

طراحی یک کنترل کننده ترکیبی کوانتومی برای سیستم های کنترل پذیر حالت ویژه قوی

طاہرہ عزیزپور^۱، مجید یاراحمدی^۲

^۱ دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه لرستان، لرستان، ایران azizpor.tahereh@gmail.com
^۲ دانشیار، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه لرستان، لرستان، ایران yarahmadi.m@lu.ac.ir

پذیرش: ۱۴۰۱/۰۳/۲۸

ویرایش: ۱۴۰۱/۰۱/۱۲

دریافت: ۱۴۰۰/۰۶/۱۱

چکیده: در این مقاله یک کنترل کننده ترکیبی کوانتومی جدید برای کنترل یک سیستم کوانتومی کنترل پذیر حالت ویژه قوی طراحی می شود. برای این منظور، اگر حالت هدف در مجموعه قابل دسترس حالت اولیه قرار داشته باشد، از یک کنترل کننده کوانتومی لیاپانوفی^۱ برای انتقال حالت استفاده می شود در غیر این صورت، با استفاده از یک قاعده کنترل ترکیبی مبتنی بر الگوریتم گروور^۲، حالت اولیه را به یک حالت واسطه دیگر که حالت هدف در دسترس آن باشد، انتقال می دهیم و سپس با استفاده از یک کنترل کننده کوانتومی لیاپانوفی، حالت واسطه را به حالت هدف انتقال می دهیم. برای این منظور یک قضیه ارائه و اثبات شده است و یک الگوریتم جدید، با هدف پیاده سازی روش پیشنهادی، طراحی شده است. مثال شبیه سازی شده کارآیی و مزیت روش ارائه شده را به خوبی نشان می دهد.

کلمات کلیدی: کنترل ترکیبی، انتقال، کنترل کننده ی کوانتومی، الگوریتم گروور، کنترل پذیر حالت ویژه قوی.

Designing a hybrid quantum controller for strongly eigenstate controllable systems

Tahereh Azizipour, Majid Yarahmadi

Abstract: In this paper, a new quantum hybrid controller for controlling the strongly eigenstate controllable systems, is designed. For this purpose, a Lyapunov control law is implemented when the target state is in reachable set of the initial state. On the other hand, if the target state is not in the reachable set of the given initial state, based on Grover algorithm, a new interface state that the target state is in its reachable set, will be found and the given initial state is transferred to the new interface state. Then, the new interface state is transferred to the target state, based on a designed Lyapunov control law. A theorem and a new algorithm, for implementing the presented method, is designed. Finally, a simulated example illustrates the applications and advantages of presented method.

Keywords: Hybrid Control, State Transformation, Quantum Controller, Grover Algorithm, Strongly eigenstate controllable.

¹ Lyapunov

² Grover's algorithm

۱- مقدمه

با وجود پیشرفت های عظیمی که در دهه های گذشته صورت گرفته است، اما باز هم کامپیوترهای کلاسیک دارای محدودیت ذاتی هستند که نمی توانند بر آن ها غلبه کنند. ایده کامپیوتر کوانتومی [۱] اولین بار در سال ۱۹۸۱ توسط برنده جایزه نوبل، ریچارد فاینمن^۱ مطرح شد، وی اظهار داشت که شبیه سازی دقیق و علمی سیستم های مکانیک کوانتومی در یک کامپیوتر کلاسیک غیرممکن است، اما نوع جدیدی از ماشین های ساخته شده از عناصر مکانیکی که از قوانین مکانیکی کوانتومی پیروی می کنند، ممکن است روزی شبیه سازی های دقیق سیستم های کوانتومی را انجام دهند. امروزه در آستانه انقلابی در فناوری قرار داریم. این انقلاب ورود به تجاری سازی فناوری کوانتومی^۲ است [۲]. یک کار حیاتی برای گسترش فناوری کوانتومی، گسترش پایه های نظری کنترل سیستم های کوانتومی است. بنابراین نیاز به ورود مهندسين کنترل و ریاضی دانان در این زمینه احساس می شود. در نظریه کنترل کوانتومی، کنترل پذیری سیستم های کوانتومی یک بحث اساسی است و مرتبط با رشته های مختلف علمی است که چگونگی رفتار سیستم های دینامیکی را دسته بندی می کند. منظور از کنترل یک پدیده، دخالت در رفتار آن است، به طوری که، نتایج مطلوب حاصل گردد. این عمل به این صورت انجام می گردد که هدف مورد نظر برای یک سیستم یا همان هدف مطلوب به عنوان مرجع در نظر گرفته می شود. هنگامی که یک یا چند تا از خروجی های سیستم باید برای رسیدن به مقدار مطلوب عمل نمایند، کنترل کننده با دستکاری ورودی ها، سیستم را ناچار به رسیدن به مقدار مطلوب می نماید. یک قانون کنترل (قاعده ورودی سیستم) یک تابعی است که در معادلات توصیف کننده دینامیک سیستم ظاهر می شود. هدف اصلی در کنترل کوانتومی، یافتن مسیریابی به منظور مدیریت کردن ساختار تحول سیستم هایی است که برحسب قوانین مکانیک کوانتومی تحول می یابند. به عنوان نمونه در [۳] برای کنترل سیستم های غیرخطی نامعین، یک کنترل کننده ی مقاوم تطبیقی هوشمند کوانتومی طراحی شده است. در این نوع کنترل کننده، سطح لغزشی همه فرکانس های مدل نشده را فیلتر می کند و برای غلبه بر نامعینی های ساختاری در توابع غیرخطی موجود در دینامیک سیستم از شبکه های عصبی کوانتومی استفاده می شود. در [۴] یک فرآیند کنترل یادگیر مبتنی بر یک کنترل کننده ژنتیکی کوانتومی به منظور ردیابی مسیر در سیستم های کوانتومی بسته ارائه شده است. هم چنین در [۵] یک کنترل کننده مبتنی بر سیستم های فازی برای هدایت و نگهداری حالت یک سیستم کوانتومی نمونه در ناحیه ای از پیش تعریف شده، در حضور نامعینی های کراندار در

