_w^\sigma(\theta, \delta)w + B_u^\sigma(\theta, \delta)u \\ z = C_z^\sigma(\theta, \delta)x_p + D_{zu}^\sigma(\theta, \delta)u \\ y = C_y^\sigma(\theta)x_p + D_{yw}^\sigma(\theta, \delta)w \end{cases} \quad (21)$$

که در آن $x_p(t) \in \mathbb{R}^n$ ، $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ ، $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ ، $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ و $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ قبلاً در بخش نمادگذاری معرفی شدند. $\delta(t) := [\delta_1(t) \ \dots \ \delta_{N_s}(t)]^T \in \mathbb{R}^{N_s}$ بردار اندازه‌گیری متغیر با زمان، $\theta(t) := [\theta_1(t) \ \dots \ \theta_s(t)] \in \mathbb{R}^s$ بردار پارامترهای جدول بندی در دسترس زمان-حقیقی هستند. ماتریس‌های فضای حالت سیستم حلقه‌باز با داشتن ابعاد مناسب دارای وابستگی چندجمله‌ای به پارامترهای جدول بندی و هم‌چنین متغیرهای نامعینی هستند. برای ماتریس‌های فضای حالت $M^\sigma(\theta, \delta)$ داریم:

$$M^\sigma(\theta, \delta) = \sum_{k=1}^{k_{\theta}^\sigma} \theta_1^{a_{k1}^\sigma} \dots \theta_s^{a_{ks}^\sigma} \delta_1^{b_{k1}^\sigma} \dots \delta_{N_s}^{b_{kN_s}^\sigma} M_k^\sigma \quad (22)$$

که در آن M_k^σ ماتریس‌های حقیقی مستقل از پارامتر و هم‌چنین a_{ki}^σ و b_{ki}^σ بیان‌گر مقادیر صحیح غیرمنفی هستند. در این مقاله جهت ایجاد سادگی در انجام فرایند طراحی، فرض بر آن است ماتریس‌های $C_y^\sigma(\theta)$ مستقل از پارامترهای نامعینی باشند؛ یعنی برای هر مقدار σ ، i و k داریم: $b_{ki}^\sigma = 0$. از سوی دیگر، سیگنال $\sigma(t) \in Z_N$ تعیین کننده‌ی

$$\begin{aligned}
\Pi_{11}^{(j)}(\theta, \delta) &:= \dot{P}_1^{(j)}(\theta) - \left(A_p^{(j)}(\theta, \delta) X^{(j)}(\theta) + B_u^{(j)}(\theta, \delta) L_3^{(j)}(\theta) \right), \\
\Pi_{21}^{(j)}(\theta, \delta) &:= \dot{P}_2^{(j)}(\theta) - L_1^{(j)}(\theta) - A_p^{(j)}(\theta, \delta)^T, \\
\Pi_{31}^{(j)}(\theta, \delta) &:= -C_z^{(j)}(\theta, \delta) X^{(j)}(\theta) - D_{zu}^{(j)}(\theta, \delta) L_3^{(j)}(\theta), \\
\Pi_{41}^{(j)}(\theta, \delta) &:= X^{(j)}(\theta) - P_1^{(j)}(\theta) - \lambda \left(A_p^{(j)}(\theta, \delta) X^{(j)}(\theta) + B_u^{(j)}(\theta, \delta) L_3^{(j)}(\theta) \right)^T, \\
\Pi_{51}^{(j)}(\theta, \delta) &:= W^{(j)}(\theta) - P_2^{(j)}(\theta) - \lambda A_p^{(j)}(\theta, \delta)^T, \\
\Pi_{22}^{(j)}(\theta, \delta) &:= \dot{P}_3^{(j)}(\theta) - \left(Y A_p^{(j)}(\theta, \delta) + L_2^{(j)}(\theta) C_y^{(j)}(\theta) \right), \\
\Pi_{42}^{(j)}(\theta, \delta) &:= I_n - P_2^{(j)}(\theta) - \lambda L_1^{(j)}(\theta)^T, \\
\Pi_{52}^{(j)}(\theta, \delta) &:= Y - P_3^{(j)}(\theta) - \lambda \left(Y A_p^{(j)}(\theta, \delta) + L_2^{(j)}(\theta) C_y^{(j)}(\theta) \right)^T, \\
\Pi_{43}^{(j)}(\theta, \delta) &:= -\lambda \left(C_z^{(j)}(\theta, \delta) X^{(j)}(\theta) + D_{zu}^{(j)}(\theta, \delta) L_3^{(j)}(\theta) \right)^T, \\
\Pi_{54}^{(j)}(\theta, \delta) &:= \lambda \left(W^{(j)}(\theta) + I_n \right)
\end{aligned} \quad (31)$$

و هم چنین:

$$\begin{aligned}
\Psi_1^{(j)}(\theta, \delta) &:= \Delta A_p^{(j)}(\theta, \delta) X^{(j)}(\theta) + \Delta B_u^{(j)}(\theta, \delta) L_3^{(j)}(\theta), \\
\Psi_2^{(j)}(\theta, \delta) &:= Y^T, \\
\Psi_3^{(j)}(\theta, \delta) &:= \begin{bmatrix} 0_{n \times n_z} & \lambda \left\{ \Delta A_p^{(j)}(\theta, \delta) X^{(j)}(\theta) + \right. \\ & \left. \Delta B_u^{(j)}(\theta, \delta) L_3^{(j)}(\theta) \right\} & 0_{n \times n} \end{bmatrix},
\end{aligned} \quad (32)$$

ماتریس‌های فضای حالت کنترل کننده‌ی پس خورد خروجی دینامیکی مرتبه کامل جدول بندی بهره‌ی کلیدزن (RSGSOF) به کمک رابطه‌ی (۳۳) به دست آورده می‌شوند.

$$\begin{cases} A_c^{(j)}(\theta) = V^{-1} \left(L_1^{(j)}(\theta) - Y A_p^{(j)}(\theta) X^{(j)}(\theta) - Y B_u^{(j)}(\theta) L_3^{(j)}(\theta) - \right. \\ \left. L_2^{(j)}(\theta) C_y^{(j)}(\theta) X^{(j)}(\theta) \right) U^{(j)}(\theta)^{-1}, \\ B_c^{(j)}(\theta) = V^{-1} L_2^{(j)}(\theta), \\ C_c^{(j)}(\theta) = L_3^{(j)}(\theta) U^{(j)}(\theta)^{-1} \end{cases} \quad (33)$$

که در آن ماتریس دلخواه V دارای رتبه‌ی کامل است. هم چنین ماتریس‌های معکوس پذیر $U^{(j)}(\theta)$ با استفاده از رابطه‌ی $U^{(j)}(\theta) = V^{-1} (W^{(j)}(\theta) - Y X^{(j)}(\theta))$ محاسبه می‌شوند.

اثبات قضیه ۱- با تکیه بر لم ۳ اگر روابط (۱۳)–(۱۷) برقرار باشند، آن گاه علاوه بر پایداری نامایی، یک مقدار کمینه برای کران بالای عملکرد بهره‌ی H_2 خروجی عملکردی برابر ν در سیستم حلقه بسته‌ی LPV نامعین کلیدزن (۱) تضمین می‌شود. در ادامه نشان داده می‌شود اگر شرایط (۲۵)–(۲۹) برقرار باشند، به برقراری نامساوی‌های (۱۳)–(۱۷) منجر خواهند شد. با توسعه‌ی مفاهیم [۱۱]، [۱۸] و منابع موجود در آن‌ها در حالت کلیدزن، ماتریس کمکی $F^{(j)}(\theta)$ و معکوس آن $F^{(j)}(\theta)^{-1}$ به صورت زیر تعریف (بخش بندی) شده‌اند:

$$F^{(j)}(\theta) := \begin{bmatrix} X^{(j)}(\theta) & Z_1^{(j)}(\theta) \\ U^{(j)}(\theta) & Z_2^{(j)}(\theta) \end{bmatrix}, \quad F^{(j)}(\theta)^{-1} := \begin{bmatrix} Y^{(j)}(\theta) & Z_3^{(j)}(\theta) \\ V^{(j)}(\theta) & Z_4^{(j)}(\theta) \end{bmatrix} \quad (34)$$

که در آن برای $j \in Z_N$ داریم:
 $U^{(j)}(\theta), Y^{(j)}(\theta), V^{(j)}(\theta), X^{(j)}(\theta), Z_1^{(j)}(\theta), Z_2^{(j)}(\theta), Z_3^{(j)}(\theta), Z_4^{(j)}(\theta) \in \mathbb{R}^{non}$
 با برقراری رابطه‌ی $F^{(j)}(\theta) F^{(j)}(\theta)^{-1} = I$ می‌توان گفت:

$$\begin{aligned}
Z_1^{(j)}(\theta) &= (V^{(j)}(\theta)^T)^{-1} - X^{(j)}(\theta) Y^{(j)}(\theta)^T (V^{(j)}(\theta)^T)^{-1}, \\
Z_2^{(j)}(\theta) &= -U^{(j)}(\theta) Y^{(j)}(\theta)^T (V^{(j)}(\theta)^T)^{-1}
\end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
A^\sigma(\theta, \delta) &= \begin{bmatrix} A_p^\sigma(\theta, \delta) & B_u^\sigma(\theta, \delta) C_c^\sigma(\theta) \\ B_c^\sigma(\theta) C_y^\sigma(\theta) & A_c^\sigma(\theta) \end{bmatrix}, \\
B^\sigma(\theta, \delta) &= \begin{bmatrix} B_w^\sigma(\theta, \delta) \\ B_c^\sigma(\theta) D_{yw}^\sigma(\theta, \delta) \end{bmatrix}, \\
C^\sigma(\theta, \delta) &= [C_z^\sigma(\theta, \delta) \quad D_{zu}^\sigma(\theta, \delta) C_c^\sigma(\theta)]
\end{aligned} \quad (24)$$

۴- طراحی

پس از بیان مسئله و استفاده از مقدمات ریاضی گفته شده در بخش‌های قبلی، طراحی سیستم کنترل پیشنهادی در این قسمت آورده شده است.

