مجله کنترل

ISSN 2008-8345

قطب علمی کنترل صنعتی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

نشریه علمی- پژوهشی

انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران- قطب علمی کنترل صنعتی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

جلد ۱۰، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۵

فهرست مقالات

ارائه یک روش سیستماتیک برای طراحی و تحلیل یک سیستم هشدار تک متغیره مبتنی بر سناریوی پنالتی ۱

جعفر طاهری کلانی ،کوروش اصلان صفت، غلامرضا لطیف شبگاهی

کنترل محدود نگهدارنده سیستم های چندعاملی خطی متشکل از عامل های غیریکسان با استفاده از فیدبک خروجی دینامیکی ۱۷

حامد حق شناس، محمد علی بادامچی زاده، مهدی برادران نیا

طراحی الگوریتم پایداری حرکت توده ی ربات ها در صورت عدم برخورد با مانع و عدم تمایل به تجمع مبتنی بر معادلات لاگرانژ ۲۹

علی غفاری، علیرضا خدایاری، عباس پورمحمودی

کنترل آشوب در سیستم انتقال چرخ‌دنده با استفاده از روش کنترل مودلغزشی ترمینال تطبیقی جدید با عامل غیرخطی در ورودی کنترلی ۴۵

هادی دلاوری، میلاد محدث زاده

طراحی فیلتر کالمن غیرخطی برای سیستمهای مرتبه کسری تصادفی غیرخطی همراه با نویز اندازه‌گیری با توزیع استیودنت تی ۵۵

سید حامد ترابی، ناصر پریز، علی کریم‌پور

کنترل غیرخطی بهینه مقاوم یک توربین بادی مجهز به ژنراتور القایی از دوسوتغذیه ۶۹

آزاده عزیزی، علی حسامی نقشبندی، یزدان باتمانی

www.joc-isice.ir

مجله کنترل

(ISSN 2008-8345)

قطب علمی کنترل صنعتی
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

نشریه علمی- پژوهشی، انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران- قطب کنترل صنعتی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، جلد ۱۰، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۵

پست الکترونیک: control@isice.ir

صاحب امتیاز: انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران

مدیر مسئول: پروفسور ایرج گودرزنیا

سردبیر: پروفسور علی خاکی صدیق- تلفن: ۸۴۰۶۲۳۱۷- پست الکترونیکی: sedigh@kntu.ac.ir

آدرس محل کار: خیابان دکتر شریعتی، پل سیدخندان، دانشکده مهندسی برق دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

شورای سردبیری: پروفسور علی خاکی صدیق، پروفسور حمید خالوزاده، دکتر علیرضا فاتحی، دکتر مهدی علیاری شوره دلی.

دبیر اجرایی: دکتر مهدی علیاری شوره دلی -تلفن ۸۶۰۶۲۴۰۳ - پست الکترونیکی aliyari@kntu.ac.ir

هیأت تحریریه:

پروفسور علی خاکی صدیق (استاد)- پروفسور ایرج گودرزنیا (استاد)- پروفسور حمید خالوزاده (استاد) - پروفسور پرویز جبه دار مارالانی (استاد)- پروفسور علی غفاری (استاد)- دکتر حمیدرضا مومنی (دانشیار)- پروفسور سید کمال الدین نیکروش (استاد)- پروفسور مسعود شفیعی (استاد)- پروفسور بهزاد مشیری (استاد)

هیأت مشاوران:

دکتر حمیدرضا مومنی، پروفسور بهزاد مشیری، پروفسور مسعود شفیعی، پروفسور علی خاکی صدیق، پروفسور پرویز جبه دار مارالانی، پروفسور علی غفاری، پروفسور حمید خالوزاده، پروفسور حمیدرضا تقی راد، دکتر کیوان مسروری، دکتر محمدتقی بطحایی، دکتر محمدتقی بهشتی، دکتر فرزاد جعفرکاظمی، دکتر رویا امجدی فرد، پروفسور سید علی اکبر موسویان، پروفسور محمد تشنه لب، پروفسور محمد حایری، پروفسور سید علی اکبر صفوی، پروفسور حسین سیفی، دکتر علیرضا فاتحی، دکتر محمدرضا اکبرزاده توتونچی، دکتر مسعود علی اکبر گلکار، دکتر ناصر پریز، دکتر مهرداد جوادی، دکتر جعفر حیرانی نوبری، پروفسور فرامرز حسین بابایی، دکتر بیژن معاونی، دکتر مهدی علیاری شوره دلی، دکتر محمد عاروان، پروفسور محمد توکلی بینا، دکتر فائزه فریور، دکتر موسی آیتی، دکتر محمد منثوری، دکتر رمضان هاونگی، دکتر امین رمضانی، دکتر عبدالرسول قاسمی، پروفسور محمد فرخی، دکتر یزدان باتمانی.

مدیر سایت: مهندس نسیبه فراهانی

صفحه آرا: کیان خالوزاده

به نام خدا

فهرست مقالات

ارائه یک روش سیستماتیک برای طراحی و تحلیل یک سیستم هشدار تک متغیره مبتنی بر سناریوی پنالتی ۱

جعفر طاهری کلانی ،کوروش اصلان صفت، غلامرضا لطیف شبگاهی

کنترل محدود نگهدارنده سیستم های چندعاملی خطی متشکل از عامل های غیریکسان با استفاده از فیدبک خروجی دینامیکی ۱۷

حامد حق شناس، محمد علی بادامچی زاده، مهدی برادران نیا

طراحی الگوریتم پایداری حرکت توده ی ربات ها در صورت عدم برخورد با مانع و عدم تمایل به تجمع مبتنی بر معادلات لاگرانژ ۲۹

علی غفاری، علیرضا خدایاری، عباس پورمحمودی

کنترل آشوب در سیستم انتقال چرخ‌دنده با استفاده از روش کنترل مودلغزشی ترمینال تطبیقی جدید با عامل غیرخطی در ورودی کنترلی ۴۵

هادی دلاوری، میلاد محدث زاده

طراحی فیلترکالمن غیرخطی برای سیستمهای مرتبه کسری تصادفی غیرخطی همراه با نویز اندازه‌گیری با توزیع استیودنت تی ۵۵

سید حامد ترابی، ناصر پریز، علی کریم‌پور

کنترل غیرخطی بهینه مقاوم یک توربین بادی مجهز به ژنراتور القایی از دوسوتغذیه ۶۹

آزاده عزیزی، علی حسامی نقشبندی، یزدان باتمانی

مجله کنترل، مجله‌ای علمی – پژوهشی است که دربرگیرنده تازه‌ترین نتایج تحقیقات نظری و کاربردی در علوم مختلف مرتبط با مهندسی کنترل و ابزار دقیق می‌باشد. مقالات ارسالی به مجله کنترل می‌بایست به زبان فارسی و دارای چکیده انگلیسی باشند. از میان مباحث مورد نظر این مجله می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

۱) مدلسازی، شناسایی، شبیه سازی، پیش بینی، بهینه سازی و پایش عملکرد سیستم‌ها.
۲) تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل پیشرفته از قبیل سیستم‌های کنترل خطی و غیرخطی، سیستم‌های کنترل تطبیقی، کنترل مقاوم و کنترل بهینه، سیستم‌های کنترل هوشمند، سیستم‌های کنترل تصادفی، سیستم‌های کنترل گسسته پیشامد و ترکیبی، سیستم‌های ابعاد وسیع، سیستم‌های کنترل چندمتغیره.
۳) مکاترونیک و رباتیک.
۴) ابزار دقیق و سیستم‌های ترکیب داده و اطلاعات سنسوری.
۵) اتوماسیون صنعتی از قبیل سیستم‌های کنترل گسترده، رابط انسان – ماشین، سیستم‌های ایمنی و تشخیص عیب، تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل کسری، شناسایی، تشخیص و جبران عیب در سیستم‌ها، سیستم‌های کنترل پیچیده، سیستم‌های زمان حقیقی و سیستم‌های کنترل تحت نظارت، کنترل مدل چندگانه.

کاربردهای مورد علاقه مجله "کنترل"، وسیع بوده و می تواند در برگیرنده موارد زیر باشد:

۱) سیستم‌های هدایت و ناوبری.
۲) فرآیندهای صنعتی شامل فرآیندهای شیمیایی و بیوتکنولوژی.
۳) تولید و توزیع نیروی برق.
۴) انرژی های تجدیدپذیر.
۵) مهندسی محیط زیست و هواشناسی.
۶) سیستم‌های اقتصادی و مالی.
۷) سیستم‌های اطلاعاتی، مخابراتی و شبکه های صنعتی.
۸) مهندسی پزشکی، مهندسی زیستی و سامانه‌های زیستی.
۹) نانو کنترل.
۱۰) پردازش داده.
۱۱) مهندسی خودرو.
۱۲) سیستم های حمل و نقل.

از کلیه پژوهشگران و کارشناسان فعال در زمینه های مرتبط با مهندسی کنترل و ابزار دقیق دعوت بعمل می آید تا مقالات و نتایج آخرین دستاوردهای علمی و پژوهشی خود را به این مجله ارسال نمایند. خواهشمند است مقالات خود را به صورت الکترونیکی از

طریق سایت مجله www.joc-isice.ir ارسال فرمایید. برای کسب اطلاعات بیشتر و دریافت نحوه تهیه و ارسال مقالات می توانید به سایت مجله مراجعه نمایید.

شیوه تدوین

متن مقالات شامل چکیده، بدنه مقاله، مراجع و زیرنویس‌ها باید با فونت B Zar ۱۲ و با فاصله double میان خطوط، در صفحات A4 یک ستونی و تحت نرم‌افزار Word تهیه گردد.

آدرس نویسندگان

آدرس پستی کامل همه نویسندگان همراه با شماره تلفن و دورنگار(فکس) و نشانی پست الکترونیک(email) نویسنده عهده‌دار مکاتبات در برگه مستقلی چاپ و به همراه مقاله ارسال گردد.

چکیده

هر مقاله باید شامل، عنوان (فارسی و انگلیسی)، چکیده (فارسی و انگلیسی) مقاله در حداکثر ۲۰۰ واژه، کلیدواژه (فارسی و انگلیسی) در حداکثر ۵ واژه باشد.

تصاویر و عکس‌ها

در هنگام ارسال مقاله جهت داوری نیازی به ارسال اصل تصاویر و عکس‌ها نمی‌باشد، ولی رونوشت ارسالی باید واضح باشد. پس از تایید مقاله، ارسال اصل تصاویر و عکس‌ها جهت چاپ مقاله ضروری می‌باشد.

مراجع

به کلیه مراجع باید در متن ارجاع داده شده باشد. مراجع باید با شماره مشخص گردند و جزئیات آنها به شرح زیر در پایان مقاله به ترتیب حروف الفبای نویسندگان ظاهر گردد:

مقالات

[شماره مرجع] نام خانوادگی و علامت اختصاری اول نام، سال انتشار یا تاریخ برگزاری، "عنوان مقاله"، *نام کامل نشریه یا کنفرانس*، شماره مجله یا شماره جلد، شماره صفحات.

کتابها

[شماره مرجع] نام خانوادگی و نام کامل همه نویسندگان، *عنوان کتاب*، نام مترجم (در صورت وجود)، نام کامل ناشر، سال انتشار.

واحدها

کلیه مقالات باید از واحد استاندارد SI (متریک) در تمام بخشهای مقاله استفاده نمایند. در کنار واحد SI می‌توان از واحد انگلیسی در داخل پرانتز نیز استفاده نمود.

طول مقالات

حداکثر تعداد صفحات مقاله ۱۵ صفحه است که معادل حدود ۷۵۰۰ واژه است. برای چاپ صفحات بیشتر و یا رنگی لازم است هزینه‌ای معادل ۲۵۰،۰۰۰ ریال (۲۵ دلار آمریکا) برای هر صفحه پرداخت گردد.

فرآیند ارسال مقاله

مقالات قابل چاپ در مجله شامل مقالات کامل پژوهشی، مقالات کوتاه و یادداشتهای پژوهشی است. مقالات ارسالی نباید در هیچ مجله داخلی و یا خارجی چاپ شده باشد و یا در حال داوری باشد.

- برای ارسال مقاله خود به سایت مجله به آدرس www.joc-isice.ir مراجعه نموده و طبق دستورالعمل مندرج در سایت عمل نمایید.
- مقالات جهت داوری به داوران متخصص ارسال می‌گردد. در پایان تایید یا رد هر مقاله توسط هیئت تحریریه مجله انجام خواهد پذیرفت. سردبیر مجله نتیجه داوری را برای نویسنده عهده دار مکاتبات ارسال خواهد نمود.
- درصورتی‌که نیاز به تصحیح مقاله باشد، تصحیحات باید تنها محدود به موارد ذکرشده باشد. در سایر موارد نویسنده لازم است سردبیر را در جریان هرگونه تغییر و یا تصحیح دیگری قرار دهد. درهرصورت مسئولیت صحت و سقم مطالب بر عهده نویسنده خواهد بود.

حق کپی

در صورت تایید مقاله، نویسندگان لازم است فرم انتقال حق انتشار آن به "انجمن مهندسان کنترل و ابزاردقیق ایران" را تکمیل و به همراه اصل مقاله ارسال نماید. نویسندگان لازم است موافقت کتبی دارندگان حق کپی بخشهایی از مقاله که از مراجع و منابع دیگر نسخه‌برداری شده است را دریافت و به دفتر مجله ارسال نمایند.

مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۱۰، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۵، صفحه ۱۵-۱

ارائه یک روش سیستماتیک برای طراحی و تحلیل یک سیستم هشدار تک‌متغیره مبتنی بر سناریوی پنالتی

جعفر طاهری کلانی[۱]، کوروش اصلان صفت[۲]، غلامرضا لطیف شبگاهی[۳]

[۱] دانشجوی دکترای مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه شهید بهشتی، Ja_Taheri@abu.ac.ir

[۲] فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه شهید بهشتی، k_aslansefat@abu.ac.ir

[۳] استادیار دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه شهید بهشتی، Gh_latif@abu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۷/۶، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۵/۱۰/۵)

چکیده: در این مقاله حالت توسعه‌یافته‌ای از تایمرهای تأخیری بر مبنای ایده پنالتی و زنجیره مارکوف برای طراحی یک سیستم هشدار ارائه شده است. مکانیزم پنالتی در واقع حالت توسعه یافته روش n نمونه تأخیر در رخداد/قطع هشدار است. در این مقاله شاخص‌های "نرخ هشدار نادرست" ، "نرخ هشدار از دست رفته" و "میانگین تأخیر هشدار" برای سناریوی n نمونه تأخیر و تعداد پنالتی i با استفاده از مدل مارکوف استخراج شده و عملکرد سیستم هشدار مورد ارزیابی قرار می گیرد. به منظور محاسبه شاخص میانگین تأخیر هشدار در سناریوی پنالتی، شاخص جدیدی تحت عنوان "میانگین زمانی رخداد هشدار" با استفاده از مفهوم "میانگین زمانی بین خرابی" در بحث قابلیت اطمینان سیستم‌ها معرفی می گردد و با استفاده از آن، شاخص "میانگین تأخیر هشدار" محاسبه می گردد. مقاله با معرفی یک تابع هدف مبتنی بر شاخص های مذکور، مقادیر بهینه ای را برای "تعداد تأخیرها" و "تعداد پنالتی ها" بر اساس الگوریتم ژنتیک تعیین می کند. نشان داده می شود که الگوریتم معرفی شده در مقایسه با روش n نمونه تأخیر در طراحی سیستم های هشدار، از عملکرد بهتری برخوردار است. به منظور نشان دادن عملکرد مناسب سناریوی پنالتی، این ایده بر روی چندین مثال صنعتی و کاربردی اعمال شده و نتایج حاصله با روش های معمول مقایسه شده است.

کلمات کلیدی: سیستم هشدار، تایمر تأخیری، سناریوی پنالتی، میانگین زمانی رخداد هشدار، الگوریتم ژنتیک.

A Systematic Approach to Design and Analysis of Univariate Alarm Systems Using Penalty Approaches

Jafar Taheri Kalani, Kourosh Aslansefat, Gholamreza Latif Shabgahi

Abstract: This paper presents a new method for designing a generalized delay timer based on penalty scenario and Markov chain schemes. The penalty approach is the extension of n-sample on/off delay approaches in designing alarm systems. Three performance indices named, False Alarm Rate (FAR), Missed Alarm Rate (MAR) and Average Alarm Delay (AAD) are derived for penalty approaches using Markov models. Also, the new index named “Mean Time to Alarm (MTTA)” is introduced to analysis alarm system and computation of AAD in penalty scenario. The optimal values of delays and penalties are derived based on target function using Genetic Algorithm (GA). Finally, the effectiveness of the proposed method is investigated and compared with other methods through a case study.

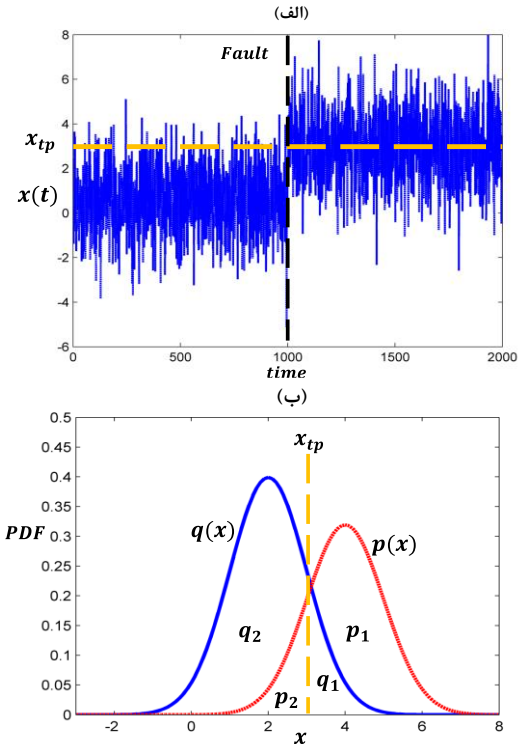
Keywords: Alarm system, Delay timer, Penalty scenario, Mean Time to Alarm, Genetic Algorithm.

۱- مقدمه

امروزه سیستم های تشخیص و مدیریت هشدار جزء لاینفک سیستم های صنعتی به شمار می روند و نقش بسزایی در ایمنی و عملکرد مناسب سیستم های صنعتی دارند. مکانیزم هشدار در سیستم های مانیتورینگ امروزی مانند سیستم های کنترلی توزیع شده[1] (DCS) ، کنترل نظارتی[2] و سیستم های اکتساب داده (SCADA) کاربرد فراوانی دارد. یک سیستم هشدار مجموعه ای از سخت افزارها و نرم افزارها است که بر مبنای یک سری استانداردها [۱-۲] در تولید هشدار، در تشخیص به موقع خطاهای رخ داده در قسمت های مختلف یک واحد صنعتی کمک می کند. واحدهای صنعتی بزرگ از اجزاء فراوانی تشکیل شده اند که ممکن است در هر کدام از اجزاء این سیستم خطا رخ دهد، از این رو تشخیص رخداد خطا و پاسخ دهی به آنها یک موضوع حیاتی است. معمولاً اطلاعات واحدهای مختلف یک سیستم صنعتی به صورت متمرکز و از طریق مانیتورینگ، کنترل می شود. با پیچیده تر شدن واحد صنعتی، تعداد هشدار هایی که بوسیله سیستم هشدار صادر می شود زیاد شده و حتی در بعضی اوقات به حالت سیل هشدار[3] می رسد که تشخیص هشدار های ضروری بوسیله کاربر تقریباً غیرممکن می شود. از این رو طراحی یک سیستم هشدار مناسب که بتواند این هشدار ها را مدیریت کرده و فقط به هشدار های ضروری پاسخ دهد از اهمیت فراوانی برخوردار است. لذا در سال های اخیر ، طراحی و تحلیل سیستم های هشدار در مراجع مختلف [۳-۲۰] مورد توجه محققان قرار گرفته است.

۱-۱ مرور کارهای گذشته

در مرجع [۳] روشی نرم افزاری برای کاهش تعداد هشدار ها برمبنای پاک سازی هشدار ها ارائه شده است. در مرجع [۴] یک روش هندسی برای مدیریت و کاهش هشدار برای سیستم های چند متغیره بیان شده است. در مرجع [۵] روش تخمین باند مرده[4] به منظور کاهش هشدار ها و در [۶] روشی برای کاهش پدیده چترینگ هشدار[5] بر اساس مفهوم طول اجرا[6] مورد توجه قرار گرفته است. در مراجع [۷-۸] روشی مبتنی بر کران هشدار[7] برای مدیریت هوشمند هشدار پیشنهاد شده است. در بعضی مراجع مانند [۹-۱۱] فیلترینگ هشدار[8] مورد بحث قرار گرفته است. در مرجع [۹] از درخت عیب دینامیکی استفاده شده است. در مرجع [۱۰] شاخص میانگین تأخیر در تشخیص عیب برای فیلترهای MV محاسبه شده و در مرجع [۱۱] شرایط بهینه انتخاب پارامترهای یک فیلتر MV مورد بررسی قرار گرفته است. در مراجع [۱۲] و [۱۳] بحث تشخیص پدیده "چترینگ هشدار" مورد بررسی قرار گرفته است و معیارهایی برای تشخیص چترینگ هشدار مبتنی بر مفهوم "طول اجرا" معرفی گردیده است. در مرجع [۱۴] سناریوی n نمونه تأخیر در رخداد و قطع هشدار معرفی گردیده و در مرجع [۱۵] سناریوی n out-of m به عنوان حالت عمومی تایمرهای تأخیری معرفی شده است و در مرجع [۱۶] شاخص تأخیر در تشخیص هشدار برای تایمرهای تأخیری و باند مرده محاسبه شده است. در سال‌های اخیر علاوه بر سیستم های هشدار تک متغیره، سیستم های هشدار چندمتغیره نیز مورد توجه قرار گرفته است. در مرجع [۱۷] روشی برای تنظیم بهینه آستانه در سیستم های چند متغیره و در مرجع [۱۸] با استفاده از توزیع T2 و Q آماری، روشی برای تشخیص عیب های جمعی و ضربی در سیستم های چند متغیره معرفی گردیده است. علاوه بر سیستم های چند متغیره در سال های اخیر، کاربرد تئوری های تصمیم گیری در طراحی سیستم های هشدار نیز مورد توجه قرار گرفته است. در مرجع [۱۹] از "تئوری شواهد" به عنوان راهکاری برای طراحی یک سیستم هشدار استفاده شده است و مرجع [۲۰] به عنوان یک مقاله مروری، علاوه بر دلایل عمده وقوع پدیده سیل هشدار و مراحل طراحی یک سیستم هشدار، به روش های طراحی سیستم های هشدار، چالش‌ها و موضوعات تحقیقاتی باز در حوزه سیستم های هشدار پرداخته است.



شکل ۱: (الف): فضای نمونه یک سیگنال گسسته تصادفی. (ب) : توابع توزیع احتمال مربوط به قسمت های نرمال و غیر نرمال سیگنال $x(t)$

در طراحی و تحلیل عملکرد یک سیستم هشدار شاخص‌هایی مانند تعداد هشدارها در ساعت، پیک تعداد هشدارها در ساعت و ... مورد استفاده قرار می گیرد [۲] علاوه بر آن، معمولاً سه شاخص، نرخ هشدار

[1] Distributed Control Systems
[2] Supervisory Control
[3] Alarm Floods
[4] Dead Band
[5] Alarm Chattering
[6] Run Length
[7] Alarm Limits
[8] Alarm Filtering

نادرست[1] (FAR)، نرخ هشدار از دست رفته[2] (MAR) و میانگین تأخیر هشدار[3] (AAD) نیز در تحلیل و طراحی سیستم های هشدار مورد استفاده قرار می گیرد [۱۴]. پارامتر FAR عملکرد سیستم هشدار در تشخیص هشدار های ناصحیح از صحیح را نشان می دهد، پارامتر MAR بیانگرهشدار های رخ داده از دست رفته است و پارامتر AAD نیز معرف سرعت عملکرد سیستم هشدار در تشخیص هشدار هایِ رخ داده است. با توجه به این تعاریف می توان نتیجه گرفت، هر چقدر که این پارامترها کوچکتر باشند عملکرد سیستم هشدار بهتر خواهد بود. در مرجع [۱۴] سناریوی n نمونه تأخیر برای طراحی یک تایمر تأخیری معرفی شده است و با استفاده از زنجیره مارکوف شاخص‌های مختلف یک سیستم هشدار مورد ارزیابی قرار گرفته است. در مرجع [۱۵] سناریوی m out-of n به عنوان حالت عمومی تایمرهای تأخیری معرفی گردیده است.

۲-۱ الگوریتم پیشنهادی

در این مقاله حالت جامع تری نسبت به روش ارائه شده در مرجع [۱۴] برای طراحی سیستم هشدار مبتنی بر پارامتر پنالتی i معرفی می شود. سناریوی پنالتی در واقع حالت توسعه یافته روش n نمونه تأخیر در رخداد هشدار است که در مرجع [۱۴] معرفی شده است. در این مقاله علاوه بر شاخص های FAR و MAR ، شاخص دیگری به نام "میانگین زمان رخداد هشدار" یا MTTA[4] معرفی می گردد و نشان داده می شود که با استفاده از این شاخص، می توان شاخص AAD معرفی شده در مرجع [۱۴] را به راحتی برای سناریوی پنالتی محاسبه کرد. این در حالی است که محاسبه شاخص AAD برای سناریوی پنالتی با استفاده از روش مرجع [۱۴] تا حدودی مشکل و زمان بر است. این شاخص ها برای یک سیستم هشدار با n نمونه تأخیر در روشن/خاموش شدن هشدار با تعداد i پنالتی با استفاده از مدل مارکوف استخراج می شود. با اضافه کردن پارامتر i به مسأله، درجه آزادی طراحی سیستم هشدار افزایش پیدا می کند و امکان رسیدن به اهداف طراحی افزایش می یابد اما استخراج شاخص‌های FAR و MAR در حالت کلی پیچیده می شود. لذا الگوریتمی برای تحلیل مدل‌های مارکوف و استخراج این شاخص‌ها معرفی می گردد. پس از استخراج شاخص های عملکردی سیستم هشدار، به منظور انتخاب بهینه پارامترهای n ، i و آستانه از الگوریتم بهینه سازی ژنتیک استفاده می گردد. درنهایت عملکرد الگوریتم پیشنهادی با ارائه چندین مثال عددی و صنعتی مورد بررسی قرار گرفته و برتری آن نسبت به روش های مرسوم طراحی سیستم های هشدار نشان داده می شود.

این مقاله به صورت زیر سازماندهی می شود. بخش ۲ به تعاریف اولیه و معرفی شاخص‌های یک سیستم هشدار پایه پرداخته است. در بخش ۳ روش مرسوم n نمونه تأخیر در طراحی سیستم هشدار و روش جدید پیشنهادیِ مبتنی بر سناریوی پنالتی معرفی می گردد. در بخش ۴ شاخص های ارزیابی عملکرد سیستم هشدار و نحوه استخراج آنها از روی مدل مارکوف سیستم توضیح داده می‌شود. بخش ۵ با جمع بندی مطالب گفته شده، یک روش سیستماتیک برای طراحی سیستم هشدار مبتنی بر الگوریتم ژنتیک ارائه می کند. روش پیشنهادی روی چند مثال واقعی اعمال شده و نتایج شبیه سازی حاصله با نتایج حاصل از اعمال روش ارائه شده در مرجع [۱۴] مقایسه و تحلیل شده است.

۲- شاخص های عملکردی برای یک سیستم هشدار پایه

در این بخش، شاخص های MAR،FAR و AAD مربوط به یک سیستم هشدار پایه برای یک سیستم تک متغیره (تک سنسوره) بیان می گردد. فضای نمونه مربوط به سیگنال گسسته تصادفی $x(t)$ با دوره نمونه برداری h نشان داده شده در شکل ۱ (الف) را در نظر بگیرید. در این شکل x_{tp} آستانه در نظر گرفته شده برای رخداد هشدار است. فرض کنید که در لحظه $t = 1000h$ یک عیب رخ داده باشد و سناریوی رخداد و قطع هشدار بدین صورت باشد که، اگر n نمونه پشت سر هم از سیگنال $x(t)$ از سطح x_{tp} عبور کند(بالاتر باشد)، هشدار صادر می شود. در صورتیکه n نمونه پشت سرهم بعدی از سطح x_{tp} پایین تر باشد هشدار صادر شده قبلی قطع می گردد. برای سادگی حالت $n = 1$ را در نظر بگیرید. لذا داده های $x(1:1000)$ به عنوان داده‌های نرمال و داده های $x(1001:2000)$ به عنوان داده‌های غیرنرمال در نظر گرفته می شود. پس از جداسازی داده های نرمال و غیرنرمال، می توان توزیع احتمالاتی این داده ها را تخمین زد. تابع توزیع احتمال برای این داده ها مطابق شکل ۲ (ب)، به صورت نرمال فرض شده است. در این شکل $q(x)$ تابع توزیع احتمال مربوط به داده های نرمال و $p(x)$ تابع توزیع مربوط به داده های غیرنرمال می باشد.

برای این سیستم هشدار پایه، پارامتر FAR برابر است با سطح زیر نمودار تابع توزیع احتمال مربوط به داده های نرمال که از x_{tp} بزرگتر باشند و به صورت زیر تعریف می شود:

$$FAR = q_1 = \int_{x_{tp}}^{+\infty} q(x)dx \qquad (۱)$$

در واقع شاخص FAR بیانگر هشدارهایی است که به واسطه داده های نرمال که بالاتر از آستانه قرار گرفته اند، اتفاق افتاده است. واضح است که این هشدارها، هشدارهای اضافی هستند. همچنین پارامتر MAR برابر است با سطح زیر نمودار تابع توزیع احتمال مربوط به داده های غیرنرمال که از x_{tp} کوچکتر باشند و به صورت زیر تعریف می شود:

$$MAR = p_2 = \int_{-\infty}^{x_{tp}} p(x)dx \qquad (۲)$$

که بیانگر هشدارهایی است که به واسطه داده های غیرنرمال که پایین آستانه قرار گرفته اند، از دست رفته است یا رخ نداده است.

[1] False Alarm Rate
[2] Miss Alarm Rate
[3] Average Alarm Delay
[4] Mean Time To Alarm

اگر t_0 لحظه وقوع عیب باشد و t_a لحظه رخداد هشدار باشد، T_d به عنوان تأخیر در رخداد هشدار در نظر گرفته شده و به صورت زیر تعریف می گردد:

$$T_d = t_a - t_0 \qquad (۳)$$

با توجه با اینکه سیگنال $x(t)$ یک سیگنال تصادفی گسسته با زمان نمونه برداری h است، T_d نیز یک متغیر تصادفی گسسته به صورت $\{0h. 1h. 2h. \ldots\}$ خواهد بود لذا پارامتر AAD به صورت امید ریاضی متغیر تصادفی T_d تعریف می گردد و به صورت زیر بیان می شود

$$AAD = E\left(T_d\right) \qquad (۴)$$

با توجه به مرجع [۱۴]، پارامتر AAD را می توان بر حسب متغیرهای p_1 و p_2 بیان کرد:

$$AAD = E\left(T_d\right) = \sum_{i=0}^{\infty} ihp_2^i p_1 = h\frac{p_2}{p_1} \qquad (۵)$$

که در رابطه بالا $p_1 = 1 - p_2$ است.

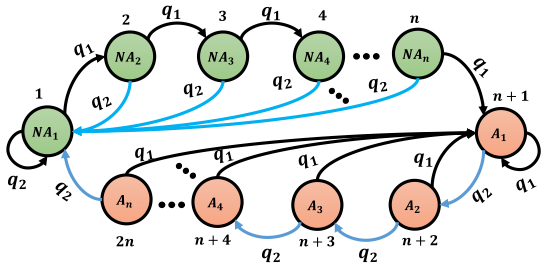
در این بخش فرض کردیم که $n = 1$ باشد و هر بار که یک نمونه از سیگنال از سطح آستانه بیشتر شد، هشدار صادر گردد و هر بار که یک نمونه کوچکتر از آستانه شد سیگنال هشدار قطع گردد. در حالت کلی می توان برای مقادیر مختلفی از n، سیستم هشدار را طراحی کرد. این هدف با استفاده از ابزار مارکوف قابل دستیابی است. در ادامه سناریوهای مختلف در طراحی تایمرهای تأخیری و سناریوی پیشنهادی پنالتی معرفی می گردد.

۳- معرفی سناریوی ریست و ارائه الگوریتم پیشنهادی (سناریوی پنالتی)

در این بخش ابتدا روش مرجع [۱۴] در طراحی سیستم های هشدار مورد بررسی قرار می گیرد که در این مقاله تحت عنوان سناریوی ریست معرفی می گردد و در ادامه حالت توسعه یافته تری از این روش تحت عنوان سناریوی پنالتی معرفی می گردد. در این بخش فرض می شود که بالاتر بودن مقدار سیگنال از سطح آستانه منجر به وقوع هشدار می گردد.

۳-۱ سناریوی ریست

در این سناریو اگر n نمونه پشت سرهم از سیگنال $x(t)$ از سطح آستانه x_{tp} بالاتر باشد سیستم به حالت هشدار رفته و تا زمانیکه n نمونه متوالی از سطح آستانه پایین تر قرار نگیرد، هشدا قطع نمی گردد. سوال این است که اگر در بین این n نمونه که بالاتر/پایین‌تر از سطح آستانه قرار دارند، یک یا چند نمونه از سیگنال پایین‌تر/بالاتر از سطح آستانه باشد، سیستم هشدار بایستی چه تصمیمی بگیرد؟ این موضوع را می توان به کمک زنجیره مارکوف نشان داد. در شکل ۲ مدل مارکوف متناظر با شاخص FAR مربوط به یک سیستم هشدار با n نمونه تأخیر در رخداد و قطع هشدار با استفاده از سناریوی ریست، نشان داده شده است. حالت های بدون هشدار با NA و حالت های هشدار با A نمایش داده شده اند. در این شکل پارامتر q_1 همان پارامتر معرفی شده در (۱) می باشد و $q_2 = 1 - q_1$ است.