همیلتونین سیستم، ارائه شده است. توانایی کنترل کردن سیستم های کوانتومی باز در فیزیک کوانتومی [۶]، شیمی کوانتومی [۷] و محاسبات کوانتومی کاربردهای چشمگیری دارد. به طور کلی، سیستم های کوانتومی را به دو دسته تقسیم بندی می کنند: سیستم های کوانتومی بسته^۳ و سیستم های کوانتومی باز^۴. یک سیستم کوانتومی بسته دارای تحول یکانی است که دینامیک آن از طریق معادله ی شرودینگر^۵ یا معادله ی لیویل^۶ بیان می شود. اما تحول یک سیستم باز به علت فعل و انفعالاتی که با محیط دارد، یکانی نیست و از معادله ی شرودینگر ساده تبعیت نمی کند. در دنیای واقعی پیرامون ما اکثر سیستم ها از این نوع هستند. در دو دهه گذشته، موضوع کنترل پذیری سیستم های کوانتومی توسط بسیاری از محققان در زمینه های مختلف مورد مطالعه قرار داده شده است. هوانگ و همکارانش^۷ کنترل پذیری سیستم های مکانیک کوانتومی را با استفاده از نظریه ی تحلیلی دامنه ی نیلسون^۸، گروه لی و جبر لی^۹ بررسی کردند [۸]. شرمر^{۱۰}، شرایط کافی برای کنترل پذیری کامل سیستم های کوانتومی^{۱۱} N سطحی، فقط با یک پالس را ارائه نمود [۹]. نتایج نظری هدایت یک تابع موج دلخواه سیستم کوانتومی تحت میدان خارجی وابسته به زمان توسط ترنسی^{۱۱} و ریتر^{۱۲} در [۱۰] ارائه شد. استفاده از روش کنترل بر اساس لیپانوف [۱۳، ۱۲، ۱۱] که پایداری سیستم را با طراحی میدان های کنترلی ترکیب می کند یک فرآیند مناسب و کارا محسوب می شود. به عنوان مثال می توان توابع لیپانوف براساس فاصله ی حالت [۱۴، ۱۲]، متوسط مشاهده پذیر [۱۲] و خطای حالت [۱۲] را ذکر کرد. در این روش برای پایداری سیستم کنترل یک تابع لیپانوف پیشنهاد می شود و قانون های کنترلی از شرایط حاکم بر تابع لیپانوف و با هدف حفظ پایداری استخراج می شوند. در کنترل لیپانوف، ایده اصلی، پیدا کردن میدان های کنترلی است که وقتی که زمان به سمت بینهایت میل می کند، تابع لیپانوف به مینیمم خودش برسد. دانگ^{۱۳} و همکاران در [۱۵] میدان های کنترل بهینه ای را طراحی کردند که تابع لیپانوف را سریع تر کاهش می داد. در [۱۶] یک کنترل کننده ترکیبی تطبیقی هوشمند برای ردیابی یک مسیر دینامیک در سیستم های کوانتومی بسته متناهی براساس تئوری پایداری لیپانوف ارائه شده است. اخیراً ظهور کامپیوترهای کوانتومی در مقیاس کوچک، نظر ریاضیدانان و مهندسان را بخصوص در حوزه الگوریتم های کاربردی به خود جلب کرده است [۱۷]. در حقیقت با وجود این که محاسبات کوانتومی [۱۸] از زمان بنیوف^{۱۴} [۱۹] وجود داشته است اما دوویچ^{۱۵} [۲۰]، فاینمن [۲۱] و مانین^{۱۶} [۲۲] پیشنهاد کردند که یک کامپیوتر کوانتومی این قابلیت را دارد که وظایفی را انجام دهد که دور از دسترس کامپیوترهای کلاسیک است. احتمالاً مشهورترین

⁹ Lie- Algebra¹⁰ Schirmer¹¹ Gabriel Turinici¹² Rabitz¹³ Dong¹⁴ Benioff¹⁵ Deutsch¹⁶ Manin¹ Feynman² Quantum Technology Commercialization³ Close Quantum System⁴ Open Quantum Systems⁵ Schrödinger equation⁶ Sturm-Liouville Equation⁷ Huang et al⁸ Nelson's Analytic Domain Theory

و حل یک مثال از آن پرداخته شده است. با هدف پشتیبانی نظری، در بخش پنجم، یک قضیه بیان و اثبات شده است و همچنین برای سهولت در پیاده سازی روش پیشنهادی، یک الگوریتم جدید ترکیبی مبتنی بر کنترل لیپانوفی و الگوریتم جستجوی گرور ارائه گردیده است. در بخش ششم با شبیه سازی یک مثال، کاربردها و مزیت های روش پیشنهادی بیان شده است و نتیجه گیری در بخش هفتم این مقاله عنوان شده است.

۲- بیان مسأله

یک سیستم مکانیک کوانتومی بسته با معادله شرودینگر زیر بیان می شود [۱۲]:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad |\psi(t_0)\rangle = |\psi_0\rangle \quad (1)$$

که در آن H و $\hbar$ به ترتیب بیانگر همیلتونی سیستم و ثابت پلانک هستند. $|\psi(t)\rangle$ به عنوان بردار حالت سیستم عضو فضای هیلبرت H تعریف شده تحت تعریف ضرب داخلی بردارها می باشد. برای راحتی کار ثابت پلانک برابر با یک در نظر گرفته می شود. با جداسازی همیلتونی سیستم کوانتومی (۱) به یک قسمت ثابت نسبت به زمان و یک قسمت متغیر با زمان، معادله (۱) به صورت زیر توصیف می شود [۱۲]:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = (H_0 + H_I) |\psi(t)\rangle = (H_0 + \sum_{k=1}^r u_k(t) H_k) |\psi(t)\rangle \\ |\psi(t_0)\rangle = |\psi_0\rangle \end{cases} \quad (2)$$

که در آن H_0 را همیلتونی درونی سیستم می نامند و H_I بیانگر همیلتونی برهم کنشی بین سیستم و میدان های کنترل خارجی u_k است و آن را همیلتونی خارجی گویند. هدف کنترل کوانتومی در این مقاله، هدایت سیستم کوانتومی از حالت ابتدایی $|\psi_0\rangle$ به حالت هدف $|\psi_f\rangle$ مبتنی بر طراحی یک سری قوانین کنترلی می باشد. در کنترل سیستم های کوانتومی، بدون کاستن از کلیت مسئله، حالت هدف معمولاً یک حالت ویژه ای از همیلتونی درونی سیستم در نظر گرفته می شود، بنابراین، باید در شرط زیر صدق کند [۱۲]:

$$H_0 |\psi_f\rangle = \lambda_f |\psi_f\rangle \quad (3)$$

که λ_f مقدار ویژه H_0 متناظر با $|\psi_f\rangle$ است.

تعریف ۱- کره واحد مختلط S_C^{n-1} به صورت زیر تعریف می شود [۲۸]:

$$S_C^{n-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 + iy_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} + iy_{n-1} \end{pmatrix} \mid \sum_{j=0}^{n-1} |x_j + iy_j|^2 = 1, x_j, y_j \in \mathbb{R} \right\} \quad (4)$$

که در آن $\{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n-1\rangle\}$ بردارهای حالت پایه متناظر با فضای حالت سیستم (۲) هستند $i = \sqrt{-1}$ می باشد.