قضیه ۱- به ازای مقدار عددی $\nu \in \mathbb{R}_+$ و $j \neq k \in Z_N$ ، فرض کنید خانواده‌ی از ماتریس‌های وابسته به پارامتر $L_1^{(j)}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $W^{(j)}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $X^{(j)}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $L_3^{(j)}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $L_2^{(j)}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ ، $H^{(j)}(\theta) \in S_+^{n_w}$ ، $P_3^{(j)}(\theta) \in S_+^n$ ، $P_2^{(j)}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $P_1^{(j)}(\theta) \in S_+^n$ ، $\Sigma^\sigma(\theta, \delta) \in S_+^n$ ماتریس مستقل از پارامتر $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و مقدار عددی مثبت λ وجود داشته باشند، به گونه‌ای که شرایط (۲۵)–(۲۸) و شرط کلیدزنی (۲۹) برقرار باشند، آن گاه کنترل کننده‌ی (۲۳) که ماتریس‌های فضای حالت آن در (۳۳) محاسبه شده‌اند، سیستم حلقه بسته‌ی (۱) را پایدار نمایی می‌نماید و مقدار کمینه‌ی ν را برای بهره‌ی H_2 خروجی عملکردی طبق قید (۶) در کل نواحی $(\theta, \delta, \dot{\theta}) \in \Theta \times \Delta \times \Lambda$ تضمین می‌کند.

$$\begin{bmatrix} P_1^{(j)}(\theta) & * \\ P_2^{(j)}(\theta) & P_3^{(j)}(\theta) \end{bmatrix} > 0, \quad \forall \theta \in \Theta^{(j)} \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi^{(j)}(\theta, \delta) & * \\ \left[\Psi_1^{(j)}(\theta, \delta) \quad \Sigma^{(j)}(\theta, \delta) \Psi_2^{(j)}(\theta, \delta) \quad \Psi_3^{(j)}(\theta, \delta) \right] & \Sigma^{(j)}(\theta, \delta) \end{bmatrix} > 0, \quad \forall (\theta, \delta, \dot{\theta}) \in \Theta^{(j)} \times \Delta^{(j)} \times \Lambda^{(j)} \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} P_1^{(j)}(\theta) & * & * \\ P_2^{(j)}(\theta) & P_3^{(j)}(\theta) & * \\ B_w^{(j)}(\theta, \delta)^T & (Y B_w^{(j)}(\theta, \delta) + L_2^{(j)}(\theta) D_{yw}^{(j)}(\theta, \delta))^T & H^{(j)}(\theta) \end{bmatrix} > 0, \quad \forall (\theta, \delta) \in \Theta^{(j)} \times \Delta^{(j)} \quad (27)$$

$$tr(H^{(j)}(\theta)) < \nu^2, \quad \forall \theta \in \Theta^{(j)} \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} P_1^{(j)}(\theta) & * & * & * \\ P_2^{(j)}(\theta) & P_3^{(j)}(\theta) & * & * \\ P_1^{(j)}(\theta) & P_2^{(j)}(\theta)^T & P_1^{(k)}(\theta) & * \\ P_2^{(j)}(\theta) & P_3^{(j)}(\theta) & P_2^{(k)}(\theta) & P_3^{(k)}(\theta) \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall \theta \in S^{(j,k)}, j \neq k \in Z_N \quad (29)$$

که در آن:

$$\Pi^{(j)}(\theta, \delta) := \begin{bmatrix} \Pi_{11}^{(j)} & * & * & * & * \\ \Pi_{21}^{(j)} & \Pi_{22}^{(j)} & * & * & * \\ \Pi_{31}^{(j)} & -C_z^{(j)}(\theta, \delta) & I_{n_z} & * & * \\ \Pi_{41}^{(j)} & \Pi_{42}^{(j)} & \Pi_{43}^{(j)} & \lambda \langle X^{(j)}(\theta) \rangle & * \\ \Pi_{51}^{(j)} & \Pi_{52}^{(j)} & -\lambda C_z^{(j)}(\theta, \delta)^T & \Pi_{54}^{(j)} & \lambda \langle Y \rangle \end{bmatrix} \quad (30)$$

با عناصر:

محافظه‌کاری جهت ایجاد سادگی در انجام محاسبات رابطه‌ی (۲۹) به کمک (۴۱) این ماتریس مشترک و غیرکلیدزن در نظر گرفته می‌شود. این رویکرد با الهام از تحقیق‌های موجود در مراجع [۱۸]–[۲۰] و بسط آن‌ها در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است. علاوه بر آن، یک تبدیل غیرخطی در آرایش (۴۴) به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\begin{bmatrix} L_1^{(j)}(\theta) & L_2^{(j)}(\theta) \\ L_3^{(j)}(\theta) & 0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} A_p^{(j)}(\theta) \begin{bmatrix} X^{(j)}(\theta) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V & Y^T B_u^{(j)}(\theta) \\ 0 & I \end{bmatrix} K_c^{(j)}(\theta) \begin{bmatrix} U^{(j)}(\theta) & 0 \\ C_y^{(j)}(\theta) X^{(j)}(\theta) & I \end{bmatrix}, \quad (44)$$

$$W^{(j)}(\theta) := YX^{(j)}(\theta) + VU^{(j)}(\theta)$$

که در آن برای $K_c^{(j)}(\theta)$ داریم:

$$K_c^{(j)}(\theta) := \begin{bmatrix} A_c^{(j)}(\theta) & B_c^{(j)}(\theta) \\ C_c^{(j)}(\theta) & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

و ماتریس‌های $B_u^{(j)}(\theta)$ و $A_p^{(j)}(\theta)$ به ترتیب از جایگذاری بردار صفر) و $B_u^{(j)}(\theta, \delta)$ در متغیرهای δ به جای $\delta_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, N_\delta\}$ و $A_p^{(j)}(\theta, \delta)$ برای $j \in Z_N$ حاصل می‌شوند. از تعریف متغیر کمکی $F^{(j)}(\theta)$ در رابطه‌ی (۳۴) به راحتی می‌توان گفت:

$$Q^T F^{(j)}(\theta) Q = \begin{bmatrix} X^{(j)}(\theta) & I \\ W^{(j)}(\theta) & Y \end{bmatrix} \quad (46)$$

از سوی دیگر، پس از انجام مقداری محاسبات جبری به راحتی می‌توان گفت که:

$$Q^T A^{(j)}(\theta, \delta) F^{(j)}(\theta) Q = \begin{bmatrix} \left\{ A_p^{(j)}(\theta, \delta) X^{(j)}(\theta) + \right\} & A_p^{(j)}(\theta, \delta) \\ B_u^{(j)}(\theta, \delta) L_3^{(j)}(\theta) & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1^{(j)}(\theta) & \left\{ Y A_p^{(j)}(\theta, \delta) + \right\} \\ & L_2^{(j)}(\theta) C_y^{(j)}(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Y & L_2^{(j)}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_p^{(j)}(\theta, \delta) - A_p^{(j)}(\theta) & B_u^{(j)}(\theta, \delta) - B_u^{(j)}(\theta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \quad (47)$$

$$\begin{bmatrix} X^{(j)}(\theta) & 0 \\ L_3^{(j)}(\theta) & 0 \end{bmatrix}, \quad Q^T B^{(j)}(\theta, \delta) = \begin{bmatrix} B_w^{(j)}(\theta, \delta) \\ Y B_w^{(j)}(\theta, \delta) + L_2^{(j)}(\theta) D_{yw}^{(j)}(\theta, \delta) \end{bmatrix},$$

$$C^{(j)}(\theta, \delta) F^{(j)}(\theta) Q = \begin{bmatrix} C_z^{(j)}(\theta, \delta) X^{(j)}(\theta) + D_{zu}^{(j)}(\theta, \delta) L_3^{(j)}(\theta) & C_z^{(j)}(\theta, \delta) \end{bmatrix}$$

سرانجام با جایگذاری روابط (۴۲)–(۴۷) در (۳۹)، شرط زیر پس از مقداری محاسبه‌ی جبری حاصل می‌شود:

$$\Pi^{(j)}(\theta, \delta) + \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & * & * & * & * \\ -\Phi^{(j)}(\theta, \delta) & 0_{n \times n} & * & * & * \\ 0_{n_z \times n} & 0_{n_z \times n} & 0_{n_z \times n_z} & * & * \\ 0_{n \times n} & -\lambda \Phi^{(j)}(\theta, \delta)^T & 0_{n \times n_z} & 0_{n \times n} & * \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n_z} & 0_{n \times n_z} & 0_{n \times n_z} \end{bmatrix} < 0 \quad (48)$$

که در آن داریم:

$$\Phi^{(j)}(\theta, \delta) := Y \Delta A_p^{(j)}(\theta, \delta) X^{(j)}(\theta) + Y \Delta B_u^{(j)}(\theta, \delta) L_3^{(j)}(\theta)$$