شکل ۲: مدل مارکوف داده های نرمال مربوط به سناریوی ریست برای n نمونه تأخیر در رخداد و قطع هشدار

با توجه به شکل ۲، فرض کنید اولین نمونه از سیگنال $x(t)$ پایین‌تر از آستانه باشد، در اینصورت در حالت NA_1 قرار داریم. اگر نمونه بعدی نیز پایین‌تر از آستانه باشد، در اینصورت با احتمال q_2 در همان حالت می مانیم و اگر نمونه بعدی بالاتر از آستانه باشد، آنگاه با احتمال q_1 به حالت NA_2 خواهیم رفت. حال اگر نمونه بعدی نیز بالاتر از آستانه باشد به حالت NA_3 خواهیم رفت. به همین شکل اگر n نمونه پشت سرهم بالاتر از آستانه قرار گیرد، سیستم هشدار به حالت هشدار A_1 خواهد رفت و هشدار صادر خواهد شد. حال اگر بین این n نمونه، نمونه ای از سیگنال پایین‌تر از آستانه قرار گیرد، سیستم هشدار به حالت اولیه NA_1 ریست خواهد شد. از این جهت این سناریو را سناریوی ریست می نامیم. در حالت هشدار یعنی A_1، اگر نمونه بعدی بالاتر از آستانه باشد در همان حالت می مانیم و اگر پایین‌تر باشد با احتمال q_2 به حالت A_2 خواهیم رفت و این روند ادامه پیدا خواهد کرد تا اینکه n نمونه پشت سرهم از سیگنال $x(t)$ پایین‌تر از آستانه قرار گیرد که در اینصورت به حالت NA_1 خواهیم رسید و هشدار قطع می گردد.

با توجه به [۱۴]، اگر معادلات مارکوف مربوط به شکل ۳ را در حالت ماندگار نوشته و حل کنیم، شاخص FAR به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$FAR = \frac{q_1^n\left(1+q_2+\ldots+q_2^{n-1}\right)}{q_1^n\left(1+q_2+\ldots+q_2^{n-1}\right)+q_2^n\left(1+q_1+\ldots+q_1^{n-1}\right)} \qquad (۶)$$

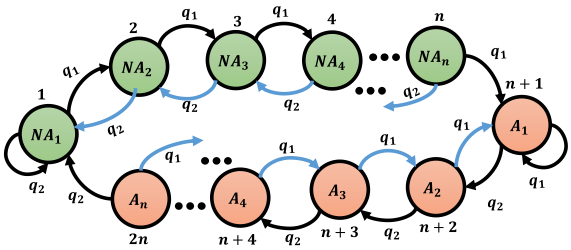
که در آن P احتمال حالت ماندگار است. حال اگر بخواهیم مدل مارکوف مربوط به شاخص MAR را رسم کنیم، کافی است در شکل ۳، به جای q_2 و q_1 به ترتیب p_2 و p_1 قرار دهیم. که در این حالت شاخص MAR به صورت زیر قابل محاسبه است

$$MAR = \frac{p_2^n\left(1+p_1+\ldots+p_1^{n-1}\right)}{p_2^n\left(1+p_1+\ldots+p_1^{n-1}\right)+p_1^n\left(1+p_2+\ldots+p_2^{n-1}\right)} \qquad (۷)$$

در ادامه سناریوی پیشنهادی یعنی سناریوی پنالتی را معرفی می کنیم.

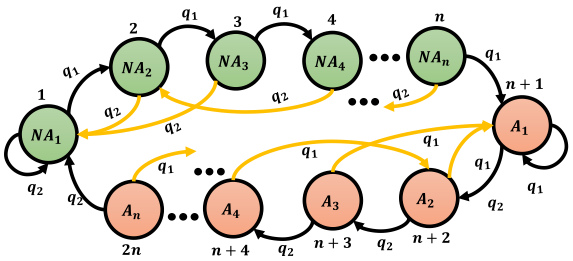
۳-۲ سناریوی پنالتی

فرض کنید که بعد از m نمونه پشت سرهم $(m < n)$ از سیگنال که بالاتر از آستانه قرار گرفته اند یک نمونه از سیگنال پایین آستانه قرار گیرد. در سناریوی ریست اثر آن m نمونه که بالاتر از آستانه قرار داشته اند نادیده گرفته شده و سیستم ریست می شود و دوباره از اول شروع به کار می کند. این تصمیم باعث می شود میزان تأخیر در وقوع هشدار افزایش یابد. در این قسمت می خواهیم مفهومی به نام پنالتی را معرفی کنیم که این مشکل را تا حدودی برطرف کند. فرض کنید پنالتی را با i نشان دهیم. در شکل ۳ مدل مارکوف مربوط به یک سیستم هشدار با n نمونه تأخیر در رخداد هشدار و n نمونه تأخیر در قطع آن با پنالتی $i = 1$ نشان داده شده است.



شکل ۳: مدل مارکوف مربوط به سناریوی پنالتی برای n نمونه تأخیر در رخداد و قطع هشدار با پنالتی $i = 1$

همان طور که در شکل ۳ مشاهده می شود، اگر بین نمونه های بالاتر از آستانه، یک نمونه پایین‌تر از آستانه قرار گیرد، بر خلاف سناریوی ریست، سیستم هشدار به حالت NA_1 ریست نمی شود بلکه یک واحد به عقب بر می گردد. به عنوان مثال، اگر در حالت NA_3 قرار داشته باشیم و نمونه بعدی پایین تر از آستانه باشد، سیستم هشدار به حالت قبلی آن یعنی NA_2 می رود نه به حالت NA_1. به طور مشابه اگر در حالت A_4 قرار داشته باشیم و نمونه بعدی پایین تر از آستانه باشد، سیستم هشدار به حالت قبلی خود یعنی A_3 می رود. این روند برای بقیه حالت ها نیز وجود خواهد داشت. حال فرض کنید پنالتی برابر $i = 2$ باشد. شکل ۴ مدل مارکوف متناظر با این حالت را نشان می دهد. با توجه به شکل ۴، در این حالت سیستم هشدار به اندازه ۲ واحد به عقب بر می گردد. به عنوان مثال اگر در حالت NA_4 قرار داشته باشیم و نمونه بعدی سیگنال پایین‌تر از آستانه باشد، سیستم هشدار به دو حالت قبلتر یعنی حالت NA_2 می رود و این روند برای بقیه حالت ها هم وجود خواهد داشت. به طور کلی اگر پنالتی برابر i باشد، سیستم هشدار به i حالت قبلتر از حالت فعلی خود ریست خواهد شد. از مقایسه شکل های ۲ تا ۴ می توان نتیجه گرفت که سناریوی ریست در واقع حالت خاصی از سناریوی پنالتی با پنالتی $i = n - 1$ می باشد. می توان دریافت که برای $i < n - 1$ میزان تأخیر در هشدار کاهش می یابد و از این طریق می توان مشکل سناریوی ریست را برطرف کرد. در ادامه تأثیر پارامتر i در شاخص‌های سیستم هشدار برای حالت کلی n نمونه تأخیر با پنالتی i بررسی می گردد.



شکل ۴: مدل مارکوف مربوط به سناریوی پنالتی برای n نمونه تأخیر در رخداد و قطع هشدار با پنالتی $i = 2$

۴- شاخص‌های سیستم هشدار در سناریوی پنالتی

در این بخش پارامترهای سیستم هشدار یعنی FAR، MAR و AAD به همراه معرفی پارامتر MTTA برای یک سیستم هشدار با پنالتی i و n نمونه تأخیر در رخداد/قطع هشدار معرفی شده و روابط مربوط به آنها استخراج می شود. این شاخص‌ها برای پنالتی $i = 1$ با استفاده از حل معادلات مارکوف در حالت ماندگار استخراج می شود و برای حالت کلی n نمونه تأخیر و پنالتی i الگوریتمی معرفی می گردد که بتوان بدون نیاز به رسم و حل مدل‌های مارکوف، شاخص‌های مختلف را محاسبه کرد.

مدل مارکوف شکل ۳ را در نظر بگیرید. این مدل، مدل شاخص FAR در حالت کلی n نمونه تأخیر با پنالتی $i = 1$ می باشد. ماتریس گذار حالت برای این شکل به صورت زیر می باشد.

$$Q = \left[\begin{array}{cccccc:cccccc} q_2 & q_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_2 & 0 & q_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & q_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & q_2 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q_2 & 0 & q_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & q_1 & q_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & q_1 & 0 & q_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & q_1 & 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & q_1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & q_2 \\ q_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q_1 & 0 \end{array}\right] \quad (۸)$$

معادلات حالت ماندگار مارکوف را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\Pi = \Pi \times Q \quad (۹)$$

که در رابطه بالا $\Pi = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \cdots \quad \pi_{2n}]$ می باشد که π_1 تا π_{2n} احتمال هر کدام از حالت های مدل مارکوف در شکل ۲ می باشد. از معادلات (۸) و (۹) داریم:

$$I: \begin{cases} \pi_1 = q_2(\pi_1 + \pi_2 + \pi_{2n}) \\ \pi_2 = q_1\pi_1 + q_2\pi_3 \\ \pi_3 = q_1\pi_2 + q_2\pi_4 \\ \vdots \\ \pi_{n-1} = q_1\pi_{n-2} + q_2\pi_n \\ \pi_n = q_1\pi_{n-1} \end{cases}, \Pi: \begin{cases} \pi_{n+1} = q_1(\pi_{n+1} + \pi_{n+2} + \pi_n) \\ \pi_{n+2} = q_2\pi_{n+1} + q_1\pi_{n+3} \\ \pi_{n+3} = q_2\pi_{n+2} + q_1\pi_{n+4} \\ \vdots \\ \pi_{2n-1} = q_2\pi_{2n-2} + q_2\pi_{2n} \\ \pi_{2n} = q_2\pi_{2n-1} \end{cases} \quad (۱۰)$$

از معادلات بالا بخش *I* می توان نتیجه گرفت

$$\pi_n = \frac{q_1}{\alpha_n}\pi_{n-1}\ ,\ \ \pi_{n-1} = \frac{q_1}{\alpha_{n-1}}\pi_{n-2} \qquad (۱۱)$$

که در اینجا $\alpha_n = 1,\ \alpha_{n-1} = 1 - q_1 q_2$ و برای $2 \le k \le n-2$ داریم

$$\pi_{n-k} = \frac{q_1 \alpha_{n-(k-1)}}{\alpha_{n-k}}\pi_{n-(k+1)}$$
$$\alpha_{n-k} = \alpha_{n-(k-1)} - q_1 q_2 \alpha_{n-(k-2)} \qquad (۱۲)$$

با استفاده از روابط (۱۰) تا (۱۲) داریم

$$\sum_{k=1}^{n}\pi_k = \pi_1 + \underbrace{\left[\frac{q_1\alpha_3}{\alpha_2}\pi_1\right]}_{\pi_2} + \underbrace{\left[\frac{q_1\alpha_4}{\alpha_3}\pi_2\right]}_{\pi_3} + \underbrace{\left[\frac{q_1\alpha_5}{\alpha_4}\pi_3\right]}_{\pi_4} + \ldots + \underbrace{\left[\frac{q_1}{\alpha_{n-1}}\pi_{n-2}\right]}_{\pi_{n-1}} + \underbrace{\left[\frac{q_1}{\alpha_n}\pi_{n-1}\right]}_{\pi_n} \qquad (۱۳)$$

با استفاده مجدد از رابطه (۱۲)

$$\sum_{k=1}^{n}\pi_k = \pi_1 + \left[\frac{q_1\alpha_3}{\alpha_2}\pi_1\right] + \left[\frac{q_1\alpha_4}{\alpha_3}\times\frac{q_1\alpha_3}{\alpha_2}\pi_1\right] + \left[\frac{q_1\alpha_5}{\alpha_4}\times\frac{q_1\alpha_4}{\alpha_3}\times\frac{q_1\alpha_3}{\alpha_2}\pi_1\right] + \ldots \qquad (۱۴)$$

پس از ساده سازی، رابطه بالا به صورت زیر خواهد شد

$$\sum_{k=1}^{n}\pi_k = \pi_1\left(1 + \frac{q_1\alpha_3 + q_1^2\alpha_4 + q_1^3\alpha_5 + \ldots + q_1^{n-1}}{\alpha_2}\right) \qquad (۱۵)$$

به روشی مشابه برای معادلات (۱۰) بخش *II* می توان به روابط زیر رسید

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\pi_k = \pi_{n+1}\left(1 + \frac{q_2\beta_{n+3} + q_2^2\beta_{n+4} + q_2^3\beta_{n+5} + \ldots + q_2^{n-1}}{\beta_{n+2}}\right) \qquad (۱۶)$$

در رابطه بالا

$$\pi_{2n} = \frac{q_2}{\beta_{2n}}\pi_{2n-1}\ ,\ \ \pi_{2n-1} = \frac{q_2}{\beta_{2n-1}}\pi_{2n-2} \qquad (۱۷)$$

که در اینجا $\beta_{2n} = 1$، $\beta_{2n-1} = 1 - q_1 q_2$ و برای $n+2 \le k \le 2n-2$ داریم

$$\pi_{2n-k} = \frac{q_2\beta_{2n-(k-1)}}{\beta_{2n-k}}\pi_{2n-(k+1)}$$
$$\beta_{2n-k} = \beta_{2n-(k-1)} - q_1 q_2 \beta_{2n-(k-2)} \qquad (۱۸)$$

با استفاده از رابطه (۱۰) معادله اول بخش *I* می توان نوشت

$$\pi_1 = q_2\left(\pi_1 + \pi_2 + \pi_{2n}\right) \qquad (۱۹)$$

با استفاده از روابط (۱۱)، (۱۲)، (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) داریم

$$\pi_1 = \left[\frac{\alpha_2 q_2^n}{\beta_{n+2}\left(\alpha_2 - q_2\alpha_2 - q_1 a_3\right)}\right]\pi_{n+1} \qquad (۲۰)$$

از طرفی می دانیم که مجموع احتمالات حالات مختلف مدل مارکوف برابر یک است یعنی $\sum_{k=1}^{2n}\pi_k = 1$. لذا

$$\sum_{k=1}^{2n}\pi_k = \sum_{k=1}^{n}\pi_k + \sum_{k=n+1}^{2n}\pi_k = 1 \qquad (۲۱)$$

با استفاده از روابط (۱۵)، (۱۶)، (۲۰) و (۲۱) داریم

$$\pi_{k+1} = \frac{\beta_{n+2} q_1^n}{q_2^n X_\alpha + q_1^n X_\beta} \qquad (۲۲)$$

که در رابطه بالا

$$X_\alpha = \alpha_2 + q_1\alpha_3 + q_1^2\alpha_4 + q_1^3\alpha_5 + \ldots + q_1^{n-1}$$
$$X_\beta = \beta_{n+2} + q_2\beta_{n+3} + q_2^2\beta_{n+4} + q_2^3\beta_{n+5} + \ldots + q_2^{n-1} \qquad (۲۳)$$
$$\alpha_2 - q_2\alpha_2 - q_1 a_3 = q_1^n$$

با استفاده از روابط (۱۸)، (۲۲) و (۲۳)، شاخص FAR برابر است با

$$FAR = \sum_{k=n+1}^{2n}\pi_k = \pi_{n+1}\left(\frac{X_\beta}{\beta_{n+2}}\right) = \frac{q_1^n X_\beta}{q_2^n X_\alpha + q_1^n X_\beta} \qquad (۲۴)$$

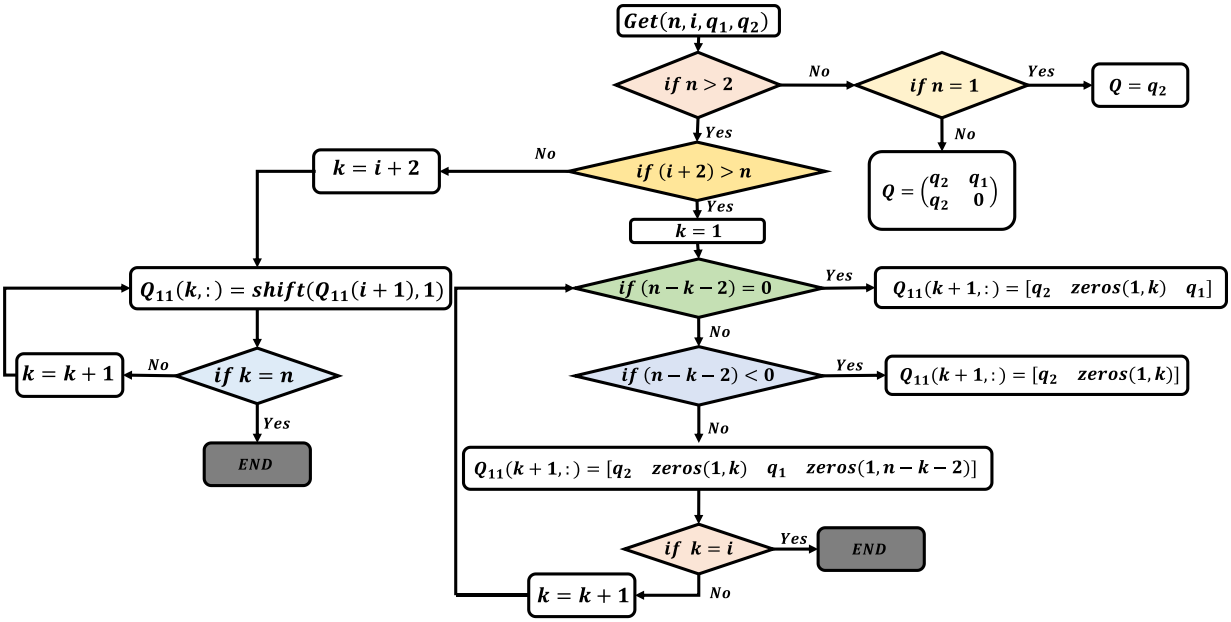
که در رابطه بالا

$$X_\beta = \left(1 + \sum_{r=0}^{n-2}\left[\sum_{j=(r+1)}^{(r+1)} q_2^j \left(\sum_{m=0}^{r+1}(-1)^m C_m^\theta q_1^m\right)\right]\right)$$
$$X_\alpha = \left(1 + \sum_{r=0}^{n-2}\left[\sum_{j=(r+1)}^{(r+1)} q_1^j \left(\sum_{m=0}^{r+1}(-1)^m C_m^\theta q_2^m\right)\right]\right) \qquad (۲۵)$$

که در رابطه بالا

$$C_m^\theta = \frac{\theta!}{m!(\theta - m)!},\quad \theta = (n - j - 1) \qquad (۲۶)$$

در حالت کلی، حل مسأله برای n نمونه تأخیر و پنالتی i پیچیده خواهد شد. لذا در این مقاله، الگوریتم نشان داده شده در شکل ۵ برای استخراج شاخص‌های سیستم هشدار پیشنهاد می گردد. اگر فرض کنیم که ماتریس گذار متناظر با مدل مارکوف به صورت زیر باشد



شکل ۵: فلوچارت پیشنهادی برای استخراج ماتریس Q_{11}

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \tag{۲۷}$$

ماتریس Q_{11} را می توان با توجه به الگوریتم شکل ۵ استخراج کرد. با جایگزینی q_1 با q_2 و q_2 با q_1 در ماتریس Q_{11} ماتریس Q_{22} نیز بدست می آید. درایه های ماتریس‌های Q_{12} و Q_{21} نیز همگی صفر هستند به جز $Q_{12}(n,1) = q_1$ و $Q_{21}(n,1) = q_2$. با داشتن ماتریس گذار برای حالت عمومی n نمونه تأخیر و پنالتی i، می توان شاخص FAR را به صورت زیر محاسبه کرد. تعریف می کنیم

$$A = I_{2n\times 2n} - Q \tag{۲۸}$$

که در رابطه بالا $I_{2n\times 2n}$ ماتریس قطری واحد است. احتمال ماندگار حالات مختلف مدل مارکوف به صورت زیر محاسبه می گردد

$$\mathrm{P} = e^{A_1} P_0 \tag{۲۹}$$

که در رابطه بالا، $P = [P_1, \ldots, P_{2n}]$، $P_0 = [1 \ \underbrace{0 \ldots 0}_{2n-1}]$ و A_1 همان ماتریس A است که درایه های سطر اول آن همگی یک هستند. در نتیجه شاخص FAR برای سناریوی پنالتی با n نمونه تأخیر به صورت زیر محاسبه می گردد

$$FAR = \sum_{k=n+1}^{2n} P_k \tag{۳۰}$$

برای محاسبه شاخص MAR، کافی است در مدل‌های مارکوف به جای q_1 و q_2 به ترتیب p_1 و p_2 قرار دهیم که p_2 با توجه به رابطه (۲) محاسبه می گردد و $p_1 = 1 - p_2$. به روشی مشابه آنچه برای محاسبه FAR بیان شد، می توان ماتریس گذار مربوط به شاخص MAR را به صورت زیر به دست آورد

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \tag{۳۱}$$

حال تعریف می کنیم

$$B = I_{2n\times 2n} - P \tag{۳۲}$$

که در رابطه بالا $I_{2n\times 2n}$ ماتریس قطری واحد است. احتمال ماندگار حالات مختلف مدل مارکوف به صورت زیر محاسبه می گردد

$$P_m = e^{B_1} P_{m_0} \tag{۳۳}$$

که در رابطه بالا، $P_m = [P_{m_1}, \ldots, P_{m_{2n}}]$، $P_{m_0} = [1 \ \underbrace{0 \ldots 0}_{2n-1}]$ و B_1 همان ماتریس B است که درایه های سطر اول آن همگی یک هستند. در نتیجه شاخص FAR برای سناریوی پنالتی با n نمونه تأخیر به صورت زیر محاسبه می گردد

$$FAR = \sum_{k=1}^{n} P_{m_k} \tag{۳۴}$$

شاخص دیگری که در تحلیل یک سیستم هشدار به کار می رود، شاخص AAD است. در شکل ۶، مدل مارکوف متناظر با شاخص AAD نشان داده شده است. در مرجع [۱۴] شاخص AAD برای سناریوی ریست محاسبه شده است اما محاسبه این شاخص برای سناریوی پنالتی با استفاده از روش مرجع [۱۴] تا حدودی پیچیده است لذا در این مقاله شاخص دیگری تحت عنوان MTTA معرفی می گردد، سپس شاخص AAD با توجه به آن محاسبه می گردد. نحوه محاسبه شاخص MTTA به صورت یک قضیه در ادامه بیان می شود.

قضیه ۱:

با توجه به مدل مارکوف رسم شده در شکل ۶، ماتریس گذار حالت P را می توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$P=\begin{pmatrix} Q' & R \\ 0 & I \end{pmatrix} \qquad (۳۵)$$

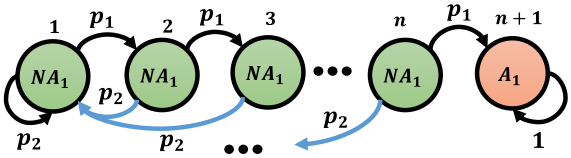
در اینصورت شاخص AAD به صورت زیر تعریف می شود

$$AAD=h\left(MTTA-1\right) \qquad (۳۶)$$

که در آن h زمان نمونه برداری و

$$MTTA=\sum_{k=1}^{n}N_{1k} \qquad (۳۷)$$

که در اینجا N_{1k} درایه های سطر اول ماتریس $N=(I-Q')^{-1}$ است.



شکل ۶: مدل مارکوف متناظر با شاخص AAD در سناریوی ریست [۱۴].

اثبات قضیه ۱:

مدل مارکوف ارائه شده برای ارزیابی شاخص AAD در شکل ۶ یک مدل مارکوف جاذب است که به کمک ماتریس انتقال گسسته حالت P توصیف می‌گردد. این مدل دارای یک حالت جاذب (حالت مربوط به هشدار) و n حالت غیر جاذب می‌باشد. در این مدل ماتریس P را می‌توان به فرم کانونیکال رابطه (۳۵) نوشت که در آن Q' ماتریس انتقال شامل گذرها از هر حالت غیر جاذب به حالت غیر جاذب دیگر بوده و R ماتریس شامل گذرها از هر حالت غیر جاذب به حالت جاذب است. لازم به ذکر است که در این مسئله به دلیل وجود تنها یک حالت جاذب I در رابطه (۳۵) برابر یک خواهد بود. با داشتن ماتریس انتقال گسسته به فرم کانونیکال می‌توانیم ماتریس بنیادی را به صورت $N=(I-Q)^{-1}$ تعریف نماییم[۲۶]. بردار t را در نظر بگیرید که به کمک رابطه (۳۸) تعریف شده باشد که در آن C برداری ستونی است که تمام درایه‌های آن یک باشند. هر درایه از بردار t بیانگر میانگین گام‌هایی است که بین حالت‌های غیر جاذب پیموده می‌شود تا از یک حالت غیر جاذب مشخص به حالت جاذب برسد.

$$t=\left[t\left(NA_1\right)\ \ t\left(NA_2\right)\ \ \ldots\ \ t\left(NA_n\right)\right]^T=NC \qquad (۳۸)$$

حال اگر بخواهیم میانگین زمان تا وقوع هشدار را به دست آوریم کافی است که زمان از حالت غیر جاذب اول به حالت جاذب را محاسبه کنیم.

بنابراین شاخص MTTA یک سیستم هشدار دارای n نمونه وقفه به صورت رابطه زیر تعریف می‌گردد.

$$MTTA=t\left(NA_1\right) \qquad (۳۹)$$

مرجع [۱۴]، شاخص AAD را به صورت زیر درنظر گرفته است

$$AAD=\overline{T_d}=E\left(T_d\right)=h\left(E\left(T_{1,n+1}\right)-1\right) \qquad (۴۰)$$

که در آن $E(T_{1.n+1})$ میانگین گام‌های طی شده از حالت اول یعنی NA_1 به حالت جاذب A_1 می‌باشد. ما رابطه (۴۰) را بر حسب شاخص جدید MTTA به صورت زیر بازنویسی می کنیم

$$AAD=\overline{T_d}=h\left(MTTA-1\right) \qquad (۴۱)$$

که شاخص MTTA نیز با استفاده از ماتریس بنیادی $N=(I-Q)^{-1}$ و رابطه (۳۹) قابل محاسبه است. □

با استفاده از قضیه ۱ برای محاسبه شاخص MTTA در سناریوی پنالتی، کافی است ماتریس گذار مربوط به پنالتی مورد نظر را تشکیل بدهیم که این کار با استفاده از الگوریتم شکل ۵ به راحتی ممکن است. سپس با استفاده از رابطه $N=(I-Q)^{-1}$ و رابطه (۳۷) می توان شاخص MTTA را محاسبه کرد. توجه به این نکته لازم است که در اینجا فرض شده است که زمان تأخیر در رخداد هشدار از حالت NA_1 شروع می شود اما در حالت کلی لحظه شروع می تواند هر کدام از حالت های NA در شکل ۶ باشد. با توجه به ماتریس بنیادی N، از جمع درایه‌های سطری این ماتریس می توان متوسط زمانی هر کدام از حالت‌ها را محاسبه کرد.

۵- بررسی عملکرد سناریوی پنالتی و مقایسه آن با سناریوی ریست

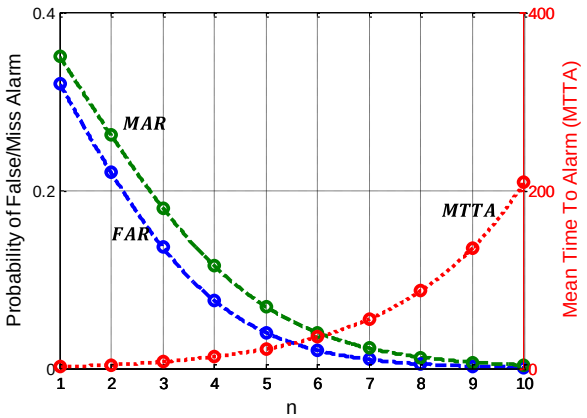
در این قسمت شاخص‌های FAR،MAR و MTTA برای یک مثال برای پنالتی‌های مختلف محاسبه شده و با هم مقایسه می گردد. فرض کنید برای یک سیگنال گسسته اتفاقی $x(t)$، با آستانه $x_{tp}=4$ پس از جداسازی داده های نرمال و غیرنرمال و تخمین توابع توزیع احتمال آنها، مقادیر q_1 و p_2 در (۱) و (۲) به صورت $q_1=0.32$ و $p_2=0.35$ به دست آمده است. در ادامه تأثیر تغییر پارامترهای n، i و آستانه x_{tp} را بر شاخص‌های FAR، MAR و MTTA مورد بررسی قرار می دهیم.

۵-۱- تأثیر تغییرات n بر شاخص های عملکردی سیستم هشدار

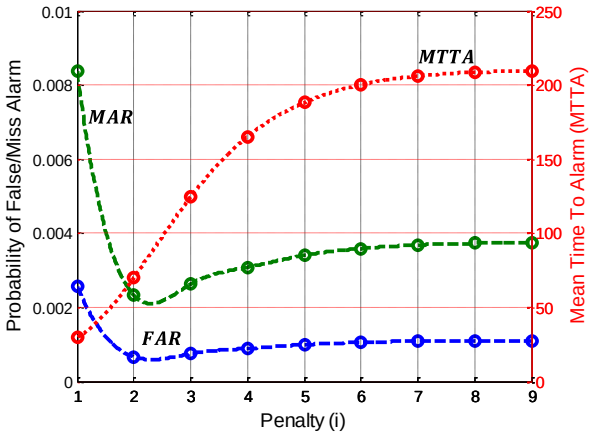
ابتدا فرض کنید که $i=n-1$ باشد یعنی سیستم هشدار بر مبنای سناریوی ریست طراحی شده باشد. در شکل ۷ اثر افزایش n (تعداد تأخیر) بر شاخص‌های سیستم هشدار نشان داده شده است.

شکل ۷ نشان می دهد که افزایش n منجر به کاهش شاخص‌های FAR و MAR و افزایش شاخص MTTA می شود. همان طور که قبلاً هم اشاره شده بود، کوچک بودن مقادیر پارامترهای سیستم هشدار نشان دهنده

عملکرد بهتر آن است ولی با توجه به این نتایج می بینیم که نمی توان هر سه شاخص را با هم کمینه کرد زیرا کاهش شاخص‌های FAR و MAR با افزایش شاخص MTTA همراه است.



شکل ۷: تأثیر افزایش تعداد تأخیر بر شاخص‌های سیستم هشدار.



شکل ۸: تأثیر افزایش پنالتی بر شاخص‌های سیستم هشدار.

۵-۲- تأثیر تغییرات پنالتی i بر شاخص های عملکردی سیستم هشدار

در ادامه اثر افزایش پنالتی بر پارامترهای سیستم هشدار را مورد ارزیابی قرار می دهیم. فرض کنید تعداد نمونه های تأخیر ثابت بوده و پنالتی متغیر باشد. در شکل ۸، برای حالتی که $n = 10$ است و پنالتی به صورت $i = 1. \dots .9$ متغیر باشد، تأثیر افزایش پنالتی بر عملکرد سیستم نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود با افزایش پنالتی هم پارامتر های FAR و MAR کاهش یافته و پارامتر MTTA افزایش می یابد. اما نکته ای که وجود دارد این است که برای پنالتی های $i = 1.2$ مقادیر این پارامترها کوچکتر از حالتی است که پنالتی $i > 2$ باشد. در واقع اینجاست که برتری سناریوی پنالتی را می توان مشاهده کرد. به عنوان مثال برای حالتی که $n = 10$ باشد، با استفاده از سناریوی ریست مقداری که برای پارامترهای سیستم هشدار به دست می آید برابر است با حالتی که پنالتی برابر $i = n - 1 = 9$ باشد که با توجه به شکل ۸، این مقادیر برابر است با $MTTA = 209.3688$ ، $MAR = 0.0037$ ، $FAR = 0.0005$ در حالی که برای پنالتی $i = 1$ این مقادیر برابر است با $MTTA = 29.4$ ، $FAR = 0.0011$ و $MAR = 0.0084$ و برای پنالتی $i = 2$ این مقادیر برابر است با $MTTA = 69.9$ ، $FAR = 0.0003$ ، $MAR = 0.0023$ ، بنابراین می توان با تغییر پنالتی به نتایج مطلوب تری رسید. اگر در طراحی سیستم، پارامتر MTTA از اهمیت بیشتری برخوردار است، در این مثال می توان پنالتی یک را انتخاب کرد و اگر مقادیر FAR و MAR برای سیستم هشدار مهمتر هستند می توان پنالتی دو را انتخاب کرد.

یکی از مزیت‌های سناریوی پنالتی این است که با کاهش تعداد پنالتی‌ها، می توان شاخص AAD را کاهش داد در حالی که شاخص‌های FAR و MAR هم کاهش می یابند و یا حداقل تغییر چندانی نسبت به حالت ریست نخواهند داشت. این در حالی است که در سناریوی ریست برای کاهش شاخص AAD لازم است تعداد تأخیرها یعنی n کاهش پیدا کند که این کاهش موجب افزایش شاخص‌های دیگر خواهد شد. برای اعتبار سنجی مقادیر AAD در پنالتی‌های مختلف، سیگنال فرضی زیر در نظر گرفته شده است

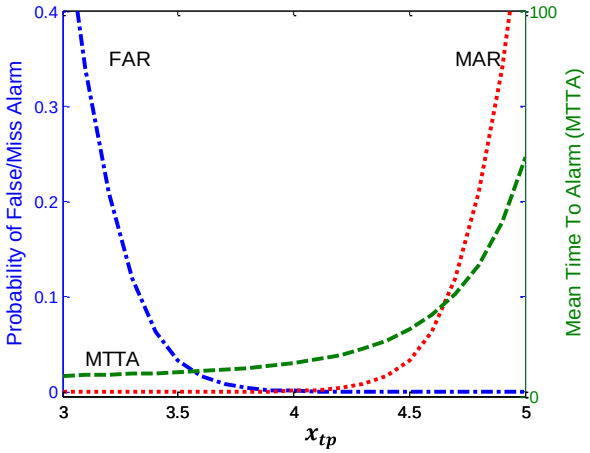
$$x(t) = \begin{cases} N(1,1) & ,t < t_0 \\ N(3,1) & ,t \geq t_0 \end{cases} \qquad (۴۲)$$

فرض می‌شود در لحظه $t_0 = 1000h$ که $h = 1\ sec$، عیبی رخ داده و سیگنال تغییر می کند. همچنین فرض می شود که آستانه برای این سیگنال $x_{tp} = 2$ می باشد. با استفاده از تحلیل مدل‌های مارکوف مقادیر شاخص MTTA در پنالتی‌های مختلف به صورت نشان داده شده در شکل ۹ به دست می‌آید. برای صحت سنجی نتایج به دست آمده، تعداد ۲۰۰۰ تحقق مستقل از سیگنال (۴۲) تولید شده و با استفاده از روش مونت کارلو مقادیر MTTA محاسبه شده است. این نتایج با نتایج به دست آمده از تحلیل مارکوف در شکل ۹ مقایسه شده است. همان طور که مشاهده می شود نتایج تحلیلی به نتایج واقعی نزدیک است.

