



## کنترل مقاوم سیستم‌های سوئیچ‌شونده خطی نامعین با کلیدزنی غیرهمzman در حضور اغتشاش مبتنی بر رویتگر

علی نصراللهی<sup>۱</sup>، علی اکبر افضلیان<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران a\_nasrollahi@sbu.ac.ir

<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران Afzalian@sbu.ac.ir

پذیرش: ۱۴۰۲/۰۳/۲۶

ویرایش: ۱۴۰۲/۰۲/۲۲

دریافت: ۱۴۰۲/۰۱/۰۳

**چکیده:** این مقاله بر کنترل سیستم‌های خطی سوئیچ‌شونده نامعین با کلیدزنی غیرهمzman در حضور اغتشاش با زمان اقامت میانگین مبتنی بر رویتگر تمرکز دارد. برای این منظور در ابتدا، یک مدل مناسب برای سیستم مورد نظر معرفی می‌شود. در ادامه، با بهره‌گیری از توابع شبه لیپانوف، حداقل زمان مجاز عدم همزمانی، حداقل زمان اقامت میانگین و شرط لازم جهت پایداری سیستم تعیین می‌شوند. نوآوری این پژوهش در نظر گرفتن همزمان چند پارامتر نامطلوب می‌باشد که عبارتند از: کلیدزنی غیرهمzman، نامعینی، اغتشاش و عدم دسترسی به چند متغیر. در نظر گرفتن همزمان این عوامل، پیچیدگی حل مسئله را چند برابر می‌کند. در پایان، میزان اثربخشی الگوریتم پیشنهادی از طریق پیاده‌سازی روش بر روی مدل یک جسم پرنده در محیط شبیه‌سازی متلب بررسی و نشان داده شده می‌شود.

**کلمات کلیدی:** زمان اقامت میانگین، سیستم‌های سوئیچ‌شونده خطی، فیدبک حالت، کلیدزنی غیرهمzman.

### Observer based robust control of uncertain switched linear systems with asynchronous switching in the presence of disturbance

Ali Nasrollahi, Ali Akbar Afzalian

**Abstract:** This paper focuses on the control of uncertain switched linear systems with asynchronous switching in the presence of disturbance using an observer with average dwell time. For this purpose, firstly, an appropriate model for the system is introduced. The maximum allowed time of non-synchronism, the minimum average dwell time and the necessary conditions for system stability are determined, using pseudo-Lyapunov functions. The novelty of this research is taking into account several undesirable parameters, i.e. asynchronous switching, uncertainty, disturbance and lack of access to several variables, simultaneously. Considering these factors together increase the complexity of the problem. Finally, the effectiveness of the proposed algorithm is shown through the implementation of the method on the system of a flying object in the MATLAB simulation environment.

**Keywords:** Average dwell time, Switched linear systems, State feedback, Asynchronous switching.

## ۱- مقدمه

در کلیدزنی DT، فاصله زمانی دو کلیدزنی متوالی باید بزرگ‌تر از یک ثابت به اندازه کافی بزرگ باشد تا پایداری سیستم سوئیچ شونده تضمین شود. در روش کلیدزنی ADT، باید میانگین زمانی یک سری از کلیدزنی‌های متوالی به اندازه کافی بزرگ باشد. این بدان معناست که امکان کلیدزنی با فواصل زمانی خیلی کوتاه وجود دارد ولی باید در نوبت‌های بعدی جبران شود. اخیراً، محافظه کاری روش ADT، با یک استراتژی کلیدزنی که در [۹] با عنوان زمان اقامت وابسته به حالت<sup>۱</sup> مطرح شده است، کاهش بافته است. ویژگی این استراتژی کلیدزنی، آن است که از اطلاعات هر مود، از قبیل نرخ نمایی تابع لیپانوف مرتبط با هر مود استفاده می‌کند.

اکثر نتایج موجود مبتنی بر این فرض هستند که تعویض بین کنترل کننده‌های طراحی شده دقیقاً مشابه زیر سیستم‌ها است. این فرض اغلب در عمل غیر واقعی است. به طور معمول، یک کاتال ارتباطی برای اتصال سیستم و کنترل کننده وجود دارد و بنابراین، ممکن است از نظر فیزیکی شناسایی زیرسیستم فعل و اعمال همزمان کنترل کننده مربوطه غیرممکن باشد. در این حالت، کنترل کننده دیرتر از سیستم سوئیچ می‌کند، که باعث تعویض غیر همزمان در سیستم حلقه بسته می‌شود. ممکن است کنترل کننده تطبیق نیافته به ناپایداری سیستم‌های سوئیچ شونده منجر شود. بنابراین، در نظر گرفتن اثرات سوئیچ غیر همزمان اهمیت زیادی دارد.

مسئله پایدارسازی مقاوم سیستم‌های سوئیچ شونده نامعین با استفاده از کنترل مود لغزشی<sup>۲</sup> در [۱۰] مورد توجه قرار گرفته است. در این پژوهش به صورت همزمان یک رویتگر نیز جهت تخمین حالت‌ها مورد استفاده قرار گرفته است. لیو و همکارانش [۱۱] یک روش مجموع وزنی را برای طراحی یک سطح لغزش مشترک توسعه داده‌اند و این روش در [۱۲] بیشتر توسعه داده شده است، که در آن روش زمان توقف میانگین برای اثبات پایداری نمایی چنین سیستم‌هایی استفاده شده است. در [۱۳] استراتژی مدل چندگانه جهت بهبود عملکرد گذرا به سیستم‌های خطی سوئیچ شونده اعمال می‌شود. در [۱۴]، استراتژی MMAC سوئیچ شونده<sup>۳</sup> پیشنهاد شد، که در آن مکانیزم کلیدزنی دو لایه ساخته شد. طرح کنترل تطبیقی چند مدل برای اولین بار در یک کلام از سیستم‌های سوئیچ شونده نیز در این پژوهش معرفی شده است. یک طرح کنترل تطبیقی چند مدله سوئیچ شونده برای بهبود رفتار گذرا با تنظیم مجدد پارامترهای کنترل کننده پیشنهاد شده است. در [۱۵]، طرح‌های کنترل ریابی تطبیقی مقاوم برای سیستم‌های خطی سوئیچ شونده نامعین در معرض اغتشاشات مورد بررسی قرار گرفتاست. در [۱۶]، مساله کنترل تطبیقی مبتنی بر تخمین حالت برای دسته‌ای از سیستم‌های نامعین در معرض تاخیر زمانی و اغتشاش خارجی در چارچوب مود لغزشی مورد بررسی قرار گرفته است. در [۱۷] و [۱۸]، با یک کنترل کننده انتقال بدون برخورد، به پایداری سیستم‌های خطی پایدار شده مثبت پرداخته شده است. سهم این مطالعه بهبود مقاومت کنترل کننده

سیستم‌های سوئیچ شونده، کلاس مهمی از سیستم‌های ترکیبی دینامیکی هستند که از تعدادی زیرسیستم با دینامیک پیوسته (که حالات سیستم نامیده می‌شوند) و یک قانون (به نام قانون کلیدزنی که وظیفه آن، تنظیم عمل کلیدزنی بین حالات گستته می‌باشد) تشکیل شده‌اند [۱]. قوانین کلیدزنی انواع مختلفی دارند که چند نمونه از آنها عبارتند از: کلیدزنی وابسته به حالت، کلیدزنی اختیاری، کلیدزنی با میانگین زمان اقامت و ... [۵]). سیستم‌های سوئیچ شونده سابقه گسترهای در علم مهندسی دارند و بسیاری از سیستم‌های جهان واقعی را می‌توان به عنوان سیستم سوئیچ شونده مدل کرد؛ به عنوان مثال: فرآیندهای شیمیایی، سیستم‌های مکانیکی، سیستم‌های قدرت و بسیاری از سیستم‌های دیگر را می‌توان به عنوان سیستم‌های سوئیچ شونده در نظر گرفت. دو هدف عملی وجود دارند که مطالعه روی سیستم‌های سوئیچ شونده را جذاب می‌کنند: ۱) جامعیت این سیستم‌ها: چرا که بسیاری از سیستم‌های فیزیکی ویژگی تغییر بین ساختارهای مختلف سیستم را نشان می‌دهند و می‌توانند به صورت سیستم‌های سوئیچ شونده مدل‌سازی شوند. سیستم‌های سوئیچ شونده در طیف گسترهای از کاربردها مانند سیستم‌های مکانیکی، صنعت خودرو، سیستم‌های کنترل شبکه‌ای، سیستم‌های حمل و نقل هوشمند، الکترونیک قدرت و سیستم‌های انرژی هوشمند ظاهر می‌شوند. ۲) افزایش کارایی و بهبود عملکرد: سوئیچ کردن بین کنترل کننده‌های چندگانه، یک مکانیزم کارآمد برای مقابله با سیستم‌هایی با عدم قطعیت بزرگ یا بسیار پیچیده فراهم می‌کند.

یک سیستم سوئیچ شونده به دلیل ماهیت ترکیبی آن، ویژگی‌های زیرسیستم‌های خود را به ارت نمی‌برد. مثلاً، ویژگی پایداری نمایی کلی تمام زیرسیستم‌ها نمی‌تواند ویژگی پایداری یکسان سیستم سوئیچ شونده را تضمین کند و گاهی اوقات، تعویض بین زیرسیستم‌های پایدار حتی ممکن است منجر به ناپایداری سیستم سوئیچ شونده شود. بنابراین، تجزیه و تحلیل سنتی و روش‌های طراحی برای سیستم‌های بدون کلیدزنی به طور مستقیم برای سیستم‌های سوئیچ شونده اعمال نمی‌شود.