حال به علتی که در ادامه گفته خواهد شد، مشابه مراجع [۱۷]، [۱۹]–[۲۰] جهت ایجاد سادگی در بیان شرایط طراحی ماتریس‌های $V^{(j)}(\theta)$ و $Y^{(j)}(\theta)$ مستقل از پارامتر و غیرکلیدزن در نظر گرفته می‌شوند. در نتیجه داریم:

$$F^{(j)}(\theta) := \begin{bmatrix} X^{(j)}(\theta) & (V^T)^{-1} - X^{(j)}(\theta) Y^T (V^T)^{-1} \\ U^{(j)}(\theta) & -U^{(j)}(\theta) Y^T (V^T)^{-1} \end{bmatrix} \quad (36)$$

اکنون ماتریس مستقل از پارامتر Q (غیرتکین و رتبه کامل) برای استفاده در تبدیل متجانس به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$Q := \begin{bmatrix} I_n & Y^T \\ 0_{n \times n} & V^T \end{bmatrix} \quad (37)$$

حال با اعمال تبدیل متجانس روی نامساوی‌های (۱۳)–(۱۵) و (۱۷) به ترتیب با Q ، $\text{diag}(Q, I)$ ، $\text{diag}(Q, I, Q)$ و $\text{diag}(Q, Q)$ می‌توان شرایطی را برای کل نواحی تغییرات $(\theta, \delta, \dot{\theta}) \in \Theta \times \Delta \times \Lambda$ استخراج نمود که در ادامه آورده شده‌اند:

$$Q^T P^{(j)}(\theta) Q > 0, \forall \theta \in \Theta^{(j)} \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} Q^T \left\{ \begin{bmatrix} \dot{P}^{(j)}(\theta) - \\ A^{(j)}(\theta, \delta) F^{(j)}(\theta) \end{bmatrix} Q \right\} & * & * \\ -C^{(j)}(\theta, \delta) F^{(j)}(\theta) Q & I_{n_z} & * \\ Q^T \left\{ \begin{bmatrix} F^{(j)}(\theta) - P^{(j)}(\theta) - \\ \lambda F^{(j)}(\theta)^T A^{(j)}(\theta, \delta)^T \end{bmatrix} Q \right\} & \left\{ -\lambda Q^T F^{(j)}(\theta)^T \times \right\} & \lambda \langle Q^T F^{(j)}(\theta) Q \rangle \end{bmatrix} > 0, \forall (\theta, \delta, \dot{\theta}) \in \Theta^{(j)} \times \Delta^{(j)} \times \Lambda^{(j)} \quad (39)$$

$$\begin{bmatrix} Q^T P^{(j)}(\theta) Q & * \\ B^{(j)}(\theta, \delta)^T Q & H^{(j)}(\theta) \end{bmatrix} > 0, \forall (\theta, \delta) \in \Theta^{(j)} \times \Delta^{(j)} \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} Q^T P^{(j)}(\theta) Q & * \\ Q^T P^{(j)}(\theta) Q & Q^T P^{(k)}(\theta) Q \end{bmatrix} \geq 0, \forall \theta \in S^{(j,k)}, j \neq k \in Z_N \quad (41)$$

بنابراین اگر نامساوی‌های (۳۸)–(۴۱) و (۱۶) برقرار باشند، پایداری نمایی و یک مقدار کمینه‌ی کران بالای بهره‌ی H_2 خروجی عملکردی برابر γ طبق قید (۶) برای سیستم حلقه‌بسته‌ی (۱) تضمین می‌شود. حال تعریف نمایید:

$$Q^T P^{(j)}(\theta) Q := \begin{bmatrix} P_1^{(j)}(\theta) & * \\ P_2^{(j)}(\theta) & P_3^{(j)}(\theta) \end{bmatrix} \quad (42)$$

به کمک رابطه‌ی (۴۲)، شرط (۲۵) به دست می‌آید که معادل روابط (۱۳) و (۳۸) است. از طرفی مشتق‌گیری از طرفین رابطه‌ی (۴۲) به رابطه‌ی (۴۳) می‌انجامد.

$$Q^T \dot{P}^{(j)}(\theta) Q = \begin{bmatrix} \dot{P}_1^{(j)}(\theta) & * \\ \dot{P}_2^{(j)}(\theta) & \dot{P}_3^{(j)}(\theta) \end{bmatrix} \quad (43)$$

لازم به ذکر است تأکید شود که رابطه‌ی (۴۳) صرفاً هنگامی برقرار است که ماتریس Q مستقل از پارامتر باشد. این همان دلیلی است که در بخش قبلی اثبات قضیه‌ی ۱ در رابطه‌ی (۳۷) برای ماتریس همانندی Q تذکر داده شد. در حقیقت، این همان فلسفه‌ی در نظر گرفتن ماتریس‌های V و Y به صورت مستقل از پارامتر است. علاوه بر آن با پذیرفتن مقداری

غیرتکین بودن ماتریس $U^{(j)}(\theta)$ معکوس‌پذیری ماتریس کمکی $F^{(j)}(\theta)$ را نیز تضمین می‌کند. در این جا اثبات به اتمام می‌رسد.

۵- حل مسئله‌ی بهینه‌سازی طراحی

در این کار هدف طراحی سیستم کنترل RSGSOF دینامیکی مرتبه کامل است به گونه‌ای که مقدار بهره‌ی عملکردی H_2 کمینه گردد. بر اساس منابع گذشته این کار به روش‌های مختلفی می‌تواند انجام شود. در این مقاله فرایند بهینه‌سازی بر اساس جستجوی دو-بعدی و حل مسئله‌ی بهینه‌سازی LMI ارائه شده است. به صورت ساده فرض نمایید که: $M^{(j)}(\theta, \delta) = \alpha I_n$. ضرب عناصر مجهول α و λ در حل شرایط طراحی غیرخطی‌گری ایجاد نموده و حل بر پایه‌ی نامساوی‌های وابسته به پارامتر خطی را دچار چالش جدی می‌کند. برای حل این مشکل، فرایند جستجوی خطی به این صورت مورد استفاده قرار می‌گیرد که با در نظر گرفتن مقادیر ثابت برای متغیرهای فوق، سیستم کنترل به ازای کمترین مقدار بهره‌ی عملکردی H_2 استخراج می‌شود. به منظور یافتن مقدار بهینه‌ی متغیرهای α و λ می‌توان از بازه‌های تقسیم‌بندی شده‌ی لگاریتمی کمک گرفت. پس برای مسئله‌ی بهینه‌سازی طراحی داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \nu \\ & L_1^{(j)}(\theta), L_2^{(j)}(\theta), L_3^{(j)}(\theta), X^{(j)}(\theta), Y, W^{(j)}(\theta), \\ & P_1^{(j)}(\theta), P_2^{(j)}(\theta), P_3^{(j)}(\theta), M^{(j)}(\theta, \delta), \lambda \\ \text{s.t.} \quad & (25-29), M^{(j)}(\theta, \delta) = \alpha I, \alpha = \alpha_0, \lambda = \lambda_0 \end{aligned} \quad (52)$$

نکته ۲: طبیعی است با توجه روش بهینه‌سازی پیشنهادی یک مقدار زیربهینه (بهینه محلی) برای نرم عملکردی H_2 در فرایند جستجوی خطی دو-بعدی (۵۲) حاصل شود [۱۶]. یکی از موضوعات جدی در این زمینه آن است که هر چه بازه‌ی انتخابی برای متغیرهای α و λ وسیع‌تر و فواصل بیان نقاط کمتر شود، مقدار زیربهینه‌ی این نرم به مقدار بهینه (سراسری) آن نزدیک‌تر می‌شود.

نکته ۳: اگر عناصر طراحی و ماتریس‌های لیاپانوف بین تمامی نواحی کارکرد سیستم مشترک در نظر گرفته شوند، یک کنترل کننده‌ی غیرکلیدزن (RGSO) یکتا به دست می‌آید. برای این کار کافی است در بهینه‌سازی (۵۲) داشته باشیم:

$$\begin{cases} L_1^{(j)}(\theta) = L_1(\theta), L_2^{(j)}(\theta) = L_2(\theta), L_3^{(j)}(\theta) = L_3(\theta), \\ X^{(j)}(\theta) = X(\theta), W^{(j)}(\theta) = W(\theta), \\ P_1^{(j)}(\theta) = P_1(\theta), P_2^{(j)}(\theta) = P_2(\theta), P_3^{(j)}(\theta) = P_3(\theta), \end{cases} \quad (53)$$

توجه کنید در این حالت شرط کلیدزنی (۲۰) از شرایط طراحی حذف می‌شود. انتظار می‌رود با اعمال شرط (۵۳) سخت‌گیری و محافظه‌کاری به نتایج طراحی تحمیل شود.