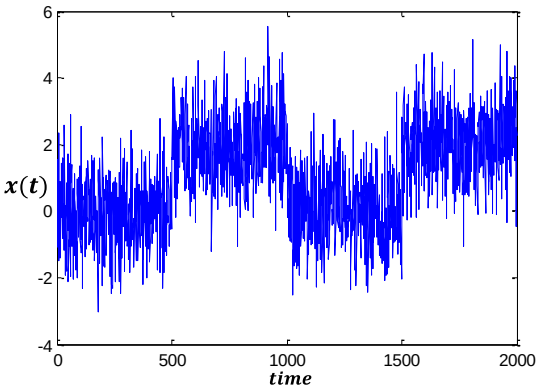
۵-۳- تأثیر تغییرات آستانه x_{tp} بر شاخص های عملکردی سیستم هشدار

علاوه بر مقادیر n و i، پارامترهای دیگری نیز می تواند در عملکرد سیستم هشدار تأثیرگذار باشد. با توجه به روابط (۱) و (۲)، تغییرات آستانه یعنی x_{tp} هم می تواند باعث تغییر مقادیر q_1 و p_2 گردد که در نتیجه آن، مقادیر FAR، MAR و MTTA نیز تغییر می کند. در شکل ۹ تأثیر تغییرات پارامتر x_{tp} بر شاخص های سیستم هشدار مورد بررسی قرار گرفته است. همچنانکه انتظار می رفت با کاهش حد آستانه، تعداد هشدار های نادرست افزایش یافته و تعداد هشدار های از دست رفته کاهش می یابد. بعلاوه با کاهش حد آستانه، مقدار متوسط زمان تا هشدار نیز کاهش پیدا می کند.

در ادامه با ارائه یک مثال عددی، به بررسی تأثیر تغییرات پارامترهای مختلف بر شاخص های سیستم هشدار می پردازیم.



شکل ۹: تأثیر تغییرات آستانه x_{tp} بر شاخص‌های سیستم هشدار



شکل ۱۰: سیگنال $x(t)$ در مثال ۱

مثال ۱:

یک سیستم هشدار با مشخصات عملکردی $FAR < 0.05$، $MAR < 0.05$ و $AAD < 5\,sec$ برای سیستمی با خروجی سیگنال $x(t)$ با پروفایل زیر طراحی کنید.

$$\begin{cases} x(t) \sim N(0,1) & ,t < 500 \\ x(t) \sim N(2,1) & ,500 \le t < 1000 \\ x(t) \sim N(0,1) & ,1000 \le t \le 1500 \\ x(t) \sim N(2,1) & ,1500 \le t \le 2000 \end{cases} \quad (۴۳)$$

فرض کنید آستانه برابر $x_{tp} = 1$ انتخاب شود، پس از جداسازی داده های نرمال و غیر نرمال و تخمین تابع توزیع احتمال مربوط به هرکدام بر اساس مرجع [۱۴]، مقادیر $q_1 = 0.1550$ و $p_2 = 0.1453$ به دست می آید. برای شروع، الگوریتم پیشنهادی این مقاله را با مقادیر عددی فوق برای حالت $n = 6$ و پنالتی های $i = 1.2. \ldots .5$ اجرا می کنیم. نتایج مندرج در جدول ۱ حاصل می شود.

با توجه به جدول ۱، مشاهده می شود که برای حالت $n = 6$، در حالتی که پنالتی برابر $i = 1$ است، پارامتر AAD کمترین مقدار خود را دارد و برای پنالتی $i = 2$، پارامترهای FAR و MAR کمترین مقدار را دارند. مقادیری که برای پنالتی $i = 5$ به دست آمده است در واقع همان نتایجی است که از سناریوی ریست برای این مثال به دست می آید. مشاهده می شود که برای پنالتی های $i < 5$ یا همان سناریوی پنالتی ، پارامترهای سیستم هشدار مقادیر کوچکتری دارند و این یعنی اینکه عملکرد سناریوی پنالتی از سناریوی ریست بهتر است. با توجه به نتایج جدول ۱ می بینیم که در همه حالت ها پارامتر AAD از ۵ ثانیه بیشتر است و سیستم هشدار طراحی شده، اهداف عملکردی سیستم هشدار را برآورده نمی کند. این بدان معنی است که انتخاب تعداد تأخیر $n = 6$ در ابتدای کار مناسب نبوده است و مسأله را بایستی بازطراحی کرد. با توجه به شکل ۷ دیدیم که با افزایش n مقدار MTTA نیز افزایش می یابد، بنابراین نتیجه می گیریم که برای کم کردن مقدار MTTA بایستی تعداد تأخیرهای سیستم هشدار را کاهش دهیم. در جدول ۲ پارامترهای سیستم هشدار برای حالت $n = 4$ و پنالتی های مختلف نشان داده شده است.

جدول ۱: پارامترهای سیستم هشدار در مثال۱ برای حالت $n = 6$ و پنالتی های مختلف

i	FAR	MAR	$MTTA$	AAD
1	1.79×10^{-4}	1.16×10^{-4}	8.16	7.16
2	1.19×10^{-4}	7.87×10^{-5}	9.29	8.29
3	1.24×10^{-4}	8.1×10^{-5}	10.10	9.10
4	1.29×10^{-4}	8.50×10^{-5}	10.57	9.57
5	1.32×10^{-4}	8.66×10^{-5}	10.77	9.77

جدول ۲: پارامترهای سیستم هشدار در مثال۱ برای حالت $n = 4$ و پنالتی های مختلف

i	FAR	MAR	$MTTA$	AAD
1	0.0035	0.0026	5.3501	4.3501
2	0.0030	0.0022	5.8188	4.8155
3	0.0030	0.0023	6.0144	5.0144

با توجه به جدول ۲، در حالت $n = 4$ و پنالتی $i = 1$ و یا $i = 2$، اهداف مورد نظر برای سیستم هشدار برآورده می شود. توجه کنید که اگر پارامتر AAD در سیستم هشدار از اهمیت بیشتری برخوردار باشد، می توان با انتخاب n کوچکتر این پارامتر را کاهش داد ولی توجه کنید که با توجه به شکل ۷، در مقابل پارامترهای FAR و MAR افزایش خواهند یافت و بایستی این نکته را مورد توجه قرار داد.

همان طور که در مثال ۱ و شکل های ۷ تا ۹ دیدیم، بایستی پارامترهای n ، i و x_{tp} را تنظیم کرد تا بتوان به شاخص‌های FAR،MAR و AAD یا MTTA مطابق با اهداف مورد نظر برای سیستم هشدار رسید. از طرفی دیدیم که با کاهش یا افزایش پارامتر AAD، پارامترهای FAR و MAR نیز تغییر می کنند، بنابراین برای سهولت در طراحی سیستم هشدار می توان از الگوریتم های بهینه سازی برای تنظیم

پارامترهای سیستم هشدار استفاده کرد. از این رو، در بخش بعدی یک روش سیستماتیک برای طراحی سیستم هشدار با استفاده از الگوریتم ژنتیک ارائه خواهد شد.

۶- ارائه یک روش سیستماتیک برای طراحی سیستم هشدار

با توجه به مباحثی که در بخش های قبل مطرح شد. برای طراحی یک سیستم هشدار ابتدا بایستی مقادیر q_1 و p_2 را تعیین نمود. برای این کار بایستی ابتدا داده های نرمال و غیرنرمال را جدا نموده و پس از تخمین توابع توزیع احتمال مربوط به هرکدام از بخش های نرمال و غیرنرمال، با استفاده از روابط (۱) و (۲) این مقادیر را تعیین کرد. در این مقاله برای دسته بندی داده های نرمال و غیر نرمال از روش ارائه شده در [۱۴] که مبتنی بر روش تشخیص نقطه تغییر میانگین[1] [۲۱] است، استفاده می شود و سپس از روش تخمین تابع چگالی کرنل [۲۲-۲۴] برای تخمین توابع توزیع احتمال استفاده می شود. برای آشنایی خواننده با روش تشخیص نقطه تغییر میانگین، آن را به اجمال در زیر توضیح می دهیم.

۶-۱- روش تشخیص نقطه تغییر میانگین برای جداسازی داده های نرمال و غیرنرمال

فرض کنید T نمونه از سیگنال گسسته و تصادفی $\{x(t)\}_{t=1}^{T}$ را داریم. برای تشخیص نقطه تغییر میانگین، مراحل زیر پیموده می شود.

مرحله ۱: ابتدا سیگنال های تست $U_{t.T}$ و $V_{t.T}$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$\begin{cases} U_{1.T} = V_{1.T} \\ U_{t.T} = U_{t-1.T} + V_{t.T} \end{cases} . \; t = 2.3....T \qquad (۴۴)$$

که در رابطه بالا

$$V_{t.T} = \sum_{j=1}^{T} sgn\left(x(t) - x(j)\right) \qquad (۴۵)$$

که در رابطه بالا sgn تابع علامت است.

مرحله ۲: مقدار پارامتر P را با توجه به بیشترین مقدار سیگنال تست $|U_{t.T}|$ به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$P = 2exp\left(\frac{-6\max_{1\le t\le T}\left|U_{t.T}\right|^2}{T^2 + T^3}\right) \qquad (۴۶)$$

حال خطای نوع اول آلفا[2] را برای فرضیه خود (نقطه $x(t_{max})$ نقطه تغییر سیگنال $x(t)$ است) برابر $\alpha = 0.01$ در نظر می گیریم که در آن t_{max} متناظر با بزرگترین مقدار سیگنال $|U_{t.T}|$ است. واضح است که اگر $P < \alpha$ باشد، نقطه $x(t_{max})$ نقطه تغییر سیگنال $\{x(t)\}_{t=1}^{T}$ است و اگر $P > \alpha$ باشد نقطه تغییری برای سیگنال $\{x(t)\}_{t=1}^{T}$ وجود ندارد.

مرحله ۳: اگر $P < \alpha$ باشد، در اینصورت سیگنال $\{x(t)\}_{t=1}^{T}$ به دو بخش $\{x_1(t)\}_{t=1}^{t_{max}}$ و $\{x_2(t)\}_{t_{max}}^{T}$ تقسیم می شود و برای هر کدام از سیگنال های $x_1(t)$ و $x_2(t)$ دوباره مراحل ۱ و ۲ را تکرار می کنیم تا زمانیکه دیگر نقطه ی تغییری برای سیگنال $x(t)$ پیدا نشود.

مرحله۴ : پس از یافتن همه نقاط تغییر در مرحله ۳، سیگنال $x(t)$ به بخش های مختلفی تقسیم می شود. فرض کنید یکی از بخش های سیگنال $x(t)$ به صورت، $\{x(t)\}_{t=t_0}^{t_1}$ باشد. برای این بخش از سیگنال مقادیر t،$\bar{x}$ و s را به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{t=t_0}^{t_1}\left(x(t) - \bar{x}\right)^2}{t_1 - t_0}}, \; \bar{x} = \frac{\sum_{t=t_0}^{t_1} x(t)}{t_1 - t_0 + 1}, \qquad (۴۷)$$
$$t = \frac{\bar{x} - x_{tp}}{s}\sqrt{t_1 - t_0}$$

که در اینجا x_{tp} همان آستانه است. فرض کنید بزرگ تر بودن نمونه های سیگنال $x(t)$ از x_{tp} حالت غیرنرمال باشد. حال خطای نوع اول بتا[3] را برای فرضیه (بخش مورد نظر سیگنال $x(t)$ نرمال است) برابر $\beta = 0.05$ تعریف می کنیم. واضح است که اگر $t > \beta$ باشد، بخش $\{x(t)\}_{t=t_0}^{t_1}$ به عنوان غیرنرمال و اگر $t < \beta$ باشد، $\{x(t)\}_{t=t_0}^{t_1}$ به عنوان داده نرمال در نظر گرفته می شود. این مرحله را برای تمامی قسمت های سیگنال $x(t)$ در مرحله ۳ تکرار می کنیم تا وضعیت نرمال و یا غیرنرمال بودن هر کدام از بخش ها مشخص شود. در نهایت بخش های نرمال را با هم و بخش های غیرنرمال را نیز با هم در یک دسته قرار می دهیم. بدین ترتیب بخش های نرمال و غیر نرمال سیگنال $x(t)$ مشخص می شود.

۶-۲- تخمین توابع توزیع احتمال

پس از دسته بندی داده های نرمال و غیر نرمال، حال می توان توابع توزیع احتمال مربوط به این داده ها را تخمین زد. روش های متفاوتی در مراجع مانند [۲۲-۲۴] برای تخمین تابع توزیع احتمال وجود دارد و در نرم افزار متلب[4] هم جعبه ابزار مشخصی برای این منظور اختصاص داده شده است. در این مقاله از روش های مبتنی بر کرنل[5] و توابع گوسی کرنل[6] استفاده می شود. پس از تخمین توابع توزیع احتمال $q(x)$ و $p(x)$ در شکل ۲، می توان با استفاده از روابط (۱) و (۲) مقادیر q_1 و p_2 را تعیین نمود.

۶-۳- ارائه روشی برای محاسبه پارامترهای بهینه سیستم هشدار با استفاده از الگوریتم ژنتیک

[1] Mean-Change Point Detection
[2] Type I error α
[3] Type I error β
[4] Matlab
[5] Kernel-based method
[6] Gaussian kernel function

پس از محاسبه q_1 و p_2، حال سوال این است که، مقادیر n، i و حتی x_{tp} را چگونه انتخاب کنیم تا عملکرد سیستم هشدار مطلوب باشد. در این بخش می خواهیم با استفاده از الگوریتم بهینه سازی ژنتیک، روشی برای انتخاب مقادیر بهینه n، i و x_{tp} ارائه دهیم. برای این منظور ابتدا یک تابع هزینه[1] به صورت زیر در نظر می گیریم

$$J\left(x_{tp}.n.i\right)=\propto_1 \frac{FAR\left(n.i.x_{tp}\right)}{l_{FAR}}+\propto_2 \frac{MAR\left(n.i.x_{tp}\right)}{l_{MAR}} + \propto_3 \frac{AAD\left(n.i.x_{tp}\right)}{l_{AAD}} \qquad (۴۸)$$

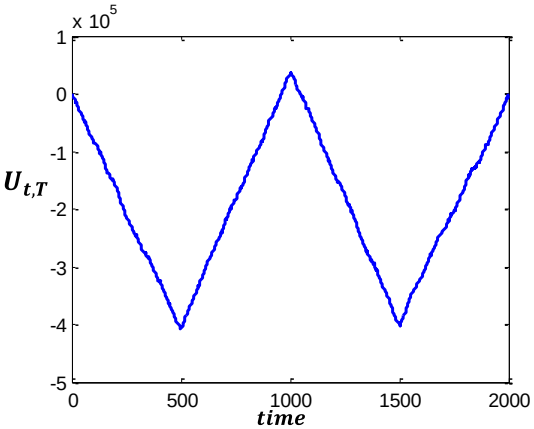
که در رابطه بالا $\propto_i$ ها مقادیری اسکالر و مثبت هستند، l_{FAR}،l_{MAR} و l_{AAD} ضرایبی هستند که معرف کران های قابل قبول برای پارامترهای سیستم هشدار می باشند و MAR،FAR و AAD نیز پارامترهای سیستم هشدار هستند. برای استفاده از رابطه بالا داشتن پارامترهای FAR، MAR و AAD به صورت تابعی از n، i و x_{tp} ضروری است که این توابع با استفاده از الگوریتم ارائه شده در این مقاله بر مبنای فلوچارت شکل (۱۱) به سادگی امکان پذیر است. بنابراین مقادیر بهینه برای طراحی سیستم هشدار به صورت

$$\left(x_{tp}.n.i\right)=\arg min\left(J\left(x_{tp}.n.i\right)\right) \qquad (۴۹)$$

قابل بیان است و از کمینه کردن تابع هزینه فوق می توان پارامترهای بهینه را به دست آورد. با داشتن تابع هزینه می توان از الگوریتم های مختلف بهینه سازی استفاده کرد. در این مقاله از الگوریتم ژنتیک برای تعیین بهینه پارامترهای سیستم هشدار استفاده شده است. برای آشنایی با الگوریتم ژنتیک می توان به [۲۵] مراجعه کرد ولی به طور خلاصه در الگوریتم بهینه‌سازی ژنتیک ابتدا جمعیت اولیه به صورت تصادفی ایجاد می‌گردد که در مسئله بهینه‌سازی سیستم هشدار، جمعیت ایجاد شده در واقع متشکل از مقدار آستانه، تعداد نمونه‌های تأخیر و میزان جریمه درنظر گرفته شده است. در اولین اجرا از الگوریتم، جمعیت اولیه تولید شده به تابع تناسب داده می‌شوند و برای هر عضو از این جمعیت یک مقدار به عنوان ضریب تناسب در نظر گرفته می‌شود. بعد آن اعضای جمعیت براساس ضریب تناسب چیده شده و درصدی از اعضا که پایین‌ترین میزان ضریب تناسب را دارند حذف می‌گردند. درصدی دیگر با یکدیگر ترکیب شده و نسل جدید را تشکیل می‌دهند. لازم به ذکر است که در این میان به اندازه درصد تعیین شده برای جهش جمعیت جدید تولید و به نسل جدید اضافه می‌گردد. روند ذکر شده تا زمانی که شرط اتمام برآورده نشود ادامه خواهد یافت. در نهایت پس از خارج شدن از حلقه تکرار عضوی که بیشتری ضریب تناسب یا بهینه‌ترین میزان برای مسئله را کسب نموده است به عنوان پاسخ بهینه انتخاب می گردد.

مثال ۲:

در این مثال می خواهیم الگوریتم معرفی شده در بخش ۶-۱ این مقاله برای جداسازی داده های نرمال و غیرنرمال را برای مثال ۱ انجام دهیم. اگر $|U_{t.T}|$ را برای داده های $x(1:2000)$ به دست آوریم، خواهیم دید که بیشترین مقدار آن در $t_{max}=499$ خواهد بود که در شکل ۱۱ هم نشان داده شده است. مقدار P در رابطه (۴۶) برابر $P=2.6602\times10^{-60}$ به دست می آید که چون $P<\alpha$ می باشد، پس این نقطه یک نقطه تغییر میانگین برای سیگنال $x(t)$ می باشد. اگر همین روش را برای داده های $x(1:499)$ تکرار کنیم مقدار P بزرگتر از α به دست می آید و در نتیجه در این بازه نقطه تغییر میانگین وجود نخواهد داشت. حال برای داده های $x(500:2000)$ بیشترین مقدار $|U_{t.T}|$ در $t_{max}=1501$ اتفاق می افتد که مقدار P در این حالت کوچکتر از $\alpha=0.01$ و برابر $P=3.5190\times10^{-35}$ است. بنابراین نقطه $x(1501)$ هم یک نقطه تغییر میانگین است. با ادامه این روند مشاهده می شود که برای داده های $x(1501:2000)$ نقطه تغییری وجود ندارد ولی برای داده های $x(500:1501)$ یک نقطه تغییر در $t_{max}=1001$ وجود دارد که مقدار P در این حالت $P=1.1757\times10^{-116}$ به دست می آید. بنابراین سه نقطه تغییر میانگین در 499،1001 و 1501 خواهیم داشت و سیگنال $x(t)$ به چهار قسمت به صورت $x(1:499)$، $x(500:1001)$، $x(1002:1501)$ و $x(1502:2000)$ تقسیم می شود. اگر برای هر کدام از این قسمت ها، مقادیر $t.\overline{x}$ و s در رابطه (۴۷) را محاسبه کنیم. نرمال و یا غیرنرمال بودن هر قسمت مطابق با جدول ۳ تعیین می شود.



شکل ۱۱: سیگنال $U_{t,T}$ برای $x(1:2000)$

جدول ۳: قسمت های نرمال و غیرنرمال سیگنال $x(t)$

Normal Data	*Abnormal Data*
$x(1:499)$	$x(500:1001)$
$x(1002:1501)$	$x(1502:2000)$

[1] Cost Function

جدول ۴: شاخص های عملکردی در سناریوی ریست [۱۴]

پارامترهای سیستم هشدار		شاخص های عملکردی		
n	x_{tp}	MAR	FAR	AAD
2	23.6	0.0305	0.0468	1.4294
3	23.6	0.0060	0.0116	2.8988
4	23.6	0.0010	0.0025	4.5694

جدول ۵: شاخص های عملکردی در الگوریتم پیشنهادی (سناریوی پنالتی)

پارامترهای تابع هزینه در الگوریتم ژنتیک			پارامترهای سیستم هشدار	شاخص های عملکردی		
			(x_{tp}, n, i)	MAR	FAR	AAD
α_1	α_2	α_3	(23.5999, 2, 1)	0.027576	0.041961	1.4052
1000	1000	1000				
l_{FAR}	l_{MAR}	l_{AAD}				
1e-3	1e-3	1e-2				
α_1	α_2	α_3	(23.6854, 3,2)	0.005402	0.010386	2.6999
500	1000	100				
l_{FAR}	l_{MAR}	l_{AAD}				
1e-5	1e-5	1e-2				
α_1	α_2	α_3	(23.5967, 4,2)	0.000943	0.0022	3.3997
500	1000	20				
l_{FAR}	l_{MAR}	l_{AAD}				
1e-5	1e-5	0.1				

مثال ۳:

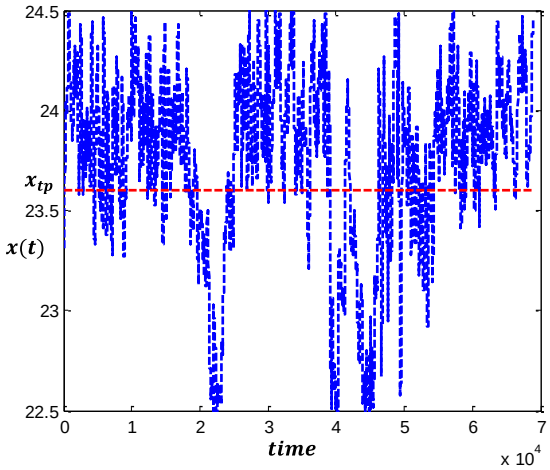
در این مثال عملکرد سیستم هشدار مبتنی بر سناریوی ریست و الگوریتم پیشنهادی پنالتی مبتنی بر الگوریتم ژنتیک مورد بررسی قرار می گیرد. برای مقایسه عملکرد الگوریتم پیشنهادی با الگوریتم ریست، داده مربوط به سنسور فشار توربینِ نیروگاه بخار Weifang Shandong Province کشور چین[۱۴] را در نظر گرفته و نتایج حاصله از سناریوی پنالتی و سناریوی ریست با هم مقایسه می شود. در شکل ۱۲ داده مربوط به سنسور اندازه گیری فشار برای یک بازه زمانی ۱۹ ساعته نشان داده شده است. در این مثال اگر فشار از سطح $x_{tp} = 23.6$ پایین تر قرار گیرد، هشدار تولید می شود. اگر الگوریتم تغییر نقطه میانگین را برای جداسازی داده های نرمال و غیر نرمال به این سیستم اعمال کنیم، پس از تخمین توابع توزیع احتمال داده های نرمال و غیر نرمال، مقادیر $q_1 = 0.1204$ و $p_2 = 0.1486$ به دست می آید. هدف طراحی یک سیستم هشدار با شاخص های عملکردی $FAR < 0.05$، $MAR < 0.05$ و $AAD < 5\ sec$ می باشد.

در جدول ۴ شاخص های عملکردی سیستم هشدار مربوط به الگوریتم ریست در مرجع [۱۴] نشان داده شده است. در جدول ۵ نتایج مربوط به الگوریتم پیشنهادی این مقاله برای مقادیر بهینه پارامتر های n، i و x_{tp} نشان داده شده است. از مقایسه نتایج این دو جدول می توان دریافت که سناریوی پنالتی عملکرد بهتری نسبت به سناریوی ریست دارد. به عنوان مثال در مرجع [۱۴] پارامتر های بهینه سیستم هشدار را $n = 4$ و $x_{tp} = 23.6$ پیشنهاد داده است که در نتیجه آن، شاخص های عملکردی به صورت $MAR = 0.0010$ ، $FAR = 0.0025$ و $AAD = 4.5694$ به دست می آید در حالیکه در سناریوی پنالتی پارامترهای بهینه سیستم هشدار $n = 4. i = 2$ و $x_{tp} = 23.596$ پیشنهاد شده است که در نتیجه آن، شاخص های سیستم هشدار $FAR = 0.000943$ ، $MAR = 0.0022$ و $AAD =$ 3.3997 به دست می آید که نتایج مطلوب تری نسبت به سناریوی ریست دارد.

۸- بحث و نتیجه گیری

مبحث طراحی سیستم های هشدار بواسطه نقشی که در ایمنی و عملکرد مناسب سیستم های صنعتی دارند، از اهمیت بالایی برخورداراست. در این مقاله یک روش سیستماتیک برای طراحی یک سیستم هشدار تک متغیره مبتنی بر سناریوی جدیدی تحت عنوان سناریوی پنالتی ارائه شده است. علاوه بر پارامترهای MAR،FAR و AAD، پارامتر جدیدی تحت عنوان MTTA و یا "میانگین زمانی رخداد هشدار" معرفی شده است که با استفاده از آن می توان به راحتی پارامتر AAD را در سناریوی پیشنهادی محاسبه کرد. در این مقاله عملکرد سناریوی ریست به عنوان حالت خاصی از سناریوی پنالتی با الگوریتم

پیشنهادی مقایسه شده و نشان داده شده است که سناریوی پنالتی حالت جامعی از سناریوی ریست است که می تواند در پنالتی های مختلف عملکرد بهتری داشته باشد. برای تنظیم پارامترهای سیستم هشدار و رسیدن به عملکرد بهینه سیستم هشدار از الگوریتم ژنتیک برای انتخاب بهینه پارامترهای n،i و x_{tp} استفاده شده است. در نهایت عملکرد سیستم هشدار با چندین مثال و سیگنال های واقعی مورد بحث قرار گرفته است.



شکل ۱۲: داده مربوط به سنسور فشار

مراجع

[1] ISA, (Instrumentation, Systems & Automation Society). "Management of alarm systems for the process industries." North Carolina: ISA 18.02, 2009.

[2] EEMUA, (Engineering Equipment and Materials Users' Association). "Alarm systems: a guide to design, management and procurement." 3rd ed. London: EEMUA Publication 191, 2013.

[3] Ahnlund, Jonas, Tord Bergquist, and Lambert Spaanenburg. "Rule-based reduction of alarm signals in industrial control." Journal of Intelligent and Fuzzy Systems. Vol. 14, no.2, pp.73-84, 2003.

[4] Brooks, Robin, Richard Thorpe, and John Wilson. "A new method for defining and managing process alarms and for correcting process operation when an alarm occurs". Journal of hazardous materials. Vol.115, no.1, pp.169-174, 2004.

[5] Hugo, A.J., 2009. "Estimation of alarm deadbands". IFAC Proceedings Volumes, Vol.42, no.8, pp.663-667,2009.

[6] Wang, Jiandong, and Tongwen Chen. "An online method to remove chattering and repeating alarms based on alarm durations and intervals". Computers & Chemical Engineering. Vol.67, pp.43-52, 2014.

[7] Liu, Jun, et al. "The intelligent alarm management system." IEEE software. Vol.20, no.2, pp.66-71, 2003.

[8] Srinivasan, R., et al. "Intelligent alarm management in a petroleum refinery: plant safety and environment." Hydrocarbon processing. Vol. 83, no.11, pp.47-53, 2004.

[9] Simeu-Abazi, Zineb, Arnaud Lefebvre, and Jean-Pierre Derain. "A methodology of alarm filtering using dynamic fault tree." Reliability Engineering & System Safety. Vol.96, no.2, pp.257-266,2011.

[10] Adnan, Naseeb Ahmed, and Iman Izadi. "On detection delays of filtering in industrial alarm systems." 21st Mediterranean IEEE Conference on Control & Automation, pp. 113-118, 2013.

[11] Cheng, Yue, Iman Izadi, and Tongwen Chen. "Optimal alarm signal processing: Filter design and performance analysis." IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. Vol.10, no. 2, pp.446-451, 2013.

[12] Naghoosi, Elham, Iman Izadi, and Tongwen Chen. "Estimation of alarm chattering." Journal of Process Control. Vol.21, no. 9, pp.1243-1249, 2011.

[13] Kondaveeti, Sandeep R., Iman Izadi, Sirish L. Shah, David S. Shook, Ramesh Kadali, and Tongwen Chen. "Quantification of alarm chatter based on run length distributions." Chemical Engineering Research and Design. Vol.91, no. 12, pp.2550-2558, 2013.

[14] Xu, Jianwei, Jiandong Wang, Iman Izadi, and Tongwen Chen. "Performance assessment and design for univariate alarm systems based on FAR, MAR, and AAD." IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. Vol.9, no. 2, pp.296-307, 2012.

[15] Adnan, Naseeb Ahmed, Yue Cheng, Iman Izadi, and Tongwen Chen. "Study of generalized delay-timers in alarm configuration." Journal of Process Control. Vol.23, no. 3, pp.382-395, 2013.

[16] Adnan, Naseeb Ahmed, Iman Izadi, and Tongwen Chen. "On expected detection delays for alarm systems with deadbands and delay-timers." Journal of Process Control. Vol.21, no. 9, pp.1318-1331, 2011.

[17] Han, Liu, Huihui Gao, Yuan Xu, and Qunxiong Zhu. "Combining FAP, MAP and correlation analysis for multivariate alarm thresholds optimization in industrial process." Journal of Loss Prevention in the Process Industries. Vol.40, pp.471-478, 2016.

[21] Pettitt, A. N. "A non-parametric approach to the change-point problem." Applied statistics. pp.126-135, 1979.

[22] Silverman, Bernard W. "Density estimation for statistics and data analysis". CRC press. Vol. 26, 1986.

[23]Shimazaki, Hideaki, and Shigeru Shinomoto. "Kernel bandwidth optimization in spike rate estimation." Journal of computational neuroscience. Vol.29, no.1-2, pp.171-182, 2010.

[24] Botev, Zdravko I., Joseph F. Grotowski, and Dirk P. Kroese. "Kernel density estimation via diffusion." The Annals of Statistics. Vol.38, no.5, pp.2916-2957, 2010.

[25] Floreano, Dario, and Claudio Mattiussi."Bio-inspired artificial intelligence: theories, methods, and technologies". MIT press, 2008.

[26] Tchangani, Ayeley, and Daniel Noyes. "Modeling dynamic reliability using dynamic Bayesian networks." Journal Européen des systèmes automatisés. Vol.40, no. 8, pp.911-935, 2006.

[18] Zhang, Kai, Steven X. Ding, Yuri AW Shardt, Zhiwen Chen, and Kaixiang Peng. "Assessment of T 2-and Q-Statistics for Detecting Additive and Multiplicative Faults in Multivariate Statistical Process Monitoring." Journal of the Franklin Institute. 2016

[19] Xu, Xiaobin, Shibao Li, Xiaojing Song, Chenglin Wen, and Dongling Xu. "The optimal design of industrial alarm systems based on evidence theory." Control Engineering Practice. Vol.46, pp.142-156, 2016.

[20] Wang, Jiandong, Fan Yang, Tongwen Chen, and Sirish L. Shah. "An Overview of Industrial Alarm Systems: Main Causes for Alarm Overloading, Research Status, and Open Problems." IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. Vol.13, no. 2, pp.1045-1061, 2016.

مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۱۰، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۵، صفحه ۲۷-۱۷

کنترل محدود نگهدارنده سیستم‌های چندعاملی خطی متشکل از عامل‌های غیریکسان با استفاده از فیدبک خروجی دینامیکی

حامد حق‌شناس[۱]، محمدعلی بادامچی‌زاده[۲]، مهدی برادران‌نیا[۳]

[۱] دانشجوی دکتری گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تبریز، haghshenas91@ms.tabrizu.ac.ir

[۲] استاد گروه کنترل، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تبریز، mbadamchi@tabrizu.ac.ir

[۲] استادیار گروه کنترل، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تبریز، mbaradaran@tabrizu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۷/۱۹، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۵/۱۰/۲۰)

چکیده: در این مقاله، به مطالعه مسئله کنترل محدود نگهدارنده سیستم‌های چندعاملی خطی ناهمگن و تحت گراف ارتباطات جهت-دار، بر اساس قالب تنظیم خروجی و با استفاده از فیدبک خروجی پرداخته شده است. با ایده گرفتن از پژوهش‌هایی که به تنظیم خروجی سیستم‌های چندعاملی با وجود عامل سردسته در حوزه رضایت جمعی پرداخته اند، عامل‌های سردسته به صورت سیستم خارجی با دینامیک یکسان در نظر گرفته شده‌اند. در طراحی کنترل‌کننده برای هر عامل پیرو، از فیدبک خروجی دینامیکی توزیع‌یافته استفاده شده است. جهت حل مسئله از خطای کنترل محدود نگهدارنده بهره گرفته شده است که این امر، امکان در نظر گرفتن بیش از یک عامل سردسته را در مبحث تنظیم خروجی فراهم ساخته و در نهایت، با استفاده از روش‌های اصلاح شده تنظیم خروجی به حل مسئله پرداخته شده است. یک شبیه‌سازی عددی نیز جهت ارزیابی عملکرد کنترل‌کننده پیشنهادی انجام یافته، که حاکی از عملکرد مناسب کنترل‌کننده می‌باشد.

کلمات کلیدی: کنترل محدود نگهدارنده، عامل‌های غیریکسان، تنظیم خروجی، فیدبک خروجی.

Containment Control of Linear Multi-Agent Systems with Non-Identical Agents Using Dynamic Output Feedback

Hamed Haghshenas, Mohammad Ali Badamchizadeh, Mahdi Baradarannia

Abstract: In this paper, we study the containment control problem of heterogeneous linear multi-agent systems under directed topology based on output regulation framework and using output feedback control. Motivated by leader-follower output regulation problems, the leaders are assumed to be exosystems with identical dynamics. In controller design approach for each follower, we utilize a distributed dynamic output feedback control scheme. To achieve the objective of this work we utilize the containment error, which enables us to consider more than one leader in output regulation framework and to use output regulation techniques with some modifications to solve the containment problem. Finally, the validity of theoretical results are demonstrated through an example.

Keywords: Containment control, Non-Identical agents, Output regulation, Output feedback.

۱- مقدمه

امروزه سیستم‌های چندعاملی[1] به دلیل کاربردهای وسیعی که در مدل‌سازی رفتار دسته‌جمعی حیوانات، آرایش هندسی هواپیماها، شبکه‌های حس‌گر، تجسس نظامی، عملیات نجات و حتی مدل‌سازی جوامع انسانی دارند، مورد توجه بسیاری از محققان قرار دارند [۱، ۲]. یکی از مباحث اصلی سیستم‌های چندعاملی، رضایت جمعی[2] می‌باشد که در ابتدا برای سیستم‌های بدون عامل سردسته مورد بررسی قرار گرفته است [۱، ۲]. سپس، با توجه به اینکه گروهی از عامل‌ها می‌توانند یک سیگنال مرجع را تعقیب کنند، برای سیستم‌هایی با وجود عامل سردسته مورد مطالعه قرار گرفته است [۳].