عدم قطعیت‌ها به طور گستره در سیستم‌های سوئیچ شونده وجود دارند و مطالعه سیستم‌های سوئیچ شونده را پیچیده تر می‌کنند. همچنین انتظار می‌رود که کنترل مقاوم به عنوان یک ابزار قدرتمند برای سیستم‌های غیرسوئیچ شونده نامعین، یک ابزار موثر برای مطالعه سیستم‌های سوئیچ شونده نامعین باشد.

تاکنون، عده فعالیت‌ها بر روی سیستم‌های سوئیچ شونده با پارامترهای معین تمرکز داشته‌اند، که از این قبیل می‌توان مسائل پایداری و پایدارسازی را نام برد [۶, ۷]. این دسته از مسائل، عمدتاً بر اساس دو خانواده از قوانین کلیدزنی می‌باشند: ۱- زمان اقامت<sup>۴</sup> و ۲- زمان اقامت میانگین<sup>۵</sup>.

<sup>4</sup> Sliding Mode Control (SMC)

<sup>5</sup> Switched Multiple Model Adaptive Control (SMMAC)

<sup>1</sup> Dwell Time (DT)

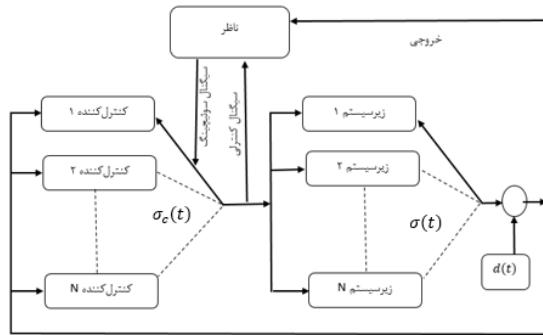
<sup>2</sup> Average Dwell Time (ADT)

<sup>3</sup> Mode-Dependent Average Dwell Time (MDADT)

همچنین  $A_i^0$  و  $B_i^0$  ماتریس‌های نامی فضای حالت زیرسیستم‌ها هستند که به صورت  $A_i^0 = A_i(q^0)$  و  $B_i^0 = B_i(q^0)$  تعریف می‌شوند. ضمن اینکه  $\Delta A_i(q^0, \Delta q)$  و  $\Delta B_i(q^0, \Delta q)$  جزء نامعین ماتریس‌های  $A_i, B_i$  بوده و به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{cases} \Delta A_i(q^0, \Delta q) = \sum_{k=1}^r \delta q_k E_k^i \\ \Delta B_i(q^0, \Delta q) = \sum_{k=1}^r \delta q_k F_k^i \end{cases} \quad (4)$$

ماتریس‌های  $E_k^i$  و  $F_k^i$  در روابط فوق، نشان‌دهنده نحوه وابستگی ماتریس‌های فضای حالت  $A_i$  و  $B_i$  به پارامتر نامعین  $q_k$  است. در صورتیکه پارامتر مجهول  $q_k$  تاثیری در ماتریس  $A_i$  (یا  $B_i$ ) نداشته باشد،  $(E_k^i)$  (یا  $(F_k^i)$ ) ماتریس‌های خواهد بود. در شکل ۱ بلوک دیاگرام حلقه کنترلی رسم شده است.



شکل ۱: بلوک دیاگرام حلقه کنترلی

همانگونه که از شکل ۱ مشخص است، ناظر با مشاهده تغییر وضعیت در خروجی سیستم، ورودی کنترلی و دانشی که از سیستم دارد (متلاعه ترتیب تغییر زیر سیستم‌ها مشخص است) و در برخی حالات با مشاهده تخمینی از مقدار یک سری حالات خاص، فعل شدن زیرسیستم جدید را متوجه می‌شود و در نتیجه کنترل کننده مناسب را فعال می‌کند. یکی از چالش‌ها دقیقاً در همین نقطه است که ناظر با تاخیر کنترل کننده متأثر با زیرسیستم فعل را انتخاب می‌کند. یعنی در این فاصله زمانی که هنوز ناظر فعل شدن زیرسیستم جدید را تشخیص نداده است، کنترل کننده مربوط به زیرسیستم قبلی با زیر سیستم فعل جدید کار می‌کند. که این امر می‌تواند منجر به ناپایداری سیستم گردد. این بحث همان عدم همزمانی در کلیدزنی می‌باشد که در بسیاری از فرآیندها غیر قابل اجتناب می‌باشد و باید در روند طراحی در نظر گرفته شود.

۲-۲- قضایا و تعاریف کاربردی در کلیدزنی غیرهمzman  
در این بخش قضایا و تعاریف مورد نیاز در بخش بعد ارائه می‌گردد.  
قضیه ۱ ([۶]): سیستم سوئیچ شونده  $(\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t))$  و ثابت‌های  $\alpha > 0, \beta > 0, \mu \geq 1$  پیوسته لیپانوف  $R^n \rightarrow R^n$  و دو تابع  $V_{\sigma(t)}$  از کلاس  $k_{\infty}$  به ازای هر  $i \in \mathcal{E}$  مجموعه حالات کلیدزنی ممکن) وجود داشته باشند که در روابط زیر صدق کنند:

کلیدزنی در نمونه‌های کلیدزنی و همچنین تضمین عملکرد افزایش  $L$  سیستم‌های مثبت است.

تمرکز این مقاله بر روی مبحث پایدارسازی سیستم‌های سوئیچ شونده پیوسته نامعین با کلیدزنی غیرهمzman با استفاده از روش کنترل مقاوم مبتنی بر مشاهده‌گر در حضور اغتشاش خارجی می‌باشد. با اعمال روش پیشنهادی، یک دسته از شروط بدست می‌آید که با برقرار بودن آنها، پایداری سیستم تضمین می‌گردد. نوآوری‌های این پژوهش در قالب زیر قابل بیان می‌باشد: اثبات پایداری سیستم سوئیچ شونده در حضور عوامل نامطلوب. که عبارتند از: عدم همزمانی در کلیدزنی، نامعینی، اغتشاش خارجی و عدم دسترسی به برخی متغیرها. لازم بذکر است که در نظر گرفتن ترکیب این عوامل برگرفته از یک مسئله واقعی می‌باشد. لازم بذکر است که روش کنترل پیشنهادی در این پژوهش بسط روش ارائه شده در [۶] توسعه افزودن نامعینی‌ها، اغتشاش و مشاهده‌گر می‌باشد.

ترتیب ارائه مطالب در ادامه این مقاله بدین شرح است: در بخش دوم، مدل سیستم مورد بررسی معرفی می‌گردد و در ادامه آن نیز قضایا و تعاریف مورد استفاده در این مقاله بیان می‌گردد. معرفی روش کنترلی و طراحی رویتگر به ترتیب در بخش‌های سوم و چهارم بیان شده است و در بخش پنجم نیز نتایج شبیه‌سازی ارائه گردیده‌اند. در نهایت نیز جمع‌بندی مباحث ارائه شده در بخش پایانی انجام گرفته است.

## ۲- سیستم‌های سوئیچ شونده خطی نامعین

در این بخش، در ابتدا مدل ریاضی سیستم مورد بررسی معرفی می‌گردد و در ادامه تعاریف و قضایایی که در بخش بعد برای اثبات پایداری روش ارائه شده مورد نیاز می‌باشند، ارائه می‌گردد.

### ۲-۱- مدل ریاضی سیستم مورد مطالعه

مدل سیستم سوئیچ شونده به فرم معادلات زیر تعریف می‌شوند.

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) + d(t) \quad (1)$$

$\sigma(t)$  سیگنال کلیدزنی زیرسیستم می‌باشد که عددی است از مجموعه  $\mathcal{E} = \{1, \dots, N\}$  نشان‌دهنده تعداد زیرسیستم‌های یک سیستم کلیدزنی است. سیگنال کلیدزنی تعیین می‌کند که در حال حاضر کدامیک از زیرسیستم‌ها فعل می‌باشد و به تناسب آن ناظر کنترل کننده مناسب را توسط سیگنال کلیدزنی کنترل کننده  $(\sigma_c(t))$  فعل می‌کند. در ضمن  $x(t) \in R^n$  بردار حالت،  $u(t) \in R^m$  بردار ورودی کنترلی،  $y(t) \in R^l$  بردار خروجی و  $d(t) \in R^n$  بردار اغتشاش خارجی با کران بالای  $D = ||d(t)||$  می‌باشد.

اکنون فرض کنید ماتریس‌های سیستم و ورودی کنترلی سیستم سوئیچ شونده (۱) با روابط (۲) و (۳) معرفی شوند ([۱۹]).

$$A_i(q) = A_i^0 + \Delta A_i(q^0, \Delta q) \quad (2)$$

$$B_i(q) = B_i^0 + \Delta B_i(q^0, \Delta q) \quad (3)$$

در روابط فوق  $[q_r, q_1, q_2, \dots, q_r] = [q_1^0, q_2^0, \dots, q_r^0]$  و  $\Delta q = [\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_r]$  به ترتیب بردار پارامترها، بردار مقادیر نامی پارامترها و بردار میزان نامعینی پارامترها هستند و  $\mathcal{E}$  تعداد پارامترهای نامعین می‌باشد.

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{ii}x + d(t) = (A_i + B_i K_i)x + d(t) & \forall t \in T_1 \\ \dot{x} = A_{ij}x + d(t) = (A_i + B_i K_j)x + d(t) & \forall t \in T_1 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} V_i = x^t P_i x \\ V_j = x^t P_j x \end{cases} \quad (13)$$

در رابطه‌های فوق،  $U_i$  و  $U_j$  به ترتیب کنترل کننده آم و زام می‌باشد که به منظور کنترل زیرسیستم‌های آم و زام طراحی شده‌اند.