تحول در محاسبات کوانتومی، انتشار الگوریتم کوانتومی توسط پیتر شور^۱ [۲۳] در سال ۱۹۹۷ که برای تجزیه عددها به عوامل اول در زمان چندجمله ای^۲ می باشد. الگوریتم شور یک کشف بزرگ بود. امروزه در حوزه های علوم و مهندسی، الگوریتم های جستجو از اهمیت بالایی برخوردار هستند. به عنوان مثال جستجو یک نام با استفاده از یک شماره تلفن [۲۴] جستجوی مسیر بهینه برای یک ربات [۲۵]. برای جستجو، الگوریتم های جستجوی بسیاری وجود دارد. به طور کلی می توان گفت که الگوریتم جستجو در علوم کامپیوتر به الگوریتمی اطلاق می شود که هدف آن یافتن یک داده با خواص مشخص از بین مجموعه ای از داده هاست. حال این داده ها می توانند در یک پایگاه داده ثبت شده باشند یا این که فضای مورد جستجو به صورت انتزاعی توسط رابطه ریاضی بیان می شود. جستجو انواع مختلفی دارد که عبارت است از جستجو در پایگاه داده نامرتب^۳، جستجوی خطی^۴، جستجو به منظور مرتب سازی داده^۵ و... یکی از مشهورترین الگوریتم های جستجوی کوانتومی، الگوریتم گرور [۲۶، ۲۷] است. این الگوریتم در $O(\sqrt{N})$ مرحله به جستجوی یک عنصر از N عنصر پایگاه داده و در $O(\sqrt{M/N})$ مرحله به جستجو M عنصر از میان N پایگاه داده نامرتب می پردازد [۲۷]. این الگوریتم از الگوریتم های متعارف کلاسیکی که در $O(N)$ مرحله به جواب می رسد، سریع تر است. اگرچه نشان داده شده است که بسیاری از سیستم های کوانتومی مورد نظر کاملاً کنترل پذیر هستند، اما سیستم های نیز وجود دارند که به طور جزئی کنترل پذیر می باشند یا این که در کل کنترل پذیر نیستند. در روش کنترل لیپانوفی اگر حالت هدف در دسترس حالت اولیه نباشد، فرآیند کنترل با شکست مواجه خواهد شد. به همین دلیل کنترل کننده های طراحی شده با این روش با فرض در دسترس بودن حال هدف طراحی شده اند. برای غلبه بر این چالش، در این مقاله، یک کنترل کننده ترکیبی کوانتومی برای کنترل سیستم های کوانتومی کنترل پذیر حالت ویژه قوی ارائه شده است. برای این منظور، یک کنترل کوانتومی ترکیبی مبتنی بر روش کنترل لیپانوفی و الگوریتم جستجوی کوانتومی گرور ارائه خواهد شد. در این روش، هنگامی که حالت هدف در مجموعه قابل دسترس^۶ حالت اولیه قرار داشته باشد، از یک کنترل کننده کوانتومی لیپانوفی برای انتقال حالت استفاده می شود. در غیر این صورت، اگر حالت هدف در مجموعه قابل دسترس حالت اولیه نباشد با استفاده از الگوریتم گرور حالت اولیه را به یک حالت اولیه دیگر که حالت هدف در دسترس آن باشد، انتقال می دهیم و سپس با استفاده از یک کنترل کننده کوانتومی لیپانوفی، حالت اولیه جدید را به حالت هدف انتقال می دهیم. این مقاله در هفت بخش تهیه و تنظیم شده است. در بخش دوم، به بیان مسأله پرداخته شده است. در بخش سوم، طراحی قاعده های کنترل کننده کوانتومی لیپانوفی ارائه شده است. در بخش چهارم به معرفی، بیان الگوریتم گرور کوانتومی

⁵ Sorting Search

⁶ Grover Algorithm

⁷ Reachable set

¹ Peter Shore

² Polynomial time

³ Unstructured Database Search

⁴ Linear Search

همانگونه که در قضیه قانون ۱ نشان داده شده است، کنترل متناظر همیلتونی H_k به صورت زیر انتخاب می شود:

$$u_k = K_k f_k \left(\mathfrak{I} \left[e^{i\angle(\psi|\psi_f)} \langle \psi_f | H_k | \psi \rangle \right] \right) \quad (6)$$

که در آن $\langle \psi | \psi_f \rangle$ بیانگر زاویه عبارت مختلط $\langle \psi | \psi_f \rangle$ است، $\mathfrak{I}$ بیانگر قسمت موهومی آرگومان خود بوده و $K_k > 0$ و برای تنظیم دامنه کنترل انتخاب می شود.

ب- تابع لیپانوف مبتنی بر متوسط مشاهده پذیر و کنترل کننده متناظر آن:

$$V_2(t) = \langle \psi(t) | P | \psi(t) \rangle, \quad u_k(t) = -K_k f_k \left(i \langle \psi(t) | [H_k, P] | \psi(t) \rangle \right) \quad (7)$$

که در آن، P یک عملگر هرمیتی نیمه معین مثبت فرض شده است و $K_k > 0$ و برای تنظیم دامنه کنترل در نظر گرفته شده است.

ج- تابع لیپانوف مبتنی بر خطای حالت و کنترل کننده متناظر آن:

$$V_3(t) = \frac{1}{2} \langle \psi - \psi_f | \psi - \psi_f \rangle \quad (8)$$

$$\begin{cases} u_0 = \lambda_f + \omega = K_0 f_0 (\mathfrak{I} \langle \psi_f | \psi \rangle) \\ u_k = K_k f_k (\mathfrak{I} \langle \psi_f | H_k | \psi \rangle), \quad k = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

λ_f مقدار ویژه متناظر با بردار ویژه $|\psi_f\rangle$ از همیلتونی آزاد H_0 است و ω نیز یک میدان کنترل اسکالر حقیقی مقدار می باشد.

تعریف ۵- حالتی مثل $|\psi\rangle$ را در نظر بگیرید:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i |i\rangle \quad (9)$$

که $|i\rangle$ بردار حالت پایه متناظر با فضای حالت سیستم (۲) می باشد و α_i ثابت حقیقی مقدار است. رابطه (۹) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i |i\rangle, \quad \alpha_i = \langle i | \psi \rangle \rightarrow |\psi\rangle = \sum_{i=0}^{N-1} \langle i | \psi \rangle |i\rangle \quad (10)$$

آنگاه متوسط حالت $|\psi\rangle$ به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\bar{\psi} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i |i\rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \langle i | \psi \rangle |i\rangle \quad (11)$$

۴- الگوریتم جستجوی گروور کوانتومی

الگوریتم گروور یک الگوریتم جستجوی کوانتومی برای جستجو در یک پایگاه داده نامرتب دارای N عضو، در زمان $O(\sqrt{N})$ و در فضای ذخیره سازی $O(\log(N))$ است. گروور این الگوریتم را در سال ۱۹۹۶ مطرح کرد. بر روی یک کامپیوتر کلاسیک، جستجو در یک پایگاه داده نامرتب نمی تواند در زمان کمتر از زمان خطی یا $O(N)$ صورت پذیرد، یعنی جستجو با بررسی تک تک ورودی ها انجام می گیرد. الگوریتم گروور بیان می کند که روی یک کامپیوتر کوانتومی این عمل با پیچیدگی زمان

تعریف ۲- اگر به ازای هر دو حالت داده شده $|\psi_0\rangle$ و $|\psi_d\rangle$ یک بازه زمانی $[0, T]$ و همیلتونی خارجی H_I وجود داشته باشد به طوری که با حرکت از $|\psi_0\rangle$ تحت تاثیر H_I به $|\psi_d\rangle = |\psi(T)\rangle$ برسیم، آنگاه سیستم (۲) را کنترل پذیر می گوئیم [۲۸].

تعریف ۳- اگر دو حالت $|\psi_0\rangle$ و $|\psi_d\rangle$ داده شده باشند و یک مجموعه کنترل مجاز $U = \{u_k(t), k = 1, 2, \dots, r\}$ وجود داشته باشد به طوری که جواب معادله (۲) در زمان t با حالت اولیه $|\psi_0\rangle$ ، برابر با $|\psi_d\rangle$ باشد، آنگاه گوئیم که حالت $|\psi_d\rangle$ در زمان t از $|\psi_0\rangle$ قابل دسترس است [۲۸].

تذکر ۱- مجموعه قابل دسترس از $|\psi\rangle$ در زمان t ، به عبارت معادل مجموعه نقاط در S_C^{n-1} قابل دسترسی در زمان t ، با $R_t(|\psi\rangle)$ نشان داده می شود. علاوه بر این مجموعه قابل دسترس $|\psi\rangle$ برای همه زمان های مثبت $t > 0$ را با $R(|\psi\rangle) = \bigcup_{t>0} R_t(|\psi\rangle)$ نشان می دهند.

تعریف ۴- اگر $|\psi_1^e\rangle, |\psi_2^e\rangle, \dots, |\psi_n^e\rangle$ حالت ویژه همیلتونی درونی H_0 باشند و برای هر $t > 0$ ، $\bigcup_{i=1}^n R_t(|\psi_i^e\rangle) = S_C^{n-1}$ ، آنگاه سیستم (۲) را کنترل پذیر حالت ویژه قوی می نامند [۲۸].