نکته ۴: بدیهی است بر اساس منابع گذشته [۱۲]، [۲۶]–[۲۷] در حوزه‌ی طراحی کنترل کلیدزن سیگنال کنترلی دارای جهش‌هایی در لحظات کلیدزنی باشد. برای مشاهده‌ی این پدیده می‌توان مثال عددی ۲ در همین

توجه نمایید که ماتریس‌های $\Delta A_p^{(j)}(\theta, \delta)$ و $\Delta B_u^{(j)}(\theta, \delta)$ در رابطه‌ی (۳۲) داده شده‌اند. با توجه به رابطه‌ی (۴۸) و شکل نامساوی (۷) در لم ۱ می‌توان گفت:

$$\begin{aligned} \Psi_2^{(j)}(\theta, \delta)^T \Psi_1^{(j)}(\theta, \delta) &= \Phi^{(j)}(\theta, \delta), \\ \Psi_3^{(j)}(\theta, \delta)^T \Psi_2^{(j)}(\theta, \delta) &= \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ \lambda \Phi^{(j)}(\theta, \delta)^T \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (49)$$

همان گونه که ملاحظه می‌شود ضرب عوامل طراحی در شرایط استخراج کنترل کننده ایجاد غیرخطی‌گری می‌نماید. برای حل چنین مشکلی، با انتخاب متغیرهای موجود در رابطه‌ی (۳۲) در بالا و به کمک لم ۱ می‌توان به این مسئله صحنه گذاشت که اگر رابطه‌ی (۲۶) برقرار باشد، آن گاه نامساوی (۴۸) برقرار می‌شود که معادل شرط (۳۹) و نیز رابطه‌ی (۱۴) از لم ۳ است. هم چنین با جایگذاری (۴۲) و (۴۷) در روابط (۲۷) و (۲۹) به ترتیب نامساوی‌های (۴۰) و (۴۱) به دست آورده خواهند شد که معادل رابطه‌های (۲۷) و (۲۹) هستند.

به عنوان جمع‌بندی، می‌توان این گونه بیان نمود که اگر (۲۵)–(۲۹) برقرار باشند، آن گاه رابطه‌های (۱۳)–(۱۷) برقرار می‌شوند که به تضمین پایداری نمایی و حاصل نمودن یک مقدار کمینه‌ی کران بالای بهره‌ی H_2 برابر ν برای خروجی عملکردی سیستم حلقه‌بسته‌ی (۱) منتهی می‌گردد. توجه نمایید رابطه‌ی فضای حالت سیستم کنترل کننده در (۳۳) از معکوس رابطه‌ی غیرخطی (۴۴) استخراج می‌شود. در ادامه در روابط استخراج ماتریس‌های کنترل کننده‌ی در (۳۳) باید معکوس‌پذیری ماتریس‌های V و $U^{(j)}(\theta)$ اثبات شود. لازم به ذکر است ماتریس V می‌تواند یک ماتریس رتبه‌ی کامل دلخواه و مستقل از پارامتر که به عنوان مثال به صورت I_n در نظر گرفته شود. اما در مورد $U^{(j)}(\theta)$ باید این مسئله مورد بررسی قرار گیرد. طبق شرط (۲۶) باید نامساوی مثبت معین (۵۰) برقرار باشد:

$$\begin{bmatrix} \langle X^{(j)}(\theta) \rangle & * \\ W^{(j)}(\theta) + I_n & \langle Y \rangle \end{bmatrix} > 0 \quad (50)$$

که در نهایت برای سطر و ستون دوم (۵۰) هم باید این نامساوی برقرار باشد. متعاقباً برای تمام مقادیر θ ، ماتریس‌های Y و $X^{(j)}(\theta)$ باید غیرتکین باشند. هم چنین با ضرب نامساوی (۵۰) در عبارت $\begin{bmatrix} (X^{(j)}(\theta)^T)^{-1} & -I \end{bmatrix}$ از سمت چپ و ترانهادی آن از سمت راست داریم:

$$\langle (W^{(j)}(\theta) - YX^{(j)}(\theta))X^{(j)}(\theta)^{-1} \rangle > 0 \quad (51)$$

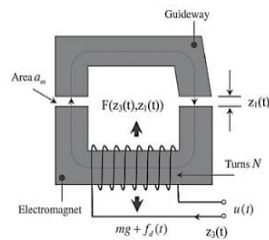
که تأکید می‌کند عبارت $W^{(j)}(\theta) - X^{(j)}(\theta)Y$ غیرتکین است. بنابراین برای هر ماتریس غیرتکین V ، ماتریس $U^{(j)}(\theta) = V^{-1}(W^{(j)}(\theta) - YX^{(j)}(\theta))$ برای تمام مقادیر θ موجود است. جالب توجه آن است که با در نظر گرفتن رابطه‌ی (۴۶)،

جدول ۱: مقایسه‌ی ۷ و پیچیدگی محاسباتی در روش پیشنهادی و پژوهش [۶]

بهره‌ی عملکردی	پیچیدگی محاسباتی		رویکرد
	تعداد متغیرهای	تعداد ردیف	
	تصمیم‌گیری	LMI	
1.110	80	81	مرجع [۶]
0.780	94	120	روش پیشنهادی

۲-۶- مثال عددی ۲ (سیستم تعلیق الکترومغناطیسی)

در این قسمت برای نشان دادن میزان کاربردی بودن و مؤثر بودن روش گفته شده، در استخراج کنترل‌کننده‌ی سیستم تعلیق الکترومغناطیسی از این رویکرد پیشنهادی استفاده می‌شود. قطار مغناطیسی یکی از وسایل با فناوری روز در صنعت حمل و نقل است که عمل معلق ماندن آن در یک فاصله‌ی مناسب توسط یک سیستم تعلیق الکترومغناطیسی موسوم به EMS صورت می‌پذیرد. سیستم تعلیق الکترومغناطیسی که هسته‌ی ایجاد کننده‌ی نیروی عمودی در قطار مغناطیسی می‌باشد که در شکل ۳ آورده شده است. نیروی تعلیق $F(z_3(t), z_1(t))$ وابسته به فاصله‌ی تعلیق $z_1(t)$ و جریان DC هسته‌ی مغناطیسی $z_3(t)$ است.



شکل ۳: ساختار مجموعه سیستم EMS [۳۲].

به راحتی با انجام مقداری محاسبات جبری به کمک مراجع [۳۱]-[۳۲]، طبق قانون‌های کیرشهف و نیوتن، مدل دینامیکی سیستم EMS به صورت رابطه‌ی (۵۶) قابل استخراج است.

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = -\frac{\mu_0 N^2 a_m}{4m} \left(\frac{z_3(t)}{z_1(t)} \right)^2 + g + \frac{1}{m} f_d(t) \\ \dot{z}_3(t) = -\frac{2R_m}{\mu_0 N^2 a_m} z_1(t) z_3(t) + \frac{z_2(t) z_3(t)}{z_1(t)} + \frac{2z_1(t)}{\mu_0 N^2 a_m} v(t) \end{cases} \quad (56)$$

که در آن $z_1(t)$ ، $z_2(t)$ ، $z_3(t)$ و $v(t)$ به ترتیب فاصله‌ی تعلیق (m)، نرخ تغییر زمانی آن (m/s)، جریان عبوری از هسته‌ی مغناطیسی (A) و ولتاژ اعمالی (V) به دو سر پلاریته‌ی سیم‌پیچ هسته می‌باشند. همچنین نیروی وارد شده به سیستم (N) در قالب اغتشاش خارجی به صورت متغیر $f_d(t)$ تعریف شده است. دیگر پارامترهای عددی مدل (۵۶) در جدول ۲ آورده شده‌اند.

مقاله و موارد مشابه در تحقیقات گذشته را مشاهده نمود. برای حل چنین مشکلی می‌توان رویکردهای متفاوتی در آینده مورد بررسی و تحقیق قرار داد. در این‌جا برای کاهش جهش کنترلی در لحظات کلیدزنی می‌توان برخی عناصر طراحی را بین نواحی به صورت زیر مشترک در نظر گرفت (بر اساس یکسان بودن ماتریس‌های فضای حالت کنترلی $B_c^{(i)}(\theta)$ و $C_c^{(i)}(\theta)$ در رابطه‌ی (۳۳) به کمک مرجع [۱۲]):

$$\begin{cases} L_2^{(i)}(\theta) = L_2(\theta), L_3^{(i)}(\theta) = L_3(\theta), \\ X^{(i)}(\theta) = X(\theta), W^{(i)}(\theta) = W(\theta) \end{cases} \quad (54)$$

۶- نتایج شبیه‌سازی

برای حل مسئله‌ی بهینه‌سازی طراحی ابتدا باید روابط وابسته به پارامتر دارای بعد بی‌نهایت را به نامساوی‌های ماتریسی خطی دارای بعد محدود تبدیل نمود. این کار توسط ابزار حل Rolmip [۲۸] انجام می‌شود. سپس به کمک ابزار حل LMI نتایج طراحی محاسبه خواهند شد. به عنوان مثال، می‌تواند از بسته‌های نرم‌افزاری Mosek [۲۹] به همراه رابط کاربر Yalmip [۳۰] بهره‌گیری شود. لازم به ذکر است پارامترهای لیپانوف و متغیرهای طراحی بر حسب پارامترهای جدول‌بندی در مثال‌های عددی این مقاله از درجه‌ی افاین انتخاب شده‌اند.