**قضیه ۲:** سیستم سوئیچ شونده (۱) و ثابت‌های  $1 \geq \beta > 0, \mu > 0, \alpha > 0$  را در نظر بگیرید. فرض کنید توابع مشتق پذیر پیوسته لیاپانوف  $V_{\sigma(t)}: R^n \rightarrow R$  دوتابع  $k_1, k_2$  از کلاس  $k_{\infty}$  به ازای هر  $i \in \mathcal{E}$  وجود داشته باشند که در روابط زیر صدق کنند:

$$k_1 \|x\|^2 \leq V_i(x) \leq k_2 \|x\|^2 \quad (14)$$

$$\dot{V}_i(x) \leq \begin{cases} -\alpha V_i(x) + \bar{\lambda} D^2 & \forall t \in T_1(t_l, t_{l+1}) \\ \beta V_i(x) + \bar{\lambda} D^2 & \forall t \in T_1(t_l, t_{l+1}) \end{cases} \quad (15)$$

$$V_i(x_{t_l}) \leq \mu V_i(x_{t_l}) \quad (16)$$

$$\forall (\sigma(t_l) = i, \sigma(t_l^-) = j) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}, i \neq j$$

آنگاه سیستم پایدار GUUS برای هر سیگنال کلیدزنی با زمان اقامت میانگین زیر می‌باشد:

$$\frac{(\ln \mu + \tau_{max}(\alpha + \beta))}{\alpha} = \tau_a^* \leq \tau_a \quad (17)$$

$\tau_{max}$  نیز حداقل زمان غیرهمزمانی می‌باشد. حد بالای اغتشاش می‌باشد و  $\bar{\lambda}$  بزرگ‌ترین مقدار ویژه مربوط به تمامی ماتریس‌های لیاپانوف می‌باشد.

### اثبات:

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه (۱۵) در بازه  $[t', t_{l+1}]$ ، به رابطه زیر می‌رسیم.  $t'$  زمانی است که کنترل کننده و زیرسیستم فعال با هم تطبیق می‌یابند و مقدار آن  $t' - t_l < \tau_{max}$  خواهد بود.

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t)}(x_t) &\leq \frac{\bar{\lambda} D^2}{\alpha} - \frac{\bar{\lambda} D^2}{\alpha} e^{-\alpha(t-t')} - \frac{\bar{\lambda} D^2}{\beta} e^{-\alpha(t-t')} \\ &+ \frac{\bar{\lambda} D^2}{\beta} e^{-\alpha(t-t') + \beta \tau_{max}} + e^{-\alpha(t-t_l)} e^{(\alpha+\beta)\tau_{max}} V_i(x_{t_l}) \end{aligned} \quad (18)$$

به منظور خلاصه‌نویسی، ترم‌هایی که دیگر در ادامه گسترش نمی‌یابند را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= \frac{\bar{\lambda} D^2}{\alpha} - \frac{\bar{\lambda} D^2}{\alpha} e^{-\alpha(t-t')} - \frac{\bar{\lambda} D^2}{\beta} e^{-\alpha(t-t')} \\ &+ \frac{\bar{\lambda} D^2}{\beta} e^{-\alpha(t-t') + \beta \tau_{max}} \end{aligned} \quad (19)$$

با توجه به رابطه (۱۹) و (۱۶)، رابطه (۱۸) به صورت زیر گسترش می‌یابد:

$$V_{\sigma(t)}(x_t) \leq \eta_1(t) + e^{-\alpha(t-t_l)} e^{(\alpha+\beta)\tau_{max}} \mu V_i(x_{t_l}) \quad (20)$$

با ادامه روند انتگرال‌گیری، با فرض  $N_{\sigma}$  بار کلیدزنی به رابطه زیر دست می‌یابیم:

$$V_{\sigma(t)}(x_t) \leq \eta_{N_{\sigma}}(t) + e^{-\alpha(t-t_0)} e^{N_{\sigma}(\alpha+\beta)\tau_{max}} \mu^{N_{\sigma}} V_i(x_{t_0}) \quad (21)$$

در رابطه فوق،  $(\eta_{N_{\sigma}}(t))$  به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$k_1(\|x\|) \leq V_i(x) \leq k_2(\|x\|) \quad (5)$$

$$\dot{V}_i(x) \leq \begin{cases} -\alpha V_i(x) & \forall t \in T_1(t_l, t_{l+1}) \\ \beta V_i(x) & \forall t \in T_1(t_l, t_{l+1}) \end{cases} \quad (6)$$

$$V_i(x_{t_l}) \leq \mu V_i(x_{t_l}) \quad (7)$$

$$\forall (\sigma(t_l) = i, \sigma(t_l^-) = j) \in \mathcal{E}, i \neq j$$

$= (\sigma(t_l^-) = j)$  یعنی قبل از لحظه کلیدزنی  $t_l$ ، زیرسیستم  $j$  فعال

می‌باشد. آنگاه سیستم پایدار مجانية یکنواخت کلی برای هر سیگنال

کلیدزنی با زمان اقامت میانگین زیر می‌باشد:

$$\frac{(\ln \mu + \tau_{max}(\alpha + \beta))}{\alpha} = \tau_a^* \leq \tau_a \quad (8)$$

در روابط فوق،  $T_1$  بیانگر زمانی است که زیرسیستم و کنترل کننده متاظر فعال می‌باشد.  $T_1$  بیانگر زمانی است که زیرسیستم و کنترل کننده  $\tau_{max}$  غیرمتاظر (یعنی مثلاً زیرسیستم  $i$  و کنترل کننده  $j$ ) فعال می‌باشد. نیز حداقل زمان غیرهمزمانی (حداکثر اختلاف زمانی بین فعال شدن زیرسیستم و کنترل کننده متناسب با آن) می‌باشد. منظور از  $\|\cdot\|$ ، نرم اقلیدسی یا نرم ۲ برداری می‌باشد.

**تعریف ۱** ([۱۵]) - برای هر سیگنال کلیدزنی  $\sigma(t)$  و هر زمان  $t \geq T \geq t_0$

اگر تعداد سوئیچ در فاصله زمانی  $(t, t_0)$  با  $N_{\sigma}(t, t_0)$  نمایش داده شود، آنگاه بیان می‌شود سیگنال  $\sigma(t)$  دارای زمان توقف میانگین  $\tau_a$  خواهد بود اگر دو ثابت  $\tau_a$  و  $N_0$  وجود داشته باشد که:

$$N_{\sigma}(t, t_0) \leq N_0 + \frac{t - t_0}{\tau_a} \quad (9)$$

برقرار باشد. در رابطه (۹) دو عدد  $\tau_a$  و  $N_0$  به ترتیب بیانگر زمان توقف میانگین و مرز برخورد می‌باشد.

**تعریف ۲** - پایداری نهایی یکنواخت کلی<sup>۱</sup> ([۱۵]) - سیستم‌های سوئیچ شونده خطی تحت سیگنال سوئیچینگ پایدار GUUS می‌باشد اگر یک مجموعه فشرده و محدب  $C$  وجود داشته باشد بطوریکه برای هر شرط اولیه  $x_0$  یک مقدار محدود  $T(x_0)$  وجود داشته باشد که  $x(t) \in C$  برای  $t \geq T(x_0)$  هر

**نکته ۱** ([۱۵]): هر ماتریس مثبت معین  $P$  را می‌توان به صورت حاصلضرب یک ماتریس غیرتکین به صورت  $P = H \cdot H^T$  نوشت.

**لم ۱** ([۱۵]): فرض کنید  $\phi \in R^g$  و  $\varphi \in R^s$  سیگنال‌های برداری باشند و اجزاء دهید  $W \in R^{g \times s}$  و  $V \in R^{g \times g}$  نامساوی زیر برقرار است.

$$2\phi^T W V \varphi \leq \phi^T W W^T \phi + \varphi^T V^T V \varphi \quad (10)$$

### ۳- طراحی کنترل کننده فیدبک حالت

در این بخش روشی ارائه می‌گردد تا با استفاده از فیدبک حالت، سیستم (۱) پایدار گردد. به منظور بدست آوردن شروط مناسب جهت پایدارسازی سیستم مورد نظر، توابع لیاپانوف و معادلات سیستم حلقه بسته به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{cases} U_i = K_i x \\ U_j = K_j x \end{cases} \quad (11)$$

<sup>۱</sup> Global Uniform Ultimate Stability(GUUS)

$$\begin{aligned} 1 - (A_i^0 + B_i^0 K_j)^t P_i + P_i (A_i^0 + B_i^0 K_j) \\ \leq (\beta - 1 - \gamma_{ij}) P_i \\ 2 - (E_k^i + F_k^i K_j)^t P_i + P_i (E_k^i + F_k^i K_j) \\ \leq \frac{\gamma_{ijk}}{c_k} P_i \quad \forall k \in \{1, \dots, r\} \\ 3 - (E_k^i + F_k^i K_j)^t P_i + P_i (E_k^i + F_k^i K_j) \\ \geq -\frac{\gamma_{ijk}}{c_k} P_i \quad \forall k \in \{1, \dots, r\} \end{aligned} \quad (26)$$

$$P_i - \mu P_i \leq 0 \quad (27)$$

$$\forall (\sigma(t_l) = i, \sigma(t_l^-) = j) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}, i \neq j$$

آنگاه کنترل کننده‌های فیدبک حالت (۱۱) پایدارساز وجود خواهد

داشت که با هر سوئیچ دلخواه که شرط (۱۷) را برآورده کنند، سیستم را پایدار GUUS کنند.