اگر در یک سیستم کنترل، حالت هدف در مجموعه قابل دسترس حالت اولیه قرار بگیرد با استفاده از یک کنترل کننده کوانتومی لیپانوفی حالت اولیه به حالت هدف انتقال می یابد. در غیر این صورت، کنترل کننده مذکور امکان انتقال حالت را ندارد. در این مقاله، یک کنترل کننده ترکیبی کوانتومی برای غلبه بر این چالش طراحی شده است.

۳- کنترل کننده های لیپانوفی

در روش طراحی کنترل لیپانوفی، قوانین کنترل مبتنی بر مشتق مرتبه اول زمانی نیمه معین منفی تابع لیپانوف طراحی می شوند. به طور کلی تر، توابع لیپانوف مختلف منجر به طراحی های مختلف قوانین کنترل و اثرات مختلف کنترلی می شود. سه نوع تابع لیپانوف به شرح زیر وجود دارد [۱۴، ۱۲]:

الف- تابع لیپانوف مبتنی بر فاصله ی حالت و کنترل کننده متناظر آن:

مفاهیم زیادی برای بیان فاصله بین دو حالت وجود دارد. در این جا ما فاصله هیلبرت اشمیت^۱ بین حالت کنترل شده $|\psi\rangle$ و حالت مطلوب $|\psi_f\rangle$ را به عنوان تابع لیپانوف در نظر می گیریم. به عبارتی دیگر:

$$V_1(t) = \frac{1}{2} \left(1 - |\langle \psi_f | \psi(t) \rangle|^2 \right) \quad (5)$$

که در آن $|\langle \psi_f | \psi(t) \rangle|^2$ بیانگر احتمال تحول از $|\psi\rangle$ به $|\psi_f\rangle$ می باشد.

¹ Hilbert Schmidt

الگوریتم گرور

گام اول: اگر H عملگر هادامارد^۲ باشد یعنی:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

قرار دهید:

$$|s\rangle \leftarrow H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} |j\rangle \quad (۱۴)$$

گام دوم: تا زمانی که

$$K = \left\lceil \frac{\pi\sqrt{N}}{4\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)} \right\rceil \approx \left\lceil \frac{\pi\sqrt{N}}{4} \right\rceil \quad (۱۵)$$

مراحل زیر را تکرار کنید:

$$\begin{cases} |s\rangle \leftarrow G|s\rangle \\ K = K + 1 \end{cases}$$

گام سوم: $|s\rangle$ در پایه استاندارد $\{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |N-1\rangle\}$ اندازه گیری شود. پس از این اندازه گیری حالت ناشناخته $|\omega\rangle$ با احتمالی بیشتر از $\left(1 - \frac{1}{N}\right)$ بدست می آید.

مثال ۱- فرض کنید که سیستم شامل $N = 8 = 2^3$ حالت باشد و حالتی که ما به دنبال آن هستیم، $|w\rangle = |011\rangle$ است. برای توصیف سیستم، $n = 3$ کیوبیت نیاز است [۲۹]:

$$|x\rangle = \alpha_0 |000\rangle + \alpha_1 |001\rangle + \alpha_2 |010\rangle + \alpha_3 |011\rangle + \alpha_4 |100\rangle + \alpha_5 |101\rangle + \alpha_6 |110\rangle + \alpha_7 |111\rangle$$

که α_i ها دامنه i - امین حالت می باشند. الگوریتم گرور با سیستم آغاز شده از حالت صفر شروع می شود. عملگر هادامارد وقتی که روی حالت $|000\rangle$ عمل می کند برهم نهی یکنواختی از تمام حالات را به ما می دهد. به عبارتی دیگر:

$$|s\rangle = H^{\otimes n} |0\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle$$

$n = 3 \rightarrow |s\rangle = H^{\otimes 3} |0\rangle^{\otimes 3}$

$$\rightarrow |s\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} (|000\rangle + |001\rangle + \dots + |111\rangle) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{x=0}^7 |x\rangle$$

که $\otimes$ بیانگر ضرب تانسوری^۳ می باشد. با توجه به این که $N = 8$ است، پس تعداد تکرار لازم برابر با $\left\lceil \frac{\pi\sqrt{8}}{4} \right\rceil = 2$ می باشد. تصویر اندازه دامنه حالت ها، روش مفیدی برای تجسم بهتر نحوه کار این الگوریتم است. از آنجا که دامنه ها در طول اجرای الگوریتم گرور حقیقی باقی می مانند، ممکن است که به صورت خطوط عمود بر محورهایی که طول آن ها

$O(\sqrt{N})$ قابل انجام است و به طور حدی، سریع ترین الگوریتم قابل پیاده سازی برای جستجوی پایگاه داده نامرتب روی یک کامپیوتر کوانتومی است. الگوریتم های کوانتومی معمولاً افزایش سرعتی نمایی نسبت به الگوریتم های کلاسیک دارند. برای درک شهودی بیشتر، ابتدا یک تعبیرهندسی مبتنی بر شکل (۱) در نظر گرفته می شود. فرض کنید پایگاه داده نامرتبی دارای $N = 2^n$ عنصر است که در آن n تعداد کیوبیت های هدف است. هدف این است که عنصر مشخصی مثل $|w\rangle$ در این پایگاه داده مورد جستجو قرار گیرد. $|s\rangle$ را حالت برهم نهی یکنواختی از تمام حالت های موجود در پایگاه داده در نظر می گیریم:

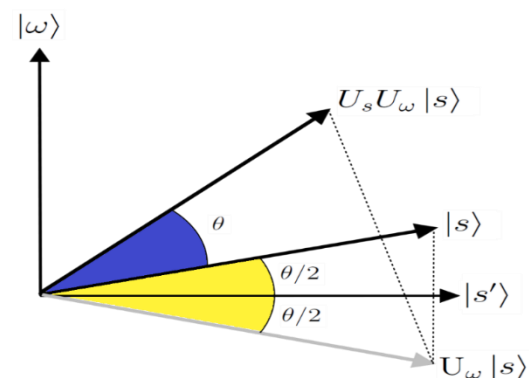
$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} (|0\rangle + |1\rangle + \dots + |w\rangle + \dots + |N-1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{N}} |w\rangle + \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}} |s'\rangle \quad (۱۲)$$

هم چنین عملگرهای U_s و U_w به صورت زیر تعریف می شوند:

$$U_s = 2|s\rangle\langle s| - I, \quad U_w = I - 2|w\rangle\langle w| \quad (۱۳)$$

که $|s'\rangle$ برهم نهی یکنواختی از حالت های پایه به جز حالت هدف $|w\rangle$ است. $|s'\rangle$ و $|w\rangle$ مجموعه کامل از بردارهای پایه ای هستند و از این رو برهم متعامد هستند. توجه شود که در این جا I ماتریس همانی می باشد.

در شکل (۱)، زاویه بین حالت اولیه $|s\rangle$ و حالت $|s'\rangle$ ، $\frac{\theta}{2}$ است. حال ابتدا عملگر اوراکل^۱ U_w روی حالت $|s\rangle$ عمل می کند که حالت $|s\rangle$ را با زاویه $\frac{\theta}{2}$ حول حالت $|s'\rangle$ انعکاس می دهد و روی دیگر حالت ها به عنوان همانی عمل می کند. اکنون عملگر U_s ماتریس انعکاس داده شده $|s\rangle$ را با زاویه θ می چرخاند. عملگر G که به صورت $G := U_s U_w$ تعریف می شود و عملگر گرور نامیده می شود، حالت اولیه $|s\rangle$ را در یک دنباله تکراری می چرخاند تا به حالت هدف $|w\rangle$ برسد. حال به منظور درک بهتر، الگوریتم جستجوی گرور در زیر ارائه شده است [۲۷].