در سال‌های اخیر، تنظیم خروجی سیستم‌های چندعاملی از جمله مباحثی بوده است که در حوزه رضایت جمعی مورد توجه محققان قرار گرفته است. برای مثال، رضایت جمعی خروجی بدون عامل سردسته برای سیستم‌های چندعاملی خطی ناهمگن[3] بر اساس اصل مدل داخلی در [۴] مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین، تنظیم خروجی سیستم‌های چندعاملی با عامل سردسته‌ای که به صورت یک سیستم خارجی[4] در نظر گرفته شده، در مراجع مختلفی مورد بحث قرار گرفته است، که برای مثال می‌توان به [۵، ۶] اشاره کرد. در [۱۷]، به تحلیل سیستم‌های چندعاملی خطی بر اساس تنظیم خروجی و رفتار گذرای عامل‌ها پرداخته شده که سبب بهبود رفتار گذرای سیستم شده است.

یکی از شاخه‌های مهم کنترل سیستم‌های چندعاملی، کنترل محدود نگهدارنده[5] می‌باشد که از چندین پدیده طبیعی الهام گرفته شده است و کاربردهای عملی با اهمیت و مختلفی می‌تواند داشته باشد. به عنوان مثال، مشاهده شده است که پروانه‌های کرم ابریشم نر از طریق فرومون پخش‌شده توسط جنس ماده، به سمت پوش محدب[6] پروانه‌های کرم ابریشم ماده جذب می‌شوند [۷]. برای یک سیستم چندعاملی، کنترل محدود نگهدارنده وقتی تحقق می‌یابد که بتوان قانون کنترلی هر عامل پیرو را طوری طراحی کرد که عامل‌های پیرو در نهایت، به پوش محدب ایجادشده توسط عامل‌های سردسته هدایت شوند. یک نمونه از کاربردهای کنترل محدود نگهدارنده، ایجاد فضای امن توسط گروهی از ربات‌ها جهت حفاظت گروهی دیگر و یا انتقال مواد پرخطر و حساس می‌باشد. در این مورد، گروهی از عامل‌ها به عنوان سردسته معرفی می‌شوند و وظیفه مشخص کردن پوش محدب امن را دارند. با اعمال کنترل محدود نگهدارنده به چنین سیستمی، عامل‌های پیرو که باید مورد حفاظت قرار گیرند و یا وظیفه انتقال مواد پرخطر و حساس را دارند، به پوش محدبی که توسط عامل‌های سردسته ایجاد شده است، هدایت می‌شوند. در نتیجه، لازم نخواهد بود که عامل‌های پیرو تجهیزات اضافی داشته و یا به حس‌گرهای تشخیص موانع و نقاط پرخطر مجهز باشند [۸].

مسئله کنترل محدود نگهدارنده برای گستره وسیعی از سیستم‌ها با دینامیک غیرخطی، نامعین و اتفاقی مورد مطالعه قرار گرفته است. برای مثال در [۱۸]، این مسئله برای سیستم‌های غیرخطی اتفاقی و با استفاده از روش بازگشت به عقب بررسی شده است. همچنین، مطالعاتی که تاکنون در حوزه کنترل محدود نگهدارنده انجام گرفته، غالبا بر روی سیستم‌های چندعاملی متشکل از عامل‌هایی با دینامیک یکسان بوده‌اند. در کاربردهای عملی به دلیل شرایط مختلف و قیدهایی که بر روی عامل‌ها وجود دارد، دینامیک عامل‌ها می‌تواند متفاوت از هم باشد. دینامیک متفاوت عامل‌ها می‌تواند انعطاف‌پذیری سیستم را نیز افزایش دهد. بدین معنی که، سیستمی که عامل‌هایی با دینامیک‌های مختلف دارد نسبت به سیستمی با عامل‌های یکسان، اهداف وسیع‌تر و کارایی بالاتری می‌تواند داشته باشد. به همین جهت، مطالعه کنترل محدود نگهدارنده سیستم‌های چندعاملی با دینامیک غیریکسان دارای اهمیت می‌باشد. در [۹]، کنترل محدود نگهدارنده برای عامل‌های غیریکسان در دو حالت بررسی شده است. در حالت اول، دینامیک عامل‌های سردسته انتگرال‌گیر مرتبه اول و دینامیک عامل‌های پیرو، انتگرال‌گیر مرتبه دوم فرض شده است. در این حالت، ورودی کنترلی به صورت خطی معرفی شده است. در حالت دوم، معکوس حالت اول فرض شده و قانون کنترلی غیرخطی برای تحقق کنترل محدود نگهدارنده به صورت زمان‌محدود معرفی شده است. برای این حالت، شرایط لازم و کافی برای حل مسئله به دست آمده است. مراجع [۱۰، ۱۱] نیز به مسئله کنترل محدود نگهدارنده سیستم‌های چندعاملی پرداخته‌اند. در [۱۱]، این مسئله برای گروهی از عامل‌های غیریکسان با دینامیک غیرخطی و شامل پارامترهای نامعین، با استفاده از کنترل تطبیقی بررسی شده است. همچنین در [۱۱]، محدودیتی بر روی گراف ارتباطات سیستم فرض شده است که گستره سیستم‌های مورد بحث را محدودتر می‌کند. در [۱۱]، طراحی کنترل‌کننده بر اساس کنترل تطبیقی بوده است.

از طرفی در روش‌های طراحی کنترل‌کننده فیدبک حالت، فرض بر این است که کلیه متغیرهای حالت در دسترس می‌باشند. در صورتی که در عمل برای اندازه‌گیری هر یک از متغیرهای حالت لازم است که یک حس‌گر و سیستم اندازه‌گیری تعبیه نمود که مستلزم هزینه زیادی است. از این رو در کاربردهای عملی، حالت‌های سیستم همیشه در دسترس نیستند و فقط به خروجی‌های سیستم می‌توان دسترسی داشت. در چنین مواقعی، استفاده از فیدبک حالت امکان‌پذیر نبوده و طراحی کنترل‌کننده بر اساس فیدبک خروجی مطلوب می‌باشد. در [۱۰]، کنترل محدود نگهدارنده سیستم‌های چندعاملی خطی ناهمگن با استفاده از فیدبک حالت بررسی شده است.

هدف این مقاله، حل مسئله کنترل محدود نگهدارنده برای سیستم‌های چندعاملی خطی با دینامیک غیریکسان، تحت مبحث تنظیم خروجی و با استفاده از فیدبک خروجی می‌باشد. با ایده گرفتن از پژوهش‌هایی که به تنظیم خروجی سیستم‌های چندعاملی با وجود عامل سردسته در حوزه رضایت جمعی پرداخته اند، دینامیک عامل‌های سردسته را به صورت سیستم خارجی در نظر می‌گیریم. در مقایسه با [۹] که در آن دینامیک بین پیروها و سردسته‌ها متفاوت است اما دینامیک بین پیروها یکسان است، در

این مقاله دینامیک پیروها با یکدیگر نیز متفاوت در نظر گفته شده است. در مقایسه با [۱۰] که در آن از فیدبک حالت بهره گرفته شده، در این مقاله طراحی کنترل‌کننده بر اساس فیدبک خروجی خواهد بود. همچنین، با اصلاح خطای مرسوم در مبحث تنظیم خروجی به منظور در نظر گرفتن بیش از یک عامل سردسته، از روش‌های موجود در حوزه تنظیم خروجی برای حل مسئله کنترل محدود نگهدارنده استفاده می‌شود. در تحلیل مسئله از فرمول‌بندی خطای کنترل محدود نگهدارنده بر اساس ماتریس H_k استفاده می‌شود که سبب می‌شود تا بتوان از روش‌های اصلاح‌شده تنظیم خروجی جهت حل مسئله بهره گرفت.

مقاله حاضر در شش بخش تنظیم شده است. در بخش دوم مفاهیمی از نظریه گراف و تعاریف و نمادهای استفاده شده در مقاله ارائه شده است. بخش سوم به بیان مسئله پرداخته و سیستم مورد مطالعه را معرفی می‌کند. در بخش چهارم کنترل‌کننده پیشنهادی ارائه شده و مفاهیم اصلی مقاله بیان می‌شود. جهت ارزیابی عملکرد کنترل‌کننده پیشنهادی، یک شبیه‌سازی عددی نیز انجام گرفته که در بخش پنجم ارائه می‌شود. در نهایت، نتایج مقاله و کارهای پژوهشی آینده بیان شده است.

۲- پایه‌های نظری

۲-۱- نظریه گراف ([۱۲])

برای مدل‌سازی ارتباط بین عامل‌ها در یک سیستم چندعاملی از گراف‌ها استفاده می‌شود. برای یک سیستم چندعاملی متشکل از n عامل، گراف جهت‌دار یا غیرجهت‌دار متناظر G می‌تواند توسط (V,E) نشان داده شود، که $\mathrm{V}=\{1,2,...,n\}$ مجموعه گره‌ها و $\mathrm{E}\subseteq \mathrm{V}\times\mathrm{V}$ مجموعه یال‌ها می‌باشد. یالی که به صورت $(i,j)\in\mathrm{E}$ نمایش داده می‌شود به این معنی است که j امین عامل به اطلاعات i امین عامل دسترسی دارد و همچنین، عامل i یک همسایه عامل j می‌باشد. بنابراین، می‌توان گفت که مجموعه همسایگان عامل j، عامل‌هایی می‌باشند که عامل j اطلاعات را از آن‌ها دریافت می‌کند.

گراف G را غیرجهت‌دار گویند اگر $(i,j)\in\mathrm{E}$، $(j,i)\in\mathrm{E}$ را ایجاب کند. یک مسیر جهت‌دار از گره i به گره j رشته‌ای از گره‌ها می‌باشد که با گره i شروع می‌شود و در گره j پایان می‌یابد، به طوری که گره‌های متوالی میانی به صورت $(i,p),(p,q),...,(r,j)$ مجاور باشند. یک گراف جهت‌دار را قویاً هم‌بند گویند اگر برای هر جفت مرتب از گره‌های متفاوت به صورت $[i,j]$، مسیر جهت‌داری از گره i به گره j وجود داشته باشد.

ماتریس مجاورت $\mathrm{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ متناظر با گراف G به گونه‌ای تعریف می‌شود که $a_{ij}>0$ اگر $(j,i)\in\mathrm{E}$، $a_{ii}=0$، و در غیر این صورت $a_{ij}=0$ باشد. ماتریس لاپلاسین $\mathrm{L}=[l_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$ گراف G نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$l_{ij}=\begin{cases}\sum_{r=1,r\neq i}^{n} a_{ir}, i=j\\ -a_{ij}, i\neq j\end{cases} \qquad (۱)$$

برای مشخص کردن این‌که k امین سردسته با کدامیک از عامل‌های پیرو در ارتباط می‌باشد، از ماتریس Δ_k استفاده می‌شود که یک ماتریس قطری با درایه‌های قطری $\delta_1^k,\delta_2^k,...,\delta_n^k$ می‌باشد. اگر بین پیرو i و سردسته k کانال ارتباطی برقرار باشد، درایه δ_i^k برابر یک و در غیر این صورت برابر با صفر خواهد بود.

۲-۲- تعاریف و نمادها

در این مقاله، برای یک سیستم چندعاملی متشکل از n عامل پیرو و m عامل سردسته، G_{n+m} و G_n به ترتیب، گراف‌هایی در نظر گرفته می‌شوند که برای مدل‌سازی ارتباطات بین تمامی $n+m$ عامل و n عامل پیرو به کار رفته‌اند. G_n را می‌توان از گراف G_{n+m}، از طریق حذف گره‌های عامل‌های سردسته و یال‌های متصل به آن گره‌ها به دست آورد. از A و L به ترتیب، برای نشان دادن ماتریس‌های مجاورت و لاپلاسین متناظر با گراف G_n استفاده می‌شود. برای عامل‌های پیرو و سردسته به ترتیب، اندیس‌های $\{1,...,n\}$ و $\{n+1,...,n+m\}$ به کار می‌رود. همچنین، N_i برای نشان دادن مجموعه‌ای به کار می‌رود که از اشتراک مجموعه همسایگان پیرو i و مجموعه پیروها به دست آمده است. در واقع، N_i مجموعه همسایگان پیرو i می‌باشد به طوری که عامل‌های سردسته از آن حذف شده‌اند.

مجموعه سردسته‌ها و مجموعه پیروها به‌ترتیب با R و F نشان داده می‌شود. ماتریس‌های $\mathbf{1}_n$، I_p و $\mathbf{0}$ به ترتیب نشان‌دهنده بردار ستونی $n\times 1$ با درایه‌های یک، ماتریس همانی با ابعاد p و ماتریس صفر با ابعاد مناسب می‌باشند. ماتریس قطری-بلوکی ایجادشده توسط ماتریس‌های $x_1,x_2,...,x_n$ با $\mathrm{diag}\{x_1,x_2,...,x_n\}$ نمایش داده می‌شود. نماد $\otimes$ بیان‌گر ضرب کرونکر[۷] است. $\mathrm{dist}(x,\mathrm{C})$ نیز بیانگر فاصله $x\in\mathbb{R}^N$ از مجموعه $\mathrm{C}\subseteq\mathbb{R}^N$ می‌باشد. به عبارتی دیگر:

$$\mathrm{dist}(x,\mathrm{C})=\inf_{y\in\mathrm{C}}\|x-y\|_2 \qquad (۲)$$

در ادامه چندین تعریف بیان می‌شود که در این مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

تعریف ۱ ([۱۳]) – مجموعه $\mathrm{C}\subseteq\mathbb{R}^N$ محدب است اگر به ازای هر $x,y\in\mathrm{C}$ و هر $\lambda\in[0,1]$ داشته باشیم $(1-\lambda)x+\lambda y\in\mathrm{C}$.

پوش محدب مجموعه نقاط متناهی $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ که با $\mathrm{Co}(X)$ نشان داده می‌شود، کوچکترین مجموعه محدب شامل تمامی نقاط موجود در X می‌باشد. به عبارتی دیگر:

$$Co(X) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid x_i \in X, \alpha_i \in \mathbb{R}, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\} \quad (۳)$$

M-ماتریس‌ها دسته‌ای از ماتریس‌ها هستند که در تحلیل سیستم‌های چندعاملی کاربردهای مختلفی دارند. تعریف بعدی به معرفی M-ماتریس‌ها می‌پردازد.

تعریف ۲ ([۱۴]) Z – را مجموعه ماتریس‌های مربعی در نظر بگیرید که درایه‌های غیرقطریشان غیرمثبت باشند. به عبارتی دیگر:

$$\mathrm{Z} \triangleq \{Q = [q_{ij}] \in \mathbb{R}^{s \times s} : q_{ij} \leq 0, i \neq j\} \quad (۴)$$

ماتریس Q یک M-ماتریس ناویژه (ویژه) نامیده می‌شود اگر $Q \in \mathrm{Z}$ و تمامی کهادهای اصلی Q مثبت (غیرمنفی) باشند.

تعریف ۳- برای یک سیستم چندعاملی، کنترل محدود نگهدارنده تحقق می‌یابد اگر بتوان قانون کنترلی هر عامل پیرو را طوری طراحی کرد که به ازای $t \to \infty$، عامل‌های پیرو به پوش محدب ایجادشده توسط عامل‌های سردسته هدایت شوند.

با تعریف مناسب شبکه ارتباطی بین عامل‌های پیرو و کنترل مناسب می‌توان از تصادم جلوگیری کرد.

۳- بیان مسئله

سیستم در نظر گرفته‌شده در این مقاله از n عامل پیرو با دینامیک خطی غیریکسان و m عامل سردسته یکسان تشکیل یافته است. معادله دینامیکی حاکم بر i امین پیرو به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i x_i + B_i u_i \\ y_i &= C_i x_i, i \in \mathrm{F} \end{aligned} \quad (۵)$$

که در آن $x_i(t) \in \mathbb{R}^N$ متغیر حالت، $u_i(t) \in \mathbb{R}^p$ نیروی کنترلی و $y_i(t) \in \mathbb{R}^M$ خروجی i امین پیرو است. A_i، B_i و C_i نیز ماتریس‌هایی با ابعاد مناسب هستند. همچنین فرض می‌شود که در طراحی کنترل‌کننده توزیع‌یافته، فقط به خروجی‌های عامل‌های پیرو دسترسی داریم. هر یک از عامل‌های سردسته نیز، سیستمی خارجی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\dot{w}_k = S w_k, k \in \mathrm{R} \quad (۶)$$

که $w_k \in \mathbb{R}^N$ متغیر حالت خارجی k امین عامل سردسته می‌باشد. ماتریس S نیز برای تمامی عامل‌های سردسته یکسان می‌باشد.

هدف این مقاله، تحقق کنترل محدود نگهدارنده برای سیستم چندعاملی (۵) و (۶) می‌باشد. یعنی $\forall i \in \mathrm{F}$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{dist}\big(x_i(t), \mathrm{Co}(w_k(t), k \in \mathrm{R})\big) = 0 \quad (۷)$$

۴- طراحی کنترل‌کننده

در ادامه، روند طراحی کنترل‌کننده برای سیستم چندعاملی (۵) و (۶) به منظور حل مسئله کنترل محدود نگهدارنده شرح داده می‌شود.

۴-۱- خطای کنترل محدود نگهدارنده

برای حل مسئله مطرح‌شده، ابتدا خطای کنترل محدود نگهدارنده پیشنهادی برای i امین عامل پیرو به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_i(t) = \sum_{j \in \mathrm{N}_i} a_{ij}(x_i - x_j) + \sum_{k=n+1}^{n+m} \delta_i^k (x_i - w_k) \quad (۸)$$

بردار خطای جامع

$$e = \begin{bmatrix} e_1^T & e_2^T & \cdots & e_n^T \end{bmatrix}^T \quad (۹)$$

را با استفاده از رابطه (۸) می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$e(t) = \sum_{k=n+1}^{n+m} (H_k \otimes I_N)(x - \mathbf{1}_n \otimes w_k(t)) \quad (۱۰)$$

که در آن

$$H_k = \frac{1}{m}\mathrm{L} + \Delta_k, k \in \mathrm{R} \quad (۱۱)$$

و $x = \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T & \cdots & x_n^T \end{bmatrix}^T$.

استفاده از ماتریس معرفی‌شده در رابطه (۱۱) باعث می‌شود که به متغیرهای حالت عامل‌های سردسته دسترسی داشته باشیم. در واقع، در اغلب کارهای پژوهشی انجام‌یافته در زمینه کنترل محدود نگهدارنده، ضرایب تشکیل‌دهنده پوش محدب عامل‌های سردسته توسط ماتریس $-\mathrm{L}_1^{-1}\mathrm{L}_2$ مشخص می‌شوند، که ماتریس‌های $\mathrm{L}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $\mathrm{L}_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ از تقسیم‌بندی ماتریس لاپلاسین متناظر با گراف G_{n+m} به صورت

$$\begin{bmatrix} \mathrm{L}_1 & \mathrm{L}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (۱۲)$$

به دست می‌آیند. همچنین، مکان‌های نهایی عامل‌های پیرو از طریق عبارت زیر به دست می‌آیند:

$$(-(\mathrm{L}_1^{-1}\mathrm{L}_2) \otimes I_N) w_{\mathrm{R}} \quad (۱۳)$$

که w_{R} بردار حالت جامع سردسته‌ها می‌باشد. به عبارتی دیگر:

$$w_{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} w_{n+1}^T & w_{n+2}^T & \cdots & w_{n+m}^T \end{bmatrix}^T \quad (۱۴)$$

همانطور که بعدا در اثبات لم ۲ خواهیم دید، $\lim_{t \to \infty} e(t) = \mathbf{0}$ همگرایی عامل‌های پیرو را به سمت عبارت

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \Big[\Big[\big(\sum_{r=n+1}^{n+m} H_r\big)^{-1} H_k \mathbf{1}_n\Big] \otimes w_k(t)\Big] \quad (۱۵)$$

ایجاب می‌کند، که ترکیب محدبی از متغیرهای حالت $w_k, k \in \mathrm{R}$ می‌باشد. در نتیجه، استفاده از ماتریس پیشنهادی $H_k, k \in \mathrm{R}$ این امکان را فراهم می‌آورد تا بتوان حالت نهایی

عامل‌های پیرو را توسط (۱۵) بیان کرد. مزیت عبارت (۱۵) نسبت به (۱۳) این می‌باشد که در (۱۳) فقط به بردار حالت جامع سردسته‌ها دسترسی داشته، اما در (۱۵) به متغیرهای حالت عامل‌های سردسته دسترسی داریم که باعث افزایش انعطاف‌پذیری محاسباتی می‌شود.

در فرمول‌بندی خطای مرسوم مبحث تنظیم خروجی حداکثر یک عامل سردسته را می‌توان در نظر گرفت. به دلیل این‌که در کنترل محدود نگهدارنده با بیش از یک عامل سردسته سروکار داریم، در این مقاله خطای مرسوم در مبحث تنظیم خروجی به گونه‌ای اصلاح شده است تا بتوان بیش از یک عامل سردسته را در نظر گرفت و از روش‌های موجود در مبحث تنظیم خروجی برای حل مسئله کنترل محدود نگهدارنده استفاده کرد. بدین منظور با تعریف ماتریس‌های

$$\begin{cases} \bar{H}_k = H_k \otimes I_N \\ \bar{w}_k = \mathbf{1}_n \otimes w_k \\ C = \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \\ D^k = -\bar{H}_k \end{cases} \tag{۱۶}$$

رابطه (۱۰) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$e = Cx + \sum_{k=n+1}^{n+m} D^k \bar{w}_k \tag{۱۷}$$

که مشابه بردار خطای به‌کار رفته در [۵، ۶، ۱۵] می‌باشد، با این تفاوت که بیش از یک عامل سردسته در رابطه (۱۷) در نظر گرفته شده است. بنابراین، بیان خطای کنترل محدود نگهدارنده به صورت روابط (۱۰) و (۱۷)، امکان استفاده از روش‌های موجود در مبحث کنترل خروجی را با برخی اصلاحات، برای حل مسئله کنترل محدود نگهدارنده سیستم چندعاملی فراهم می‌سازد.

۴-۲- قانون کنترلی پیشنهادی

در ادامه، به منظور طراحی کنترل‌کننده برای مسئله کنترل محدود نگهدارنده سیستم چندعاملی (۵) و (۶)، یک جبران‌ساز دینامیکی با بردار حالت $\zeta_i \in \mathbb{R}^N$ برای iامین پیرو به صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$\dot{\zeta}_i = S\zeta_i + \beta\Big[\sum_{j\in \mathrm{N}_i} a_{ij}(\zeta_j - \zeta_i) + \sum_{k=n+1}^{n+m} \delta_i^k (w_k - \zeta_i)\Big] \tag{۱۸}$$

که در رابطه بالا، β ضریبی ثابت و مثبت می‌باشد. همان‌طور که در ملاحظه ۱ مشاهده خواهد شد، رابطه (۳۵) که شکل فشرده (۱۸) می‌باشد، می‌تواند به عنوان رویت‌گر ترکیب محدب بردارهای حالت عامل‌های سردسته در نظر گرفته شود.

در ادامه، قانون کنترلی توزیع‌یافته زیر که متشکل از یک جبران‌ساز دینامیکی و یک رویت‌گر با متغیر $\eta_i \in \mathbb{R}^N$ است، برای iامین عامل پیرو پیشنهاد می‌شود:

$$\begin{cases} u_i = K_i^1 \eta_i + K_i^2 \zeta_i \\ \dot{\zeta}_i = S\zeta_i + \beta\Big[\sum_{j\in \mathrm{N}_i} a_{ij}(\zeta_j - \zeta_i) + \sum_{k=n+1}^{n+m} \delta_i^k (w_k - \zeta_i)\Big] \\ \dot{\eta}_i = A_i\eta_i + B_i u_i + L_i(C_i\eta_i - y_i) \end{cases} \tag{۱۹}$$

که $K_i^1, K_i^2 \in \mathbb{R}^{p\times N}$ ماتریس‌های بهره کنترل‌کننده و $L_i \in \mathbb{R}^{N\times M}$ ماتریس بهره رویت‌گر هستند و در بخش‌های بعدی در مورد طراحی آن‌ها بحث خواهد شد.

سیستم حلقه-بسته تشکیل‌شده از (۵)، (۶)، (۸) و قانون کنترلی (۱۹) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + \sum_{k=n+1}^{n+m} B_c^k \bar{w}_k \\ \dot{\bar{w}}_k &= \bar{S}\bar{w}_k \\ e &= C_c x_c + \sum_{k=n+1}^{n+m} D_c^k \bar{w}_k \end{aligned} \tag{۲۰}$$

که x_c بردار حالت حلقه-بسته، $\bar{S} = I_n \otimes S$ و بقیه ماتریس‌های موجود در (۲۰) در بخش‌های بعدی ارائه خواهند شد. بدین ترتیب، مسئله‌ای که پیش رو خواهیم داشت به این صورت خواهد بود که برای سیستم چندعاملی (۵) و (۶)، قانون کنترلی (۱۹) طوری تعیین شود که مبدأ سیستم $\dot{x}_c = A_c x_c$ پایدار نمایی باشد و به ازای شرایط اولیه دلخواه $x_i(0), \zeta_i(0), \eta_i(0), i \in \mathrm{F}$ و $w_k(0), k \in \mathrm{R}$ داشته باشیم:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \mathbf{0} \tag{۲۱}$$

برای حل این مسئله به چند فرض استاندارد نیاز می‌باشد که در ادامه آورده می‌شوند.

فرض ۱_ (A_i, B_i) به ازای $i \in \mathrm{F}$ پایدارپذیر می‌باشد.

فرض ۲_ (C_i, A_i) به ازای $i \in \mathrm{F}$ آشکارپذیر می‌باشد.

فرض ۳_ معادلات ماتریسی خطی

$$S = A_i + B_i U_i, i \in \mathrm{F} \tag{۲۲}$$

به ترتیب دارای پاسخ U_i هستند.

فرض ۱ و فرض ۲ در اثبات قضیه ۱ مورد استفاده قرار خواهند گرفت. فرض‌هایی مشابه فرض ۳ در [۵، ۶] آورده شده‌اند. در رابطه (۲۲) با توجه به ابعاد ماتریس‌ها، برای ماتریس U_i یا جوابی نخواهیم داشت و یا یک جواب منحصر به فرد خواهیم داشت که طبق فرض ۳، وجود جواب منحصر به فرد فرض شده است. فرض زیر نیز بعداً در لم ۱ استفاده خواهد شد.

فرض ۴_ گراف‌های G_n و G_{n+m} به ترتیب، قویاً هم‌بند و هم‌بند می‌باشند.

برای بررسی ارتباط بین مسئله کنترل محدود نگهدارنده و معادله خطا (۱۰)، ابتدا لازم است با ویژگی‌های ماتریس H_k آشنا شد. به همین منظور لم بعدی ارائه می‌گردد:

لم ۱ ([۱۰]) _ با برقرار بودن فرض ۴، ماتریس H_k مثبت معین و متقارن است. همچنین H_k یک M-ماتریس ناویژه بوده و دارای ویژگی‌های زیر است:

- قسمت حقیقی مقادیر ویژه H_k مثبت می‌باشد.
- H_k^{-1} وجود داشته و درایه‌هایش نامنفی است.

ماتریس $\sum_{k=n+1}^{n+m} H_k$ نیز مثبت معین, متقارن و یک M-ماتریس ناویژه بوده و ویژگی‌های ذکرشده برای H_k، در مورد $\sum_{k=n+1}^{n+m} H_k$ نیز صدق می‌کند.

در ادامه، ارتباط بین مسئله کنترل محدود نگهدارنده و معادله خطا (۱۰) به وسیله لمی بیان گردیده و نشان داده شده است که همگرایی خطای (۱۰) به صفر، به مفهوم تحقق کنترل محدود نگهدارنده می‌باشد.

لم ۲_ برای سیستم چندعاملی (۵) و (۶) و تحت فرض ۴، با تعریف خطا به صورت (۱۰)، $\lim_{t\to\infty} e(t) = \mathbf{0}$ هدایت عامل‌های پیرو را به سمت پوش محدب ایجادشده توسط عامل‌های سردسته ایجاب می‌کند.

اثبات: اگر $\lim_{t\to\infty} e(t) = \mathbf{0}$ برقرار باشد، از رابطه (۱۰) و با توجه به خواص ضرب کرونکر به ازای $t \to \infty$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} x(t) &\to \Big[\sum_{r=n+1}^{n+m} (H_r \otimes I_N)\Big]^{-1} \\ &\quad \Big[\sum_{k=n+1}^{n+m} (H_k \otimes I_N)(\mathbf{1}_n \otimes w_k(t))\Big] \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+m} \Big[\Big[(\sum_{r=n+1}^{n+m} H_r)^{-1} \otimes I_N\Big](H_k \otimes I_N) \\ &\quad (\mathbf{1}_n \otimes w_k(t))\Big] \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+m} \Big[\Big[(\sum_{r=n+1}^{n+m} H_r)^{-1} H_k \mathbf{1}_n\Big] \otimes w_k(t)\Big] \end{aligned} \tag{۲۳}$$

در واقع، $(\sum_{r=n+1}^{n+m} H_r)^{-1} H_k \mathbf{1}_n, k \in \mathrm{R}$ ضرایب تشکیل‌دهنده پوش محدب عامل‌های سردسته محسوب می‌شوند و باید اثبات شود که این ضرایب نامنفی هستند و مجموعشان در هر سطر برابر یک می‌باشد. با توجه به این‌که:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=n+1}^{n+m} \Big[(\sum_{r=n+1}^{n+m} H_r)^{-1} H_k 1_n\Big] = \\ &(\sum_{r=n+1}^{n+m} H_r)^{-1} (\sum_{k=n+1}^{n+m} H_k 1_n) = 1_n \end{aligned} \tag{۲۴}$$

می‌توان نتیجه گرفت که مجموع ضرایب مذکور در هر سطر برابر یک می‌باشد.

در ادامه، نامنفی بودن این ضرایب بررسی می‌گردد. اگر درایه‌های ماتریس $(\sum_{r=n+1}^{n+m} H_r)^{-1}$ با h_{ij} نشان داده شوند، به‌عبارتی دیگر $(\sum_{r=n+1}^{n+m} H_r)^{-1} = [h_{ij}]$ و مؤلفه iام بردار $(\sum_{r=n+1}^{n+m} H_r)^{-1} H_k \mathbf{1}_n$ با α_{ki} نمایش داده شود، α_{ki} را با توجه به رابطه (۱۱) می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\alpha_{ki} = \sum_{j=1}^{n} h_{ij} \delta_j^k + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} h_{ij} \Big[\sum_{r=1}^{n} l_{jr}\Big] \tag{۲۵}$$

که l_{jr}ها درایه‌های ماتریس لاپلاسین هستند. با توجه به این‌که هر سطر ماتریس لاپلاسین مجموعی برابر صفر دارد، α_{ki} را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\alpha_{ki} = \sum_{j=1}^{n} h_{ij} \delta_j^k, k \in \mathrm{R} \tag{۲۶}$$

طبق لم ۱، درایه‌های ماتریس $(\sum_{r=n+1}^{n+m} H_r)^{-1}$ نامنفی هستند، به‌عبارتی دیگر برای تمامی $i \in \mathrm{F}$ و $j = 1, 2, .., n$ داریم $h_{ij} \geq 0$. از طرفی دیگر به ازای تمامی $j = 1, 2, ..., n$ و $k \in \mathrm{R}$، $\delta_j^k \geq 0$ می‌باشد. بنابراین، با توجه به رابطه (۲۶) مشخص است که تمامی مؤلفه‌های بردار $(\sum_{r=n+1}^{n+m} H_r)^{-1} H_k \mathbf{1}_n$ که همان ضرایب تشکیل‌دهنده پوش محدب عامل‌های سردسته می‌باشند، نامنفی هستند. در نتیجه طبق تعریف ۱، تعریف ۳ و رابطه (۲۳)، می‌توان نتیجه گرفت که اگر $\lim_{t\to\infty} e(t) = \mathbf{0}$ برقرار باشد، عامل‌های پیرو به سمت پوش محدب عامل‌های سردسته هدایت خواهند شد.

در ادامه لمی ارائه می‌شود که با ایده گرفتن از لم ۱,۴ در [۱۶] شرایطی را بیان می‌کند که در حل مسئله کنترل محدود نگهدارنده با استفاده از روش‌های تنظیم خروجی کاربرد خواهد داشت.

لم ۳_ سیستم حلقه-بسته (۲۰) را در نظر بگیرید. فرض کنید که ماتریس A_c هرویتز باشد. اگر ماتریس ثابتی همانند X_c وجود داشته باشد که به ازای $k \in \mathrm{R}$ در معادلات ماتریسی خطی

$$\begin{aligned} X_c \bar{H}_k \bar{S} &= A_c X_c \bar{H}_k + B_c^k \\ 0 &= C_c X_c \bar{H}_k + D_c^k \end{aligned} \tag{۲۷}$$

صدق کند، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \mathbf{0} \tag{۲۸}$$

اثبات: ابتدا متغیری به صورت $\tilde{x}_c = x_c - X_c \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \bar{w}_k$ تعریف می‌گردد. اگر X_c در معادلات ماتریسی خطی (۲۷) صدق کند، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_c &= \dot{x}_c - X_c \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \dot{\bar{w}}_k \\ &= A_c x_c + \sum_{k=n+1}^{n+m} B_c^k \bar{w}_k - \sum_{k=n+1}^{n+m} X_c \bar{H}_k \bar{S} \bar{w}_k \\ &= A_c x_c - A_c X_c \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \bar{w}_k = A_c \tilde{x}_c\end{aligned} \tag{۲۹}$$

با توجه به این‌که ماتریس A_c هرویتز می‌باشد می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{t\to\infty} \tilde{x}_c(t) = \mathbf{0}$. از طرفی، خطای حلقه-بسته را با استفاده از رابطه (۲۷) می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}e &= C_c x_c + \sum_{k=n+1}^{n+m} D_c^k \bar{w}_k \\ &= C_c \tilde{x}_c + \sum_{k=n+1}^{n+m} (C_c X_c \bar{H}_k + D_c^k) \bar{w}_k = C_c \tilde{x}_c\end{aligned} \tag{۳۰}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty} C_c \tilde{x}_c(t) = \mathbf{0} \tag{۳۱}$$

و اثبات تمام است.