### اثبات:

شرط قضیه ۲ را در حضور نامعین‌ها بازنویسی می‌نماییم. با استفاده از رابطه (۱۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x) + \alpha V_i(x) - \bar{\lambda} D^2 \leq 0 \\ \rightarrow x^t (A_{ii}^t P_i + P_i A_{ii} + \alpha P_i) x + x^t P_i d + d^t P_i x - \bar{\lambda} D^2 \leq 0 \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه (۱۰) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x) + \alpha V_i(x) - \bar{\lambda} D^2 \leq \\ x^t (A_{ii}^t P_i + P_i A_{ii} + \alpha P_i) x + x^t P_i x + d^t P_i d - \bar{\lambda} D^2 \\ \leq x^t (A_{ii}^t P_i + P_i A_{ii} + (\alpha + 1) P_i) x \leq 0 \end{aligned}$$

در رابطه فوق،  $\bar{\lambda} D^2$  حد بالای  $d^t P_i d$  می‌باشد، بنابراین حاصل  $d^t P_i d - \bar{\lambda} D^2 \leq 0$  خواهد بود. به همین دلیل در جمله دوم رابطه فوق، کران بالای حاصل از این عبارت که همان صفر می‌باشد، جایگزین شد. بدیهی است که به منظور برقراری شرایط فوق، باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$A_{ii}^t P_i + P_i A_{ii} + (\alpha + 1) P_i \leq 0 \quad (28)$$

اکنون روابط (۲) تا (۴) و (۱۱) را در (۲۸) جایگذاری می‌نماییم:

$$\begin{aligned} (A_i^0 + B_i^0 K_i)^t P_i + P_i (A_i^0 + B_i^0 K_i) \\ + \left( \sum_{k=1}^r \delta q_k (E_k^i + F_k^i K_i) \right)^t P_i \\ + P_i \left( \sum_{k=1}^r \delta q_k (E_k^i + F_k^i K_i) \right) \\ + (\alpha + 1) P_i \leq 0 \end{aligned} \quad (29)$$

اکنون رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \delta q_k \left[ (E_k^i + F_k^i K_i)^t P_i + P_i (E_k^i + F_k^i K_i) \right] \\ \leq \gamma_{ii,k} P_i \end{aligned} \quad (30)$$

با توجه به فرض فوق، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=1}^r \delta q_k (E_k^i + F_k^i K_i) \right)^t P_i \\ + P_i \left( \sum_{k=1}^r \delta q_k (E_k^i + F_k^i K_i) \right) \\ \leq \sum_{k=1}^r \gamma_{ii,k} P_i = \gamma_{ii} P_i \end{aligned} \quad (31)$$

با اعمال رابطه فوق در رابطه (۲۹)، خواهیم داشت:

$$(A_i^0 + B_i^0 K_i)^t P_i + P_i (A_i^0 + B_i^0 K_i) \leq \quad (32)$$

$$\eta_{N_\sigma}(t) = \eta_1(t) + e^{-\alpha(t-t_l)} e^{(\alpha+\beta)\tau_{max}} \mu \left( \frac{\bar{\lambda} D^2}{\alpha} - \frac{\bar{\lambda} D^2}{\alpha} e^{-\alpha(t_l-t_{l-1}')} \right) + \dots$$

زمانی است که کنترل کننده و زیرسیستم فعال در بازه زمانی  $t_{l-1}'$  با هم تطبیق می‌یابند.

اکنون با پیاده‌سازی رابطه کلیدزنی با زمان اقامت میانگین (رابطه (۶)) در رابطه (۲۱) و تفکیک جملات، به رابطه (۲۲) می‌رسیم:

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t)}(x_t) &\leq \eta_{N_\sigma}(t) + \\ e^{N_0[(\alpha+\beta)\tau_{max} + \ln(\mu)]} &e^{-[\alpha - \frac{1}{\tau_a}(\alpha+\beta)\tau_{max} - \frac{1}{\tau_a} \ln(\mu)](t-t_0)} V_i(x_{t_0}) \end{aligned} \quad (22)$$

بنابراین، اگر میانگین زمان اقامت کلیدزنی در رابطه (۱۷) صدق کند، می‌توان نتیجه گرفت زمانیکه  $V_{\sigma(t)}(x_t) \rightarrow \infty$  می‌کند، مقدار  $V_{\sigma(t)}(x_t)$  به مقداری کمتر از  $\frac{\bar{\lambda} D^2}{\alpha}$  همگرا می‌گردد.

اکنون با تعریفتابع لیپانوف به صورت  $V_{\sigma(t)}(x_t) = x^t P_{\sigma(t)} x$  و استفاده از روابط ریاضی خواهیم داشت:

$$\min(\lambda_{\min}(P_i))_{i \in \mathcal{E}} \cdot \|x\|^2 \leq V_{\sigma(t)}(x_t) \leq \max(\lambda_{\max}(P_i))_{i \in \mathcal{E}} \cdot \|x\|^2 \quad (23)$$

$$\begin{cases} \underline{\lambda} = \min(\lambda_{\min}(P_i))_{i \in \mathcal{E}} \\ \bar{\lambda} = \max(\lambda_{\max}(P_i))_{i \in \mathcal{E}} \end{cases} \rightarrow \underline{\lambda} \|x\|^2 \leq V_{\sigma(t)}(x_t) \leq \bar{\lambda} \|x\|^2$$

با توجه به مقدار نهایی  $V_{\sigma(t)}$  مقدار نهایی  $\|x\|$  از رابطه زیر بدست خواهد آمد:

$$\|x\| \leq \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\underline{\lambda} \alpha}} \cdot D \quad (24)$$

در رابطه فوق،  $\underline{\lambda}$  کوچک‌ترین مقدار ویژه مربوط به تمامی ماتریس‌های لیپانوف می‌باشد. در نهایت، با توجه به تعریف ۲ سیستم پایدار GUUS می‌باشد.

**قضیه ۳:** سیستم سوئیچ شونده خطی (۱) با سیگنال سوئیچ دارای زمان اقامت میانگین  $\tau_a$  (که در رابطه (۱۷) صدق می‌کند) و  $\delta q_k \in [-c_k, +c_k]$  و ثابت‌های

$$\alpha > 0, \beta > 0, \mu \geq 1,$$

$$\gamma_{ii,k} \geq 0, \sum_{k=1}^r \gamma_{ii,k} = \gamma_{ii},$$

$$\gamma_{ij,k} \geq 0, \sum_{k=1}^r \gamma_{ij,k} = \gamma_{ij},$$

$$\gamma_{ji,k} \geq 0, \sum_{k=1}^r \gamma_{ji,k} = \gamma_{ji},$$

$$\gamma_{jj,k} \geq 0, \sum_{k=1}^r \gamma_{jj,k} = \gamma_{jj}$$

را در نظر بگیرید. اگر برای  $i, \sigma(t_l^-) = j \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}, i \neq j$

روابط زیر برقرار باشند، سیستم (۱) پایدار GUUS خواهد بود و متغیرهای حالت نیز محدود با کران بالای مشخص خواهد داشت.

$$\begin{aligned} 1 - (A_i^0 + B_i^0 K_i)^t P_i + P_i (A_i^0 + B_i^0 K_i) \\ \leq -(\alpha + 1 + \gamma_{ii}) P_i \\ 2 - (E_k^i + F_k^i K_i)^t P_i + P_i (E_k^i + F_k^i K_i) \\ \leq \frac{\gamma_{ii,k}}{c_k} P_i \quad \forall k \in \{1, \dots, r\} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} 3 - (E_k^i + F_k^i K_i)^t P_i + P_i (E_k^i + F_k^i K_i) \\ \leq -\frac{\gamma_{ii,k}}{c_k} P_i \quad \forall k \in \{1, \dots, r\} \end{aligned}$$

معادلات حالت سیستم اصلی و رویتگر در بازه همزمانی به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_i x + B_i u + d \\ y = C_i x \\ u = k_i \hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = A_i^0 \hat{x} + B_i^0 u + L_i (y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C_i \hat{x} \\ \forall (\sigma(t_l) = i) \in \mathcal{E} \end{cases} \quad (37)$$

در روابط فوق،  $\hat{x} \in R^{n \times 1}$  بردار متغیرهای حالت،  $\hat{y}$  خروجی تخمین زده شده،  $y$  خروجی سیستم اصلی و  $L_i \in R^{n \times 1}$  بردار بهره رویتگر می‌باشند. اکنون خطای بین مقدار واقعی و مقدار تخمین زده شده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \quad (38)$$

با بازنویسی روابط، فرم فضای حالت برای دینامیک خطأ و حالت سیستم در بازه همزمانی به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_i + B_i K_i)x - B_i K_i \hat{x} + d \\ \dot{\hat{x}} = (\Delta A_i + \Delta B_i K_i)x + \\ (A_i^0 - \Delta B_i K_i - L_i C_i)\hat{x} + d \end{cases} \quad (39)$$

اکنون با تعریف بردار حالت جدید به صورت  $X = \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$  و با استفاده از روابط (39) و (2)-(4)، رابطه سیستم جدید در بازه همزمانی کنترل کننده و زیرسیستم به صورت رابطه (40) قابل بیان می‌باشد.

$$\begin{cases} \dot{X} = M_{ii} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d = (M_{ii}^0 + \Delta M_{ii})X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} d \\ M_{ii}^0 = \begin{bmatrix} A_i^0 + B_i^0 K_i & -B_i^0 K_i \\ 0 & A_i^0 - L_i C_i \end{bmatrix} \\ \Delta M_{ii} = \begin{bmatrix} \Delta A_i + \Delta B_i K_i & -\Delta B_i K_i \\ \Delta A_i + \Delta B_i K_i & -\Delta B_i K_i \end{bmatrix} = \\ \sum_{k=1}^r \delta q_k \cdot \begin{bmatrix} E_k^i + F_k^i K_i & -F_k^i K_i \\ E_k^i + F_k^i K_i & -F_k^i K_i \end{bmatrix} = \\ \sum_{k=1}^r \delta q_k \cdot N_k^{ii} \end{cases} \quad (40)$$

معادلات حالت سیستم اصلی و رویتگر در بازه کلیدزنی همزمان به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_i x + B_i u + d \\ y = C_i x \\ u = k_j \hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = A_j^0 \hat{x} + B_j^0 u + L_j (y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C_j \hat{x} \\ \forall (\sigma(t_l) = i, \sigma(t_l^-) = j) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}, i \neq j \end{cases} \quad (41)$$

رابطه سیستم جدید در بازه غیرهمزمانی کنترل کننده و زیرسیستم، به صورت رابطه (42) قابل بیان می‌باشد.