شکل ۱: بیان هندسی از الگوریتم جستجوی گرور

^۳ Tensor product

^۱ Oracle

^۲ Hadamard

متناسب با دامنه ای که آن ها نشان می دهند، تجسم شوند. حالت برهم نهی از اولین تبدیل هادامارد در شکل (۲) نمایش داده شده است.

$$|x\rangle = \frac{-1}{8\sqrt{2}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle) + \frac{11}{8\sqrt{2}}|011\rangle$$

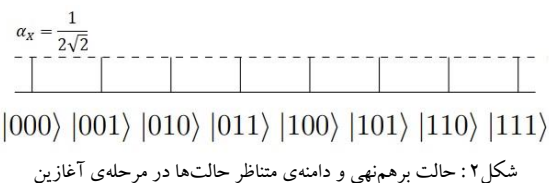
اکنون سیستم را مشاهده می کنیم. احتمال آن که حالت بیانگر جواب درست باشد، برابر است با $\left|\frac{11}{8\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{121}{128}$ که می توان گفت با احتمالی تقریباً برابر با 0.9453 به جواب دست پیدا کرده ایم. در شکل (۴)، مثال (۱) شبیه سازی شده است. همان طور که پیش تر گفته شد، بعد از دو تکرار الگوریتم گرور، با احتمال 0.9453 به حالت مطلوب همگرا می شود. در این جا الگوریتم گرور برای ۵۰ تکرار پیاده سازی شده است. شاید در تکرار ششم با احتمال 0.9998 انتقال حالت صورت بگیرد اما، همانطور که شکل (۴) نشان می دهد، در حالت کلی افزایش تعداد تکرار الگوریتم گرور، تضمینی برای افزایش احتمال انتقال حالت نیست.

۵- طراحی کنترل کننده کوانتومی ترکیبی

همان گونه که قبلاً عنوان شد، هدف کنترل کوانتومی در این مقاله، هدایت سیستم کوانتومی از حالت اولیه $|\psi_0\rangle$ به حالت هدف $|\psi_f\rangle$ مبتنی بر طراحی یک سری قوانین کنترلی می باشد. در این جا فرض بر این است که سیستم کوانتومی مورد نظر، کنترل پذیر حالت ویژه قوی می باشد. پس هر حالت هدفی مثل $|\psi_f\rangle$ که در نظر گرفته شود حداقل به مجموعه قابل دسترسی از یکی از حالت های ویژه $|\psi_i^e\rangle, i=1,2,\dots,n$ تعلق دارد، به عبارتی دیگر:

$$\text{if } |\psi_f\rangle \in S_C^{n-1} \rightarrow \exists k, \text{ s.t. } |\psi_f\rangle \in R_i(|\psi_k^e\rangle)$$

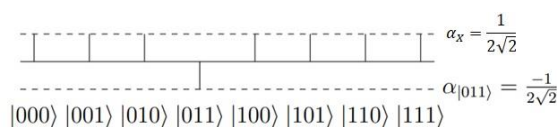
حال فرض کنید که قصد داریم یک سیستم کنترل پذیر حالت ویژه قوی را از حالت اولیه $|\psi_0\rangle$ به حالت نهایی $|\psi_f\rangle$ انتقال دهیم. دو حالت ممکن وجود دارد. در حالت اول، فرض می شود حالت هدف در مجموعه قابل دسترس از حالت ابتدایی قرار دارد، پس با استفاده از کنترل لیاپانوف این انتقال حالت صورت می گیرد. در حالت دوم، حالت هدف در مجموعه قابل دسترس حالت اولیه قرار ندارد، برای این حالت چون فرض بر این است که سیستم مدنظر کنترل پذیر حالت ویژه قوی است پس قطعاً حالت هدف در مجموعه قابل دسترس از یکی از حالت های ویژه همپلتونی آزاد، مثلاً $|\psi_k^e\rangle$ ، قرار دارد. در این حالت برای انتقال حالت اولیه به $|\psi_k^e\rangle$ از الگوریتم گرور و اندازه گیری در پایه یکای متعامد استفاده می شود. به بیانی دیگر، با استفاده از الگوریتم گرور پس از جستجو و یافتن $|\psi_k^e\rangle$ با اندازه گیری در پایه یکای متعامد حالت اولیه $|\psi_0\rangle$ به حالت $|\psi_k^e\rangle$ انتقال داده می شود و سپس با استفاده از کنترل لیاپانوف، انتقال حالت از $|\psi_k^e\rangle$ به حالت هدف $|\psi_f\rangle$ انجام می گیرد. بنابراین طبق قضیه زیر، قاعده کنترل پیشنهادی ارائه می گردد.



تکرار اول: در هر تکرار اولین قدم فراخوانی تابع اوراکل $(U_w = I - 2|w\rangle\langle w|)$ است. جستجوی اوراکل دامنه حالت $|w\rangle$ را منفی می کند.

$$|x\rangle = U_w |w\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|000\rangle + |001\rangle + \dots - |011\rangle + \dots + |111\rangle)$$

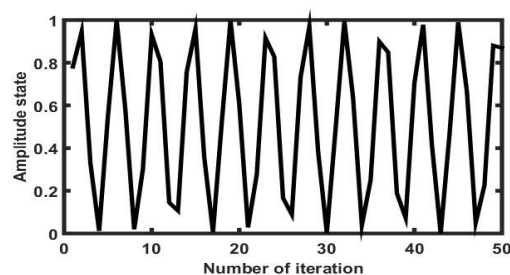
که تصویر اندازه آن به صورت زیر است:



اکنون تبدیل انتشار $U_s = 2|s\rangle\langle s| - I$ اجرا می شود:

$$|x\rangle = U_s |x\rangle = \frac{1}{4\sqrt{2}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle) + \frac{5}{4\sqrt{2}}|011\rangle$$

در این مرحله احتمال متناظر با حالت $|011\rangle$ برابر 0.7812 می باشد و تکرار اول خاتمه پیدا می کند.



تکرار دوم: ورودی اولیه ما:

$$|x\rangle = U_s |x\rangle = \frac{1}{4\sqrt{2}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle) + \frac{5}{4\sqrt{2}}|011\rangle$$

می باشد. اگر در روندی مشابه با تکرار اول، ابتدا تابع اوراکل را فراخوانی کنیم و بعد تبدیل انتشار را انجام دهیم، در نهایت بدست می آوریم:

الگوریتم کنترل کننده کوانتومی ترکیبی

گام اول: حالت اولیه $|\psi_0\rangle$ ، حالت هدف $|\psi_f\rangle$ و ضریب اطمینان α را تعیین کنید.

گام دوم: قاعده های کنترل لیپانوف ارائه شده در رابطه (۱۶) را در نظر بگیرید.

گام سوم: تحول حالت از $|\psi_0\rangle$ به $|\psi_f\rangle$ با توجه به کنترل انتخاب شده در گام دوم را در پایه یکا متعامد اندازه گیری کنید و آنرا با P_f نشان دهید.

گام چهارم: اگر $P_f > \alpha$ ، آنگاه با احتمال قابل قبولی انتقال حالت صورت گرفته و الگوریتم خاتمه می یابد، در غیر این صورت به گام پنجم بروید.