۱-۶- مثال عددی ۱ (سیستم دانشگاهی)

برای سیستم‌های LPV نامعین کلیدزن در مراجع گذشته روشی ارائه نشده است. از این رو، جهت مقایسه با روش‌های پیشین فرض می‌شود نامعینی در مدل سیستم حلقه‌باز وجود نداشته باشد و همچنین برای ناحیه‌ی وسیعی از پارامترهای جدول‌بندی تنها یک مدل یکنای غیرکلیدزن برای سیستم موجود در نظر گرفته شود. ماتریس‌های مدل فضای حالت سیستم حلقه‌باز در روابط (۵۵) داده شده‌اند [۶]:

$$\begin{aligned} A_p^\sigma(\theta, \delta) &= \begin{bmatrix} 0 & 11 + \theta(t) & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 + \theta(t) \end{bmatrix}, \\ B_w^\sigma(\theta, \delta) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_u^\sigma(\theta, \delta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_z^\sigma(\theta, \delta) &= [0 \ 1 \ 1], D_{zu}^\sigma(\theta, \delta) = [1], \\ C_y^\sigma(\theta) &= [1 \ 0 \ 0], D_{yw}^\sigma(\theta, \delta) = [2] \end{aligned} \quad (55)$$

که در آن داریم: $|\theta(t)| \leq 1$ و $|\dot{\theta}(t)| \leq 1$. طراحی به کمک رویکرد جستجوی خطی با دو روش قبلی [۶] و روش پیشنهادی در قضیه‌ی ۱ انجام و نتایج در جدول ۱ آورده شده‌اند. در این جدول ۷ بیان‌گر بهره‌ی عملکردی H_2 حاصل از روش طراحی است که عملکرد مناسب‌تر روش پیشنهادی را تأیید می‌کنند. البته باید توجه نمود مقدار کمی بر پیچیدگی محاسباتی غیربرخط بهینه‌سازی طراحی در روش پیشنهادی افزوده می‌شود.

جدول ۲: توصیف کمی پارامترهای عددی مربوط به مدل (۵۶) سیستم EMS

نمادها	پارامترهای مدل سیستم EMS		توصیف
	مقدار	واحد	
m	1.5	kg	جرم سیستم در حال تعلیق
a_m	1.024×10^{-2}	m^2	سطح مؤثر هسته
R_m	1.1	Ω	مقاومت سیم پیچ هسته
g	9.8	m/s^2	شتاب جاذبه
μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	H/m	ثابت گذردهی خلأ یا هوا
N	280	-	تعداد دورهای سیم پیچ

سیستم EMS (۵۸) است. توجه کنید که این قسمت از روابط مستقل از پارامترهای جدول بندی نیست و به $\theta_1 = x_1$ و $\theta_2 = z_{ref}$ وابسته می‌باشد. بر همین اساس تعریف عبارت $1/(x_1 + z_{ref})$ به عنوان یک متغیر جدول بندی جدید می‌تواند محافظه کاری را به نتایج طراحی تحمیل کند. با توجه به این نکته و با الهام از پژوهش‌های پیشین [۲۰] و [۲۳] در مواجهه با این مسئله، پیشنهاد می‌شود این بخش با عبارت $b_0^{(j)} + b_1^{(j)}x_1 + b_2^{(j)}z_{ref}$ تقریب زده شود که در آن ضرایب $b_0^{(j)}$ ، $b_1^{(j)}$ و $b_2^{(j)}$ به کمک روش‌های درون‌یابی همچون روش حداقل مربع خطای (LSE) در هر ناحیه‌ی کاری مجزا قابل محاسبه هستند. در ادامه بر اساس خطای تقریب $e^{(j)}$ متغیر سوم از پارامترهای جدول بندی (با قابلیت دسترسی از طریق اندازه گیری و محاسبه) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\theta_3 := e^{(j)} = \frac{1}{x_1 + z_{ref}} - (b_0^{(j)} + b_1^{(j)}x_1 + b_2^{(j)}z_{ref}) = \quad (60)$$

$\frac{1}{\theta_1 + \theta_2} - (b_0^{(j)} + b_1^{(j)}\theta_1 + b_2^{(j)}\theta_2)$; $\theta_1, \theta_2 \in \Theta^{(j)}$ که مقدار آن متعلق به $\left[\min(e^{(j)}), \max(e^{(j)}) \right]$ می‌باشد. بر اساس کران در نظر گرفته شده برای θ_1 و θ_2 در هر ناحیه‌ی جدول بندی مقدار ضرایب رابطه‌ی (۶۰) محاسبه می‌شوند. دو ناحیه برای تغییرات پارامتر جدول بندی θ_3 بر حسب ورودی فرمان فاصله‌ی تعادل پایدار θ_2 و خطای ردیابی θ_1 در نظر گرفته می‌شود. مشخصات ناحیه‌ی اول در رابطه‌ی (۶۱) داده شده است:

$$\Theta^{(1)} \times \Delta^{(1)} \times \Lambda^{(1)} : \begin{cases} -3 \times 10^{-3} \leq \theta_1 \leq +2 \times 10^{-3} \\ 6 \times 10^{-3} \leq \theta_2 \leq 8.5 \times 10^{-3} \\ -0.35 \leq \delta_1 \leq +0.7 \\ -0.1 \leq \dot{\theta}_2 \leq +0.1 \end{cases} \quad (61)$$

و هم چنین برای ناحیه‌ی دوم داریم:

$$\Theta^{(2)} \times \Delta^{(2)} \times \Lambda^{(2)} : \begin{cases} -2 \times 10^{-3} \leq \theta_1 \leq +3 \times 10^{-3} \\ 8 \times 10^{-3} \leq \theta_2 \leq 10 \times 10^{-3} \\ -0.7 \leq \delta_1 \leq +0.35 \\ -0.1 \leq \dot{\theta}_2 \leq +0.1 \end{cases} \quad (62)$$

مقدار ضرایب $b_0^{(j)}$ ، $b_1^{(j)}$ و $b_2^{(j)}$ در جدول ۳ آورده شده‌اند.

جدول ۳: تخمین ضرایب تقریب رابطه‌ی (۶۰) به کمک روش LSE

$\Theta^{(j)}$	$b_0^{(j)}$	$b_1^{(j)}$	$b_2^{(j)}$	$\underline{\theta}_3^{(j)}$	$\bar{\theta}_3^{(j)}$
$\Theta^{(1)}$	+336.313	-25087.9	-26308.9	-12.20	+79.610
$\Theta^{(2)}$	+222.350	-11721.8	-12019.3	-3.44	+17.027

توجه نمایید در این جا فرض می‌شود هنگامی که سطح ثابت $\theta_2 = z_{ref}$ از مقداری به مقدار دیگری تغییر کند، نرخ تغییرات زمانی ورودی مرجع فاصله‌ی هوایی تعلیق $\dot{\theta}_2 = \dot{z}_{ref}$ مقادیر محدود ثابتی را اختیار نماید. بر اساس این فرض هنگام اعمال ورودی مرجع به سیستم حلقه بسته داریم: $\ddot{\theta}_2 = \ddot{z}_{ref} = 0$. با گرفتن الهام از مباحث بیان شده در خصوص تنظیم تقریبی خروجی در پژوهش [۱۱] و بر اساس تعریف سیگنال‌های اغتشاش

هدف از طراحی سیستم کنترل با ساختار RSGSOF مرتبه کامل، نگه داشتن سیستم در یک فاصله‌ی تعادل پایدار به صورت $z_{1e} = z_{ref}$ است. توجه نمایید طبق مراجع [۳۱]–[۳۲]، نقاط تعادل سیستم به صورت $[z_{1e} \ z_{2e} \ z_{3e}]^T = (z_{ref} \ 0 \ \sqrt{\kappa}z_{ref})^T$ داریم: $\kappa := \frac{4mg}{\mu_0 N^2 a_m}$. به منظور تبدیل مسئله‌ی تنظیم خروجی (ردیابی) حول مقدار مطلوب به مسئله‌ی پایدارسازی، پیشنهاد می‌شود از تغییر متغیر موجود در رابطه‌ی (۵۷) استفاده شود.

$$x(t) := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 - z_{1e} \\ z_2 \\ z_3 - z_{3e} \end{bmatrix}, \quad u(t) := v(t) - u_e, \quad u_e = R_m z_{3e} \quad (57)$$

با اعمال تبدیل مختصات (۵۷) روی مدل (۵۶) طبق [۳۱] داریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{2z_{ref} + x_1}{(x_1 + z_{ref})^2} g x_1 - \frac{2\sqrt{\kappa}z_{ref} + x_1}{\kappa(x_1 + z_{ref})^2} g x_3 + \frac{1}{m} f_d \\ \dot{x}_3 = \frac{x_3 + \sqrt{\kappa}z_{ref}}{x_1 + z_{ref}} x_2 - \kappa \frac{x_1 + z_{ref}}{2mg} (R_m x_3 - u) \end{cases} \quad (58)$$

بدیهی است که سیستم فوق با روابط نسبتاً پیچیده کاملاً غیرخطی است. بنابراین یک طراحی معمول خطی برای استخراج کنترل کننده قابل استفاده نخواهد بود. از سوی دیگر استخراج یک مدل پارامتر متغیر خطی برای سیستم در کل بازه‌ی تغییرات می‌تواند به طراحی محافظه کاری جدی تحمیل نماید. برای حل این مشکل ابتدا پیشنهاد می‌شود نمایش سیستم در قالب یک مدل LPV دارای کلیدزنی زمانی وابسته به پارامترهای جدول بندی به دست آورده شود. دسته‌ای از پارامترهای جدول بندی و متغیر نامعینی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

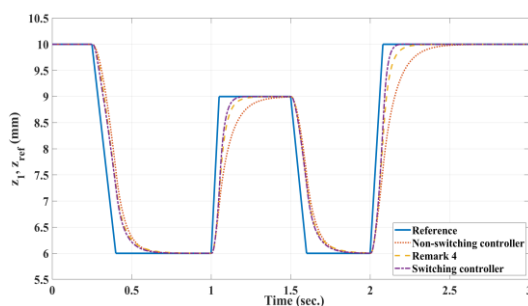
$$\begin{cases} \theta_1 := x_1 = z_1 - z_{ref} \\ \theta_2 := z_{ref} \\ \delta_1 := x_3 = z_3 - \sqrt{\kappa}z_{ref} \end{cases} \quad (59)$$