$$\begin{cases} \dot{x} = A_i x + B_i u + d \\ y = C_i x \\ u = k_j \hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = A_i^0 \hat{x} + B_i^0 u + L_i (y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C_j \hat{x} \\ \forall (\sigma(t_l) = i, \sigma(t_l^-) = j) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}, i \neq j \end{cases} \quad (42)$$

اکنون با استفاده از قضیه ۳، اگر برای  $i, j \in \mathcal{E}$ ،  $i \neq j$  روابط زیر برقرار باشند، سیستم جدید پایدار GUUS خواهد بود.

$$\begin{aligned} 1 - (M_{ii}^0)^t P_i + P_i (M_{ii}^0) \\ \leq -(\alpha + 1 + \gamma_{ii}) P_i \\ 2 - (N_k^{ii})^t P_i + P_i (N_k^{ii}) \\ \leq \frac{\gamma_{ii,k}}{c_k} P_i \quad \forall k \in \{1, \dots, r\} \end{aligned} \quad (43)$$

$$-(1 + \alpha + \gamma_{ii}) P_i$$

با توجه به این نکته که  $[c_k, +c_k]$  می‌باشد، رابطه (۴۰) را

می‌توان به صورت دو رابطه زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{cases} (E_k^i + F_k^i K_i)^t P_i + P_i (E_k^i + F_k^i K_i) \leq \frac{\gamma_{ii,k}}{c_k} P_i \\ (E_k^i + F_k^i K_i)^t P_i + P_i (E_k^i + F_k^i K_i) \geq -\frac{\gamma_{ii,k}}{c_k} P_i \end{cases}$$

بدین صورت، رابطه (۲۵) قضیه ۳ بدست آمد. رابطه (۲۶) نیز به روشنی

مشابه از گسترش رابطه دوم (۱۵) بدست می‌آید. با گسترش رابطه (۱۶) نیز به سادگی به شرط (۲۷) خواهیم رسید:

$$\begin{cases} V_i = x^t P_i x \rightarrow V_i \leq \mu V_j \rightarrow x^t (P_i - \mu P_j) x \leq 0 \\ V_j = x^t P_j x \rightarrow P_i - \mu P_j \leq 0 \end{cases}$$

با توجه به ضرب متغیرهای تصمیم‌گیری  $P_i$  و  $P_j$  در یکدیگر در روابط (۲۵) و (۲۶)، این روابط غیرخطی می‌باشند. به منظور خطی‌سازی

نامعادلات (۲۵) تا (۲۷)، تغییر متغیرهای زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{cases} U_{ii} = K_i Q_i \\ U_{ij} = K_j Q_i \\ P_i = Q_i^{-1} \end{cases} \quad (33)$$

طرفین روابط (۲۵) تا (۲۷) را از چپ و راست در  $Q_i$  ضرب می‌کنیم

و رابطه (۳۳) را به جای  $K_i$  جایگذاری می‌نماییم. پس از ساده‌سازی‌ها به روابط زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} 1 - A_i^0 Q_i + (A_i^0 Q_i)^t + B_i^0 U_{ii} + (B_i^0 U_{ii})^t \\ \leq -(\alpha + 1 + \gamma_{ii}) Q_i \\ 2 - E_i Q_i + (E_i Q_i)^t + F_i U_{ii} + (F_i U_{ii})^t \\ \leq \frac{\gamma_{ii,k}}{c_k} Q_i \quad \forall k \in \{1, \dots, r\} \\ 3 - E_i Q_i + (E_i Q_i)^t + F_i U_{ii} + (F_i U_{ii})^t \\ \geq -\frac{\gamma_{ii,k}}{c_k} Q_i \quad \forall k \in \{1, \dots, r\} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} 1 - A_i^0 Q_i + (A_i^0 Q_i)^t + B_i^0 U_{ij} + (B_i^0 U_{ij})^t \\ \leq (\beta - 1 - \gamma_{ij}) Q_i \\ 2 - E_i Q_i + (E_i Q_i)^t + F_i U_{ij} + (F_i U_{ij})^t \\ \leq \frac{\gamma_{ij,k}}{c_k} Q_i \quad \forall k \in \{1, \dots, r\} \\ 3 - E_i Q_i + (E_i Q_i)^t + F_i U_{ij} + (F_i U_{ij})^t \\ \geq -\frac{\gamma_{ij,k}}{c_k} Q_i \quad \forall k \in \{1, \dots, r\} \end{aligned} \quad (35)$$

$$Q_j - \mu Q_i \leq 0 \quad (36)$$

$\forall (\sigma(t_l) = i, \sigma(t_l^-) = j) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}, i \neq j$

اکنون نامعادلات غیرخطی (۲۵) تا (۲۷) به نامعادلات خطی (۳۴) تا

(۳۶) تبدیل شده‌اند و اکنون می‌توان از جعبه‌افزار یالمیپ جهت تعیین متغیرهای تصمیم‌گیری استفاده نمود.

#### ۴- طراحی رویتگر

در این بخش، فرض عدم دسترسی به برخی از متغیرهای حالت به مسئله اضافه می‌گردد. جهت رفع این مشکل، در ابتدا با استفاده از یک رویتگر، متغیرهای حالت سیستم تخمین زده می‌شوند و در ادامه کنترل کننده فیدبک حالت با استفاده از این تخمین‌ها، پیاده‌سازی می‌گردد.

$$\begin{aligned} P_3 &= \begin{bmatrix} 506.2522 & 25.6173 \\ 25.6173 & 9.7918 \end{bmatrix} \\ P_4 &= \begin{bmatrix} 405.2412 & 19.3529 \\ 19.3529 & 8.3770 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

در جدول ۱ نتایج حاصل از این پارامترها نمایش داده شده است. با توجه به مقادیر جدول ۱، کاملاً بدینهی است که کران بالای مقدار نهایی متغیرهای حالت، کوچک می‌باشد و از طرف دیگر با وجود حداکثر تاخیر نیم ثانیه‌ای، فقط نیاز به زمان اقامت میانگین ۱/۰۲ ثانیه‌ای می‌باشد.

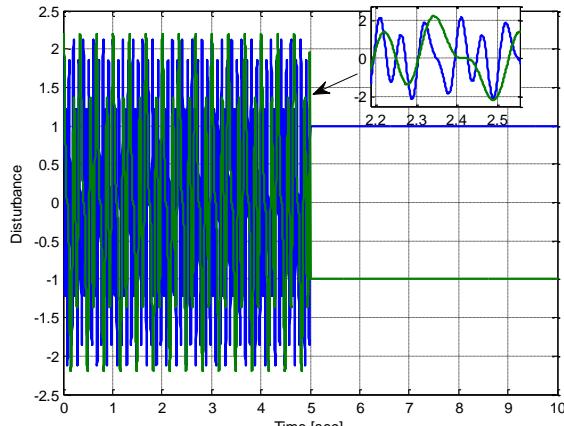
جدول ۱: نتایج حاصل از پارامترهای کنترلی در مثال ۱

$\tau_a^*$ ( $\tau_{max} = 0.5$ )	1.02
$\ x\  \leq$	$14.972D$
$V \leq$	$1666.7D^2$
$\bar{\lambda}$	1666.7
$\lambda$	7.4355

در شبیه‌سازی‌های انجام گرفته، اختشاش به صورت زیر مدل شده است:

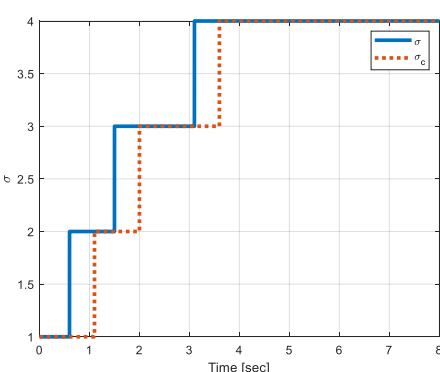
$$d(t) = \begin{cases} [\sin(20\pi t) + \cos(30\pi t) + \sin(40\pi t)] & t < 5 \\ [\cos(6\pi t) + \sin(12\pi t) + \cos(18\pi t)] & t \geq 5 \\ [1] \\ [-1] \end{cases}$$

در شکل ۲، منحنی اختشاش رسم شده است.



شکل ۲: منحنی اختشاش خارجی

در شکل ۳ سیگنال کلیدزنی زیرسیستم‌ها و کنترل کننده‌ها نمایش داده شده است. در این سیگنال‌ها، میانگین زمان اقامت ۱/۱ ثانیه و حداکثر مدت زمان عدم همزمانی، ۰/۵ ثانیه در نظر گرفته شده است. در شکل ۴ نیز متغیرهای حالت سیستم نمایش داده شده است.



شکل ۳: سیگنال کلیدزنی زیرسیستم‌ها و کنترل کننده‌ها

$$\begin{aligned} 3 - (N_k^{ii})^t P_i + P_i(N_k^{ii}) \\ \geq -\frac{\gamma_{ii,k}}{c_k} P_i \quad \forall k \in \{1, \dots, r\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - (M_{ij}^0)^t P_i + P_i(M_{ij}^0) \\ \leq (\beta - 1 - \gamma_{ij}) P_i \\ 2 - (N_k^{ij})^t P_i + P_i(N_k^{ij}) \\ \leq \frac{\gamma_{ij,k}}{c_k} P_i \quad \forall k \in \{1, \dots, r\} \\ 3 - (N_k^{ij})^t P_i + P_i(N_k^{ij}) \\ \geq -\frac{\gamma_{ij,k}}{c_k} P_i \quad \forall k \in \{1, \dots, r\} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} P_i - \mu P_j \leq 0 \\ \forall (\sigma(t_l) = i, \sigma(t_l^-) = j) \in E \times E, i \neq j \end{aligned} \quad (45)$$

## ۵- شبیه‌سازی

در این بخش، دو مثال ارائه شده است. در مثال اول، یک سیستم با چهار زیرسیستم ارائه شده است. روابط این سیستم مربوط به کاتال گلتش یک جسم پرنده می‌باشد. روابط کاتال گلتش این پرنده با توجه به افزایش سرعت (سرعت ناشی از نیروی پیشراش در مدت زمان تقریباً سه و نیم ثانیه به مقدار حداکثر می‌رسد) تغییر پیدا می‌کند. در این مثال، بحث طراحی کنترل کننده برای سیستم کلیدزنی غیرهمزمان با وجود اختشاش و عدم قطعیت در نظر گرفته شده است. در مثال دوم نیز بحث طراحی رویتگر نیز به مسئله قبل اضافه شده است.