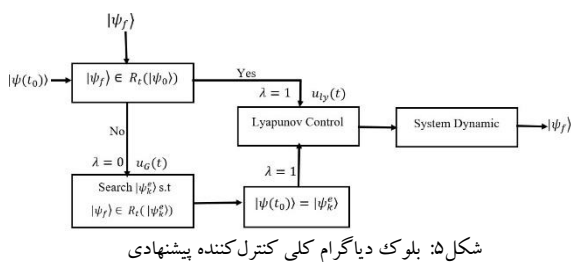
گام پنجم: بردارهای حالت ویژه همیلتونی آزاد را محاسبه کنید و آن ها را با $|\psi_1^e\rangle, |\psi_2^e\rangle, \dots, |\psi_n^e\rangle$ نمایش دهید.

گام ششم: احتمال تحول از هر کدام از حالت ویژه های H_0 به $|\psi_f\rangle$ را با استفاده از کنترل کننده گام دوم بدست آورید.

گام هفتم: بردار ویژه همیلتونی H_0 با ماکزیمم احتمال انتقال حالت که احتمال انتقال حالت از آن به حالت $|\psi_f\rangle$ بزرگتر از α می باشد را انتخاب کنید و آن را با $|\psi_k^e\rangle$ مشخص کنید.

گام هشتم: برای انتقال حالت از $|\psi_0\rangle$ به حالت $|\psi_k^e\rangle$ در رابطه (۱۶) قرار دهید $\lambda = 0$ و گام سوم را اجرا کنید.

گام نهم: برای انتقال حالت $|\psi_k^e\rangle$ به حالت نهایی $|\psi_f\rangle$ در رابطه (۱۶) قرار دهید $\lambda = 1$ و کنترل کننده (۱۸) را اجرا کنید.



شکل ۵: بلوک دیاگرام کلی کنترل کننده پیشنهادی

در شکل (۵)، بلوک دیاگرام کلی کنترل پیشنهادی طراحی شده است.

۶- مثال شبیه سازی شده

مثال ۲- فرض کنید که یک سیستم کوانتومی چهار سطحی با همیلتونی

درونی H_0 و خارجی H_1 را داریم که به صورت زیر می باشند [۱۲]:

$$H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

برای این مثال الگوریتم ترکیبی که در بخش قبل عنوان شد به صورت کامل پیاده سازی می شود.

قضیه ۱- سیستم (۲) را در نظر بگیرید. فرض کنید که مقدار حقیقی

$K_k > 0$ و تابع f_k به گونه ای است که $f_k(x_k)x_k \geq 0$ و همچنین $f_k(x_k)x_k = 0$ اگر و فقط اگر $x_k = 0$. آنگاه کنترل کننده ترکیبی

$u(t)$ به صورت:

$$u(t) = \lambda u_{ly}(t) + (1 - \lambda) u_G(t) \quad (۱۶)$$

که در آن:

$$u_{ly}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t), \dots, u_r(t))^T \quad (۱۷)$$

$$u_k(t) = K_k f_k \left(\Im \left[e^{i \angle \langle \psi(t) | \psi_f \rangle} \langle \psi_f | H_k | \psi(t) \rangle \right] \right), k = 1, \dots, r \quad (۱۸)$$

$$u_G = U_s U_w = (2|s\rangle\langle s| - I)(I - 2|w\rangle\langle w|) \quad (۱۹)$$

$$\begin{cases} \lambda = 1, & \text{if } |\psi_f\rangle \in R_t(|\psi(t_0)\rangle), t > 0 \\ \lambda = 0, & \text{if } |\psi_f\rangle \notin R_t(|\psi(t_0)\rangle), t > 0 \end{cases} \quad (۲۰)$$

پایداری مجانبی سیستم را تضمین می کند.

اثبات: اگر در رابطه (۱۶)، $\lambda = 0$ آنگاه $u(t) = u_G(t)$ که فرآیند کنترل منجر به اجرای الگوریتم جستجوی بهینه گرور و اندازه گیری می شود که پایداری آن در [۳۰] نشان داده شده است. برای حالت $\lambda = 1$ $u(t) = u_{ly}(t)$ تابع لیپانوف مبتنی بر فاصله حالت (۵) را در نظر بگیرید. با مشتق گیری از V_1 و استفاده از معادله (۲)، خواهیم داشت:

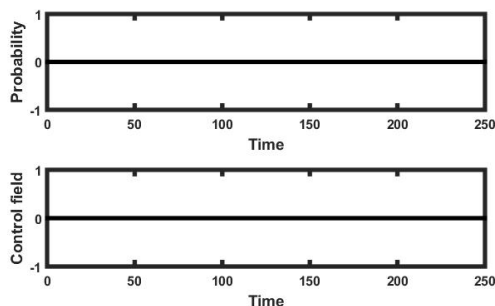
$$\dot{V}_1 = - \sum_{k=1}^r u_k |\langle \psi | \psi_f \rangle| \Im \left[e^{i \angle \langle \psi | \psi_f \rangle} \langle \psi_f | H_k | \psi \rangle \right] \quad (۲۱)$$

که در آن $\Im$ بیانگر قسمت موهومی $\langle \psi_f | H_k | \psi \rangle e^{i \angle \langle \psi | \psi_f \rangle}$ می باشد. حال طبق رابطه (۱۸) قوانین کنترل متناظر همیلتونی H_k عبارتند از:

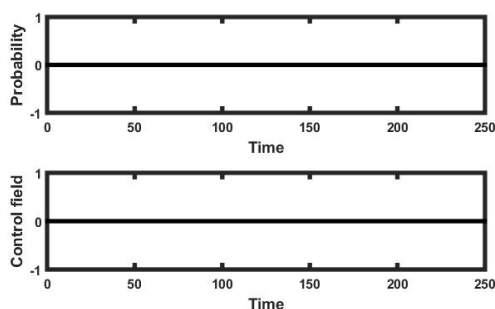
$$u_k = K_k f_k \left(\Im \left[e^{i \angle \langle \psi | \psi_f \rangle} \langle \psi_f | H_k | \psi \rangle \right] \right) \quad (۲۲)$$

چون $\lambda = 1$ ، لذا حالت هدف در دسترس حالت اولیه انتخابی است و $\langle \psi_0 | \psi_f \rangle \neq 0$. بنابراین برای هر $t > 0$ ، $\langle \psi(t) | \psi_f \rangle \neq 0$. جایگذاری u_k در (۲۱) تضمین می کند که $\dot{V}_1 < 0$ و در حالتی که $\langle \psi | \psi_f \rangle = |\psi\rangle$ داریم $\langle \psi | \psi_f \rangle = 0$ بنابراین $\dot{V}_1 = 0$ و قضیه اثبات می شود.

حال می توان کنترل کوانتومی ترکیبی پیشنهادی را با استفاده از الگوریتم زیر که شامل ۹ گام است، پیاده سازی نمود.



شکل ۷: نمودار احتمال انتقال حالت از $[1, 0, 0, 0]^T$ به $[0, 0, 0, 1]^T$ و میدان کنترل متناظر با تابع لیاپانوف براساس فاصله حالت.



شکل ۸: نمودار احتمال انتقال حالت از $[0, 1, 0, 0]^T$ به $[0, 0, 0, 1]^T$ و میدان کنترل متناظر با تابع لیاپانوف براساس فاصله حالت.