توجه شود که در لم ۱,۴ از [۱۶]، ماتریس ثابت X_c باید در یک جفت معادله صدق کند تا شرط لم تحقق یابد. اما به دلیل این‌که در کنترل محدود نگهدارنده با بیش از یک عامل سردسته مواجه هستیم، m جفت معادله در لم ۳ وجود دارند که ماتریس X_c باید در آن‌ها صدق کند تا شرایط لم تحقق یابد.

در ادامه، انتخاب ماتریس‌های K_i^1 و K_i^2 که بهره‌های کنترل‌کننده پیشنهادی هستند، مورد بحث قرار گرفته و نتیجه اصلی مقاله در قالب قضیه ۱ ارائه خواهد شد.

با توجه به فرض ۱، $K_i^1, i \in \mathrm{F}$ را می‌توان طوری انتخاب کرد که $A_i + B_i K_i^1$ هرویتز باشد. بهره K_i^2 هم از طریق رابطه

$$K_i^2 = U_i - K_i^1, i \in \mathrm{F} \tag{۳۲}$$

انتخاب می‌شود که U_i پاسخی است که از معادله ماتریسی خطی (۲۲) به دست آمده است. در نهایت باتوجه به فرض ۲، $L_i, i \in \mathrm{F}$ طوری انتخاب می‌شود که $A_i + L_i C_i$ هرویتز باشد. با توجه به روابط (۲۲) و (۳۲) می‌توان به رابطه زیر رسید:

$$\bar{S} = A + BK_1 + BK_2 \tag{۳۳}$$

که ماتریس‌های موجود در رابطه فوق به صورت ماتریس‌های $\bar{S} = I_n \otimes S$، $A = \mathrm{diag}\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$، $B = \mathrm{diag}\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$، $K_1 = \mathrm{diag}\{K_1^1, K_2^1, \ldots, K_n^1\}$ و $K_2 = \mathrm{diag}\{K_1^2, K_2^2, \ldots, K_n^2\}$ تعریف شده‌اند. رابطه (۳۳) در اثبات قضیه ۱ مورد نیاز خواهد بود.

قضیه ۱_ سیستم چندعاملی (۵) و (۶) و حلقه-بسته (۲۰) را در نظر بگیرید. تحت فرض‌های ۱ الی ۴، قانون کنترلی (۱۹) در صورتی که ضریب ثابت و مثبت β به حد کافی بزرگ باشد و به ازای $i \in \mathrm{F}$، ماتریس‌های بهره K_i^1 و L_i طوری انتخاب شده باشد که به ترتیب $A_i + B_i K_i^1$ و $A_i + L_i C_i$ هرویتز بوده و K_i^2 از طریق رابطه (۳۲) محاسبه شود، پاسخی می‌باشد که مبدأ سیستم $\dot{x}_c = A_c x_c$ را پایدار نمایی می‌کند و به ازای شرایط اولیه دلخواه $x_i(0), \zeta_i(0), \eta_i(0), i \in \mathrm{F}$ و $w_k(0), k \in \mathrm{R}$ خواهیم داشت $\lim_{t\to\infty} e(t) = \mathbf{0}$.

اثبات: با استفاده از قانون کنترلی (۱۹) داریم:

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i K_i^1 \eta_i + B_i K_i^2 \zeta_i \tag{۳۴}$$

از طرفی، رابطه (۱۸) را می‌توان در حالت فشرده به صورت زیر بیان کرد:

$$\dot{\zeta} = \bar{S}\zeta - \beta \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k (\zeta - \bar{w}_k) \tag{۳۵}$$

که $\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1^T & \zeta_2^T & \cdots & \zeta_n^T \end{bmatrix}^T$. بنابراین سیستم حلقه-بسته را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + BK_1\eta + BK_2\zeta \\ \dot{\eta} &= (A + BK_1 + LC)\eta + BK_2\zeta - LCx \\ \dot{\zeta} &= \Big[\bar{S} - \beta \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k\Big]\zeta + \beta \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \bar{w}_k \\ \dot{\bar{w}}_k &= \bar{S}\bar{w}_k \\ e &= Cx + \sum_{k=n+1}^{n+m} D^k \bar{w}_k\end{aligned} \tag{۳۶}$$

که در روابط فوق $\eta = \begin{bmatrix} \eta_1^T & \eta_2^T & \cdots & \eta_n^T \end{bmatrix}^T$، $L = \mathrm{diag}\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ و $C = \mathrm{diag}\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ است.

با در نظر گرفتن $x_c = \begin{bmatrix} x^T, & \eta^T, & \zeta^T \end{bmatrix}^T$ و ماتریس‌های

$$A_c = \begin{bmatrix} A & BK_1 & BK_2 \\ -LC & A + BK_1 + LC & BK_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{S} - \beta \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k \end{bmatrix},$$

$$B_c^k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \bar{H}_k \end{bmatrix}, \quad C_c = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_c^k = D^k \tag{۱}$$

می‌توان سیستم (۳۶) را به شکل سیستم حلقه-بسته (۲۰) بیان نمود.

اگر مقادیر ویژه ماتریس‌های S و $\sum_{k=n+1}^{n+m} H_k$ به ترتیب، با λ_r و μ_q نشان داده شوند، در آن صورت مقادیر ویژه $(\bar{S} - \beta \sum_{k=n+1}^{n+m} \bar{H}_k)$ برابر با $(\lambda_r - \beta\mu_q), r = 1, \ldots, N, q = 1, \ldots, n$ خواهند بود. با توجه

به لم ۱، قسمت حقیقی مقادیر ویژه ماتریس $\sum_{k=n+1}^{n+m} H_k$ مثبت می‌باشد. بنابراین با انتخاب به حد کافی بزرگ β، می‌توان نتیجه گرفت که به ازای $r=1,\dots,N$ و $q=1,\dots,n$، داریم $\lambda_r-\beta\mu_q<0$.

با در نظر گرفتن ماتریس‌های

$$T=\begin{bmatrix} A & BK_1 \\ -LC & A+BK_1+LC \end{bmatrix} \qquad (۳۸)$$
$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$P^{-1}TP$ را که متشابه T می‌باشد می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$P^{-1}TP=\begin{bmatrix} A+BK_1 & BK_1 \\ 0 & A+LC \end{bmatrix} \qquad (۳۹)$$

ماتریس‌های $A+BK_1$ و $A+LC$ هرویتز می‌باشند، و در نتیجه $P^{-1}TP$ هرویتز می‌باشد. از طرفی ماتریس‌های متشابه مقادیر ویژه یکسانی دارند، و با توجه به اینکه ماتریس T و ماتریس بیان‌شده توسط (۳۹) متشابه می‌باشند، می‌توان نتیجه گرفت که T هرویتز می‌باشد. بنابراین با انتخاب به حد کافی بزرگ β، ماتریس A_c هرویتز می‌باشد. در نتیجه، اولین ویژگی مسئله بیان‌شده در قضیه ۱ برقرار است.

در ادامه، ویژگی دوم مسئله مطرح‌شده در قضیه ۱ اثبات می‌شود. با استفاده از خاصیت ضرب کرونکر $(P\otimes Q)(Y\otimes Z)=(PY)\otimes(QZ)$، رابطه (۱۶) و تعریف ماتریس $\bar{S}=I_n\otimes S$ می‌توان نشان داد:

$$\bar{S}\Big(\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\Big)^{-1}\bar{H}_k=\Big(\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\Big)^{-1}\bar{H}_k\bar{S} \qquad (۴۰)$$

با در نظر گرفتن X_c به صورت

$$X_c=(\mathbf{1}_3\otimes I_{nN})\Big(\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\Big)^{-1} \qquad (۴۱)$$

و با استفاده از روابط (۳۷)، (۳۳) و (۴۰) می‌توان نوشت:

$$A_cX_c\bar{H}_k+B_c^k=$$
$$\begin{bmatrix} (A+BK_1+BK_2)\Big(\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\Big)^{-1}\bar{H}_k \\ (A+BK_1+BK_2)\Big(\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\Big)^{-1}\bar{H}_k \\ \bar{S}\Big(\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\Big)^{-1}\bar{H}_k-\beta\bar{H}_k+\beta\bar{H}_k \end{bmatrix} \qquad (۴۲)$$
$$=(\mathbf{1}_3\otimes I_{nN})\bar{S}\Big(\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\Big)^{-1}\bar{H}_k$$
$$=(\mathbf{1}_3\otimes I_{nN})\Big(\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\Big)^{-1}\bar{H}_k\bar{S}=X_c\bar{H}_k\bar{S}$$

همچنین با توجه به روابط (۱۶)، (۳۷) و (۴۱) داریم:

$$C_cX_c\bar{H}_k+D_c^k=\bar{H}_k+D_c^k=\mathbf{0} \qquad (۴۳)$$

بنابراین X_c در نظر گرفته‌شده در (۴۱)، پاسخی برای معادلات ماتریسی خطی (۲۷) می‌باشد و با توجه به لم ۳ می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{t\to\infty}e(t)=\mathbf{0}$ و اثبات کامل می‌شود.

بنابراین با حل مسئله بیان‌شده در قضیه ۱، از لم ۲ نتیجه گرفته می‌شود که عامل‌های پیرو (۵) به سمت پوش محدبی که توسط عامل‌های سردسته (۶) ایجاد می‌شود، هدایت خواهند شد.

در ادامه اثبات خواهد شد رابطه (۳۵) که شکل فشرده (۱۸) می‌باشد، می‌تواند به عنوان رویت‌گر ترکیب محدب بردارهای حالت عامل‌های سردسته در نظر گرفته شود.

ملاحظه ۱_ با تعریف متغیر جدید $\tilde{\zeta}$ به صورت

$$\tilde{\zeta}=\zeta-\Big(\sum_{r=n+1}^{n+m}\bar{H}_r\Big)^{-1}\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\bar{w}_k \qquad (۴۴)$$

و با استفاده از روابط (۳۶) و (۴۰) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\zeta}}&=\dot{\zeta}-\sum_{k=n+1}^{n+m}\Big[\Big(\sum_{r=n+1}^{n+m}\bar{H}_r\Big)^{-1}\bar{H}_k\bar{S}\bar{w}_k\Big]\\ &=\Big[\bar{S}-\beta\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\Big]\zeta+\beta\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\bar{w}_k\\ &\quad-\bar{S}\Big(\sum_{r=n+1}^{n+m}\bar{H}_r\Big)^{-1}\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\bar{w}_k\\ &=\Big[\bar{S}-\beta\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\Big]\\ &\quad\Big[\zeta-\Big(\sum_{r=n+1}^{n+m}\bar{H}_r\Big)^{-1}\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\bar{w}_k\Big]\\ &=\Big[\bar{S}-\beta\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\Big]\tilde{\zeta}\end{aligned} \qquad (۴۵)$$

از آنجایی که $\Big(\bar{S}-\beta\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\Big)$ هرویتز می‌باشد، داریم $\lim_{t\to\infty}\tilde{\zeta}(t)=\mathbf{0}$. از طرفی، همان طور که در اثبات لم ۲ نشان داده شد، $\Big(\sum_{r=n+1}^{n+m}\bar{H}_r\Big)^{-1}\sum_{k=n+1}^{n+m}\bar{H}_k\bar{w}_k$ ترکیب محدب $\bar{w}_k, k\in\mathrm{R}$ می‌باشد. بنابراین، (۳۵) را می‌توان به عنوان رویت‌گر ترکیب محدب بردارهای حالت سردسته‌ها در نظر گرفت. علاوه بر این، سرعت همگرایی $\tilde{\zeta}$ را با انتخاب مقادیر بزرگتر β می‌توان بیشتر کرد.

۵- شبیه‌سازی عددی

در این بخش، روش پیشنهادشده در بخش چهارم بر روی یک سیستم چندعاملی با هفت عامل شبیه‌سازی می‌شود تا عملکرد مناسب کنترل‌کننده طراحی‌شده نشان داده شود. گراف ارتباطات متناظر با سیستم چندعاملی مفروض در

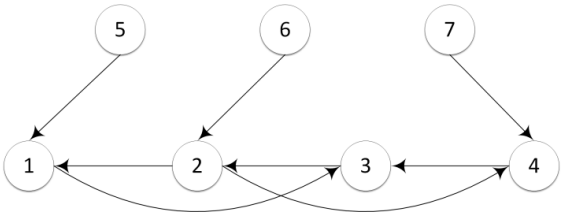
شکل ۱ نشان داده شده است که گره‌های ۱ تا ۴ و ۵ تا ۷ به ترتیب، نمایش‌دهنده عامل‌های پیرو و سردسته می‌باشند. همچنین اگر گره j ام

گراف ارتباطات به گره iام متصل باشد، a_{ij} برابر یک در نظر گرفته می‌شود. عامل‌های سردسته به صورت (۶) هستند و ماتریس S به صورت

$$S=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & -1\end{bmatrix} \tag{۴۶}$$

در نظر گرفته شده است. معادلات دینامیکی عامل‌های پیرو نیز توسط ماتریس‌های زیر مشخص شده‌اند:

$$\begin{aligned}
&A_1=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ B_1=\begin{bmatrix}-2\\ -1\end{bmatrix},\ C_1=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\\
&A_2=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix},\ C_2=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\\
&A_3=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 3\end{bmatrix},\ B_3=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix},\ C_3=\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}\\
&A_4=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 3 & 0\end{bmatrix},\ B_4=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix},\ C_4=\begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{۴۷}$$



شکل ۱: گراف ارتباطات

با حل معادله (۲۲) برای هر عامل پیرو، می‌توان پاسخ‌های زیر را به دست آورد:

$$\begin{aligned}
&U_1=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix},\quad U_2=\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix},\\
&U_3=\begin{bmatrix}-1 & -2\end{bmatrix},\quad U_4=\begin{bmatrix}-2 & -1\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{۴۸}$$

ماتریس‌های بهره استفاده‌شده در شبیه‌سازی نیز به صورت

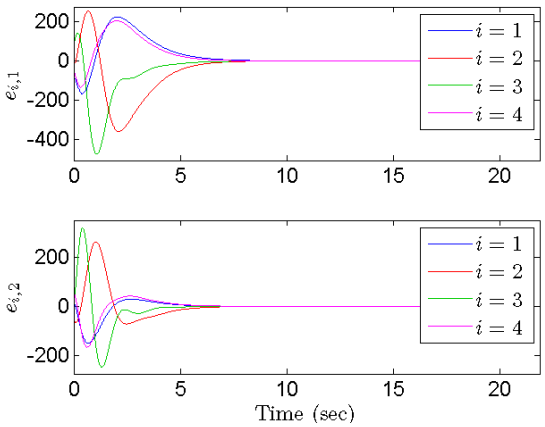
$$\begin{aligned}
&K_1^1=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix},\quad K_2^1=\begin{bmatrix}-0.5 & 9\end{bmatrix},\\
&K_3^1=\begin{bmatrix}2 & -5\end{bmatrix},\quad K_4^1=\begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix},\\
&L_1=\begin{bmatrix}-2\\ -1\end{bmatrix},\quad L_2=\begin{bmatrix}-7.5\\ -15.5\end{bmatrix},\\
&L_3=\begin{bmatrix}-4\\ 1\end{bmatrix},\quad L_4=\begin{bmatrix}-2\\ 0\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{۴۹}$$

انتخاب شده‌اند. شرایط اولیه مورد استفاده در شبیه‌سازی نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
&x_1=\begin{bmatrix}-30 & 4\end{bmatrix},\ x_2=\begin{bmatrix}20 & -10\end{bmatrix},\\
&x_3=\begin{bmatrix}30 & 30\end{bmatrix}\ x_4=\begin{bmatrix}-10 & 30\end{bmatrix},\\
&\eta_1=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix},\ \eta_2=\begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix},\\
&\eta_3=\begin{bmatrix}-1 & 3\end{bmatrix}\ \eta_4=\begin{bmatrix}-2 & 0\end{bmatrix},\\
&\zeta_1=\begin{bmatrix}2 & 4\end{bmatrix},\ \zeta_2=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix},\\
&\zeta_3=\begin{bmatrix}0 & -3\end{bmatrix}\ \zeta_4=\begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix},\\
&w_5=\begin{bmatrix}5 & 6\end{bmatrix},\ w_6=\begin{bmatrix}25 & 9\end{bmatrix},\\
&w_7=\begin{bmatrix}20 & 20\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{۵۰}$$

جهت ارزیابی عملکرد کنترل‌کننده، تغییرات بردار خطای کنترل محدود نگهدارنده در

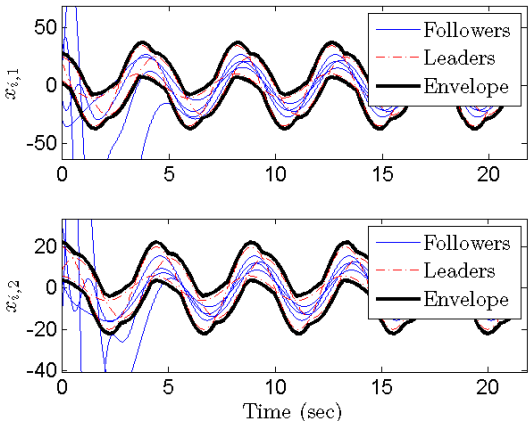
شکل ۲ رسم شده است. در این شکل، $e_{i,1}$ و $e_{i,2}$ مؤلفه‌های e_i می‌باشند. با توجه به این شکل ملاحظه می‌شود که مؤلفه‌های بردار خطای کنترل محدود نگهدارنده به صورت مجانبی به صفر همگرا می‌شوند، که نشان‌دهنده تحقق کنترل محدود نگهدارنده برای سیستم شبیه‌سازی‌شده می‌باشد.



شکل ۲: نمودار تغییرات مؤلفه‌های بردار خطای کنترل محدود نگهدارنده

جهت درک بهتر رفتار عامل‌ها در حوزه زمان، تغییرات زمانی مؤلفه‌های بردار حالت تمامی عامل‌ها نیز در

شکل ۳ رسم شده است. پوشی که توسط عامل‌های سردسته در حوزه زمان ایجاد می‌شود، با خط تیره و به رنگ سیاه در این شکل مشخص شده است. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که در زمان‌های ابتدایی، مؤلفه‌های بردار حالت عامل‌های پیرو که با رنگ آبی مشخص شده‌اند، خارج از پوش تشکیل‌شده توسط سردسته‌ها هستند. اما با گذشت زمان در داخل این پوش قرار می‌گیرند که نشان‌دهنده تحقق کنترل محدود نگهدارنده می‌باشد.



شکل ۳: نمودار تغییرات زمانی مؤلفه‌های بردار حالت عامل‌ها

۶- نتیجه

در این مقاله، مسئله کنترل محدود نگهدارنده برای سیستم‌های چندعاملی متشکل از عامل‌های پیرو خطی با دینامیک غیریکسان و با گراف ارتباطات جهت‌دار، مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. دینامیک عامل‌های سردسته نیز به صورت سیستم خارجی در نظر گرفته شد. با توجه به اینکه در کاربردهای عملی متغیرهای حالت همیشه در دسترس نیستند، از فیدبک خروجی دینامیکی در طراحی کنترل‌کننده استفاده شد. به دلیل این‌که روش‌های موجود در مبحث تنظیم خروجی امکان در نظر گرفتن عامل‌های با دینامیک غیریکسان را دارند، برای حل این مسئله از قالب تنظیم خروجی استفاده گردید. بهره‌گیری از خطا و ماتریس H_k، این امکان را فراهم آورد تا بتوان حالت نهایی عامل‌های پیرو را به صورت مجموع عبارت‌هایی از متغیرهای حالت عامل‌های سردسته بیان کرد و در محاسبات به متغیرهای حالت عامل‌های سردسته دسترسی داشت. همچنین، خطای مرسوم در مبحث تنظیم خروجی به گونه‌ای اصلاح شد که بتوان بیش از یک عامل سردسته را در نظر گرفت. در طراحی کنترل‌کننده توزیع‌یافته نیز از یک جبران‌ساز دینامیکی استفاده شد، که در واقع نقش رویت‌گر ترکیب محدب بردارهای حالت عامل‌های سردسته را داشت.

از زمینه‌های تحقیقاتی آینده می‌توان به در نظر گرفتن گراف‌های سوئیچینگ با عامل‌های سردسته غیریکسان به صورت $\dot{w}_k = S_k w_k$، که هر عامل سردسته ماتریس S_k مخصوص به‌خود را دارد، اشاره کرد. همچنین، می‌توان دینامیک عامل‌ها را در شرایط واقعی که شامل نویز و نامعینی می‌باشد بررسی کرد تا میزان حساسیت روش پیشنهادی به این دو پدیده معمول در سیستم‌های واقعی ارزیابی شود. برای مثال دینامیک عامل‌های پیرو را به صورت $\dot{x}_i = (A_i + \Delta A_i)x_i + (B_i + \Delta B_i)u_i$ در نظر گرفت.

مراجع

[1] R. Olfati-Saber, J. A. Fax and R. M. Murray, “Consensus and cooperation in networked multi-agent systems,” Proceedings of the IEEE, vol. 95, no. 1, pp. 215-233, 2007.

[2] W. Ren, R. W. Beard and E. M. Atkins, “Information consensus in multivehicle cooperative control,” IEEE Control Systems Magazine, vol. 27, no. 2, pp. 71-82, 2007.

[3] K. Peng, and Y. Yang, “Leader-following consensus problem with a varying-velocity leader and time-varying delays,” Physica A, vol. 388, no. 2, pp. 193-208, 2009.

[4] P. Wieland, R. Sepulchre and F. Allgower, “An internal model principle is necessary and sufficient for linear output synchronization,” Automatica, vol. 47, no. 4, pp. 1068-1074, 2011.

[5] Y. Su and J. Huang, “Cooperative output regulation of linear multi-agent systems by output feedback,” Systems & Control Letters, vol. 61, no. 12, pp. 1248-1253, 2012.

[6] Y. Hong, X. Wang and Z. Jiang, “Distributed output regulation of leader-follower multi-agent systems,” International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 23, no. 1, pp. 48-66, 2013.

[7] H. Liu, G. Xie and L. Wang, “Necessary and sufficient conditions for containment control of networked multi-agent systems,” Automatica, vol. 48, no. 7, pp. 1415-1422, 2012.

[8] M. Ji, G. Ferrari-Trecate, M. Egerstedt and A. Buffa, “Containment control in mobile networks,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 53, no. 8, pp. 1972-1975, 2008.

[9] Y. Zheng and L. Wang, “Containment control of heterogeneous multi-agent systems,” International Journal of Control, vol. 87, no. 1, pp. 1-8, 2014.

[10] H. Haghshenas, M. A. Badamchizadeh and M. Baradarannia, “Containment control of heterogeneous linear multi-agent systems,” Automatica, vol. 54, pp. 210-216, 2015.

[11] H. Haghshenas, M. A. Badamchizadeh and M. Baradarannia, “Adaptive containment control of nonlinear multi-agent systems with non-identical agents,” International Journal of Control, vol. 88, no. 8, pp. 1586-1593, 2015.

[12] C. Godsil and G. Royle, Algebraic Graph Theory, New York: Springer-Verlag, 2001.

[13] R. T. Rockafellar, Convex Analysis, New Jersey: Princeton University Press, 1972.

زیرنویس‌ها

[1]Multi-Agent

[2]Consensus

[3]Heterogeneous

[4]Exosystem

[5]Containment Control

[6]Convex Hull

[7]Kronecker

[14] Z. Qu, Cooperative Control of Dynamical Systems: Applications to Autonomous Vehicles, London: Springer-Verlag, 2009.

[15] J. Xiang, W. Wei and Y. Li, "Synchronized output regulation of linear networked systems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 54, no. 6, pp. 1336-1341, 2009.

[16] J. Huang, Nonlinear Output Regulation: Theory and Applications, Philadelphia: SIAM, 2004.

[17] G. Seyboth, W. Ren and F. Allgöwer, "Cooperative control of linear multi-agent systems via distributed output regulation and transient synchronization," Automatica, vol. 68, pp. 132-139, 2016.

[18] W. Li, L. Liu and G. Feng, "Distributed containment tracking of multiple stochastic nonlinear systems," Automatica, vol. 69, pp. 214-221, 2016.

مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۱۰، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۵، صفحه ۴۴-۲۹

طراحی الگوریتم پایداری حرکت توده‌ی ربات‌ها در صورت عدم برخورد با مانع و عدم تمایل به تجمع مبتنی برمعادلات لاگرانژ

علی غفاری[۱]، علیرضا خدایاری[۲]، عباس پورمحمودی[۳]

[۱] استاد،گروه مهندسی مکانیک، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

[۲] نویسنده مسئول، استادیار،گروه مهندسی مکانیک، واحد پردیس، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

[۳] دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۸/۳، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۵/۱۱/۱)

چکیده: در حرکت توده‌یی ربات‌ها مهمترین مبحث ایجاد پایداری در طول حرکت می‌باشد. پایداری در حرکت توده‌ی ربات‌ها شامل مواردی همچون عدم برخورد اعضاء با یکدیگر و عدم برخورد اعضاء با موانع موجود در مسیر حرکت می‌باشد. در این مقاله الگوریتمی جدید در قالب یک معادله‌ی دینامیکی بر مبنای معادلات لاگرانژ برای پایداری حرکتی توده‌ی ربات‌ها ارائه می‌شود. هدف از ارائه این الگوریتم جدید ایجاد تجمع در نقطه‌ی هدف می‌باشد. الگوریتم جدید در دو حالت تعمیم داده می‌شود. حالت اول به صورتی است که اعضای توده تمایل به تجمع را در طول مسیر حرکت دارا می‌باشند و در حالت دوم حرکت به نحوی انجام می‌شود که اعضای توده تمایل به تجمع را در طول مسیر نخواهند داشت. در نهایت معادلات ارائه شده شبیه‌سازی و صحه‌گذاری می‌شود. نتایج حاصل از شبیه‌سازی، عدم برخورد اعضای توده با موانع موجود در طول مسیر حرکت و ایجاد تجمع در نقطه‌ی هدف را نشان می‌دهد. نشان داده شده است که در حالت دوم اعضای توده منطقه‌ی بیشتری را در طول مسیر خود پوشش دهند. پوشش بیشتر فضای حرکتی، سبب می‌شود تا کاربرد الگوریتم پیشنهادی در مواردی همچون شناسایی، جست‌وجو، نظارت بر محیط زیست و نقشه برداری در طول مسیر حرکت باشد.

کلمات کلیدی: توده، توده ربات ها، الگوریتم حرکت توده، تجمع توده ربات ها.

Designing a Stability Algorithm for Swarm Robots in the Cases of Obstacle Avoidance and Absence of Tendency to Aggregate based on Lagrange Equations

Ali Ghaffari, Alireza Khodayari, Abbas Pourmahmoudi

Abstract: Stability is one of the most important issues in swarm movement. Stability in swarm movement is composed of features such as collision avoidance between members of the swarm with each other and also obstacle avoidance along the path of movement. This paper presents a new algorithm in the form of a dynamic equation based on Lagrange equations for stable movement of the swarm robot. One of the objective of presenting this algorithm is to enable aggregation at the target point. The new algorithm will be extended in two cases; first, when the members of the swarm have the tendency for aggregation from the beginning of the movement, and second, members of the swarm don't have the tendency for aggregation along the path. At the end, the presented algorithms will be simulated and evaluated. The simulation results show successful obstacle avoidance along the path and aggregation at the target point. The results show that in the second case—when there is no aggregation along the path—the members of the swarm cover more area along the path. Covering more area along the path empowers the application of the proposed algorithm in cases such as identification, exploration, environmental monitoring and mapping along the path.

Keywords: Swarm, swarm robots, swarm movement algorithm, swarm robots aggregation.

۱- مقدمه

توده‌ی ربات‌ها، گروهی متشکل از چندین عضو است که با یکدیگر در تعامل هستند و ایده‌ی آن برگفته شده از رفتار اجتماعی حشرات و حیوانات است که برای هدفی مشخص طراحی می‌شود[۱-۳]. عبارت توده هوشمند[1] [۴] اولین بار توسط بنی[2] در سال ۱۹۸۰ معرفی گردید [۵]. بعدها برای ایجاد تعامل بین رفتارهای اجتماعی حیوانات و روابط ریاضی، شاخه‌یی در مهندسی با عنوان مهندسی توده تعریف شد. مهندسی توده توسط کزادی[3] اینگونه تعریف شده است که "رفتار توده‌ی طراحی شده برای هدفی مشخص، با ضریب اطمینان بالا قابل پیش بینی و قابل کنترل بوده، و با کمترین شرایط اثبات می‌شود" [۶]. رفتارهای توده‌یی در دهه‌ی اخیر با استفاده از روش‌های گوناگون مدل شده است[۷]. توده‌ی ربات‌ها که برگرفته از رفتارهای توده‌یی می‌باشد در شاخه‌های متفاوتی مورد بررسی قرار گرفته است. یکی از مهمترین شاخه‌های مورد بررسی توده‌ی ربات‌ها بررسی پایداری در حرکت آنها می‌باشد[۸]. پایداری در مدل‌های ارائه شده، به این صورت تعریف می‌شود که "حرکت توده‌ی ربات‌ها زمانی پایدار است که برخوردی بین اعضا با یکدیگر و موانع موجود در مسیر حرکت وجود نداشته باشد و نهایتاً اعضاء پس از توقف ارتعاش نداشته باشند" [۹-۱۲]. همچنین همگرایی اعضای توده به هدفی مشخص نیز بخشی از تحلیل پایداری حرکت توده‌ی ربات‌ها می‌باشد که معمولا توسط ایجاد عوامل دافع مجازی جهت عدم برخورد بایکدیگر و جاذب مجازی جهت ایجاد تجمع و حرکت به سمت نقطه‌ی هدف صورت می‌گیرد[۱۳-۱۴]. در زمینه‌ی پایداری حرکت توده‌ی ربات‌ها، در سال ۲۰۰۹، مدلی توسط ایکانایاک[4] ارائه شده است. در این مدل توده‌ی ربات‌ها توسط نیروهای مجازی به سمت الگویی مشخص که به صورت یک خم ساده و بسته می‌باشد حرکت می‌کنند. نیروی مجازی معرفی شده توسط ایکانایاک به صورت یک انتگرالی است که روی خم بسته‌ی، ساده و متقارن تعریف شده است. سپس ربات‌ها داخل خم ساده و بسته قرار می‌گیرند و به صورت منظم در آن پراکنده شده و نهایتا متوقف می‌شوند. حرکت توده‌ی ربات‌ها در این مدل توسط سوئیچ‌هایی طراحی شده است که وظیفه آنها فعال و غیر فعال کردن نیروها از سمت خم ساده و بسته می‌باشد. وجود موانع نیز توسط ایکانایاک به نحوی در نظر گرفته شده است که موانع به صورت خم‌های بسته، ساده و متقارن هستند و نیروهای دافع مجدداً به صورت یک انتگرال روی این خم‌ها تعریف شده اند[۱۵]. از آنجایی که نیروهای در نظر گرفته شده توسط ایکانایاک به صورت انتگرال‌های مختلط هستند و روی خم‌هایی تعریف شده‌اند، لذا ربات‌ها ابتدا باید حجم وسیعی از محاسبات را در حافظه‌ی خود انجام دهند و پس از آن برای حرکت تصمیم گیری کنند. در سال ۲۰۰۶ مدلی توسط کیم[5] و همکاران ارائه شده، که در آن با استفاده از توابع پتانسیل، حرکتی پایدار برای توده‌ی ربات‌ها به سمت نقطه‌ی هدف ایجاد شده است [۱۶]. کیم و همکاران اعضای توده را بدون جرم در نظر گرفته‌اند. همچنین ابعاد مشخصی برای موانع موجود بر مسیر حرکت در نظر گرفته نشده است. لذا در مدل ارائه شده سعی بر این شده است که با تنظیم پارامترها و همچنین مشخص بودن مسیر حرکت، پایداری توده‌ی ربات‌ها تضمین شود. هاشیموتو[6] و همکاران در سال۲۰۰۹ مدلی را ارئه کرده‌اند که در آن عدم برخورد با مانع، توسط نیروی تعریف شده به صورت یک انتگرال روی سطح مانع، تضمین شده است. گیزی[7] در سال ۲۰۰۲ مدلی را ارائه داده است که در آن توده‌یی متشکل از چندین عضو در شرایط اولیه به صورت پراکنده در فضای سه بعدی قرار دارند. الگوریتم پیشنهادی گیزی که بر اساس یک معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی یک است، تجمع توده را در نقطه‌ی مرکز توده ایجاد می‌نماید[۱۷]. در این مدل، گیزی وجود مانع را در نظر نگرفته است. گیزی در سال ۲۰۱۳ مدل دیگری را بر اساس معادلات لاگرانژ ارائه داده است که در آن اعضای توده به سمت نقطه‌ی هدف حرکت می‌کنند. در مدل گیزی، وجود مانع به صورت یک جرم متمرکز در نظر گرفته شده است و یک تابع نمایی باعث عدم نزدیک شدن اعضای توده به آن می‌شود[۱۸]. همچنین در مدل ارائه شده توسط گیزی اعضای توده در همان ابتدای شروع حرکت، تمایل به تجمع دارند، که این موضوع سبب می‌شود تا اعضای توده آزادی عمل در انتخاب مسیر حرکت را به صورت خودکار نداشته باشند، چرا که تمایل به تجمع، آنها را مجبور می‌سازد تا ابتدا به دیگر اعضای توده ملحق شوند و پس از آن به سمت نقطه‌ی هدف حرکت نمایند.