شبیه‌سازی‌های این بخش توسط نرم‌افزار متلب ۲۰۱۸ انجام گرفته است.

**مثال ۱-** چهار زیر سیستم کنترل پذیر با عدم قطعیت‌های زیر را در نظر بگیرید. هر چهار زیر سیستم پایدار و کنترل پذیر هستند.

$$\begin{aligned} A_1^0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} & A_2^0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \\ A_3^0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} & A_4^0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \\ B_1^0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times 10^4 & B_2^0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \times 10^4 \\ B_3^0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \times 10^4 & B_4^0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \times 10^4 \\ E_1^j &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} & E_2^j &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ E_3^j &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} & E_4^j &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ F_1^j &= \begin{bmatrix} 0 \\ 3000 \end{bmatrix} & F_2^j &= \begin{bmatrix} 0 \\ 3000 \end{bmatrix} \\ F_3^j &= \begin{bmatrix} 0 \\ 3000 \end{bmatrix} & F_4^j &= \begin{bmatrix} 0 \\ 3000 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

سایر پارامترها به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 & \gamma_{11} &= 1 & \gamma_{21} &= 1 \\ \beta &= 1 & \gamma_{22} &= 1 & \gamma_{32} &= 1 \\ c_1 &= 1 & \gamma_{33} &= 1 & \gamma_{43} &= 1 \\ \mu &= 1.02 & \gamma_{44} &= 1 & & \end{aligned}$$

به ازای پارامترهای فوق، پارامترهای کنترلی توسط یالیپ به صورت زیر تعیین می‌گردند.

$$\begin{aligned} K_1 &= -[0.0021 \quad 0.001] \\ K_2 &= -[0.0021 \quad 0.001] \\ K_3 &= -[0.0020 \quad 0.001] \\ K_4 &= -[0.0020 \quad 0.001] \\ P_1 &= \begin{bmatrix} 1.6571 & 0.1260 \\ 0.1260 & 0.0209 \end{bmatrix} \times 10^3 \\ P_2 &= \begin{bmatrix} 652.0750 & 36.0230 \\ 36.0230 & 10.9793 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

انرژی سیستم به مرور زمان در محدوده مجاز قرار می‌گیرد. نکته دیگر در مورد تابع انرژی، تغییر رفتار این منحنی از ثانیه پنجم به بعد است. این امر بدلیل تغییر فرم اغتشاش اعمالی به این سیستم در ثانیه پنجم می‌باشد. ولی همچنان انرژی سیستم در محدوده مجاز قرار دارد.

### مثال ۲- دو زیر سیستم کنترل پذیر با عدم قطعیت‌های زیر را در نظر

بگیرید. هر دو زیر سیستم پایدار و کنترل پذیر هستند.

$$\begin{aligned} A_1^0 &= \begin{bmatrix} -7.56 & -8.04 \\ -0.65 & -7.94 \end{bmatrix} \times 10^5 & A_2^0 &= \begin{bmatrix} -7.76 & -4.22 \\ 2.48 & -6.44 \end{bmatrix} \times 10^5 \\ B_1^0 &= \begin{bmatrix} 1.22 \\ -1.29 \end{bmatrix} \times 10^5 & B_2^0 &= \begin{bmatrix} 1.71 \\ -0.22 \end{bmatrix} \times 10^5 \\ E_1^1 &= \begin{bmatrix} 10.2 & -3055.5 \\ -9.7 & 8.6 \end{bmatrix} & E_2^1 &= \begin{bmatrix} -9.93 & 0.0238 \\ -8.61 & -3.36 \end{bmatrix} \\ E_2^1 &= \begin{bmatrix} 9.93 & 8.73 \\ -5.54 & 7.05 \end{bmatrix} & E_2^2 &= \begin{bmatrix} -3.77 & -3.37 \\ 5.32 & -5.68 \end{bmatrix} \\ E_3^1 &= \begin{bmatrix} 2.066 & 3.49 \\ 3.41 & 4.43 \end{bmatrix} & E_3^2 &= \begin{bmatrix} 2.31 & 3.29 \\ 9.08 & -1.54 \end{bmatrix} \\ F_1^1 &= \begin{bmatrix} -0.48 \\ -5.08 \end{bmatrix} & F_2^1 &= \begin{bmatrix} 4.06 \\ 8.84 \end{bmatrix} \\ F_2^1 &= \begin{bmatrix} 9.73 \\ -0.98 \end{bmatrix} & F_2^2 &= \begin{bmatrix} -0.94 \\ -1.11 \end{bmatrix} \\ F_3^1 &= \begin{bmatrix} -4.79 \\ -3.58 \end{bmatrix} & F_3^2 &= \begin{bmatrix} 4.75 \\ 3.6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

سایر پارامترها به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

$$\begin{aligned} \alpha &= 34.95 & \gamma_{11,1} &= 57.4 & \gamma_{12,1} &= 90 & \gamma_{21,1} &= 46.1 & \gamma_{22,1} &= 86.1 \\ \beta &= 53.26 & \gamma_{11,2} &= 73.3 & \gamma_{12,2} &= 16.3 & \gamma_{21,2} &= 81.9 & \gamma_{22,2} &= 78 \\ c_1 &= 0.1 & \gamma_{11,3} &= 96.4 & \gamma_{12,3} &= 34.1 & \gamma_{21,3} &= 32.4 & \gamma_{22,3} &= 73.8 \\ c_2 &= 0.11 & \gamma_{11} &= 227.1 & \gamma_{12} &= 140.4 & \gamma_{21} &= 160.4 & \gamma_{22} &= 237.9 \\ c_3 &= 0.13 & \mu &= 1.47 & & & & & & \end{aligned}$$

به ازای پارامترهای فوق، پارامترهای کنترلی توسط پالیپ به صورت زیر تعیین می‌گردند.

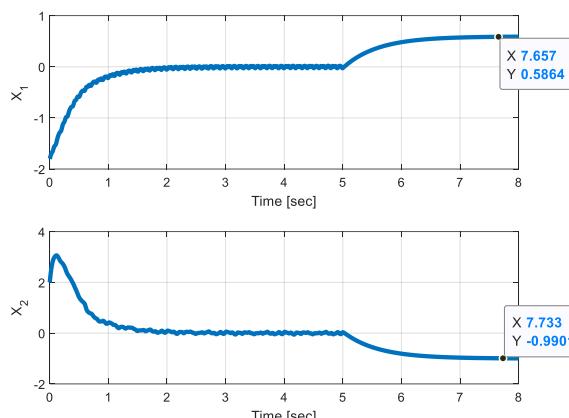
$$\begin{aligned} K_1 &= [-0.56 & -0.35] \\ K_2 &= [-4.35 & 2.53] \\ L_1 &= [-8.1 \\ & 1836.7] \\ L_2 &= [-3757.2 \\ & 2] \\ P_1 &= \begin{bmatrix} 6595 & -9.30 & 0 & 0 \\ -9.30 & 9870 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2865.4 & -3.50 \\ 0 & 0 & -3.50 & 4670.1 \end{bmatrix} \\ P_2 &= \begin{bmatrix} 5949.5 & 6.40 & 0 & 0 \\ 6.40 & 9996.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3086.8 & 2.80 \\ 0 & 0 & 2.80 & 4433.9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

در جدول ۲: نتایج حاصل از پارامترهای کنترلی در مثال جدول ۲ نتایج حاصل از این پارامترها نمایش داده شده است. با توجه به مقادیر جدول ۲، کاملاً بدینهی است که کران بالای مقدار نهایی متغیرهای حالت، کوچک می‌باشد و از طرف دیگر با وجود حداقل تاخیر ۰/۵ ثانیه‌ای، فقط نیاز به زمان اقامت میانگین ۱/۲۷ ثانیه‌ای می‌باشد.

جدول ۲: نتایج حاصل از پارامترهای کنترلی در مثال

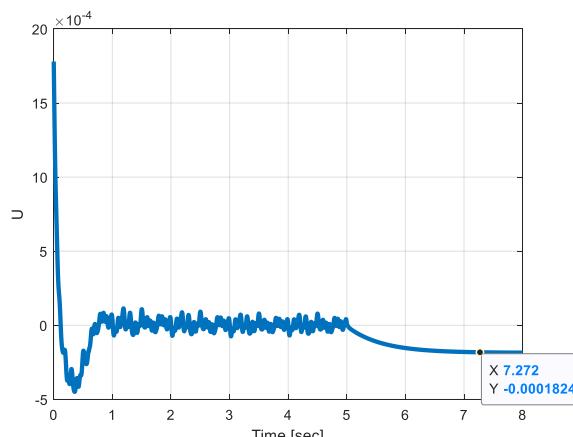
$\tau_a^*(\tau_{max} = 0.5)$	1.2733
$\ x\  \leq$	0.316D
$V \leq$	286.03D <sup>2</sup>
$\bar{\lambda}$	9996.7
$\lambda$	2865.4

در شبیه‌سازی‌های انجام گرفته، اغتشاش مانند مثال ۱ مدل شده است. در شکل ۷ سیگنال کلیدزنی زیرسیستم‌ها و کنترل‌کننده‌ها نمایش داده شده است. در این سیگنال‌ها، میانگین زمان اقامت یک

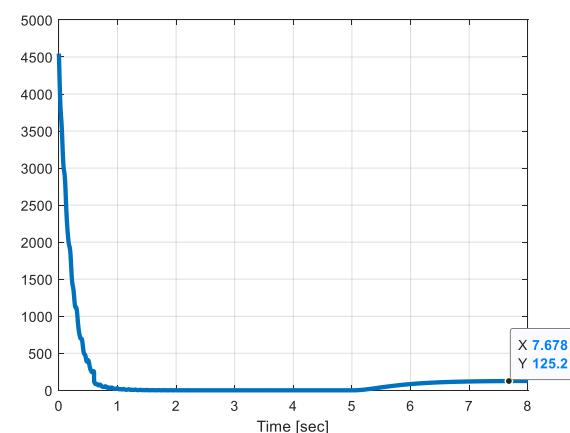


شکل ۴: متغیرهای حالت سیستم

در شکل ۵، سیگنال کنترلی و در شکل ۶ تابع انرژی سیستم نمایش داده شده است.