گام هفتم: با توجه به شکل (۱۰)، بیشترین احتمال انتقال حالت، $P_f = 0.9999 > 0.95$ می باشد که متناظر با حالت ویژه سوم از همیلتونی آزاد می باشد، پس:

$$|\psi_k^e\rangle = |\psi_3^e\rangle = [0, 0, 1, 0]^T \quad (29)$$

گام هشتم و نهم: برای انتقال حالت از $|\psi_0\rangle$ به $|\psi_3^e\rangle$ رابطه (۱۶) قرار دهید $\lambda = 0$ و برای انتقال حالت از $|\psi_3^e\rangle$ به $|\psi_f\rangle$ از طریق قانون کنترل در رابطه (۱۶) قرار دهید $\lambda = 1$.

اکنون باید تمرکز روی این مسئله باشد که سیستم از حالت اولیه $\frac{1}{2}[1, 1, 1, 1]^T$ با استفاده از عملگر گروور به حالت $[0, 0, 1, 0]^T$ انتقال داده شود. بنابراین در این قسمت دیگر حالت هدف $|\psi_k^e\rangle$ می باشد. می خواهیم از الگوریتم جستجوی گروور استفاده کنیم. از این که:

$$|\psi_k^e\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle, \quad N = 2^2 = 4$$

و هم چنین با توجه به روابط موجود در الگوریتم جستجوی گروور داریم:

$$U_s U_w = \frac{N-4}{N} |s\rangle + \frac{2}{\sqrt{N}} |w\rangle$$

پس با قرار دادن مقدار N در رابطه ی فوق درمی یابیم که فقط با یک بار تکرار الگوریتم جستجوی گروور به حالت هدف دست می یابیم.

گام اول: حالت اولیه $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}[1, 1, 1, 1]^T$ ، حالت هدف $|\psi_f\rangle = [0, 0, 0, 1]^T$ و $\alpha = 0.95$ را در نظر بگیرید.

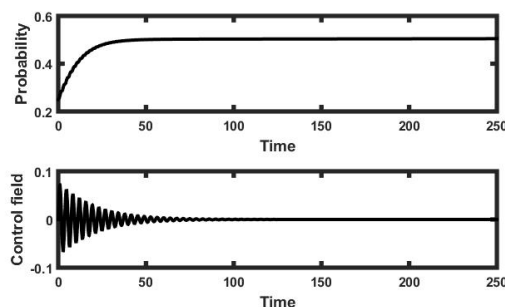
گام دوم: طبق رابطه های (۵) و (۱۶)، تابع لیاپانوف و قانون کنترل به صورت زیر در نظر گرفته می شوند:

$$\begin{cases} V_1(t) = \frac{1}{2} (1 - |\langle \psi_f | \psi(t) \rangle|^2) \\ u_k(t) = K_k \left(\Im \left[e^{i\angle \langle \psi | \psi_f \rangle} \langle \psi_f | H_k | \psi \rangle \right] \right) \end{cases} \quad (23)$$

که در آن $|\psi\rangle$ حالت کنترلی، $|\psi_f\rangle$ حالت هدف مطلوب، $\angle \langle \psi_f | \psi \rangle$ بیانگر زاویه عبارت مختلط $\langle \psi_f | \psi \rangle$ است و K_k یک ثابت حقیقی مثبت و برای تنظیم دامنه کنترل استفاده می شود. در این مثال چون فقط از یک میدان کنترلی استفاده می شود به جای K_k از نماد K استفاده شده است.

گام سوم: احتمال تحول حالت از $|\psi_0\rangle$ به $|\psi_f\rangle$ برحسب قانون کنترلی (۱۸) برای پارامترهای زیر محاسبه می شود که T زمان نهایی و Δt طول گام زمانی می باشد.

$$K = 0.15, T = 250, \Delta t = 0.01$$



شکل ۹: نمودار احتمال انتقال حالت از $\frac{1}{2}[1, 1, 1, 1]^T$ به $[0, 0, 0, 1]^T$ و میدان کنترل متناظر با تابع لیاپانوف براساس فاصله حالت.

گام چهارم: حداکثر احتمال تحول حالت از $|\psi_0\rangle$ به $|\psi_f\rangle$ ، یعنی P_f برابر با ۰/۵۰۴۶ می باشد. پس باید به گام پنجم بروید.

گام پنجم: بردارهای حالت ویژه همیلتونی آزاد یعنی H_0 به صورت زیر می باشند:

$$|\psi_1^e\rangle = [1, 0, 0, 0]^T, |\psi_2^e\rangle = [0, 1, 0, 0]^T$$

$$|\psi_3^e\rangle = [0, 0, 1, 0]^T, |\psi_4^e\rangle = [0, 0, 0, 1]^T$$

گام ششم: احتمال تحول حالت را از هر کدام از بردار ویژه های H_0 به حالت هدف یعنی $|\psi_f\rangle$ شبیه سازی شده است و در شکل های (۷)، (۸) و (۱۰) نشان داده شده است.

۲- نتیجه گیری

با توجه به اهمیت و کاربردهای سیستم های کنترل کوانتومی در علوم مختلف و این که بعضی از سیستم ها کاملاً کنترل پذیر نیستند، در این مقاله با تمرکز بر روی سیستم های کنترل پذیر حالت ویژه قوی، به طراحی یک کنترل کننده ترکیبی مبتنی بر کنترل کننده های لیپانوفی و الگوریتم جستجوی گرور کوانتومی برای این گونه سیستم ها پرداخته شده است. مسئله ای دسترسی پذیری حالت هدف در کنترل سیستم های کنترل پذیر حالت ویژه قوی از چالش های طراحی این گونه کنترل کننده ها می باشد. روش جستجوی بهینه گرور کوانتومی با هدف جستجوی حالت ویژه ای که حالت هدف در دسترس آن قرار دارد به عنوان یک بخش از استراتژی کنترلی کنترل کننده طراحی شده در این مقاله به کار گرفته شده است. روش ارائه شده با توجه به بهینه و پایدار بودن الگوریتم گرور و تضمین پایداری در روش لیپانوف منجر به طراحی یک قاعده کنترل برای سیستم های کنترل پذیر حالت ویژه قوی به صورت بهینه شده است که بایک قضیه و یک الگوریتم در این مقاله پشتیبانی تحلیلی و پیاده سازی شده است.

مراجع

- [1] C. G. Almudever, N. Khammassi, L. Hutin, M. Vinet, M. Babaie, F. Sebastiano, E. Charbon, K. Bertels, "Towards a scalable quantum computer", 13th International Conference on Design & Technology of Integrated Systems In Nanoscale Era (DTIS), 1-1, 2018.
- [2] K. Kumar, N. A Sharma, R. Prasad, A. Deo, T. Khorshed, "A survey on quantum computing with main focus on the methods of implementation and commercialization gaps", IEEE, pp. 1-7, 2015.
- [3] S. Chegini, M. Yarahmadi, "Design of an adaptive sliding mode controller based on quantum neural network", Modars Mechanical Engineering, vol.17, no. 1, pp. 305- 310, 2017.
- [4] آ. ارجمندزاده، م. یاراحمدی، "طراحی یک کنترل کننده ژنتیکی کوانتومی در ردیابی مسیر سیستم های کوانتومی"، مجله کنترل، جلد ۱۴، شماره ۱، صص ۶۵-۷۱، ۱۳۹۹.
- [5] ح. رستمی، ب. رضایی، "کنترل حالت سیستم کوانتومی با استفاده از کنترل کننده فازی"، مجله مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۱۶، شماره ۹، صص ۱۲۴-۱۳۴، ۱۳۹۵.
- [6] C. P. Koch, "Controlling open quantum systems: Tools, achievements, and limitations", Journal of Physics Condensed Matter, vol.28, n.21, 2016.
- [7] K. Sugisaki, S. Nakazawa, K. Toyota, K. Sato, D. Shiomi, T. Takui, "Quantum chemistry on quantum computers: quantum simulations of the time evolution of wave functions under the S2 operator and determination of the spin quantum number S", Physical Chemistry Chemical Physics, 2019 doi: 10.1039/ c9cp02546d.