در این مقاله با استفاده از روش انرژی، بر اساس معادله‌ی لاگرانژ که مبنای آن سرعت به جای نیرو می‌باشد، الگوریتم جدیدی درقالب یک معادله دینامیکی برای حرکت توده ربات ها طراحی شده است. در این الگوریتم معادله حرکت کل توده توصیف می‌شود، بطوریکه معادله حرکت نهایی مشابه به معادله بدست آمده از روش نیوتن می‌باشد. علت به کارگیری روش لاگرانژ به جای روش نیوتن، استفاده از توابع انرژی پتانسیل مجازی است. در مدل ارائه شده در این مقاله اعضای توده دارای جرم می‌باشند. همچنین با تغییر پارامتر دافع از سمت اعضاء به یکدیگر می‌توان برای هر عضو نیز ابعاد درنظر گرفت. با استفاده از سوئیچی که برای هر مانع در نظر گرفته می‌شود به سادگی می‌توان ابعاد موانع را تغییر داد. همچنین عامل دافع جهت عدم برخورد با موانع، از مرکز مانع به هر عضو اعمال می‌شود که این عمل پیچیدگی در محاسبات را کاهش می‌دهد، چرا که به جای استفاده از انتگرال، از یک بردار استفاده می‌شود و به موازات آن سرعت محاسبات در حافظه‌ی ربات‌ها افزایش می‌یابد. در حالی که در سایر مدل‌های ارائه شده، همانطور که در مقدمه بیان

1.Swarm Intelligence
2.Beni
3.Kzadi
4.Ekanayak
5.Kim
6.Hashimoto
7.Gazi

شد(موارد [۸] و [۱۵])، عامل دافع از سمت موانع در صورتی که موانع دارای ابعاد باشند، به صورت انتگرال روی بردار نرمال سطح هر مانع تعریف می‌شود که به مراتب پیچیدگی در محاسبات را در حافظه‌ی ربات‌ها افزایش می‌دهد. در مدلی که موانع در آن به صورت نقطه‌یی در نظر گرفته شده است(مورد [۱۸])، عامل دافع به صورت توابع نمایی در نظر گرفته می‌شود، که این امر سبب شده تا اعضاء در فواصل دورتری از موانع دفع شوند. در حالی که روش پیشنهادی در این مقاله، یعنی اعمال سوئیچ حول محدوده‌ی هر مانع، باعث می‌شود تا اعضاء از فاصله‌ی نزدیکتری نسبت به موانع عبور نمایند. بنابراین اعضاء محدوده‌ی بیشتری را در طول حرکت پوشش می‌دهند. موانع موجود در مسیر حرکت را می‌توان طوری در نظر گرفت که روی یکدیگر اثر همپوشانی داشته باشند، در این صورت موانع باشکل‌های متفاوت را می‌توان ایجاد نمود. موارد ذکر شده برتری الگوریتم ارائه شده در این مقاله نسبت به مدل ارائه شده توسط کیم و همکاران[۱۶]، گیزی[۱۷] و [۱۸]، ایکاناياک[۱۵] و هاشیموتو و همکاران[۸] می‌باشد. الگوریتم طراحی شده در قالب یک معادله دینامیکی بهینه‌سازی می‌شود. هدف از بهینه‌سازی، ایجاد پوشش مناسب فضای حرکتی می‌باشد، که به موازات آن کاربری الگوریتم پیشنهادی افزایش می‌یابد. بهینه‌سازی به نحوی صورت می‌گیرد که تمایل به تجمع در اعضای توده تنها حول نقطه‌ی هدف انجام شود. این امر سبب می‌شود تا اعضاء در طول مسیر حرکت با آزادی عمل بیشتر در انتخاب مسیر، فضای بیشتری را پوشش دهند. در حالی که در مدل ارائه شده توسط گیزی[۱۷] و [۱۸] و هاشیموتو و همکاران[۸]، تمایل به تجمع از ابتدای حرکت توده وجود دارد.

در ادامه در این مقاله، در بخش (۲) به ارائه فرضیات اساسی در طراحی الگوریتم جدید پرداخته می‌شود و همچنین مختصات و معادلات کلی حرکت برای توده ربات‌ها بیان می‌شود. در بخش (۳) طراحی الگوریتم حرکتی با استفاده از معادله‌ی بدست آمده از بخش قبل به صورت هدف دار صورت می‌پذیرد به نحوی که در آن عدم برخورد با موانع موجود در مسیر حرکت و حرکت در صورت عدم تمایل به تجمع طراحی می‌شود. در بخش (۴)، الگوریتم طراحی شده شبیه‌سازی و صحه گذاری می‌شود و در نهایت در بخش (۵) نتایج حاصل از شبیه‌سازی ارائه می‌شود.

۲- مختصات عمومی و فرضیات کلی برای اعضای توده

در این بخش به ارائه فرضیات کلی در مورد اعضاء و حرکت توده پرداخته می‌شود. همچنین مختصات و معادلات کلی حرکت که الگوریتم جدید بر مبنای آن توسعه می‌یابد برای تفسیر بهتر بیان می‌شوند. اعضای توده‌ی مورد نظر دارای فرضیاتی به صورت زیر می‌باشند.

- هر عضو به صورت جرم متمرکز در نظر گرفته شده است.
- هر عضو موقعیت سایر اعضاء و موانع موجود بر مسیر حرکت را می‌داند.
- تاخیری در دریافت اطلاعات توسط اعضاء وجود ندارد.
- موقعیت اعضاء و موانع موجود در مسیر حرکت، توسط دستگاه مختصات عمومی[1] برای هر عضو تعریف شده است.

فرض‌های در نظر گرفته شده را می‌توان در فضاهای کوچک مثلا اتاق، توسط دوربین‌هایی که موقعیت اعضاء، موانع و نقطه‌ی هدف را شناسایی می‌کنند، ایجاد نمود. پس از شناسایی موارد ذکر شده، تمامی مختصات داده شده به صورت اطلاعات ورودی در الگوریتم پیشنهادی و یا مدل دینامیکی ارائه شده، قرار می‌گیرد، سپس معادله حرکت در حافظه‌ی ربات‌ها به صورت عددی حل می‌شود و نهایتاً مسیر حرکت هر عضو تعریف می‌شود، پس در این مرحله مسیر حرکت برای اعضای توده‌ی مورد نظر مشخص می‌شود. بنابرین امکان پیاده سازی چنین الگوریتمی وجود دارد، همچنین اگر حرکت در فضاهای بزرگ باشد، آنگاه می‌توان این فرضیات را توسط GPS[2] و یا UAV[3] ایجاد نمود.

موقعیت هر عضو توده در سه بعد در دستگاه کارتزین توسط $P_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ مشخص می‌شود. در معادله لاگرانژ، $q_i = P_i$ و $\dot{q}_i = v_i$ در نظر گرفته می‌شود، که در آن v_i نشان دهنده‌ی سرعت هر عضو می‌باشد. انرژی جنبشی به صورت $K_i(\dot{q}_i) = \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^T \dot{q}_i$ تعریف می‌شود که در آن m_i جرم هر عضو است. پس برای مجموع اعضای توده، انرژی جنبشی به صورت معادله‌ی (۱) بیان می‌شود.

$$K(\dot{q}) = \sum_{i=1}^{N} K_i(\dot{q}_i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^T \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i \qquad (۱)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K_i(\dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i}\right) = m_i \ddot{q}_i = m_i \dot{v}_i$$

توجه به این نکته ضروری است که انرژی پتانسیل در سیستم‌های بیولوژیکی داری منابع ملموس است، اما در مهندسی توده و رباتیک، انرژی پتانسیل را می‌توان به صورت مجازی برای هر یک از اعضاء و یا کل توده تعریف کرد[۱۸].

همانطور که اساس قانون دوم نیوتن نیرو می‌باشد، اساس معادله لاگرانژ انرژی است. لاگرانژیین عضو i مطابق با معادله‌ی (۲) است که پس از اعمال نتیجه‌ی معادله (۱) در آن، نتیجه به صورت معادله‌ی (۳) حاصل می‌شود. که در آن $p_i(q)$ نشان دهنده‌ی انرژی پتانسیل و Q_i مجموع عوامل ناپایستار می‌باشد[۱۸].

1.Global coordinate
1.Global Positioning System
3.Unmanned Aerial Vehicle

$$L_i(q,\dot{q}_i) = K_i(\dot{q}_i) - p_i(q) \quad (۲)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L_i}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K_i(\dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial p_i(q)}{\partial q_i} = Q_i \quad (۳)$$

با اعمال $m_i = 1$ برای همه‌ی اعضاء و همچنین $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K_i(\dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i}\right)$ که نتیجه‌ی معادله‌ی (۲) می‌باشد، معادله (۴) به صورت زیر حاصل می‌شود[۱۸].

$$\ddot{q}_i = Q_i - \frac{\partial p_i(q)}{\partial q_i} \quad (۴)$$

معادله (۴) معادله دیفرانسیلی است که می‌توان آن را با روش‌های عددی به سادگی حل نمود. تا بدین جا معادله دینامیکی برای حرکت توده‌ی ربات‌ها از معادله‌ی لاگرانژ نتیجه شده است. حال برای ایجاد حرکت هدف دار باید ترم $\frac{\partial p_i(q)}{\partial q_i}$ در معادله (۴) به نحوی طراحی و انتخاب شود که هدف مورد نظر را اغنا نماید. بنابراین در بخش بعد انرژی‌های پتانسیل مورد نیاز طراحی و در رابطه‌ی (۴) اعمال خواهد شد.

۳- طراحی الگوریتم جدید حرکت توده ربات‌ها بر مبنای عدم برخورد با مانع و عدم تمایل به تجمع

در این بخش طراحی الگوریتم جدید، برای حرکت توده ربات‌ها بر مبنای عدم برخورد با موانع در سه بعد انجام می‌شود. ابتدا حرکت توده‌ی ربات‌ها در صورت تمایل به تجمع ارائه می‌شود، سپس با طراحی ترم پتانسیل اعمال شده از جانب مانع به اعضاء، الگوریتم توسعه می‌یابد تا در شرایط بهینه، یعنی پوشش بیشتر فضای حرکتی توسط سوئیچی که تمایل به تجمع را فعال و غیر فعال می‌سازد، الگوریتم ارائه شود.

۳-۱ حرکت توده ربات‌ها در صورت وجود تمایل به تجمع

انرژی پتانسیل $p_i(q)$ می‌تواند دارای مولفه‌های متنوعی باشد که تاثیرات مختلفی را بر حرکت توده ایجاد نماید. از آنجایی که هدف از طراحی الگوریتم تجمع توده در نقطه‌ی هدف می‌باشد، بنابراین انرژی پتانسیل برای ایجاد تجمع در صورت عدم برخورد اعضاء با یکدیگر یعنی $p_a(q_i)$ و حرکت به سمت نقطه‌ی هدف یعنی $p_e(q_i,C_e)$، به صورت معادله‌های (۵) و (۶) طراحی شده است[۱۸].

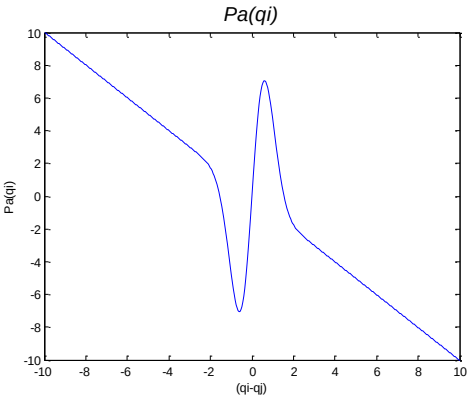
$$p_a(q_i) = \sum_{j=1,j\neq i}^{N}\left[\frac{a}{2}\|q_i - q_j\|^2 - \frac{bc}{2}exp\left(-\frac{\|q_i - q_j\|^2}{c}\right)\right] \quad (۵)$$

$$p_e(q_i,C_e) = \frac{A_e}{2}\|q_i - C_e\|^2 \quad (۶)$$

که در آن $p_a(q_i)$ تابع پتانسیل برای ایجاد تجمع و تضمین عدم برخورد اعضاء با یکدیگرمی‌باشد (ترم خطی تجمع را ایجاد می‌کند و ترم نمایی عدم برخورد با یکدیگر را تضمین می‌نماید). $p_e(q_i,C_e)$ تابع پتانسیل جاذب به سمت نقطه‌ی هدف می‌باشد که در آنها a پارامتر عامل تجمع توده، c,b پارامترهای عامل دافع از هر عضو به سایر اعضاء برای تضمین عدم برخورد اعضاء با یکدیگر و A_e پارامتر عامل جاذب به سمت نقطه‌ی هدف می‌باشد. این پارامترها با شرط $a,b,c>0\,,b>a$ و $A_e>0$ طراحی و انتخاب می‌شوند. C_e نقطه‌ی هدف است که اعضاء به سمت آن حرکت خواهند کرد و N تعداد اعضای توده‌ی ربات‌ها می‌باشد. بنابراین $p_i(q) = p_a(q_i) + p_e(q_i,C_e)$ می‌باشد که با اعمال آن در معادله (۴) و لحاظ کردن $Q_i = -k\dot{q}_i\|\dot{q}_i\|$ به عنوان عامل میرا کننده جهت توقف اعضاء در نقطه‌ی هدف، معادله حرکت به صورت معادله (۷) حاصل می‌شود[۱۸].

$$\ddot{q}_i = Q_i - \left(\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\left[a - b\,exp\left(-\frac{\|q_i - q_j\|^2}{c}\right)\right]\times(q_i - q_j) + A_e(q_i - C_e)\right) \quad (۷)$$

رفتار عامل تجمع حول مرکز یعنی رابطه‌ی $\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\left[a - b\,exp\left(-\frac{\|q_i-q_j\|^2}{c}\right)\right]\times(q_i - q_j)$ در شکل ۱ با در نظر گرفتن $a=1$، $c=0.8$ و $b=20$ نشان داده شده است.



شکل ۱: رفتار ترم تجمع(بی بعد)

حرکت توده تحت تاثیر معادله (۷) به نحوی است که ابتدا در راستای کاهش ترم $\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\left[a - b\,exp\left(-\frac{\|q_i-q_j\|^2}{c}\right)\right]\times$

$(q_i - q_j)$ عمل می‌نماید. که در نتیجه‌ی آن اعضای توده حول مرکز توده تجمع را ایجاد کنند و سپس توده با تمایل به کاهش انرژی و به دنبال آن کاهش ترم $A_e(q_i - C_e)$ به سمت نقطه‌ی هدف حرکت می‌نماید و نهایتاً تحت تاثیر عامل میرا کننده‌ی Q_i متوقف می‌شود. در بخش بعد معادله‌ی (۷) به نحوی تعمیم داده می‌شود که عدم برخورد با مانع نیز تضمین گردد.

۳-۲ حرکت در محیط با وجود مانع

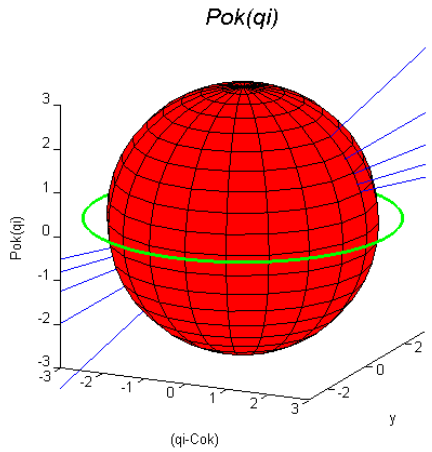
در ادامه، حرکت توده‌ی ربات‌ها در صورت وجود مانع نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. بنابراین باید عدم برخورد اعضای توده با موانع موجود در مسیر حرکت تضمین شود. لذا اعمال یک عامل دافع از سمت موانع مد نظر قرار می‌گیرد. در ابتدا، محدوده‌ی هر مانع توسط یک کره تخمین زده می‌شود. در این حالت حرکت پایدار برای توده‌ی ربات‌ها زمانی ایجاد می‌شود که اعضاء برخوردی با سطح کره نداشته باشند. در الگوریتم طراحی شده برای ایجاد حرکت پایدار، محدوده‌ی دیگری با نام محدوده‌ی دافع، به صورت کره با مرکز همان کره‌یی که محدوده‌ی مانع با آن تخمین زده شده است، فرض می‌شود که شعاعی بزرگتر از کره‌ی تخمینی برای مانع را دارد. هرگاه هر عضوی از توده داخل این محدوده قرار گیرد، عامل دافع از سمت مرکز کره به آن اعمال می‌شود تا در نتیجه‌ی آن عدم برخورد عضو با مانع ایجاد شود. به عبارت دیگر روی سطح کره بزرگتر سوئیچی قرار می‌گیرد تا در لحظه‌یی که هر عضو وارد محدوده‌ی دافع می‌شود، عامل دافع فعال گردد که این سازوکار روشی جدید و منحصر به فرد در ایجاد پایداری در حرکت توده‌ی ربات‌ها در رابطه با موضوع عدم برخورد با موانع موجود در مسیر حرکت می‌باشد. چرا که تا به حال، در الگوریتم‌های پیشنهادی پیشین (موارد [۸]، [۱۵] و[۱۸])، عوامل یا نیروهایی به صورت انتگرال روی سطح مانع تعریف شده و یا مانع به صورت جرم متمرکز در نظر گرفته شده است که به مراتب پیچیدگی محاسبات در آنها زیاد بوده و به موازات آن سرعت محاسبات در حافظه‌ی ربات‌ها نیز افزایش می‌یابد. در این الگوریتم‌ها عوامل دافع از سمت موانع معمولا به صورت توابع نمایی یا مجانب‌دار طراحی شده‌اند. این امر سبب شده است تا اعضایی که در فواصل دور از موانع نیز تحت تاثیر این عوامل قرار گیرند. هر چند که این تاثیر کوچک است، اما می‌تواند تا حدودی عضو را از مسیر مستقیم، که کوتاه‌ترین مسیر ممکن برای رسیدن به سمت نقطه‌ی هدف می‌باشد، منحرف سازد. اما در الگوریتم پیشنهادی در این مقاله، عضو تنها لحظه‌یی از مسیر حرکت خود منحرف می‌شود که در محدوده‌ی دافع تعریف شده برای هر مانع قرار گیرد. همچنین در الگوریتم‌های پیشین از آنجایی که عوامل دافع به صورت توابع نمایی و مجانب‌دار می‌باشد. لذا برای هر مانع با اندازه‌های متفاوت باید پارامترهای تعیین کننده‌ی شدت عامل دافع به صورت جدا گانه تعریف شوند. در صورتی که در الگوریتم طراحی شده در این مقاله شبیه‌سازی برای موانع با اندازه‌های متفاوت با پارامترهای یکسان برای تمامی موانع انجام خواهد شد. تابع پتانسیل اعمالی از سمت مانع در الگوریتم طراحی شده به صورت معادله‌ی (۸) طراحی و انتخاب می‌شود.

$$p_{ok}(q_i, C_{ok}) = \sum_{k=1}^{M} \left[\frac{A_o}{2}\|q_i - C_{ok}\|^2\right] \qquad (۸)$$

که در آن M تعداد موانع موجود در فضای حرکت، C_{ok} مرکز کره‌یی که مانع با آن تخمین زده شده و A_o پارامتر عامل دافع از جانب مرکز کره می‌باشد. گرادیان (۸) به صورت معادله‌ی (۹) حاصل می‌شود.

$$\frac{\partial p_o(q)}{\partial q_i} = \frac{\partial p_{ok}(q)}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{M} [A_o(q_i - C_{ok})] \qquad (۹)$$

رفتار عامل دافع معادله‌ی (۹) از جانب مانع و تاثیر تغییر پارامتر A_o، در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل۲: تاثیر تغییر پارامتر A_o و رفتار عامل دافع (۸) (بی بعد)

در شکل۲ دایره‌ی رسم شده حول کره، در اصل همان کره با شعاع بزرگتر است که پیش‌تر با نام محدوده‌ی دافع معرفی شده است و خط‌های مورب نشان دهنده‌ی مقادیر عامل دافع از جانب مرکز کره به اعضاء می‌باشد (که با توجه به تغییر پارامتر A_o رسم شده‌اند). عامل دافع در فاصله‌ای بیشتر از دایره‌ی رسم شده حول کره‌ی تخمینی دارای مقدار می‌باشد که در نتیجه‌ی آن روی اعضای موجود در بیرون از آن تاثیر می‌گذارد. لذا باید سوئیچی طراحی شود که در صورت وجود عضو در داخل محدوده‌ی دافع، عامل دافع را فعال نماید و لحظه‌یی که عضو از دایره خارج می‌شود، عامل دافع غیر فعال شود. در نتیجه در الگوریتم جدید، سوئیچی به صورت زیر تعریف می‌شود که در آن محدوده‌ی دافع همان دایره رسم شده حول کره در شکل۲ می‌باشد (همان طور که ذکر شد، این محدوده در حقیقت یک کره با همان مرکز کره‌ی تخمینی می‌باشد. اما برای نمایش و درک بهتر به صورت دایره رسم شده است). این سوئیچ بصورت زیر طراحی و بیان می‌شود.

$$neo(q_i, C_o) = \begin{cases} 1 & \text{عضو داخل محدوده دافع باشد} \\ 0 & \text{عضو داخل محدوده دافع نباشد} \end{cases}$$

با اعمال ضریب $neo(q_i, C_o)$ عامل دافع از مانع به صورت معادله‌ی (۱۰) نتیجه می‌شود. که در آن $neo(q_i, C_o)$ ضریب فعال ساز عامل دافع از سمت مانع است.

$$\frac{\partial p_{ok}(q)}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{M} \left(neo_k(q_i, C_{ok})\right)[A_o(q_i - C_{ok})] \quad (۱۰)$$

در نهایت معادله حرکت کل توده به صورت معادله‌ی (۱۱) است، که با جایگذاری گرادیان‌های مربوط به هر ترم، نتیجه به صورت (۱۲) باز نویسی می شود.

$$\ddot{q}_i = Q_i - \left(\frac{\partial p_i(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial p_e(q)}{\partial q_i} - \frac{\partial p_{ok}(q)}{\partial q_i}\right) \quad (۱۱)$$

$$\ddot{q}_i = -k\dot{q}_i\|\dot{q}_i\| - \left(\left\{\sum_{j=1, j\neq i}^{N}\left[a - b\, exp\left(-\frac{\|q_i - q_j\|^2}{c}\right)\right] \times (q_i - q_j)\right\} + A_e(q_i - C_e) - \sum_{k=1}^{M}\left(neo_k(q_i, C_{ok})\right)[A_o(q_i - C_{ok})]\right) \quad (۱۲)$$

بر اساس معادله‌ی (۱۲) هرگاه عضوی در محدوده‌ی دافع یک مانع قرار گیرد، ترم عامل دافع در آن فعال می‌شود. که سبب افزایش انرژی در حرکت توده می‌شود و معادله در راستای افزایش ترم $\sum_{k=1}^{M}\left(neo_k(q_i, C_{ok})\right)[A_o(q_i - C_{ok})]$ عمل می‌نماید و در نتیجه‌ی آن عضو از مانع دور می‌شود.

حال از آنجایی که هدف نهایی تجمع در نقطه‌ی هدف می‌باشد. لذا می‌توان الگوریتم را به نحوی تعمیم داد که توده در مسیر حرکت تمایلی به تجمع نداشته باشد و تنها حوالی نقطه‌ی هدف تجمع صورت گیرد. انتظار می‌رود که اعضاء در صورت نداشتن تمایل به تجمع در طول مسیر حرکت، آزادی عمل بیشتری را در انتخاب مسیر حرکت داشته باشند. بنابراین در بخش بعد سوئیچی طراحی می‌شود که ترم تمایل به تجمع را حوالی نقطه‌ی هدف فعال نماید.

۳-۳ طراحی سوئیچ فعال کننده ترم تمایل به تجمع

در الگوریتم ارائه شده مطلوب تجمع توده در نقطه‌ی هدف است. در معادله‌ی بدست آمده از قسمت قبل، ترم تمایل به تجمع در شروع حرکت فعال است، که در نتیجه‌ی آن توده ابتدا تمایل به تجمع را در شروع حرکت دارد و سپس به سمت نقطه‌ی هدف حرکت می‌نماید. این امر سبب می‌شود که اعضاء هنگامی که به یک مانع می‌رسند فقط و فقط از یک سمت آن حرکت نمایند که در نتیجه‌ی آن عضوی که تمایل به عبور از کنار مانع را دارد، ابتدا باید به توده ملحق شود و سپس از کنار مانع عبور نماید. اما حرکت به نحوی دیگر نیز قابل اجرا است و آن هم به این صورت است که توده در مسیر حرکت تمایل به تجمع را نداشته باشد که در این صورت اعضاء با آزادی عمل بیشتری حرکت خواهند کرد و فضای بیشتری را در حرکت خود پوشش خواهند داد و پس از قرار گیری حوالی نقطه‌ی هدف، تمایل به تجمع فعال می‌شود. این سازوکار نیز در الگوریتم جدید ارائه شده در این مقاله نسبت به الگوریتم‌های پیشین، منحصر به فرد می‌باشد. پس ابتدا محدوده‌ی تجمع توده حوالی نقطه‌ی هدف در قالب قضیه ۱ تعریف و اثبات می‌شود.

قضیه ۱- اگر اعضای توده تمایل به تجمع به سمت یکدیگر را نداشته باشند، آنگاه همه‌ی اعضای توده در محدوده‌ی نابرابری (۱۳) قرار می‌گیرند.

$$\|e_{cei}\| \leq \frac{1}{D}\frac{(N-1)}{NA_e}\left(b\left(\sqrt{\frac{c}{2}}\right)exp\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \quad (۱۳)$$

که در آن D بعد فضای حرکت توده‌ی ربات‌ها می‌باشد.

اثبات قضیه۱- معادله حرکت توده تحت تاثیر عامل دافع جهت عدم برخورد اعضاء با یکدیگر و عامل جاذب از سمت نقطه هدف به صورت معادله‌ی (۱۴) باز نویسی می‌شود.

$$\ddot{q}_i = -k\dot{q}_i\|\dot{q}_i\| \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{N}\left[-b\, exp\left(-\frac{\|q_i - q_j\|^2}{c}\right)\right] \times (q_i - q_j) + A_e(q_i - C_e)\right) \quad (۱۴)$$

با توجه به معادله‌ی دینامیکی فوق، محل توقف اعضاء در محدوده‌یی است که $\ddot{q}_i = 0$ و $-k\dot{q}_i\|\dot{q}_i\| = 0$ باشد. بنابراین عبارت داخل پرانتز به صورت معادله‌ی (۱۵) برابر با صفر قرار داده شود.

$$\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\left[-b\,exp\left(-\frac{\|q_i-q_j\|^2}{c}\right)\right]\times(q_i-q_j)+A_e(q_i-C_e)\right)=0 \quad (۱۵)$$

عبارت $\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\left[b\,exp\left(-\frac{\|q_i-q_j\|^2}{c}\right)\right]\times(q_i-q_j)$ دارای مقدار حداکثری است که در $\sqrt{\frac{c}{2}}$ اتفاق می‌افتد (این مقدار با مشتق گیری از عبارت $\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\left[b\,exp\left(-\frac{\|y\|^2}{c}\right)\right]\times(y)$ بدست می‌آید، یعنی مقدار حداکثر این عبارت است). با اعمال این مقدار، عبارت (۱۵) به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\left[-b\,exp\left(-\frac{\sqrt{\frac{c}{2}}^2}{c}\right)\right]\times\left(\sqrt{\frac{c}{2}}\right)+A_e(q_i-C_e)\right)=0$$

فاصله‌ی حداکثر (q_i-C_e) برای دورترین عضو در یک بعد N برابر می‌شود. پس:

$$\left((N-1)\left[-b\,exp\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\times\left(\sqrt{\frac{c}{2}}\right)+N\times A_e(q_i-C_e)\right)=0$$

$$(q_i-C_e)=\frac{(N-1)}{N\times A_e}\left(b\left(\sqrt{\frac{c}{2}}\right)exp\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

اما چون فضای حرکت توده‌ی ربات‌ها بیشتر از یک بعد است، پس می‌توان محدوده را برای D بعد به صورت زیر محدود کرد:

$$\|e_{cei}\|\leq\frac{1}{D}\frac{(N-1)}{N\times A_e}\left(b\left(\sqrt{\frac{c}{2}}\right)exp\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

بنابراین فاصله‌ی هیچ یک از اعضاء تا نقطه‌ی هدف بیشتر از سمت راست نابرابری (۱۳) نخواهد شد. در نتیجه محدوده‌ی قرار گیری اعضاء در صورت عدم وجود عامل تمایل به تجمع بدست آمده است.▲

لازم به ذکر است که محدوده‌ی فوق یک محدوده‌ی تقریبی و با ضریب اطمینان بالا است. و از آنجایی که مقدار فاصله‌ی دور ترین عضو تا نقطه‌ی هدف به صورت دقیق قابل محاسبه نیست، بنابراین پارامترهای A_e ، b و c به صورت تابعی از تعداد اعضاء انتخاب می‌شوند که این انتخاب نیز براساس شبیه سازی و آزمایش باید صورت گیرد.

در قضیه‌ی زیر همگرایی اعضاء به سمت نقطه‌ی هدف مورد بررسی قرار می‌گیرد.

قضیه۲- اگر توده‌ی ربات‌ها تمایل به تجمع حول یکدیگر را نداشته باشند، آنگاه اعضای توده با حرکتی پایدار به سمت نقطه‌ی هدف همگرا می‌شوند.

اثبات قضیه۲- معادله حرکت توده تحت تاثیر عامل دافع جهت عدم برخورد اعضاء با یکدیگر و عامل جاذب از سمت نقطه هدف به صورت معادله‌ی زیر باز نویسی می‌شود.

$$\ddot{q}_i=-k\dot{q}_i\|\dot{q}_i\|-\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\left[-b\,exp\left(-\frac{\|q_i-q_j\|^2}{c}\right)\right]\times(q_i-q_j)+A_e(q_i-C_e)\right)$$

تابع لیاپانوف به صورت زیر انتخاب می‌شود.

$$V_i=\frac{a}{2}e_{1i}^{\mathsf{T}}e_{1i}+\frac{1}{2}e_{2i}^{\mathsf{T}}e_{2i}=\frac{a}{2}\|e_{1i}\|^2+\frac{1}{2}\|e_{2i}\|^2$$

که در آن معادلات حالت به صورت زیر است.

$$\dot{q}_{1i}=q_{2i}=\dot{e}_{1i}=e_{2i}$$
$$\ddot{q}_{1i}=\dot{q}_{2i}=\dot{e}_{2i}$$
$$\dot{q}_{2i}=-k\dot{q}_{1i}\|\dot{q}_{1i}\|+b\sum_{j=1,j\neq i}^{N}exp\left(-\frac{\|q_{1i}-q_{1j}\|^2}{c}\right)(q_{1i}-q_{1j})+A_e(q_i-C_e)$$

با مشتق گیری از تابع لیاپانوف انتخاب شده در مسیر حرکت اعضای توده، عبارت زیر حاصل خواهد شد.

$$\dot{V}_i=[a\dot{e}_{1i}^{\mathsf{T}}e_{1i}\quad \dot{e}_{2i}^{\mathsf{T}}e_{2i}]$$
$$\dot{e}_{1i}^{\mathsf{T}}=e_{2i}^{\mathsf{T}}$$
$$\dot{e}_{2i}^{\mathsf{T}}=\dot{q}_{2i}^{\mathsf{T}}$$

$$\dot{V}_i=[ae_{1i}\quad e_{2i}]\times\left[-k\dot{q}_{1i}\|\dot{q}_{1i}\|+b\sum_{j=1,j\neq i}^{N}exp\left(-\frac{\|q_i-q_j\|^2}{c}\right)(q_i-q_j)^{\mathsf{T}}-A\right.$$

$$= -k\dot{q}_{1i}\|\dot{q}_{1i}\|e_{2i} + ae_{1i}e_{2i}^{\mathsf{T}} + b\sum_{j=1,j\neq i}^{N} exp\left(-\frac{\|q_i-q_j\|^2}{c}\right)(q_i - q_j)^{\mathsf{T}}e_{2i} - A_e(q_i - C_e)^{\mathsf{T}}e_{2i}$$

از آنجایی که به ازای همه‌ی q_i و q_j ترم $b\,exp\left(-\frac{\|q_i-q_j\|^2}{c}\right) >$ 0 است. پس $\dot{V}_i$ را می‌توان به صورت زیر محدود کرد.

$$\dot{V}_i \leq -k\|\dot{q}_{1i}\|\|\dot{q}_{1i}\|\|e_{2i}\| + a\|e_{1i}\|\|e_{2i}\| + b\sum_{j=1,j\neq i}^{N} exp\left(-\frac{\|q_i-q_j\|^2}{c}\right)\|q_i - q_j\|\|e_{2i}\| - A_e\|q_i - C_e\|\|e_{2i}\|$$

$$\dot{V}_i \leq -\left[k\|\dot{q}_{1i}\|^2 - a\|e_{1i}\| - b\sum_{j=1,j\neq i}^{N} exp\left(-\frac{\|q_i-q_j\|^2}{c}\right)\|q_i - q_j\| + A_e\|q_i - C_e\|\right]\|e_{2i}\|$$

عبارت $k\|\dot{q}_{1i}\|^2$ همیشه مثبت می‌باشد. تابع تجمع، یعنی $-a\|e_{1i}\| - b\sum_{j=1,j\neq i}^{N} exp\left(-\frac{\|q_i-q_j\|^2}{c}\right)\|q_i - q_j\|$ دارای مقدار حداقلی به اندازه‌ی $\|q_i - q_j\| = \delta$ است. این مقدار حداقل، برابر با فاصله‌یی است که با مساوی صفر قرار دادن عبارت $p_a(q_i)$ نتیجه می‌شود که حاصل آن دارای دو مقدار $\left\{\|q_i - q_j\| = 0 \text{ or } \|q_i - q_j\| = \sqrt{c\,ln(b)} = \delta\right\}$ است و چون اعضاء روی یکدیگر قرار نمی‌گیرند تا مقدار $\|q_i - q_j\| = 0$ حاصل شود، بنابراین مقدار حداقل برابر با δ است. با در نظر گرفتن این موضوع، نتیجه‌ی زیرحاصل می‌شود:

$$\dot{V}_i \leq -\left[k\|\dot{q}_{1i}\|^2 - a\delta - b\,(N-1)\square\, exp\left(-\frac{\delta^2}{c}\right) + A_e\|q_i - C_e\|\right]$$

$$\dot{V}_i \leq -\left[k\|\dot{q}_{1i}\|^2 - a\delta - (N-1)b\square\, exp\left(-\frac{\sqrt{c\,ln(b)}^2}{c}\right) + A_e\|q_i - C_e\|\right]\|e_{2i}\|$$

$$\dot{V}_i \leq -\left[k\|\dot{q}_{1i}\|^2 - a\delta - b\square\left(\frac{1}{b}\right) + A_e\|q_i - C_e\|\right]\|e_{2i}\|$$

$$\dot{V}_i \leq -\left[k\|\dot{q}_{1i}\|^2 - a\delta - \square + A_e\|q_i - C_e\|\right]\|e_{2i}\|$$

$$\dot{V}_i \leq -\left[k\|\dot{q}_{1i}\|^2 - \square(a+1) + A_e\|q_i - C_e\|\right]\|e_{2i}\|$$

مشتق تابع لیاپانوف در مسیر حرکت هر عضو با شرط $k\|\dot{q}_{1i}\|^2 + A_e\|q_i - C_e\| > \square(a+1)$ منفی معین است. پس معادله حرکت ارائه شده در جهت کاهش انرژی و به موازات آن در جهت کاهش ترم $A_e\|q_i - C_e\|$ رفتار می‌نماید. در نتیجه، اعضای توده به سمت نقطه‌ی هدف همگرا می‌شوند.▲

در بخش بعد با شبیه‌سازی نشان داده می‌شود که توده تحت تاثیر معادله‌ی (۱۴) به سمت نقطه‌ی هدف حرکت می‌نماید و حوالی آن متوقف می‌شود و در نهایت برای هیچ یک از اعضاء، فاصله تا نقطه‌ی هدف بیشتر از نابرابری (۱۳) نمی‌شود. حال سوئیچی به صورت زیر طراحی می‌شود که ترم تمایل به تجمع را حول نقطه‌ی هدف فعال نماید.

$$nea(for\ all\ the\ q_i, C_e) = 1$$

هنگامی که همزمان برای همه‌ی اعضاء

$$\|e_{cei}\| \leq \frac{1}{D}\frac{(N-1)}{N\times A_e}\left(b\left(\sqrt{\frac{c}{2}}\right)exp\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$nea(for\ all\ the\ q_i, C_e) = 0$$

هنگامی که حتی برای یک عضو

$$\|e_{cei}\| > \frac{1}{D}\frac{(N-1)}{N\times A_e}\left(b\left(\sqrt{\frac{c}{2}}\right)exp\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

سوئیچ فوق در صورتی فعال می‌شود که تمامی اعضای توده در محدوده‌ی $\|e_{cei}\| \leq \frac{1}{D}\frac{(N-1)}{N\times A_e}\left(b\left(\sqrt{\frac{c}{2}}\right)exp\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ قرار گیرند. در نهایت معادله حرکت توده با اعمال سوئیچ فوق به صورت معادله‌ی (۱۶) باز نویسی می‌شود.

$$\ddot{q}_i = -k\dot{q}_i\|\dot{q}_i\| \qquad (۱۶)$$

$$\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\left[\{nea(for\ all\ the\ q_i,C_e)\times a - b\,exp\left(-\frac{\|q_i-q_j\|^2}{c}\right)\right]\times(q_i-q_j)\}+A_e(q_i-C_e) - \sum_{k=1}^{M}\left(neo_k(q_i,C_{ok})\right) * [A_o(q_i-C_{ok})]\right)$$

در الگوریتم پیشنهادی که معادله دینامیکی (۱۶) می‌باشد، توده با معادله‌ی مذکور به نحوی عمل می‌نماید که در آن اعضاء به سمت نقطه‌ی هدف حرکت می‌نمایند و در صورت نزدیک شدن بیش از حد به یکدیگر، عامل دافع جهت عدم برخورد اعضاء با یکدیگر فعال می‌شود و اعضاء را از هم دور می‌نماید تا برخوردی بین اعضاء صورت نگیرد. همچنین عدم برخورد اعضاء با موانع موجود بر مسیر حرکت نیز توسط عامل دافع از سمت موانع که با سوئیچی فعال می‌شود، تضمین شده است. نهایتا عامل تمایل به تجمع برای اعضاء، حول نقطه‌ی هدف فعال می‌شود و اعضاء پس از تجمع حول نقطه‌ی هدف متوقف می‌شوند.