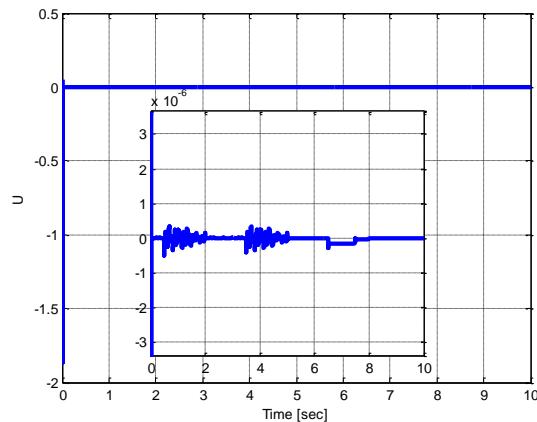
شکل ۵: سیگنال کنترلی



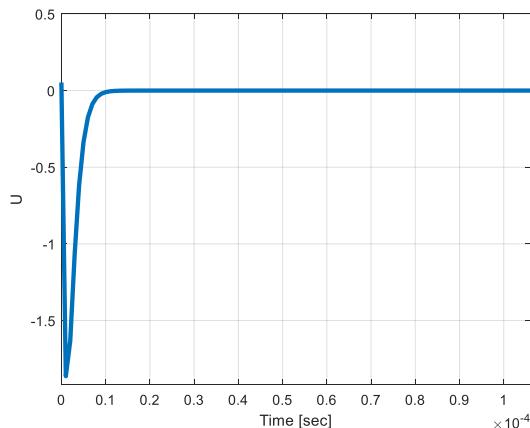
شکل ۶: منحنی انرژی سیستم

همانگونه که از نتایج پیداست، پایدارسازی سیستم تحت کلیدزنی غیرهمزمان در مدت زمان کوتاهی انجام گرفته است. دامنه سیگنال کنترلی محدود می‌باشد و متغیرهای حالت در مدت زمانی بسیار کوتاه به سمت مقداری محدود که در ناحیه مجاز قرار دارد، میل می‌کنند. از طرفی نیز

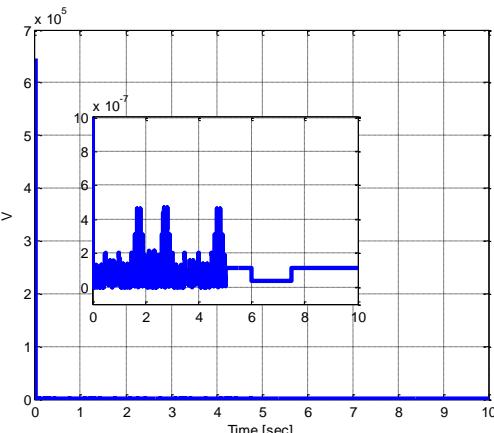
در شکل ۹، سیگنال کنترلی و در شکل ۱۰ تابع انرژی سیستم نمایش داده شده است. شرایط اولیه سیستم اصلی و رویتگر طوری در نظر گرفته شده است که بتوان همگرایی دو سیستم و در نتیجه کارایی روش پیشنهادی را نشان داد. با توجه به نتایج عملکرد موثر روش پیشنهادی در مدت زمانی کوتاه کاملاً قابل مشاهده است.



شکل ۹-الف: سیگنال کنترلی

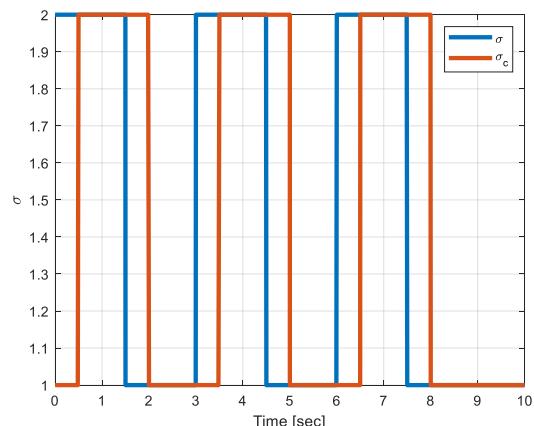


شکل ۹-ب: بزرگنمایی سیگنال کنترلی

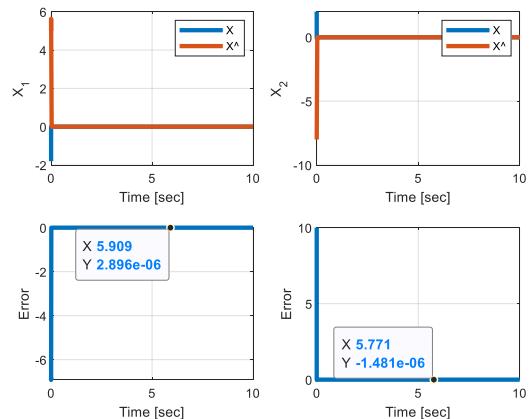


شکل ۱۰-الف: منحنی انرژی سیستم

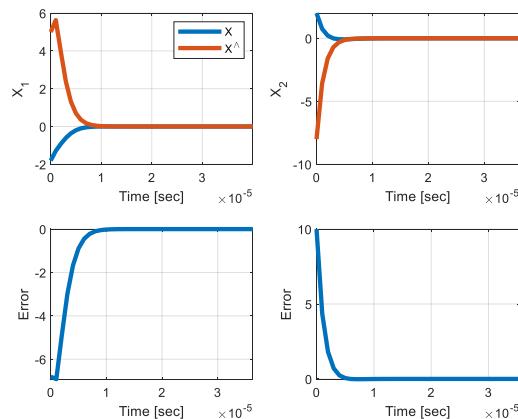
و نیم ثانیه و حداقل مدت زمان عدم همزمانی، نیم ثانیه در نظر گرفته شده است. در شکل ۸ نیز متغیرهای حالت سیستم اصلی، رویتگر و خطای بین آنها نمایش داده شده است.



شکل ۷: سیگنال کلیدزنی زیرسیستم‌ها و کنترل کننده‌ها

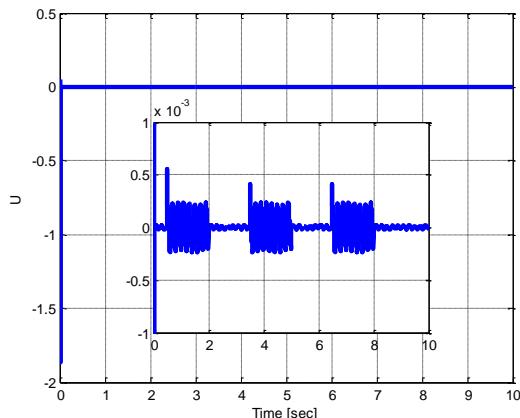


شکل ۸-الف: متغیرهای حالت سیستم اصلی، رویتگر و خطای بین آنها

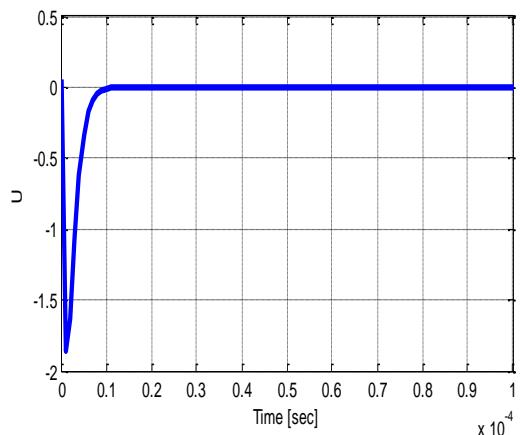


شکل ۸-ب: بزرگنمایی متغیرهای حالت سیستم اصلی، رویتگر و خطای بین آنها

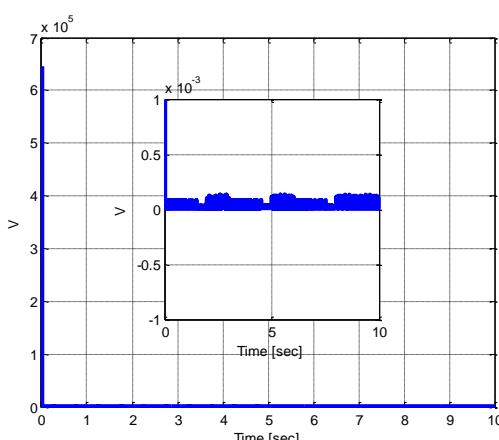
را نشان داد. با توجه به نتایج عملکرد موثر روش پیشنهادی در مدت زمانی کوتاه کاملاً قابل مشاهده است.