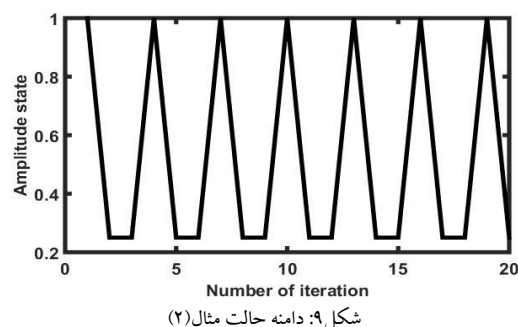
$$|s\rangle = |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |w\rangle = |\psi_k^e\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$U_s = 2|\psi_0\rangle\langle\psi_0| - I_4, U_w = I_4 - 2|\psi_k^e\rangle\langle\psi_k^e|$$

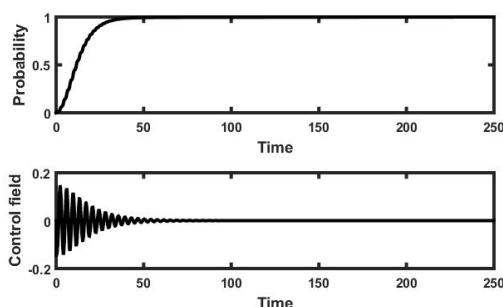
$$U_s = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, U_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$G|s\rangle = G|\psi_0\rangle = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

همان طور که قبلاً گفته شد فقط با یک بار اعمال عملگر گرور، حالت $|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}[1, 1, 1, 1]^T$ با احتمال یک به حالت $|\psi_3^e\rangle = [0, 0, 1, 0]^T$ انتقال داده می شود. در شکل (۹) الگوریتم گرور برای ۲۰ تکرار پیاده سازی شده است.



حال بعد از انتقال حالت $|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}[1, 1, 1, 1]^T$ به حالت $|\psi_3^e\rangle = [0, 0, 1, 0]^T$ با استفاده از الگوریتم گرور، کنترل لیپانوف اعمال می شود و حالت $|\psi_3^e\rangle = [0, 0, 1, 0]^T$ را به حالت هدف $|\psi_f\rangle = [0, 0, 0, 1]^T$ منتقل می کند (شکل (۱۰)).



شکل ۱۰: نمودار احتمال انتقال حالت از $[0, 0, 1, 0]^T$ به $[0, 0, 0, 1]^T$ و میدان کنترل متناظر با تابع لیپانوف براساس فاصله حالت.

همان گونه که ملاحظه می شود سیستم با یک تلاش کنترلی محدود و با احتمالی نزدیک به یک بعد از ۵۰ واحد زمانی انتقال حالت را از $|\psi_3^e\rangle$ به $|\psi_f\rangle$ ممکن می کند.

- [22] Y. Manin, "Computable and Non computable", Sov. Radio, 13- 15, 1980.
- [23] P. W. Shor, "Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring", Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science Press, pp.124- 134, 1994, doi:10.1109/sfcs.1994.365700.
- [24] G. Bassard, "Searching a quantum phone book", Science, .vol 275, Issue 5300, .pp627- 628, 1997.
- [25] D. Dao- Yi, C. Chun- Lin, C. Zong- Hai, Z. Chen, "Quantum Mechanics Helps in Learning for More Intelligent Robots", Chinese Physics Letters, vol.23, n. 7, pp. 1691-1694, 2006, doi:10.1088/0256-307x/23/7/010.
- [26] Grover L. K, 1996, "A fast quantum mechanical algorithm for database search", Proceedings, 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, pp.212-219, 2006.
- [27] J. S. Lomonaco, "Grover's quantum search algorithm", Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, pp 1- 12, 2000.
- [28] C. B. Zhang, D.Y. Dong, Z. H. Chen, "Control of non-controllable quantum systems: a quantum control algorithm based on Grover iteration", Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, vol. 7, n.10, pp. 313- 317, 2005.
- [29] E. Strubell, "An Introduction to Quantum Algorithms", COS498 – Chawathe Spring, 2011.
- [30] K.V, Gubaidullina, S.A. Chivilikhin, "Stability of Grover's algorithm in respect to perturbations in quantum circuit", Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, vol.8, n. 2, pp. 243-246, 2017.
- [8] G. M. Huang, T.J. Tarn, J.W. Clark, "On the controllability of quantum mechanical systems", Journal of Mathematical Physic.vol , 24, Issue11, 1983.
- [9] S. G. Schirmer, H. Fu A.I ,Solomon, "Complete controllability of finite level quantum systems", Journal of Physics A: Mathematical and General, vol.34, no. 8, .pp1-14, 2001.
- [10] G. Turinici, H. Rabitz, 2001, "Quantum wave function controllability", Chemical Physics .vol 267, Issues 1-3, pp. 1-9, 2001.
- [11] S. Grivopoulos, B. Bamieh, "Lyapunov-based control of quantum systems", in Proc. 42nd IEEE Conf. Decision and Control, Hawaii, vol.1, .pp434-438, 2003.
- [12] S. Kuang, S. Cong, "Lyapunov control methods of closed quantum systems", Automatica, vol. 44, pp. 98-108, 2008.
- [13] W. Yang, J. Sun, "Lyapunov Control of Quantum Systems with Impulsive Control Fields", The Scientific World Journal, 1-7, 2013, doi:10.1155/2013/814080.
- [14] C. Shuang, S. KUANG, "Quantum Control Strategy Based on State Distance", ACTA AUTOMATICA SINICA, vol.33, no.1, 2007, doi: 10.1360/aas-007-0028.
- [15] S.C. Hou, M.A. Khan, X. X. Yi, D. Dong, R. Petersen Ian, "Optimal Lyapunov-based quantum control for quantum systems", Physical Review A, vol.86, 2012.
- [۱۶] ز. صاحبی، م. یاراحمدی، "طراحی کنترل کننده ترکیبی تطبیقی هوشمند با استفاده از شبکه های عصبی موجکی کوانتومی برای ردیابی مسیر سیستم های کوانتومی بسته ی متناهی"، مجله مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۱۸، شماره ۰۲، صص ۱۷۹-۱۸۸، ۱۳۹۷.
- [17] R. Orus, S. Mugel.E , Lizaso, "Quantum computing for finance: Overview and prospects", Reviews in Physics, vol. 4, 2019, doi: 10.1016/j.revip.2019.100028.
- [18] S. Imre, F. Balaz, "Quantum computing and communications", An Engineering Approach Wiley. Chichester. ۲۰۰۵ ,
- [19] P.Beniof, "The computer as a physical system a microscopic Quantum Mechanical Hamiltonian model of computers as represented by Turing machines", Journal of Statistical Physics.vol , 22, pp.563- 591, 1980.
- [20] D. Deutsch, "the Church-Turing principle and the universal quantum computer", Proceedings of the Royal Society A, 400, 1818, pp.97- 117, 1985.
- [21] P. Feynman Richard, "Simulating physics with computers", International Journal of Theoretical Physics, vol.21.pp , 467- 488, 1982.