لازم به ذکر است در این جا فرض می‌شود مقدار جریان عبوری از هسته‌ی مغناطیسی z_3 و در نتیجه مقدار $x_3 = \delta_1$ در هر لحظه از زمان به کلی نامعین باشد. از سوی دیگر، مشکل اساسی پیش رو در مدل سازی LPV سیستم حلقه باز بخش کسری و غیرخطی $1/(x_1 + z_{ref})$ در مدل

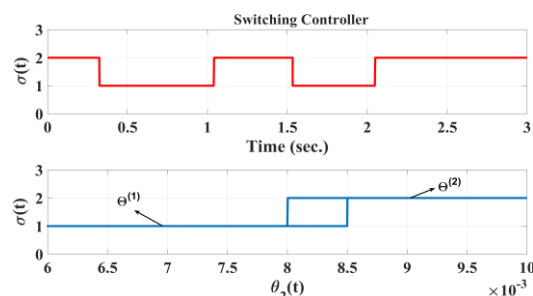
مقایسه‌ی عددی بهتر نتایج طراحی، انتگرال مربع بردار عملکرد خروجی z از مرجع [۲۰] به صورت $IS_z := \int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt = \int_0^\infty (z(t)^T z(t)) dt$ معرفی می‌گردد. با در نظر گرفتن جدول ۴ و شکل ۴ می‌توان گفت جهش‌های سریع در ورودی کنترل به دلیل انجام کلیدزنی اتفاق افتاده که برای کاهش و یا حذف آن طراحی نیازمند سخت‌گیری و پذیرفتن کاهش عملکرد سیستم حلقه بسته است. با این وجود از مشاهده‌ی نمودارها و نتایج می‌توان تأیید نمود که در طراحی قضیه ۱، فاصله‌ی تعلیق ورودی مرجع را با سرعت بیش‌تری در مقایسه با سایر روش‌ها دنبال می‌کند. هنگام اعمال فرمان ورودی مرجع ثابت، خطای ردیابی روش‌های طراحی صفر است. هم‌چنین کنترل کننده عملکرد مطلوبی از خود به نمایش می‌گذارد.

جدول ۴: مقایسه‌ی عملکردی IS_z در روش‌های مختلف (بر حسب $\text{mm}^2 \cdot \text{sec}$)

نکته ۴	غیرکلیدزن (نکته ۳)	قضیه ۱
0.706	1.170	0.589



شکل ۴: نمودار زمانی ورودی مرجع و فاصله‌ی تعلیق (ورودی مرجع، حالت غیرکلیدزن، نکته ۴ و قضیه ۱ به ترتیب با رنگ‌های آبی، قرمز، زرد و بنفش).



شکل ۵: نمودار سیگنال کلیدزنی (قضیه ۱).

به علاوه مقدار پارامترهای جدول بندی دینامیکی و هم‌چنین نامعینی متغیر با زمان، در بازه‌ی از پیش در نظر گرفته شده به عنوان مقادیر کمینه و بیشینه‌ی آن‌ها در طراحی (قضیه ۱)، تغییر می‌کنند. از سوی دیگر، پرش‌های سیگنال کنترلی در لحظات کلیدزنی به دلیل تغییر کنترل کننده‌ی پس‌خورده خروجی جدول بندی بهره‌ی مقاوم به خوبی قابل مشاهده است.

خارجی w_1 و w_2 در نظر بگیرد: $\dot{z}_{ref} = -a_1 w_1$, $f_d = a_2 w_2$. به کمک رابطه‌ی (۵۸)، تعریف (۵۹)، جایگذاری θ_1 , θ_2 و θ_3 در (۶۰) با:

$$\rho^{(j)} := \frac{1}{x_1 + z_{ref}} = \theta_3 + (b_0^{(j)} + b_1^{(j)}\theta_1 + b_2^{(j)}\theta_2); \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \Theta^{(j)} \quad (63)$$

و نیز تعریف $z = x_1$ و $y = [x_1 + a_4 w_3 \quad x_2 + a_5 w_4]^T$ به عنوان خروجی اندازه‌گیری و بردار عملکرد خروجی، ماتریس‌های مدل فضای حالت سیستم حلقه باز (۲۱) در این‌جا مطابق رابطه‌ی (۶۴) به دست می‌آیند. توجه نمایید این فضای حالت پارامتر متغیر خطی نامعین کلیدزن علی‌رغم استفاده از تقریب بیان شده به کمک همان مدل غیرخطی سیستم اصلی استخراج می‌شود. به عبارت دیگر، با توجه به این‌که متغیر جدول بندی سوم همواره در دسترس است مدل سازی LPV با ذات غیرخطی خود سیستم تفاوتی ندارد و تقریب گفته شده صرفاً ابزاری برای کاهش محافظه‌کاری در طراحی است. از طرف دیگر، لازم به ذکر است که پس از طراحی کنترل کننده، سیگنال تلاش کنترلی به عنوان خروجی بخش طراحی به همان سیستم غیرخطی اصلی اعمال شده است و نتایج زمانی به نمایش درآمده‌اند.

$$A_p^{(j)}(\theta, \delta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ g(\rho^{(j)})^2(2\theta_2 + \theta_1) & 0 & -\frac{g(\rho^{(j)})^2}{\kappa}(2\sqrt{\kappa}\theta_2 + \delta_1) \\ 0 & \rho^{(j)}(\delta_1 + \sqrt{\kappa}\theta_2) & -\frac{\kappa R_m}{2mg}(\theta_2 + \theta_1) \end{bmatrix}, \quad (64)$$

$$B_w^{(j)}(\theta, \delta) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{m} & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_u^{(j)}(\theta, \delta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\kappa}{2mg}(\theta_2 + \theta_1) \end{bmatrix},$$

$$C_z^{(j)}(\theta, \delta) = [1 \quad 0 \quad 0], \quad D_{zu}^{(j)}(\theta, \delta) = 0,$$

$$C_y^{(j)}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{yw}^{(j)}(\theta, \delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 \end{bmatrix}$$

در ادامه، با قرار دادن $a_1 = a_4 = a_5 = 0.001$, $a_2 = 1$, $a_3 = \sqrt{\kappa}a_1 = 0.2414$ به کمک جستجوی خطی متغیرهای عددی λ و α بخش بندی شده‌ی ده نقطه‌ای لگاریتمی یکسان به ترتیب در خلال بازه‌های $[10^{-4}, 10^{-2}]$ و $[10^{-4}, 10^{-7}]$ بهینه‌سازی طراحی انجام می‌شود. مقدار بهینه‌ی آن‌ها در این‌جا پس از انجام محاسبات بهینه‌سازی به صورت $\lambda_{opt} = 0.00129$ و $\alpha_{opt} = 215443.469$ به دست آورده شده‌اند. کنترل کننده‌ی RSGSOF استخراج شده، پایداری و سطح کمینه‌ی کران بالای بهره‌ی H_2 برابر $\nu = 3.904$ را برای سیستم حلقه بسته تضمین می‌کند. جهت ارزیابی رفتار سیستم حلقه بسته با اعمال کنترل کننده‌ی RSGSOF شبیه‌سازی زمانی به ازای شرایط اولیه‌ی $x(0) = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ انجام و نتایج در قالب نمودارهای موجود در شکل ۴ تا شکل ۷ به تصویر کشیده شده‌اند. علاوه بر انجام طراحی RSGSOF (قضیه ۱)، برای کنترل کننده‌ی نوع غیرکلیدزن در نکته ۳ و هم‌چنین روش نکته ۴ (به منظور کاهش جهش نامطلوب سیگنال کنترل) مطالعات عددی انجام شده است. جهت انجام

به پارامترهای جدول بندی و متغیرهای نامعینی وابسته هستند. سیستم کنترل طراحی شده، به صورت خانواده‌ای از کنترل کننده‌های جدول بندی بهره‌ی پس‌خورد خروجی دینامیکی مقاوم تحت منطق کلیدزنی هیستریزس استخراج می‌شود. فضای حالت آن هم به پارامترهای جدول بندی در دسترس زمان-حقیقی وابسته است و هم به سیگنال کلیدزنی. بازه‌ی تغییرات پارامترهای جدول بندی و متغیرهای نامعینی پیش از طراحی محدود در نظر گرفته شده‌اند. کنترل کننده‌ی پیشنهادی، با حل بهینه‌ی نامساوی‌های وابسته به پارامتر خطی به همراه جستجوی خطی دو مقدار عددی به دست می‌آید. سرانجام برای نمایش مزیت‌ها و قابلیت‌های کاربردی بودن رویکرد ارائه شده، علاوه بر مقایسه با روش‌های قبلی در یک حالت خاص محدود ابتدا مدل پارامتر متغیر خطی نامعین کلیدزن سیستم تعلیق الکترومغناطیسی استخراج شده است که امروزه در وسایل حمل و نقل با فناوری روز اهمیت ویژه‌ای دارد. سپس روش ارائه شده در طراحی سیستم کنترل آن مورد استفاده قرار گرفته است. بررسی و ارزیابی نتایج آن، عملکرد مناسب این رویکرد طراحی را تأیید می‌کند.