در قضیه۲ پایداری حرکت در صورت عدم وجود عامل تمایل به تجمع اثبات شد، حال در ادامه پایداری معادله‌ی (۱۶) در صورت وجود عامل تمایل به تجمع اثبات می‌شود.

اثبات پایداری معادله‌ی (۱۶)- معادله‌ی (۱۶) در صورت وجود عامل تمایل به تجمع و عدم وجود مانع به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\ddot{q}_i = -k\dot{q}_i\|\dot{q}_i\| - \left(\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\left[\{a - b\,exp\left(-\frac{\|q_i-q_j\|^2}{c}\right)\right]\times(q_i-q_j)\}+A_e(q_i-C_e)\right) \quad (۱۶)$$

تابع لیاپانوف به صورت زیر انتخاب می‌شود.

$$V_i = \frac{a}{2}e_{1i}^{\mathrm{T}}e_{1i}+\frac{1}{2}e_{2i}^{\mathrm{T}}e_{2i} = \frac{a}{2}\|e_{1i}\|^2+\frac{1}{2}\|e_{2i}\|^2$$

معادلات حالت به فرم زیر است.

$$\dot{q}_{1i} = q_{2i} = \dot{e}_{1i} = e_{2i}$$
$$\ddot{q}_{1i} = \dot{q}_{2i} = \dot{e}_{2i}$$
$$\dot{q}_{2i} = -k\dot{q}_{1i}\|\dot{q}_{1i}\| - aNe_{1i} + b\sum_{j=1,j\neq i}^{N} exp\left(-\frac{\|q_{1i}-q_{1j}\|^2}{c}\right)(q_{1i}-q_{1j}) + A_e(q_i-C_e)$$

با مشتق گیری از تابع لیاپانوف انتخاب شده در مسیر حرکت اعضاء، عبارت زیر حاصل می‌شود.

$$\dot{V}_i = [a\dot{e}_{1i}^{\mathrm{T}}e_{1i} \quad \dot{e}_{2i}^{\mathrm{T}}e_{2i}]$$
$$\dot{e}_{1i}^{\mathrm{T}} = e_{2i}^{\mathrm{T}}$$
$$\dot{e}_{2i}^{\mathrm{T}} = \dot{q}_{2i}^{\mathrm{T}}$$
$$\dot{V}_i = [a e_{1i} \quad e_{2i}] * \begin{bmatrix} e_{2i}^{\mathrm{T}} \\ -k\dot{q}_{1i}\|\dot{q}_{1i}\| - aNe_{1i}^{\mathrm{T}} + b\sum_{j=1,j\neq i}^{N} exp\left(-\frac{\|q_i-q_j\|^2}{c}\right)(q_i-q_j)^{\mathrm{T}} - A_e(q_i-C_e)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$
$$= -k\dot{q}_{1i}\|\dot{q}_{1i}\|e_{2i} + ae_{1i}e_{2i}^{\mathrm{T}} - aNe_{1i}^{\mathrm{T}}e_{2i} + b\sum_{j=1,j\neq i}^{N} exp\left(-\frac{\|q_i-q_j\|^2}{c}\right)(q_i-q_j)^{\mathrm{T}}e_{2i} - A_e(q_i-C_e)^{\mathrm{T}}e_{2i}$$

از آنجایی که ترم $b\,exp\left(-\frac{\|q_i-q_j\|^2}{c}\right) > 0$ به ازای همه‌ی q_i و q_j است. پس $\dot{V}_i$ می‌تواند به صورت زیر محدود باشد.

$$\dot{V}_i \leq -k\|\dot{q}_{1i}\|\|\dot{q}_{1i}\|\|e_{2i}\| - (N-1)a\|e_{1i}\|\|e_{2i}\| + b\sum_{j=1,j\neq i}^{N} exp\left(-\frac{\|q_i-q_j\|^2}{c}\right)\|q_i-q_j\|\|e_{2i}\| - A_e\|q_i-C_e\|\|e_{2i}\|$$

$$\dot{V}_i \leq -\left[k\|\dot{q}_{1i}\|^2 + (N-1)a\|e_{1i}\| - b\sum_{j=1,j\neq i}^{N} exp\left(-\frac{\|q_i-q_j\|^2}{c}\right)\|q_i-q_j\| + A_e\|q_i-C_e\|\right]\|e_{2i}\|$$

عبارت $k\|\dot{q}_{1i}\|^2$ همیشه مثبت است. تابع تجمع نیز همیشه مثبت است، و دارای مقدار حداقلی به اندازه‌ی $\|q_i-q_j\| = \acute{\delta}$ است. این مقدار حداقل، برابر با فاصله‌یی است که با مساوی صفر قرار دادن عبارت $p_a(q_i)$ در صورت وجود عامل تمایل به تجمع، نتیجه می‌شود که حاصل آن دارای دو مقدار $\left\{\|q_i-q_j\| = 0\ or\ \|q_i-q_j\| = \sqrt{c\,ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \acute{\delta}\right\}$ است و چون اعضاء روی یکدیگر قرار نمی‌گیرند تا مقدار

$\|q_i-q_j\| = 0$ حاصل شود، بنابراین مقدار حداقل برابر با $\acute{\delta}$ است. با در نظر گرفتن این موضوع، نتیجه‌ی زیرحاصل می‌شود:

$$\dot{V}_i \le -\Big[k\|\dot{q}_{1i}\|^2 + (N-1)a\delta - b\,(N-1)\square\, exp\left(-\frac{\acute{\delta}^2}{c}\right) + A_e\|q_i - C_e\|\Big]\|e_{2i}\|$$

$$\dot{V}_i \le -\Big[k\|\dot{q}_{1i}\|^2 + (N-1)\left(a\delta - b\,\square\, exp\left(-\frac{\acute{\delta}^2}{c}\right)\right) + A_e\|q_i - C_e\|\Big]\|e_{2i}\|$$

$$\dot{V}_i \le -\Bigg[k\|\dot{q}_{1i}\|^2 + (N-1)\left(a\delta - b\square\, exp\left(-\frac{\sqrt{c\, ln\left(\frac{b}{a}\right)}^2}{c}\right)\right) + A_e\|q_i - C_e\|\Bigg]\|e_{2i}\|$$

$$\dot{V}_i \le -\Big[k\|\dot{q}_{1i}\|^2 + (N-1)\left(a\delta - b\square\, \left(\frac{a}{b}\right)\right) + A_e\|q_i - C_e\|\Big]\|e_{2i}\|$$

$$\dot{V}_i \le -[k\|\dot{q}_{1i}\|^2 + A_e\|q_i - C_e\|]\|e_{2i}\|$$

مشتق تابع لیاپانوف در مسیر حرکت هر عضو منفی معین است. پس معادله حرکت ارائه شده در جهت کاهش انرژی که به دنبال آن کاهش ترم $A_e\|q_i - C_e\|$ است، رفتار می‌نماید. در نتیجه معادله‌ی(۱۶) پایدار است.

برای درک بهتر این موضوع، شبیه‌سازی در حالت تمایل به تجمع در شروع حرکت و عدم تمایل به تجمع در شروع حرکت (در این حالت تجمع فقط حوالی نقطه‌ی هدف انجام می‌شود) در بخش بعد انجام می‌شود. همچنین برای درک بهتر، در فضای بدون مانع نیز شبیه‌سازی‌ها تکرار خواهند شد.

۴- شبیه سازی الگوریتم طراحی شده و بررسی نتایج

در این بخش با هدف بررسی کارایی و عملکرد الگوریتم جدید طراحی شده، در دو مرحله به شبیه‌سازی و بررسی نتایج در حرکت توده‌ی ربات‌ها پرداخته می‌شود. در مرحله اول با شبیه‌سازی معادلات تجمع و حرکت توده به سمت نقطه‌ی هدف، نتایج حاصل از الگوریتم ارائه شده تحت شرایط اولیه بررسی می‌شود. سپس در مرحله دوم با شبیه‌سازی الگوریتم تعمیم‌یافته در حرکت توده ربات‌ها در حضور موانع، نتایج کلی الگوریتم ارائه شده بررسی می‌شود. در حالت تجربی، الگوریتم در حافظه‌ی ربات‌ها تعریف می‌شود و موقعیت‌های اولیه‌ی ربات‌ها در الگوریتم به صورت اطلاعات ورودی، وارد می‌شود، سپس الگوریتم پیشنهادی در بازه‌های زمانی مشخص در حافظه‌ی ربات‌ها به صورت عددی حل می‌شود و نهایتا مسیر حرکت ربات‌ها مشخص خواهد شد. در این پژوهش نیز شبیه‌سازی به صورت مرحله‌یی انجام می‌شود. برای درک بهتر رفتار توده در حرکت، نتایج شبیه‌سازی پنج ربات به صورت تصادفی بر حسب زمان نیز نشان داده خواهد شد.

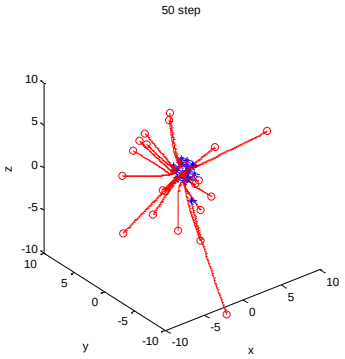
۴-۱ شبیه‌سازی تجمع و حرکت به سمت نقطه‌ی هدف

شبیه‌سازی الگوریتم پیشنهادی در فضای نرم‌افزار متلب با معادله (۷) و با انتخاب پارامترها با توجه به جدول ۱ انجام شده است. تعداد اعضای توده ۲۰ عضو می‌باشد و همچنین موقعیت اولیه هر یک از اعضاء به صورت تصادفی انتخاب شده است. در این شبیه‌سازی سرعت اولیه برای تمامی اعضاء صفر در نظر گرفته شده است و اعضاء از حالت سکون شروع به حرکت می‌نمایند.

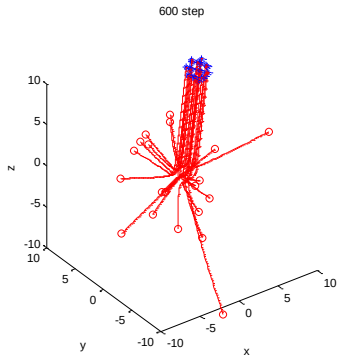
جدول۱: مقادیر پارامترهای الگوریتم حرکتی

پارامتر	نماد	مقدار
جاذب به هدف	A_e	۱
عدم برخورد	c	۰/۰۸
عدم برخورد	b	۲۰
تمایل به تجمع	a	۱
میرایی	k	۵

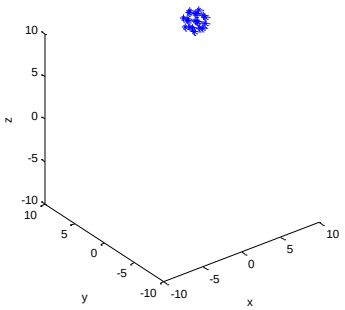
در این شبیه‌سازی، معادله با روش رانگ کوتا مرتبه ۴ با گام ۰/۰۵ حل گردیده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی الگوریتم حرکتی در سه بعد در شکل ۳ نشان داده شده است. همچنین مختصات نقطه‌ی تجمع $C_e = \begin{bmatrix} ۷ & ۷ & ۷ \end{bmatrix}$ انتخاب شده است.



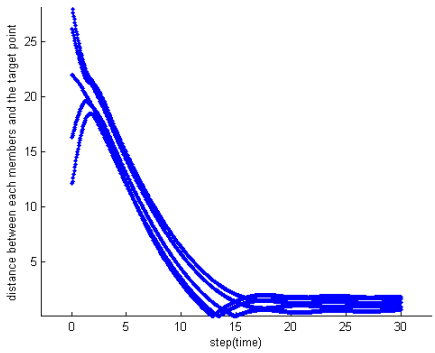
(الف) موقعیت اعضاء پس از ۵۰ مرحله



(ب) موقعیت اعضاء پس از ۶۰۰ مرحله



(ج) موقعیت نهایی اعضاء



(د) فاصله‌ی پنج عضو با نقطه‌ی هدف بر حسب زمانی

شکل۳: شبیه‌سازی حرکت توده در محیط بدون مانع در صورت تمایل به تجمع

همانطور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، اعضای توده با تمایل به تجمع به سمت نقطه هدف حرکت می‌نمایند و تغییرات موقعیت اعضاء با پیشرفت زمان در شکل‌های (۳-الف) و (۳-ب) در مراحل مختلف نشان داده شده است. در این شکل‌ها ضربدرها موقعیت نهایی اعضاء در هر مرحله و دایره‌های کوچک تو خالی موقعیت اولیه هر عضو و خطوط متصل از دایره‌های کوچک به ضربدرها مسیر حرکت اعضاء را نمایش می‌دهد. شکل (۳-ج) نشان دهنده‌ی موقعیت نهایی اعضاء می‌باشد. همچنین در شکل (۳-د)، برای درک بهتر، پنج عضو به صورت تصادفی از تعداد بیست عضو انتخاب شده‌اند و فاصله آنها با نقطه‌ی هدف نشان داده شده است. همانطور که در شکل (۳-د) مشاهده می‌شود، اعضاء ابتدا تمایل به کاهش فاصله با یکدیگر را دارند که علت این رفتار وجود عامل جاذب بین اعضاء می‌باشد و پس از آن تمایل به کاهش فاصله تا نقطه‌ی هدف ایجاد می‌شود. از آنجایی که حرکت توده همیشه در محیط‌های بدون مانع نمی‌باشد، در نتیجه پایداری توده در صورت وجود مانع نیز باید تضمین شود. در قسمت بعد به بررسی عملکرد الگوریتم ارائه شده پرداخته می‌شود و نتایج شبیه‌سازی حرکت توده‌ی ربات‌ها در فضایی با مانع ارائه می‌شود.

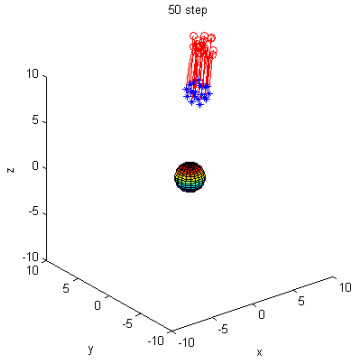
۴-۱ شبیه‌سازی حرکت توده ربات ها در حضور مانع در صورت تمایل به تجمع

برای بررسی عملکرد الگوریتم ارائه شده، شبیه‌سازی معادله حرکت (۱۲) با توده‌ای ۲۰ عضوی انجام می‌شود که تمامی اعضاء در موقعیت‌های ابتدایی به صورت تصادفی و با سرعت اولیه صفر قرار دارند. توده مورد نظر، با تضمین عدم برخورد اعضاء با یکدیگر (توسط عامل دافع موجود بین اعضاء که سبب عدم برخورد اعضاء با یکدیگر می‌شود) و عدم ارتعاش اعضاء (توسط عامل میرا کننده) به سمت نقطه‌ی هدف یعنی C_e حرکت می‌کند و در آخر حول نقطه‌ی هدف تجمع می‌یابد. در این شبیه-سازی، در مسیر حرکت موانعی وجود دارد که با کره تخمین زده می-شوند و عدم برخورد با آنها نیز تضمین می‌شود. شبیه‌سازی حرکت توده در سه بعد با انتخاب پارامترها مطابق با جدول ۲ انجام می‌شود. همچنین محدوده‌ی فعال کننده‌ی عامل دافع برای مانعی با شعاع R_o برابر با کره‌یی به شعاع $\|R_o+1\|$ در نظر گرفته می‌شود.

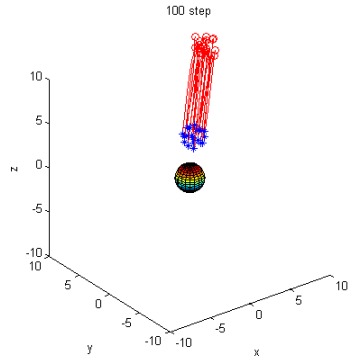
جدول۲: مقادیر پارامترهای الگوریتم حرکتی

پارامتر	نماد	مقدار
جاذب به هدف	A_e	۱
دافع از مانع	A_o	۳۰
عدم برخورد	c	۰/۸
عدم برخورد	b	۲۰
تمایل به تجمع	a	۱
میرایی	k	۵

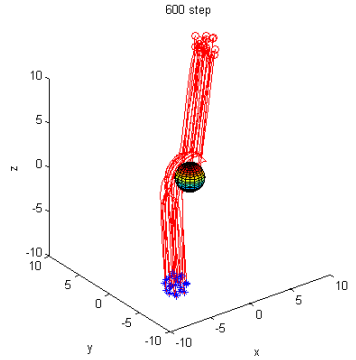
نتیجه شبیه‌سازی در شکل ۴ نشان داده شده است. همچنین مختصات نقطه‌ی تجمع $C_e=\begin{bmatrix}-۸ & -۸ & -۸\end{bmatrix}$ در نظر گرفته شده است.



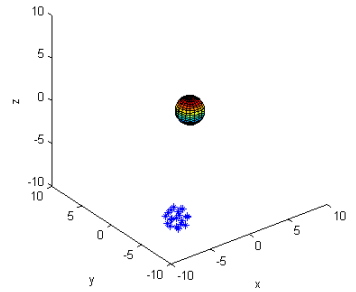
(الف) موقعیت اعضاء پس از ۵۰ مرحله



(ب) موقعیت اعضاء پس از ۱۰۰ مرحله



(ج) موقعیت اعضاء پس از ۶۰۰ مرحله



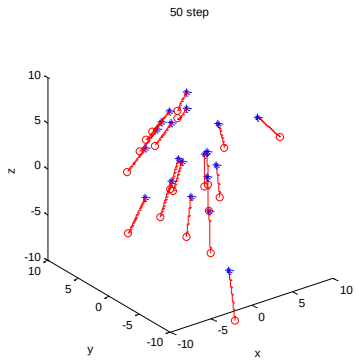
(د) موقعیت نهایی اعضاء

شکل۴: شبیه‌سازی حرکت توده در محیط با مانع در صورت تمایل به تجمع

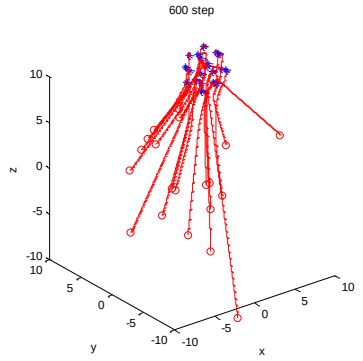
شبیه‌سازی تغییرات موقعیت اعضاء بر مبنای زمان در شکل‌های(۴-الف تا ج) در مراحل مختلف نشان داده شده است. در این شکل‌ها ضربدرها موقعیت نهایی اعضاء در هر مرحله، دایره های تو خالی موقعیت اولیه هر عضو، خطوط متصل از دایره‌های کوچک و تو خالی به ضربدر-ها مسیر حرکت اعضاء و کره، مانع موجود بر مسیر حرکت اعضاء می-باشد. شکل (۴-د) نشان دهنده‌ی موقعیت نهایی اعضاء است. نتیجه شبیه-سازی نشان می‌دهد که با وارد شدن عضوی به محدوده‌ی مانع، عامل دافع فعال شده و سبب افزایش انرژی توده و در نتیجه‌ی آن دفع عضو از محدوده‌ی مانع می‌شود. درنتیجه، الگوریتم ارائه شده این توانایی را دارد که حرکت پایدار را برای توده‌ی ربات‌ها تضمین نماید. از طرفی مشاهده می‌شود که توده تنها از یک سمت مانع عبور کرده است و علت آن، همانطور که انتظار می‌رفت، داشتن تمایل به تجمع توده می‌باشد. در بخش بعد شبیه‌سازی معادله‌ی (۱۶) انجام خواهد شد، تا تاثیر عدم تمایل به تجمع در حرکت توده بررسی شود.

۴-۳ شبیه‌سازی حرکت به سمت نقطه‌ی هدف در صورت عدم تمایل به تجمع

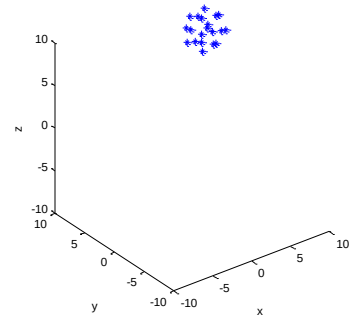
در این بخش، شبیه‌سازی به نحوی انجام می‌شود تا صحت قضیه۱ را نشان دهد (در فضای بدون وجود مانع). عملکرد الگوریتم ارائه شده با شبیه‌سازی معادله حرکت (۱۶) بررسی می‌شود، به نحوی که توده با ۲۰ عضو که در آن اعضاء در موقعیت‌های ابتدایی به صورت تصادفی با فرض سرعت اولیه صفر برای تمامی اعضاء قرار می‌گیرند. حرکت توده در سه بعد با انتخاب پارامترها مطابق با جدول۲ انجام می‌شود و همچنین مختصات نقطه‌ی تجمع $C_e = \begin{bmatrix} ۷ & ۷ & ۷ \end{bmatrix}$ در نظر گرفته شده است. در این شبیه‌سازی نیز معادله با روش رانگ کوتا مرتبه ۴ با گام ۰/۰۵ حل گردیده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی الگوریتم حرکتی در سه بعد، در شکل ۵ نشان داده شده است.



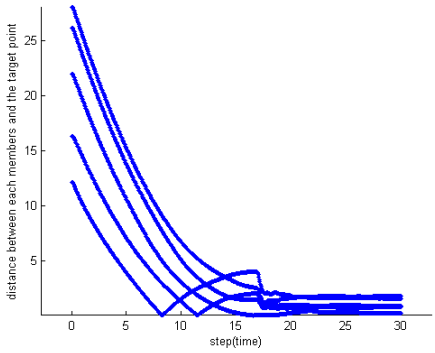
(الف) موقعیت اعضاء پس از ۵۰ مرحله



(ب) موقعیت اعضاء پس از ۶۰۰ مرحله



(ج) موقعیت نهایی اعضاء



(د) فاصله‌ی پنج عضو با نقطه‌ی هدف بر حسب مرحله‌ی زمانی

شکل۵: شبیه‌سازی حرکت توده در صورت عدم تمایل به تجمع

همانطور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، اعضای توده در ابتدا با عدم تمایل به تجمع به سمت نقطه هدف حرکت می‌کنند و تغییرات موقعیت اعضاء با پیشرفت زمان در شکل‌های (۵-الف) و (۵-ب) در مراحل مختلف نشان داده شده است. در این شکل‌ها ضربدرها موقعیت نهایی اعضاء در هر مرحله و دایره‌های تو خالی موقعیت اولیه هر عضو و خطوط متصل از دایره‌های توخالی به ضربدرها مسیر حرکت اعضاء می‌باشد. شکل (۵-ج) نشان دهنده‌ی موقعیت نهایی اعضاء است. همچنین در شکل (۵-د) برای درک بهتر، فاصله‌ی پنج عضو که به صورت تصادفی از تعداد بیست عضو انتخاب شده‌اند با نقطه‌ی هدف نشان داده شده است. همانطور که در شکل (۵-د) مشاهده می‌شود اعضاء تمایل به کاهش فاصله با یکدیگر را ندارند و از ابتدا تمایل به کاهش فاصله تا نقطه‌ی هدف را دارند که علت این رفتار عدم وجود عامل جاذب بین اعضاء می‌باشد. محدوده‌ی $\|e_{cei}\|$ طبق نابرابری (۱۵) با لحاظ شدن پارامترهای انتخابی، برابر با ۲/۴۲۹۵ است. و مقدار $\|e_{cei}\|$ در پایان شبیه‌سازی برای هر عضو در جدول۳ نشان داده شده است.

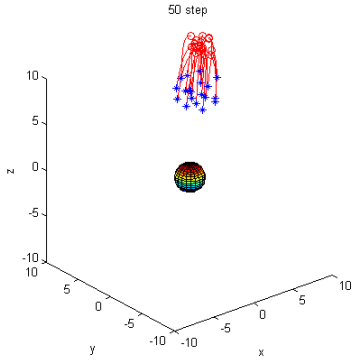
جدول۳: فاصله‌ی هر عضو تا C_e ($\|e_{cei}\|$)

شماره‌ی هر عضو	فاصله‌ی $\|e_{cei}\|$	شماره‌ی هر عضو	فاصله‌ی $\|e_{cei}\|$
۱	۱/۸۶۶۹	۱۱	۲/۲۲۷۱
۲	۰/۶۸۱۲	۱۲	۱/۸۶۳۴
۳	۲/۲۴۴۱	۱۳	۱/۹۵۱۲
۴	۲/۱۸۲۰	۱۴	۱/۹۲۶۸
۵	۲/۰۵۲۰	۱۵	۱/۹۷۸۲
۶	۰/۶۸۲۶	۱۶	۲/۱۵۶۰
۷	۲/۰۴۰۹	۱۷	۲/۲۳۵۳
۸	۲/۲۸۶۵	۱۸	۲/۲۶۸۷
۹	۲/۰۷۳۹	۱۹	۲/۲۴۸۳
۱۰	۱/۸۳۰۶	۲۰	۲/۰۹۰۸

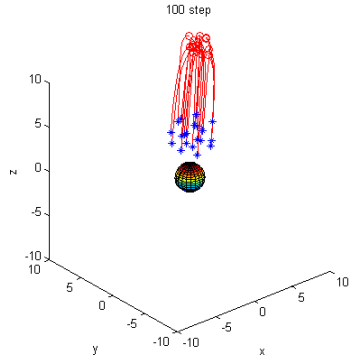
همانطور که مشاهده می‌شود، فاصله‌ی هیچ یک از اعضاء از C_e بیشتر از ۲/۴۲۹۵ نشده است. پس محدوده‌ی همگرایی و یا به عبارت دیگر قرار گیری اعضاء در محدوده‌ی نابرابری (۱۳) در صورت عدم تمایل به تجمع اعضاء حول یکدیگر بدست آمده است. در بخش بعد مشابه همین شبیه‌سازی امّا در فضایی با وجود مانع انجام می‌شود.

۴-۴ شبیه‌سازی حرکت توده ربات ها در حضور مانع در صورت عدم تمایل به تجمع

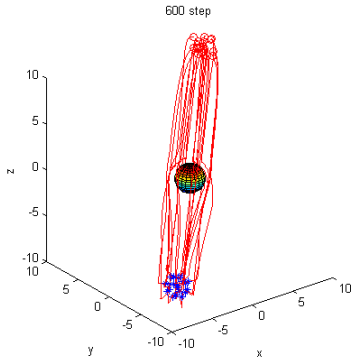
در این بخش شبیه‌سازی رفتار توده تحت تاثیر معادله (۱۶) به نحوی انجام می‌شود که در آن توده‌ی تشکیل شده از ۲۰ عضو تمایل به تجمع را فقط در محدوده‌ی نقطه‌ی هدف داشته باشد. در نتیجه اعضاء با آزادی عمل بیشتری از کنار مانع عبور خواهند کرد. حرکت توده در سه بعد با انتخاب پارامترها مطابق با جدول ۲ انجام می‌شود. همچنین محدوده‌ی فعال کننده‌ی عامل دافع برای موانع، کره‌یی با شعاع $\|R_o+1\|$ در نظر گرفته شده است. در این شبیه‌سازی معادله با روش رانگ کوتا مرتبه ۴ با گام ۰/۰۵ حل گردیده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی الگوریتم حرکتی در سه‌بعد در شکل۶ نشان داده شده است. همچنین مختصات نقطه‌ی هدف برای شبیه‌سازی به صورت $C_e=\begin{bmatrix}-۸ & -۸ & -۸\end{bmatrix}$ در نظر گرفته شده است و سرعت اولیه اعضاء برابر با صفر می‌باشد.



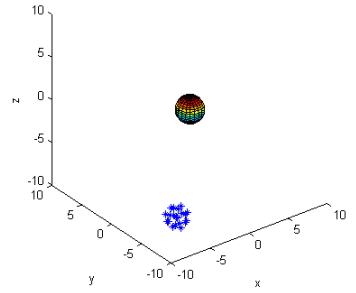
(الف) موقعیت اعضاء پس از ۵۰ مرحله



(ب) موقعیت اعضاء پس از ۱۰۰ مرحله



(ج) موقعیت اعضاء پس از ۶۰۰ مرحله

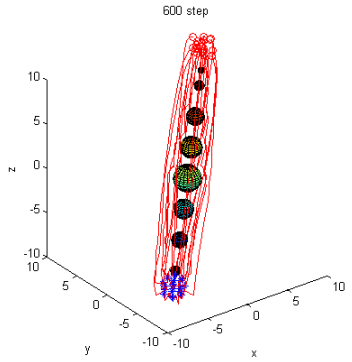


(د) موقعیت نهایی اعضاء

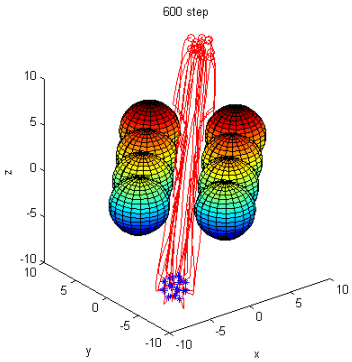
شکل۶: شبیه‌سازی حرکت توده در محیط با مانع در صورت عدم تمایل به تجمع

شبیه‌سازی تغییرات موقعیت اعضاء با پیشرفت زمان در شکل‌های (۶-الف تا ج) در مراحل مختلف نشان داده شده است شکل (۶-د) نشان دهنده‌ی موقعیت نهایی اعضاء است. شبیه‌سازی معادله (۱۶) نشان می‌دهد که در صورت وجود عضو در محدوده‌ی مانع ترم دافع فعال شده و سبب افزایش انرژی توده و در نتیجه‌ی آن دفع عضو از محدوده‌ی مانع می‌شود. مطابق با انتظار، اعضای توده از اطراف مانع با مسیرهای دلخواه عبور کرده‌اند. این امر سبب می‌شود که اعضای توده با آزادی عمل بیشتر مسیر خود را انتخاب نمایند که در نتیجه‌ی آن محدوده‌ی بیشتری را در طول مسیر پوشش می‌دهند و در نهایت اعضاء در نقطه‌ی هدف تجمع می نمایند. در الگوریتم ارائه شده می‌توان موانع موجود را در کنار یکدیگر به نحوی قرار داد تا کره‌هایی که موانع با آنها تخمین زده شده‌اند روی یکدیگر اثر همپوشانی داشته باشند. در این صورت می‌توان موانع با شکل‌ها مختلف را توسط این کره‌ها تخمین زد و حرکت ایمن را برای توده ربات‌ها ایجاد نمود. نمونه‌هایی از این کاربرد در شکل ۷ نشان داده شده است.