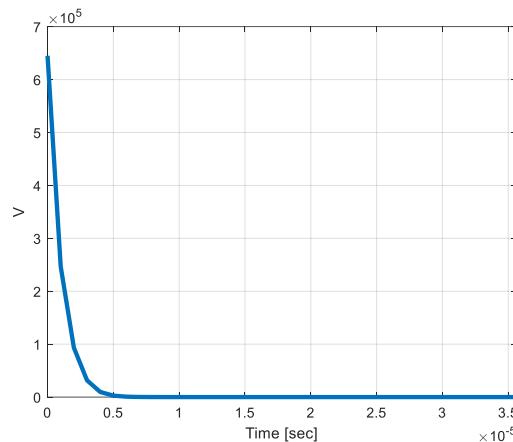
شکل ۱۲-الف: سیگنال کنترلی



شکل ۱۲-ب: بزرگنمایی سیگنال کنترلی



شکل ۱۳-الف: منحنی انرژی سیستم

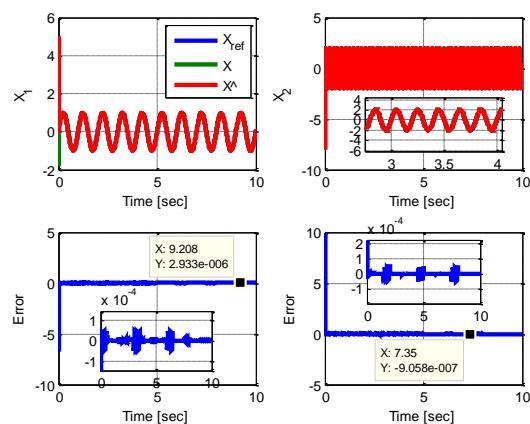


شکل ۱۳-ب: بزرگنمایی منحنی انرژی سیستم

همانگونه که از نتایج پیداست، پایدارسازی سیستم تحت کلیدزنی غیرهمزمان در مدت زمان کوتاهی انجام گرفته است. دامنه سیگنال کنترلی محدود می‌باشد و متغیرهای حالت در مدت زمانی بسیار کوتاه به سمت صفر می‌کنند. از طرفی نیز انرژی سیستم به مرور زمان کاهش می‌پابد. اکنون به منظور نشان دادن قابلیت سیستم کنترلی، مسئله ردیابی به جای پایدارسازی در این مسئله مدنظر قرار می‌گیرد. مسیرهای مرجعی که باید توسط حالت‌های سیستم ردیابی شوند، عبارتند از:

$$\begin{cases} X_{1,\text{ref}} = \sin(2\pi t) \\ X_{2,\text{ref}} = \sin(10\pi t) \end{cases}$$

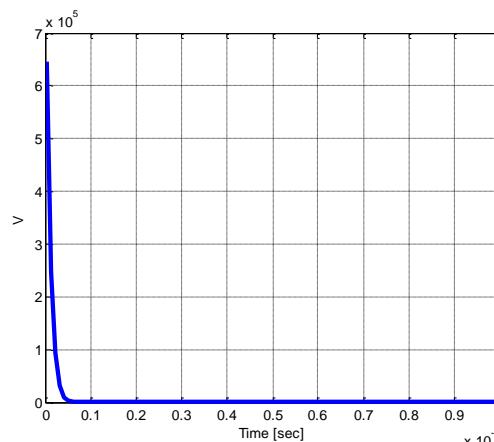
در شکل ۱۱، مسیر مرجع، متغیرهای حالت سیستم اصلی، رویتگر و خطای بین آنها نمایش داده شده است.



شکل ۱۱: مسیر مرجع، متغیرهای حالت سیستم اصلی، رویتگر و خطای بین آنها

در شکل ۱۲، سیگنال کنترلی و در شکل ۱۳ تابع انرژی سیستم نمایش داده شده است. شرایط اولیه سیستم اصلی و رویتگر طوری در نظر گرفته شده است که بتوان همگرایی دو سیستم و در نتیجه کارایی روش پیشنهادی

- switched systems," *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 24, pp. 198-226, 2017.
- [4] L. Lin, Z. Liu, Y. Kao, and R. Xu, "Observer-based adaptive sliding mode control of uncertain switched systems," *IET Control Theory & Applications*, vol. 14, no. 3, pp. 519-525, 2020.
- [5] B. Jiang, H. R. Karimi, S. Yang, C. Gao, and Y. Kao, "Observer-based adaptive sliding mode control for nonlinear stochastic Markov jump systems via T-S fuzzy modeling: Applications to robot arm model," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 68, no. 1, pp. 466-477, 2020.
- [6] L. Zhang and H. Gao, "Asynchronously switched control of switched linear systems with average dwell time," *Automatica*, vol. 46, no. 5, pp. 953-958, 2010.
- [7] B. Niu, X. Zhao, L. Zhang, and H. Li, "p-Times differentiable unbounded functions for robust control of uncertain switched nonlinear systems with tracking constraints," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 25, no. 16, pp. 2965-2983, 2015.
- [8] J. P. Hespanha and A. S. Morse, "Stability of switched systems with average dwell-time," in *Proceedings of the 38th IEEE conference on decision and control (Cat. No. 99CH36304)*, 1999, vol. 3, pp. 2655-2660: IEEE.
- [9] X. Zhao, L. Zhang, P. Shi, and M. Liu, "Stability and stabilization of switched linear systems with mode-dependent average dwell time," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 7, pp. 1809-1815, 2011.
- [10] L. Lin and Z. Liu, "State-estimation-based adaptive sliding mode control of uncertain switched systems: a novel linear sliding manifold approach," *ISA transactions*, vol. 111, pp. 47-56, 2021.
- [11] Y. Liu, T. Jia, Y. Niu, and Y. Zou, "Design of sliding mode control for a class of uncertain switched systems," *International Journal of Systems Science*, vol. 46, no. 6, pp. 993-1002, 2015.
- [12] Y. Liu, Y. Niu, and Y. Zou, "Non-fragile observer-based sliding mode control for a class of uncertain switched systems," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 351, no. 2, pp. 952-963, 2014.
- [13] J. Xie, S. Li, H. Yan, and D. Yang, "Model reference adaptive control for switched linear systems using switched multiple models control strategy," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 356, no. 5, pp. 2645-2667, 2019.
- [14] J. Xie, D. Yang, and J. Zhao, "Multiple model adaptive control for switched linear systems: A two-layer switching strategy," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 28, no. 6, pp. 2276-2297, 2018.
- [15] S. Yuan, B. De Schutter, and S. Baldi, "Robust adaptive tracking control of uncertain slowly



شکل ۱۳-ب: بزرگنمایی منحنی انرژی سیستم

همانگونه که از نتایج پیداست، ردیابی در سیستم تحت کلیدزنی غیرهمزمان در مدت زمان کوتاهی انجام گرفته است. دامنه سیگنال کنترلی محدود می‌باشد و متغیرهای حالت در مدت زمانی بسیار کوتاه به سمت مسیر مرجع می‌کنند. از طرفی نیز انرژی سیستم به مرور زمان کاهش می‌یابد.

## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله بر روی کنترل سیستم‌های خطی سوئیچ شونده نامعین با کلیدزنی غیرهمزمان در حضور اغتشاش با زمان اقامت میانگین مبتنی بر رویتگر تمرکز شده است. در ابتدا مدل سیستم مورد نظر معرفی گردید و در ادامه با بهره‌گیری از توابع شبه لیپاونوف، حداقل زمان مجاز عدم همزمانی، حداقل زمان اقامت میانگین و شرط لازم جهت پایداری سیستم تعیین شدند. تفاوت این پژوهش با سایر پژوهش‌های مشابه، در نظر گرفتن همزمان چندین عامل نامطلوب شامل کلیدزنی غیرهمزمان، نامعینی، اغتشاش و عدم دسترسی به چند متغیر در کنار هم می‌باشد. در نظر گرفتن این چالش‌ها در کنار یکدیگر، پیچیدگی حل مسئله را چندین برابر می‌کند. نتایج شیوه‌سازی روش پیشنهادی، نشان‌دهنده عملکرد مناسب این روش کنترلی می‌باشد. شاخصه‌های این ادعا را می‌توان در دامنه سیگنال کنترلی محدود، زمان میانگین کلیدزنی کوتاه به ازای زمان عدم همزمانی بزرگ و زمان نشست بسیار کوتاه مشاهده و بررسی نمود.

## مراجع

- [1] D. Liberzon, *Switching in systems and control*. Springer, 2003.
- [2] X. Zhao, Y. Yin, and X. Zheng, "State-dependent switching control of switched positive fractional-order systems," *ISA transactions*, vol. 62, pp. 103-108, 2016.
- [3] C. Briat, "Dwell-time stability and stabilization conditions for linear positive impulsive and

switched linear systems," Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, vol. 27, pp. 1-12, 2018.

- [16] R. Xu, Z. Liu, and Y. Liu, "State-estimation-based adaptive sliding mode control for a class of uncertain time-delay systems: a new design," International Journal of Systems Science, vol. 53, no. 2, pp. 375-387, 2022.
- [17] M. A. Nojoumian, M. Ayati, and M. R. Zakerzadeh, "Bumpless stabilisation of uncertain switched positive linear systems under synchronous and asynchronous switching," International Journal of Systems Science, vol. 53, no. 2, pp. 363-374, 2022.
- [18] M. A. Nojoumian, M. Ayati, and M. R. Zakerzadeh, "Asynchronous bumpless stabilisation of uncertain switched linear positive systems with mixed time delay and L 1-gain performance," IET Control Theory & Applications, vol. 16, no. 2, pp. 151-165, 2022.

[۱۹] محمدعلی باقرزاده، جعفر قیصری، جواد عسکری، محسن مجیری، "پایدارسازی مقاوم سیستم‌های سوئیچینگ خطی با استفاده از فیدبک حالت مبتنی بر رویتگر و سیگنال سوئیچ با حداقل زمان اقامات مشخص"، مجله کنترل، جلد ۸، شماره ۴، ص ۵۵-۶۴. ۱۳۹۳.