پیوست

برای اعمال کنترل کننده‌ی RSGSOF طراحی شده لازم است ماتریس‌های مورد نیاز رابطه‌ی (۳۳) را داشته باشیم. در این مسیر از اندازه‌گیری و اطلاعات پارامترهای جدول بندی و همچنین سیگنال کلیدزنی نیز بهره‌گیری می‌شود. داریم:

$$L_1^{(1)}(\theta) = \begin{bmatrix} -135.28 & 36225.3 & 418838.9 \\ 150.38 & -26082.8 & -469110.9 \\ 0.0628 & 19.6751 & 18.9421 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} -1715.86 & -969053.6 & 1039938.7 \\ 20627.7 & 121880.08 & 21553969.5 \\ -14.93 & -1304.59 & 21634.92 \end{bmatrix} \theta_1 +$$

$$\begin{bmatrix} 8996.92 & -3533153.7 & -62479576.4 \\ -10656.83 & 2499054.7 & 60512255.6 \\ -6.847 & -1538.63 & -9132.76 \end{bmatrix} \theta_2 +$$

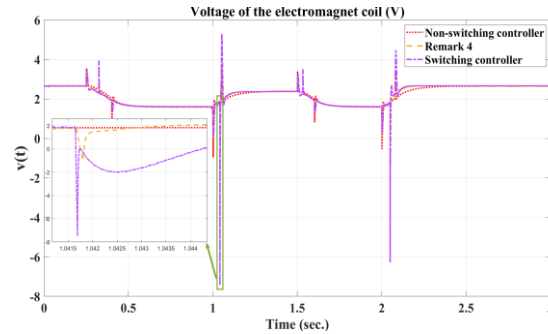
$$\begin{bmatrix} 0.267 & 47.925 & -1388.24 \\ -0.389 & -20.079 & 1262.9 \\ 0.00059 & 0.01758 & -0.419 \end{bmatrix} \theta_3,$$

$$L_1^{(2)}(\theta) = \begin{bmatrix} 499.48 & -7827.69 & 108489.1 \\ 265.55 & -5623.7 & -265380.9 \\ 0.242 & 7.212 & -65.315 \end{bmatrix} +$$

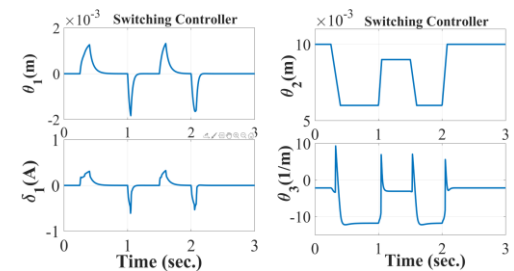
$$\begin{bmatrix} 14808.2 & 756377.5 & 19213337.2 \\ -15587.2 & 1387120.8 & 2264047.6 \\ 7.137 & -2413 & 1.604 \end{bmatrix} \theta_1 +$$

$$\begin{bmatrix} -60427 & 1356083.4 & -11579768.9 \\ -34049.5 & 604643.2 & 30622498 \\ -31.951 & 551.242 & 9635.4 \end{bmatrix} \theta_2 +$$

$$\begin{bmatrix} -0.651 & 96.478 & -1843.9 \\ 0.919 & -5.153 & -321.618 \\ -0.00074 & 0.193 & -0.618 \end{bmatrix} \theta_3,$$



شکل ۶: نمودار زمانی ولتاژ ورودی کنترل اعمالی به سیم‌پیچ هسته‌ی مغناطیسی (حالت غیرکلیدزن، نکته ۴ و قضیه ۱ به ترتیب با رنگ‌های قرمز، زرد و بنفش).



شکل ۷: نمودار تغییرات زمانی پارامترهای جدول بندی و متغیر نامعینی (قضیه ۱)

نکته‌ی قابل توجه در این روش پیشنهادی آن است که می‌توان با تحمیل مقداری محافظه‌کاری در طراحی، عنصر حسگر جریان سیم‌پیچ هسته را در سیستم کنترل حذف کرد. هم‌چنین بازه‌ی تغییرات ولتاژ ورودی سیم‌پیچ دارای رنج مناسبی می‌باشد و سیگنال کنترلی در طراحی نکته ۴ دارای رفتار دینامیکی بهتری است.

نکته ۵: علاوه بر این که روش‌های پیشنهادی در گذشته قادر به در نظر گرفتن نامعینی و هم‌چنین ماهیت کلیدزن سیستم حلقه‌باز در طراحی نیستند، یک محدودیت جدی در رابطه با سیستم‌های عملی مهندسی دارند. این مانع اساسی ناتوانی در نظر گرفتن موارد وابستگی غیرافزاین و چندجمله‌ای مدل LPV نامعین به پارامترهای جدول بندی و نامعینی است. این محدودیت هم در استخراج شرایط طراحی و هم فضای حالت کنترلی دیده می‌شود. برای مشاهده‌ی جزئیات بیشتر می‌توان [۱۶]، [۱۹]، [۲۸]، [۳۳] و منابع موجود در آن‌ها را مشاهده نمود. اما در مورد مثال EMS بیان شده و موارد عملی دیگر در منابع [۱۷]، [۱۸]، [۲۰]، [۲۵] و پژوهش‌های موجود در آن‌ها، باید بتوان در طراحی حالت کلی‌تر وابستگی چندجمله‌ای فضای حالت سیستم حلقه‌باز به پارامترهای جدول بندی قابل اندازه‌گیری و متغیرهای نامعینی غیرقابل دسترس را نیز در نظر گرفت. به همین دلیل روش پیشنهادی در مقایسه با کارهای پیشین دارای گستردگی کاربردی عمومی‌تری است.

۷- جمع بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله، روشی جدید برای طراحی کنترل سیستم‌های پارامتر متغیر خطی نامعین دارای کلیدزنی زمانی ارائه شده است. ماتریس‌های فضای حالت سیستم حلقه‌باز LPV نامعین کلیدزن به صورت چندجمله‌ای

$$\begin{bmatrix} 2.826 & -556.029 & -1385 \\ -0.202 & 49.929 & 838.800 \\ 0.052 & 6.664 & 66.306 \end{bmatrix} \theta_1 + \begin{bmatrix} -49.975 & 2983.3 & 11957.6 \\ 23.143 & -226.157 & 8798.6 \\ 0.133 & -5.450 & -98.328 \end{bmatrix} \theta_2 + \begin{bmatrix} 0.00002 & 0.046 & -0.592 \\ -0.00004 & 0.002 & 0.130 \\ -0.000003 & -0.00004 & -0.009 \end{bmatrix} \theta_3,$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.1601 & -0.1488 & -0.0010 \\ 0.0867 & 0.0135 & -0.0001 \\ 0.0000 & 0.0001 & 0.0001 \end{bmatrix}, \quad V = I_3$$

در نهایت، به کمک سه انتگرال گیر، اندازه گیری پارامترهای جدول بندی و خروجی اندازه گیری، مقداری عملیات ماتریسی، خروجی سیستم کنترلی (۲۳) به کمک رابطه‌ی (۳۳) قابل محاسبه است. انجام این محاسبات به کمک رشد روزافزون پردازنده‌های امروزی به سادگی امکان پذیر خواهد بود.

مراجع

- [1] W. J. Rugh and J. S. Shamma, "Research on gain scheduling," *Automatica*, vol. 36, no. 10, pp. 1401–1425, 2000.
- [2] C. Hoffmann and H. Werner, "A Survey of linear parameter-varying control applications validated by experiments or high-fidelity simulations," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 23, pp. 416–433, 2015.
- [3] J. Mohammadpour and C. W. Scherer, *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*, New York: Springer-Verlag, 2012.
- [4] B. Sereni, E. Assuncao, and M. C. M. Teixeira, "New gain-scheduled static output feedback controller design strategy for stability and transient performance of LPV systems," *IET Control Theory and Applications*, vol. 14, pp. 717–725, March 2020.
- [5] M. L. Peixoto, P. S. Coutinho, R. M. Palhares, "Improved robust gain-scheduling static output feedback control for discrete-time LPV systems," vol. 58, , pp. 11-16, 2021.
- [6] W. Xie, "Multi-objective H_2/L_2 performance controller synthesis for LPV systems," *Asian Journal of Control*, vol. 14, no. 5, pp. 1273-1281, 2012.
- [7] J. D. Caigny, J. F. Camino, R. C. L. F. Oliveira, P. L. D. Peres, and J. Swevers, "Gain-scheduled H_2 and H_∞ control of discrete-time polytopic time-varying systems," *IET Control Theory Applications*, vol. 4, no. 3, pp. 362–380, 2010.
- [8] J. De Caigny, J. F. Camino, R. C. L. F. Oliveira, P. L. D. Peres, and J. Swevers, "Gain-scheduled dynamic output feedback control for discrete-time LPV systems," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 22, no. 5, pp. 535–558, 2012..
- [9] A. Sadeghzadeh, "Gain-scheduled static output feedback controller synthesis for discrete-time LPV systems," *International Journal of Systems Science*, vol. 48, no. 14, pp. 2936–2947, 2017.

$$L_2^{(1)}(\theta) = \begin{bmatrix} -9351.7 & 6.116 \\ -3.574 & -6407.2 \\ -2.116 & -0.567 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5311.7 & 3212.03 \\ 12823.5 & 2088.3 \\ 33.072 & 3.730 \end{bmatrix} \theta_1 +$$

$$\begin{bmatrix} -232033.8 & -196825.5 \\ -164473 & 531820.3 \\ 3.193 & 54.936 \end{bmatrix} \theta_2 + \begin{bmatrix} 0.166 & 0.036 \\ -0.029 & 0.151 \\ -0.0025 & -0.00018 \end{bmatrix} \theta_3,$$

$$L_2^{(2)}(\theta) = \begin{bmatrix} -4049.3 & 3711.4 \\ 24834 & -1458.9 \\ 2.159 & -0.072 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -26392.2 & 5958.6 \\ -96119.5 & 14218.3 \\ 40.990 & 2.559 \end{bmatrix} \theta_1 +$$

$$\begin{bmatrix} -869456.9 & -5.87916.9 \\ -491431.7 & -96177.6 \\ -206.852 & -14.923 \end{bmatrix} \theta_2 + \begin{bmatrix} 1.400 & 0.142 \\ 7.044 & -0.5698 \\ -0.005 & -0.00028 \end{bmatrix} \theta_3,$$

$$L_3^{(1)}(\theta) = [949.167 \quad 172236.6 \quad -2340343.5] \theta_1 +$$

$$[-6.73906195 \quad -67390619.5 \quad 782429344] \theta_2 +$$

$$[-171441.4 \quad -693172.51 \quad 38360851.9] \theta_3,$$

$$L_3^{(2)}(\theta) = [-2153.6 \quad 256134 \quad -911010] \theta_1 +$$

$$[57896.6 \quad -361158341 \quad 104464921.1] \theta_2 +$$

$$[209660.2 \quad -11402360.5 \quad 76513123.7] \theta_3, \quad X^{(1)}(\theta) =$$

$$\begin{bmatrix} 0.304 & -10.073 & -7.469 \\ -3.631 & 7.759 & 6770.2 \\ 38.380 & 1754.1 & 9.889 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 3.049 & -134.364 & -3985.4 \\ -107.114 & -35103.7 & 396185.6 \\ 4143.5 & 39473.3 & 19891401.6 \end{bmatrix} \theta_1 +$$

$$\begin{bmatrix} 6.923 & 509.586 & 11635 \\ -306.120 & -23437.9 & -233432.4 \\ 35724 & 480347 & 13564647.5 \end{bmatrix} \theta_2 +$$

$$\begin{bmatrix} -0.0002 & 0.005 & -0.301 \\ -0.0003 & 1.509 & 23.286 \\ 0.035 & -0.834 & -413.163 \end{bmatrix} \theta_3,$$

$$X^{(2)}(\theta) = \begin{bmatrix} -0.848 & 50.257 & 11.767 \\ 50.928 & -2092.5 & -951.992 \\ -36.962 & 397.456 & -126424 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 1.394 & -232.703 & -4550.4 \\ -243.594 & -1693.5 & -266389.6 \\ 2832.1 & 402675.4 & 8879109.4 \end{bmatrix} \theta_1 +$$

$$\begin{bmatrix} 147.346 & -6791 & 9387.5 \\ -6993.9 & 328077 & 1114591.4 \\ 14891.4 & 649580.8 & 51857390.8 \end{bmatrix} \theta_2 +$$

$$\begin{bmatrix} 0.0001 & -0.012 & -0.858 \\ -0.012 & 5.002 & 33.948 \\ -0.507 & 71.266 & -1737.6 \end{bmatrix} \theta_3, \quad W^{(1)}(\theta) =$$

$$\begin{bmatrix} -0.791 & -4.720 & -6.454 \\ -0.0407 & -2.268 & -29.530 \\ 0.0005 & -0.042 & 1.319 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.588 & -910.400 & -4576.5 \\ 0.674 & 36.047 & 1278.5 \\ 0.057 & 5.586 & 65.515 \end{bmatrix} \theta_1 +$$

$$\begin{bmatrix} 7.374 & -405.582 & 2424.2 \\ -9.231 & 334.867 & 733.101 \\ -0.037 & 0.866 & -39.685 \end{bmatrix} \theta_2 + \begin{bmatrix} 0.00007 & 0.041 & -0.207 \\ 0.00001 & -0.002 & 0.098 \\ -0.000001 & 0.00003 & -0.005 \end{bmatrix} \theta_3,$$

$$W^{(2)}(\theta) = \begin{bmatrix} -0.341 & -31.401 & -56.607 \\ -0.300 & 2.401 & -94.961 \\ -0.001 & 0.021 & 1.840 \end{bmatrix} +$$

- varying systems,” IET Control Theory and Applications, vol. 13, pp. 486–495, 2018.
- [24] D. Rotondo, F. Nejjari, and V. Puig, “Robust state-feedback control of uncertain LPV systems: An LMI-based approach,” Journal of the Franklin Institute, vol. 351, no. 5, pp. 2781–2803, 2014.
- [25] C. Yuan, F. Wu, “Hybrid control for switched linear systems with average dwell time,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 60, no. 1, pp. 240–245, 2015.
- [26] D. Yang, J. Zhao, “ H_∞ bumpless transfer for switched LPV systems and its application,” International Journal of Control, vol. 92, pp. 1500–1508, 2019.
- [27] D. Yang, G. Zong, S. K. Nguang, “ H_∞ bumpless transfer reliable control of Markovian switching LPV systems subject to actuator failures,” Information Sciences, vol. 512, pp. 431–445, 2020.
- [28] C. M. Agulhari, R. C. L. F. de Oliveira, and P. L. D. Peres, “Robust LMI Parser: a computational package to construct LMI conditions for uncertain systems,” Proc. XIX Brazilian Conference on Automation (CBA 2012), Campina Grande, PB, Brazil, pp. 2298–2305, 2012.
- [29] MOSEK ApS, “The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 7.1 (Revision 28),” 2015.
- [30] J. Löfberg, “YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB,” Proc. CACSD Conference, 2004.
- [31] P. K. Sinha, A. N. Pechev, “Nonlinear H_∞ controllers for electromagnetic suspension systems,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 49, no. 4, pp. 563–568, 2004.
- [32] X. Su, X. Yang, P. Shi, L. Wu, “Fuzzy control of nonlinear electromagnetic suspension systems,” Mechatronics, vol. 24, no. 4, pp. 328–335, 2014.
- [33] A. K. Al-Jiboory, G. G. Zhu, “Static output-feedback robust gain-scheduling control with guaranteed H_2 performance,” Journal of The Franklin Institute, vol. 335, pp. 2221–2242, 2018.
- [10] A. P. Pandey and M. C. de Oliveira, “Discrete-time H_∞ control of linear parameter-varying systems,” International Journal of Control, vol. 92, no. 12, pp. 2750–2760, 2019.
- [11] C. Yuan, C. Duan, and F. Wu, “Almost output regulation of LFT systems via gain-scheduling control,” International Journal of Control, vol. 91, pp. 1161–1170, 2018.
- [12] T. He, G. G. Zhu, S. S. M. Swei, and W. Su, “Smooth-switching LPV control for vibration suppression of a flexible airplane wing,” Aerospace Science and Technology, vol. 84, pp. 895–903, 2019.
- [13] V. Veselý and A. Ilka, “Design of robust gain-scheduled PI controllers,” Journal of the Franklin Institute, vol. 352, no. 4, pp. 1476–1494, 2015.
- [14] V. Veselý and A. Ilka, “Generalized robust gain-scheduled PID controller design for affine LPV systems with polytopic uncertainty,” Systems and control letters, vol. 105, pp. 6–13, 2017.
- [15] A. Ilka and T. Mckelvey, “Robust discrete-time gain-scheduled guaranteed cost PSD controller design,” Proc. International Conference on Process Control (PC), Strbske Pleso, Slovakia, pp. 54–59, 2017.
- [16] M. Sato and D. Peaucelle, “Gain-scheduled output-feedback controllers using inexact scheduling parameters for continuous-time LPV systems,” Automatica, vol. 49, no. 4, pp. 1019–1025, 2013.
- [17] A. Sadeghzadeh, “On exploiting inexact scheduling parameters for gain-scheduled control of linear parameter-varying discrete-time systems,” Systems and Control Letters, vol. 117, pp. 1 – 10, 2018.
- [18] A. Sadeghzadeh, “Gain-scheduled continuous-time control using polytope-bounded inexact scheduling parameters,” International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 28, no. 17, pp. 5557–5574, 2018.
- [19] R. Yavari, A. Sadeghzadeh, and S. Shamaghdari, “Comments on ‘Improved synthesis conditions for mixed H_2/H_∞ gain-scheduling control subject to uncertain scheduling parameters’,” International Journal of Control, vol. 94, pp. 804–806, 2021.
- [20] R. Yavari, A. Sadeghzadeh, and S. Shamaghdari, “Improved multiobjective H_2/H_∞ switching gain-scheduled controller synthesis exploiting inexact scheduling parameters,” International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 30, pp. 7706–7730, 2020.
- [21] S. Wang, H. Pfifer, and P. Seiler, “Robust synthesis for linear parameter varying systems using integral quadratic constraints,” Automatica, vol. 68, pp. 111–118, 2016.
- [22] T. E. Rosa, C. F. Morais, and R. C. Oliveira, “ H_∞ output-feedback gain-scheduled control for discrete-time linear systems affected by time-varying parameters,” IFAC-PapersOnLine, 20th IFAC World Congress, vol. 50, no. 1, pp. 8618 – 8623, 2017.
- [23] A. Sadeghzadeh, “LMI relaxations for robust gain-scheduled control of uncertain linear parameter