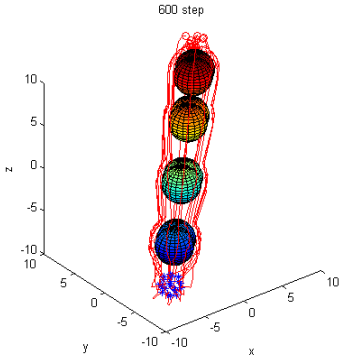
همانطور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، با ایجاد اثر همپوشانی کره‌های تخمینی، موانع با شکل‌های پیچیده ایجاد شده است. برای مثال ایجاد یک راهروی تنگ و یا موانع به صورت پله‌یی، که این موضوع یکی از مزیت‌های مهم الگوریتم پیشنهادی می‌باشد.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل۷- نتایج حاصل از شبیه‌سازی الگوریتم ارائه شده برای موانع متفاوت

۵-نتیجه گیری

در این مقاله ابتدا الگوریتمی ارائه شد تا توسط آن توده متشکل از چندین عضو تحت تاثیر آن با داشتن تمایل به تجمع و عدم برخورد با یکدیگر به سمت نقطه‌ی هدف با انتخاب کوتاه‌ترین مسیر حرکت نمایند، که این الگوریتم در قالب معادله دینامیکی(۷) ارائه شده است. از آنجایی که حرکت توده در بیشتر مواقع، در فضاهایی با وجود مانع می‌باشد، لذا معادله با وجود نیروی دافع از سمت مانع بازنویسی شد. بدلیل تاثیر آن رو هر عضو در فواصل زیاد از مانع، سوئیچی برای فعال سازی نیروی دافع طراحی گردید و در نتیجه‌ی آن معادله دینامیکی(۱۲) حاصل شد. همچنین حرکت در دو حالت نیز بررسی شد که در ابتدا تمایل به تجمع برای توده در شروع حرکت لحاظ شد و پس از آن با طراحی سوئیچی، ترم تمایل به تجمع تنها در حوالی نقطه‌ی هدف فعال گردید. که در نهایت این امر منجر به آن شد که در حالت دوم اعضای توده آزادی عمل بیشتری در انتخاب مسیر به سمت نقطه‌ی هدف را داشته باشند، که به موازات آن عدم برخورد اعضاء با یکدیگر با اطمینان بیشتری تضمین خواهد شد و همچنین فضای بیشتری در طول مسیر حرکت توسط اعضای توده پوشش داده می‌شود. تمامی موارد ذکر شده مزیت‌های الگوریتم پیشنهادی، که همان معادله دینامیکی(۱۶) است، نسبت به الگوریتم‌های پیشین(موارد [۸] و [۱۵-۱۸]) می‌باشد. در نهایت کره‌هایی که توسط آنها موانع موجود در مسیر حرکت، تخمین زده شدند را می‌توان به گونه‌یی کنار یکدیگر قرار داد تا شکل‌های متفاوت را ایجاد نمایند، که این مورد نیز نوآوری و مزیت الگوریتم پیشنهادی می‌باشد. که در شبیه‌سازی پایانی عدم برخورد اعضاء با موانعی با چیدمان و شکل‌های مختلف نشان داده شد. الگوریتم پیشنهادی برای مواردی از جمله نقشه برداری، جست‌وجو، شناسایی و نظارت بر محیط و پوشش یا حمله‌های توده‌ای و حفاظت یا انهدام یک هدف به صورت همزمان می‌باشد.

۶-فهرست علائم

a	پارامتر عامل تمایل به تجمع
A_e	پارامتر عامل جاذب به سمت نقطه هدف
A_o	پارامتر عامل دافع از سمت مانع
b	پارامترهای عامل دافع جهت عدم برخورد
c	پارامترهای عامل دافع جهت عدم برخورد
C_e	نقطه ی هدف
C_{ok}	مرکز هر مانع
D	فضای حرکتی
k	پارامتر میرا کننده ی انرژی
K_i	انرژی جنبشی
M	تعداد موانع
m_i	جرم اعضاء
N	تعداد اعضای توده ی ربات ها
neo	سوئیچ فعال کننده ی عامل دافع از سمت مانع
nea	سوئیچ فعال کننده ی عامل تجمع
R_o	شعاع کره تخمینی
$p_a(q_i)$	تابع پتانسیل تجمع
$p_e(q_i, C_e)$	تابع پتانسیل جاذب از سمت هدف
$p_o(q_i, C_o)$	تابع پتانسیل دافع از سمت مانع
P_i	مختصات هر عضو
q_i	مختصات هر عضو
$\dot{q}_i$	سرعت هرعضو
Q_i	میراکننده ی انرژی
v_i	سرعت هرعضو

۷-مراجع

[1] E. Şahin and A. Winfield, Special issue on swarm robotics. Swarm Intelligence, 2(2), 69-72, 2008.

[2] R. Groß, M. Bonani. F. Mondada and M. Dorigo, *"Autonomous self-assembly in swarm-bots"*. IEEE transactions on robotics, 22(6), 1115-1130, 2006.

[3] H. Hamann and H. Wörn, *"An analytical and spatial model of foraging in a swarm of robots"*. In International Workshop on Swarm Robotics (pp. 43-55). Springer Berlin Heidelberg, 2006.

[4] E. Bonabeau, M. Dorigo and G. Theraulaz, Swarm intelligence: from natural to artificial systems (No. 1). Oxford university press, 1999.

[5] G. Beni and J. Wang, *"Swarm intelligence in cellular robotic systems"*. In Robots and Biological Systems: Towards a New Bionics? (pp. 703-712). Springer Berlin Heidelberg, 1993.

[6] K. Jin, P. Liang and G. Beni, *"Stability of synchronized distributed control of discrete swarm*

[12] S. Gueron, S. A. Levin, and D. I. Rubenstein, *"The dynamics of herds: from individuals to aggregations"*. Journal of Theoretical Biology, 182(1), 85-98, 1996.

[13] W. Pan and Y. Zheng, *"Stability analysis of general swarm with Gaussian attractant/repellent profiles and interaction time delays".* In Control Conference (CCC), 2013 32nd Chinese (pp. 1224-1229). IEEE, 2013.

[14] Z. Xue and J. Zeng, *"Swarm Dynamics Behavior Analysis and Coordinated Control of Limited-Range Perceived Agents"*. In C]//Proceeding of the Second International Symposium on Networking and Network Security (ISNNS'10), Jinggangshan, PR China (pp. 85-88), 2010.

[15] S. W. Ekanayake, Formation of Networked Mobile Robots. Deakin University, Victoria, 2009.

[16] D. H. Kim, H. O. Wang, G. Ye and S. Shin, *"Decentralized control of autonomous swarm systems using artificial potential functions: Analytical design guidelines"*. In Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on (Vol. 1, pp. 159-164). IEEE, 2004.

[17] V. Gazi and K. M. Passino, *"Stability analysis of swarms"*. IEEE Transactions on Automatic Control, 48(4), 692-697, 2003.

[18] V. Gazi, *"On Lagrangian dynamics based modeling of swarm behavior"*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 260, 159-175, 2013.

structures". In Robotics and Automation, 1994. Proceedings., IEEE International Conference on (pp. 1033-1038). IEEE, 1994.

[7] A. S. Barrera, A. López-López and G. R Gómez, *"Self-organization of agents for collective movement based on particle swarm optimization: A qualitative analysis"*.In Electrical Communications and Computers (CONIELECOMP), 21st International Conference on (pp. 71-76). IEEE, 2011.

[8] H. Hashimoto, S. Yokota, A. Sasaki, Y. Ohyama, and H. Kobayashi,.*"Cooperative interaction of walking human and distributed robot maintaining stability of swarm".* In Human System Interactions, HSI'09. 2nd Conference on (pp. 24-27). IEEE, 2009.

[9] G. Beni and P. Liang, *"Pattern reconfiguration in swarms-convergence of a distributed asynchronous and bounded iterative algorithm"* . IEEE Transactions on Robotics and Automation, 12(3), 485-490, 1996.

[10] Liu, Yang, Kevin M. Passino, and Marios Polycarpou. "Stability analysis of one-dimensional asynchronous swarms." *Automatic Control, IEEE Transactions on* 48.10 (2003): 1848-1854.

[11] A. Okubo, *"Dynamical aspects of animal grouping: swarms, schools, flocks, and herds"*. Advances in biophysics, 22, 1-94, 1986.

مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۱۰، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۵، صفحه ۵۳-۴۵

کنترل آشوب در سیستم انتقال چرخ‌دنده با استفاده از روش کنترل مودلغزشی ترمینال تطبیقی جدید با عامل غیرخطی در ورودی کنترلی

هادی دلاوری [۱] ، میلاد محدث زاده [۲]

[۱] استادیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی همدان ، delavari@hut.ac.ir
[۲] فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی همدان ، m.mohadeszadeh@stu.hut.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۸/۱۴، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۵/۱۱/۱۷)

چکیده: آشوب پدیده ای است غیرقابل پیش‌بینی، که در سیستم‌های دینامیکی غیرخطی مورد توجه قرار می گیرد. در این مقاله، کنترل این پدیده در یک سیستم انتقال چرخ‌دنده به‌عنوان یک سیستم دینامیک غیرخطی مورد بررسی قرار می گیرد. ابتدا ویژگی‌های دینامیک غیرخطی سیستم انتقال چرخ‌دنده بررسی می‌شود. سپس، صحت وجود آشوب در این دینامیک غیرخطی با استفاده از نمودار صفحه_فاز مورد بررسی قرار می گیرد. طراحی کنترل کننده مودلغزشی ترمینال شامل دو مرحله می‌باشد: اول، طراحی یک سطح لغزش مناسب و دوم، طراحی یک کنترل‌کننده که مسیرهای حالت‌های سیستم به‌سمت حالت لغزشی حرکت کنند. در قضیه‌ی اول این مقاله، پایداری سطح لغزش پیشنهادی بررسی می شود و سپس کنترل آشوب و پایدارسازی حالت‌های سیستم انتقال چرخ‌دنده، براساس قضیه‌ی پایداری لیاپانوف انجام می گردد. همچنین پایداری سیستم حلقه بسته با استفاده از سطح لغزش و کنترل‌کننده مودلغزشی ترمینال تطبیقی پیشنهاد شده مورد بررسی قرار می گیرد. در روش پیشنهادی تأثیر پارامترهای نامشخص کنترل‌کننده، نامعینی سیستم، اغتشاش خارجی و عامل غیرخطی در ورودی کنترلی به‌طور کامل درنظر گرفته شده‌اند. برای تخمین پارامترهای نامشخص کنترل‌کننده قوانین تطبیقی مناسبی پیشنهاد شده است. نتایج شبیه‌سازی ها، کارآمدی و مقاوم بودن کنترل‌کننده پیشنهادشده را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: سیستم انتقال چرخ‌دنده، دینامیک غیرخطی، کنترل آشوب، کنترل مودلغزشی، عامل غیرخطی در ورودی کنترلی

Chaos Control in a Gear Transmission System via a Novel Adaptive Terminal Sliding Mode Control Approach with Nonlinearity in the Control Input

Hadi Delavari, Milad Mohadeszadeh

Abstract: Chaos is an unpredictable phenomenon that is considered in the nonlinear dynamical systems. In this paper, the chaos control in the nonlinear dynamic gear transmission system is considered. At first, the complex dynamics characters of gear transmission system are studied. Then, the existence of chaos in this nonlinear dynamic system is studied by phase portrait. The design process of sliding-mode control is divided into two steps: The first step is designing a sliding surface so that the plant restricted to the sliding surface has a desired system response, and the second step is constructing a switched feedback gains necessary to drive the plant's state trajectory to the sliding surface. The stability of the proposed sliding surface is studied by the first theorem in this paper. Chaos control and stabilization of the gear transmission system states is studied based on the Lyapunov stability theorem. Also the stability of the closed loop system is investigated. The effects of the unknown controller parameters, system uncertainty, external disturbance and nonlinearity in the control input are fully taken into account. Appropriate adaptation laws are obtained to undertake the unknown parameters of the controller. Finally, simulation results demonstrate the feasibility and robustness of the proposed controller.

Keywords: gear transmission system, nonlinear dynamic, chaos control, sliding mode control, nonlinearity in the control input

۱- مقدمه

سیستم‌های آشوبی، سیستم‌های غیرخطی پیچیده‌ای هستند که دارای ویژگی‌های منحصربه‌فردی از جمله، حساسیت زیاد به شرایط اولیه و تغییرات پارامترهای سیستم بوده و دارای جاذب‌های ناشناس می‌باشند. پس از کارهای اولیه اوت، گربوگی و یورک در سال ۱۹۹۰[۱]، کنترل سیستم‌های آشوبی و سیستم‌های دینامیکی در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است[۵-۲]. با معرفی سیستم‌های آشوبی در علوم مهندسی و فیزیک، حذف آشوب در سیستم‌های آشوبی، توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است. به همین منظور، روش‌های کنترلی مختلفی برای حذف آشوب و یا کنترل سیستم‌های دینامیکی توسعه پیدا کرده‌اند. از جمله این روش‌ها، کنترل تطبیقی [۶]، کنترل مودلغزشی [۷]، کنترل فعال [۸]، کنترل پسخور[1] [۹] و کنترل فازی [۱۰] می‌باشند.

در سال‌های اخیر، کنترل سیستم‌های مکانیکی که رفتار آشوبناک در آن‌ها وجود دارد، در بسیاری از مقالات مورد توجه قرار گرفته است. از جمله این سیستم‌ها، روبات دو درجه آزادی [۶]، ماشین دورانی [۱۱]، سیستم سروونیوماتیک [۱۲]، سیستم تعلیق خودرو [۱۳]، سیستم تعلیق میدان مغناطیسی [۱۴] و سیستم‌های خودگردان [۱۵] می‌باشند. اخیراً برای حذف آشوب در برخی از سیستم‌های مکانیکی، روش‌های کنترلی متنوعی طراحی شده است. یکی از این سیستم‌ها، سیستم انتقال چرخ‌دنده می‌باشد. سیستم انتقال چرخ‌دنده، در صنایع مختلف از جمله در ماشین‌آلات صنعتی، هوافضا، روباتیک و سیستم‌های قدرت کاربردهای وسیعی دارد. ارتعاشات موجود در این سیستم‌ها به طور مستقیم بر عملکرد سیستم تأثیرگذار هستند. درباره این موضوع، تحقیقات زیادی از سوی متخصصین صورت گرفته است[۲۰-۱۶] . نتایج به‌دست آمده بیانگر رفتار آشوبناک در بازه‌های خاص از ارتعاش می‌باشد. این نوع از ارتعاشات، شدید و غیرقابل پیش‌بینی بوده و باعث صدمه و نیز ایجاد صدای مزاحم در چرخ‌دنده می‌گردد. از این رو بررسی و تحلیل ارتعاشات سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای و تأثیر عوامل مختلف بر آن، کمک زیادی در یافتن راه‌هایی برای کاهش یا از بین بردن صداهای مزاحم ناشی از آن و درنتیجه بالا بردن کیفیت چرخ‌دنده‌ها خواهد کرد. سیستم چرخ‌دنده تحت تأثیر عواملی غیرخطی و متغیر با زمان، لقی، خطاهای انتقال چرخ‌دنده، اصطکاک بین سطوح دندانه‌ها و بسیاری از عوامل دیگر، یک سیستم ارتعاشی غیرخطی است که می‌تواند بسیاری از پدیده‌های غیرخطی را به نمایش گذارد. با پیشرفت دینامیک غیرخطی، مشخصه‌های غیرخطی سیستم از قبیل پاسخ‌های غیرپریودیک، دوشاخگی[2] و آشوب مورد توجه بیشتری قرارگرفت. در [۲۱] دوشاخگی و آشوب و بزرگترین نمایی لیاپانوف سیستم چرخ دنده با اصطکاک لغزشی مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته و پارامترهای بحرانی آنها شناسایی می شود. نتایج شبیه سازی ها نشان می دهد که اصطکاک نقش بسزایی در رفتار دینامیکی سیستم چرخ دنده دارد. در[۲۲] مدل دینامیکی غیرخطی متغیربازمان سیستم چرخ دنده بدست آمده است، که در آن لقی[3]، سختی متغیربازمان، تحریک خارجی و خطای انتقال استاتیکی در نظر گرفته شده است. مسیرهای دینامیکی، نگاشت پوانکاره[4]، دیاگرامهای دوشاخگی و بزرگترین نمایی لیاپانوف برای سیستم چرخ دنده در [۲۳] با استفاده از تحلیل های عددی مورد تحقیق و بررسی قرار گرفته است. در [۲۴] یک تحلیل سیستماتیک برای رفتار دینامیکی سیستم چرخ دنده با یک درجه آزادی با تعلیق غیرخطی و بدون تعلیق غیرخطی انجام شده است. شبیه سازی های عددی رفتار آشوبی این سیستم را آشکار می سازد. در [۲۵] تحلیل ملنیکف برای توسعه یک مدل کاربردی برای سیستم چرخ دنده و همچنین کنترل و حذف رفتار آشوبی ارائه شده، همچنین برای حذف آشوب از روش کنترلی غیر پسخور[5] استفاده شده است. در [۲۶] یک سیستم کنترلی برای حذف رفتار آشوبی در سیستم دینامیک چرخ دنده ارائه شده است. با استفاده از روش ملنیکف یک روش تحلیلی با اعمال تحریک کنترل خارجی برای حذف آشوب پیشنهاد شده است. برای کنترل سیستم انتقال چرخ‌دنده، روش کنترل پسخور به‌منظور پایدارسازی حالت‌های سیستم، در [۲۷] به‌انجام رسیده است که در آن، معادلات حالت دینامیکی سیستم، براساس قانون نیوتن به‌دست آمده‌اند. روش کنترلی دیگری، براساس آنالیز ملنیکف[6] و اعمال یک نیروی تحریک بر چرخ‌دنده در [۲۸] انجام شده است. در [۲۹] یک مدل هشت درجه آزادی برای سیستم غیرخطی چرخ دنده که شامل لقی، خطای انتقال، جاذبه و گشتاوری ورودی/خروجی است، ارائه شده، همچنین دینامیک غیرخطی سیستم چرخ دنده با تحریک داخلی یا تحریک خارجی مورد بررسی قرار گرفته است.

کنترل مود لغزشی ترمینال تطبیقی در مقابل نامعینی در سیستم های غیرخطی عملکرد خوبی از خود نشان داده است[۳۳-۳۰] . لذا در این مقاله برای حذف آشوب، از ایده این روش استفاده می شود که در مقابل عوامل غیرخطی، نامعینی سیستم و اغتشاش خارجی مقاوم می‌باشد.

کنترل‌کننده مودلغزشی طراحی‌شده در این مقاله، دارای یک کنترل‌کننده معادل و یک کنترل‌کننده سوئیچینگ[7] می‌باشد. در کاربردهای عملی کنترل‌کننده سوئیچینگ تحت تأثیر عوامل غیرخطی قرار می‌گیرد که در این مقاله این مورد در نظر گرفته شده است.

برخی از ویژگی‌های این مقاله شامل موارد زیر می‌باشد:

- در بسیاری از کاربردهای عملی وجود عامل غیرخطی در ورودی گریز ناپذیر است، اما تاکنون در مقالاتی که در آنها کنترل آشوب در دینامیک سیستم انتقال

[1] Feedback
[2] Bifurcation
[3] Backlash
[4] Poincaré maps
[5] Non-feedback control
[6] Melnikov analysis
[7] Switching

چرخ‌دنده بررسی شده است، این موضوع را در نظر نگرفته‌اند.

- کنترل‌کننده پیشنهادی در این مقاله دارای مقاومت بالا در مقابل نامعینی، اغتشاش و عامل غیرخطی در ورودی می‌باشد.
- پارامترهای کنترل‌کننده براساس قضیه‌ی پایداری لیاپانوف و به‌صورت تطبیقی درنظر گرفته شده‌اند.
- کنترل‌کننده طراحی‌شده در این مقاله، برای کنترل آشوب در دسته بسیاری از سیستم‌های مکانیکی قابل استفاده است.

ساختار این مقاله به این شرح است؛ در بخش ۲، یک مدل ریاضی از سیستم غیرخطی چرخ‌دنده و رفتار آشوبناک سیستم ارائه می‌شود. در بخش ۳، ساختار دینامیکی سیستم با اعمال نامعینی و اغتشاش مورد بررسی قرار می‌گیرد. کنترل‌کننده ترمینال تطبیقی پیشنهادی در بخش ۴ طراحی می‌شود. در بخش ۵، پایداری سیستم توسط دو قضیه، مورد بررسی قرار می‌گیرد. شبیه‌سازی و ارزیابی کنترل‌کننده طراحی‌شده در بخش ۶ انجام می‌شود و در پایان، نتیجه‌گیری نهایی در بخش ۷ ارائه می‌گردد.

۲- توصیف دینامیک سیستم انتقال چرخ‌دنده

در این قسمت، ابتدا مدل دینامیکی سیستم موردنظر بررسی می‌شود، که مدل این سیستم ارتعاشی در شکل ۱ نمایش داده شده است. یک سیستم چرخ‌دنده‌ای عموماً توسط دو دیسک که بیانگر اینرسی دو چرخ‌دنده می‌باشند مدل می‌شود. یک سیستم میراکننده و فنر نیز درگیری دو چرخ‌دنده را توصیف مینماید. در این مدل، چرخ‌دنده‌های a و b با شعاع‌های r_a و r_b نشان داده می‌شوند. I_a و I_b بیانگر ممان اینرسی دو چرخ‌دنده، k_m و c_m نیز سختی درگیری و ضریب میرایی معادل جفت چرخ‌دنده درگیر هستند. گشتاورهای احتمالی بر چرخ‌دندها، T_a و T_b می‌باشند. تابع پس‌زنی f_h نیز برای بیان لقی و همچنین جابجایی $e(t)$ به منظور ارائه‌ی خطای انتقال استاتیکی سیستم، تعریف می‌شوند. با در نظر گرفتن پارامترهای نشان داده شده در شکل ۱ و موارد فوق، و تعریف پارامترهای زیر [۲۸]:

$$m = \frac{I_a I_b}{I_b r_a^2 + I_a r_b^2}, \hat{F}_m = m\left(\frac{T_a r_a}{I_a} + \frac{T_b r_b}{I_b}\right),$$
$$\hat{F}_e(t) = -m\left(\frac{d^2 e}{dt^2}\right), \tilde{F}_e = \frac{e}{b}, \tilde{F}_m = \frac{\hat{F}_m}{b k_m},$$
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_m}{m}}, \tau = \omega_n t, \Omega_e = \frac{\omega_e}{\omega_n}, \tilde{\mu} = \frac{c}{2m\omega_n}$$

معادله حرکت سیستم را می توان به‌صورت (۱) بیان کرد [۲۸]:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2\tilde{\mu}\frac{dx}{d\tau} + f_h(x) = \tilde{F}_m + \tilde{F}_e {\Omega_e}^2 \cos(\Omega_e \tau + \varphi_e) \quad (۱)$$

خطای انتقال استاتیکی، تابعی از فرکانس درگیری و به‌صورت

$$e(t) = e(t + 2\pi/\omega_e) = e\cos(\omega_e t + \varphi_e)$$

در معادله سیستم وارد می‌شود. با تعریف پارامترهای $\tilde{F}_e = \varepsilon f_e$، $\tilde{F}_m = \varepsilon f_m$، $\tilde{\mu} = \varepsilon\mu$ و $0 < \varepsilon \le 1$، در نتیجه، رابطه‌ی (۱) در فضای حالت به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2\varepsilon\mu x_2 + (0.1667x_1 - 0.1667{x_1}^3) \\ \quad +\varepsilon\left(f_m + f_e {\Omega_e}^2 \cos(\Omega_e \tau + \varphi_e)\right) \end{cases} \quad (۲)$$

در صورتی‌که پارامتر کنترلی $\tilde{F}_e$ در بازه $[0, 0.4]$ در نظر گرفته شود، با انتخاب $\tilde{F}_e > 0.26$، رفتار آشوبناک در سیستم دینامیکی قابل مشاهده بوده و حالت گذرا حذف خواهد شد. جهت مشاهده نمودار صفحه_فاز و رفتار آشوبی سیستم، پارامترهای معادله حالت (۲)، $\varepsilon = 0.01$، $f_m = 1$، $\mu = 9$، $\Omega_e = 0.5$ و $f_e = 30$ درنظر گرفته می شود. رفتار آشوبی سیستم با شرایط اولیه $x_1(0) = -2$ و $x_2(0) = 1$، در شکل‌های ۲ و ۳ نشان داده شده است.

۳- پایدارسازی دینامیک غیرخطی

معادلات حالت دینامیک سیستم انتقال چرخ‌دنده به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2\varepsilon\mu x_2 + (0.1667x_1 - 0.1667{x_1}^3) \\ \quad +\varepsilon\left(f_m + f_e {\Omega_e}^2 \cos(\Omega_e \tau + \varphi_e)\right) \\ \quad +\Delta f(x,t) + d(t) + u(t) \end{cases} \quad (۳)$$

در رابطه (۳)، $x = [x_1, x_2]^T$، بردار حالت سیستم است. $\Delta f(x,t)$ نامعینی مدل، $d(t)$ اغتشاش خارجی و $u(t)$ ورودی کنترلی است که در مرحله بعد طراحی می‌شود. در مسئله پایدارسازی $e = x$ تعریف می شود. در نتیجه دینامیک خطا به‌صورت زیر حاصل می گردد.

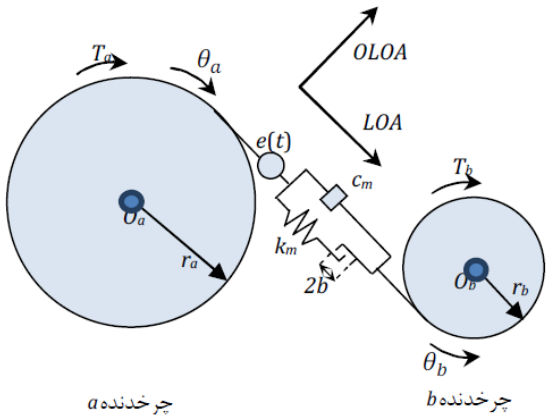
$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = -2\varepsilon\mu e_2 + (0.1667e_1 - 0.1667{e_1}^3) \\ \quad +\varepsilon\left(f_m + f_e {\Omega_e}^2 \cos(\Omega_e \tau + \varphi_e)\right) \\ \quad +\Delta f(e,t) + d(t) + u(t) \end{cases} \quad (۴)$$

هدف پیدا کردن کنترل‌کننده‌ای است که حالت‌های سیستم (۴) به‌صورت مجانبی به‌سمت نقطه تعادل مبدأ همگرا شوند.

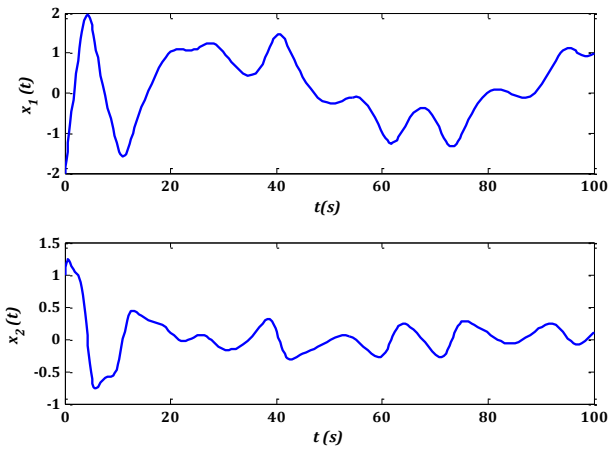
فرض ۱: در رابطه (۴)، محدوده‌های نامعینی و اغتشاش ، بصورت زیر فرض می‌شوند:

$$|\Delta f(e,t)| < \psi \quad \text{and} \quad |d(t)| < \Theta$$

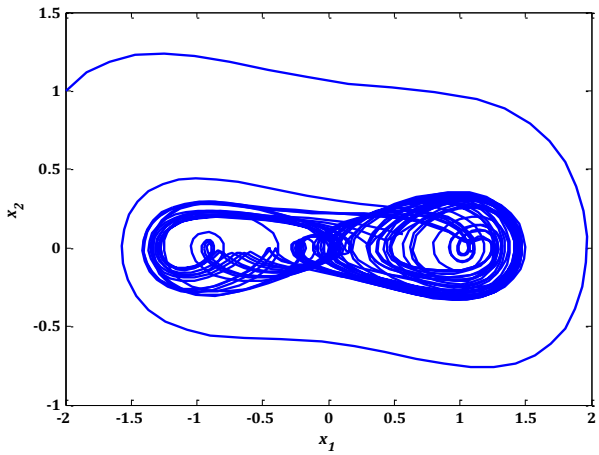
در عبارت فوق، ψ و Θ اعداد مثبت می‌باشند.



شکل ۱ : مدل دینامیکی سیستم انتقال چرخ‌دنده **[۲۸]**



شکل ۲ : مسیرهای حالت سیستم انتقال چرخ‌دنده



شکل ۳ : نمودار صفحه- فاز سیستم انتقال چرخ‌دنده

۴- طراحی کنترل کننده

در این قسمت، ابتدا سطح لغزش ترمینال معرفی شده و پایداری آن بررسی می‌شود. سپس یک کنترل‌کننده مودلغزشی ترمینال به‌منظور همگرا کردن حالت‌های سیستم به سمت نقطه تعادل صفر طراحی می‌شود. سطح لغزشی ترمینال موردنظر به‌صورت زیر می‌باشد [۳۱]:

$$\sigma(t) = ce_1 + |e_2|^{\beta}\operatorname{sgn}(e_2) \qquad (۵)$$

در رابطه‌ی (۵)، $c > 0$ و $1 < \beta < 2$ می‌باشد. همچنین $\operatorname{sgn}(.)$ تابع sign فرض شده است. برای آنکه حالت‌های سیستم به‌سمت سطح لغزش $\sigma(t) = 0$ در زمان محدود میل کنند، بایستی تغییرات سطح لغزش در این زمان صفر باشد، به‌عبارت‌دیگر $\dot{\sigma}(t) = 0$ برقرار باشد. در مرحله‌ی بعد بایستی کنترل‌کننده‌ای طراحی شود که مسیرهای حالت سیستم به‌سمت مودلغزشی یا $\dot{\sigma}(t) = 0$ میل کنند و روی آن قرار گیرند. کنترل‌کننده طراحی‌شده به صورت زیر می‌باشد:

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_{sw}(t) = \left(-\left(\hat{c}/\beta\right)\dot{e}_1{}^{2-\beta} + (2\varepsilon\mu\dot{e}_1) + (0.1667e_1 - 0.1667e_1{}^3) - \varepsilon\left(f_m + f_e\Omega_e{}^2\cos(\Omega_e\tau + \varphi_e)\right) - \left(\hat{\psi} + \hat{\Theta}\right)\operatorname{sgn}\left(\sigma(t)\right)\right) + \left(-\left(\hat{\lambda}|\sigma(t)| + \hat{\gamma}\right)\operatorname{sgn}\left(\sigma(t)\right)\right) \qquad (۶)$$

در رابطه (۶)، λ و γ پارامترهای سیگنال کنترل سوئیچینگ بوده و همواره مثبت هستند، همچنین $\hat{c}$، $\hat{\lambda}$، $\hat{\gamma}$، $\hat{\psi}$ و $\hat{\Theta}$، تخمین‌های c، λ، γ، ψ و Θ می باشند. همچنین فرض می‌شود:

$$\chi(t) = \left(\hat{\lambda}|\sigma(t)| + \hat{\gamma}\right)$$

۵- تحلیل پایداری

قضیه ۱: سطح لغزش مرتبه‌دوم در رابطه (۵)، رسیدن حالت‌های سیستم به سمت حالت لغزشی $\sigma(t) = 0$ را در زمان محدود t_r تضمین می‌کند.

$$t_r = \frac{|x_1(0)|^{\left(1-\frac{1}{\beta}\right)}}{c^{\left(\frac{1}{\beta}\right)}\left(1-\frac{1}{\beta}\right)} \qquad (۷)$$

اثبات: درصورتی‌که سیستم در حالت مودلغزشی قرار گیرد و $e_2 \geq 0$، آنگاه، سطح لغزش رابطه (۵)، به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$ce_1 + \dot{e}_1{}^{\beta} = 0 \qquad (۸)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۸)، درصورتی‌که $\dot{e}_1(0) \leq 0$، در نتیجه $e_1(0) \leq 0$؛ در این‌صورت رابطه‌های زیر برقرار خواهند بود:

$$\dot{e}_1 = c^{\left(\frac{1}{\beta}\right)}(-e_1)^{\left(\frac{1}{\beta}\right)}$$
$$\frac{-d(-e_1)}{(-e_1)^{\frac{1}{\beta}}} = c^{\left(\frac{1}{\beta}\right)}dt$$
$$-\int_{-e_1(0)}^{0} \frac{d(-e_1)}{(-e_1)^{\frac{1}{\beta}}} = \int_0^{t_r} c^{\left(\frac{1}{\beta}\right)}\, dt$$
$$t_r = \left.\frac{(-e_1)^{\left(1-\frac{1}{\beta}\right)}}{c^{\left(\frac{1}{\beta}\right)}\left(1-\frac{1}{\beta}\right)}\right|_{-e_1(0)}^{0} = \frac{|e_1(0)|^{\left(1-\frac{1}{\beta}\right)}}{c^{\left(\frac{1}{\beta}\right)}\left(1-\frac{1}{\beta}\right)} = \frac{|x_1(0)|^{\left(1-\frac{1}{\beta}\right)}}{c^{\left(\frac{1}{\beta}\right)}\left(1-\frac{1}{\beta}\right)} \quad (۹)$$

درصورتی‌که سیستم در حالت مودلغزشی قرار گیرد و $e_2 \le 0$ است، در نتیجه، سطح لغزش (۵)، به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$ce_1 - (-\dot{e}_1)^{\beta} = 0 \quad (۱۰)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۰)، درصورتی‌که $\dot{e}_1(0) \le 0$، در نتیجه $e_1(0) \ge 0$؛ در این‌صورت رابطه‌های زیر برقرار خواهند بود:

$$-\dot{e}_1 = c^{\left(\frac{1}{\beta}\right)}(e_1)^{\left(\frac{1}{\beta}\right)}$$
$$\frac{-d(e_1)}{(e_1)^{\left(\frac{1}{\beta}\right)}} = c^{\left(\frac{1}{\beta}\right)}dt$$
$$-\int_{e_1(0)}^{0} \frac{d(e_1)}{(e_1)^{\left(\frac{1}{\beta}\right)}} = \int_0^{t_r} c^{\left(\frac{1}{\beta}\right)}\, dt$$
$$t_r = \left.\frac{-(e_1)^{\left(1-\frac{1}{\beta}\right)}}{c^{\left(\frac{1}{\beta}\right)}\left(1-\frac{1}{\beta}\right)}\right|_{e_1(0)}^{0} = \frac{|e_1(0)|^{\left(1-\frac{1}{\beta}\right)}}{c^{\left(\frac{1}{\beta}\right)}\left(1-\frac{1}{\beta}\right)} = \frac{|x_1(0)|^{\left(1-\frac{1}{\beta}\right)}}{c^{\left(\frac{1}{\beta}\right)}\left(1-\frac{1}{\beta}\right)} \quad (۱۱)$$

از رابطه‌های (۹) و (۱۱) می‌توان نتیجه گرفت که حالت‌های سیستم در زمان محدود t_r به سمت سطح لغزش $\sigma(t) = 0$ میل می‌کنند.

به‌منظور توصیف عامل غیرخطی در ورودی کنترلی برای سیستم‌های فیزیکی، این عامل غیرخطی $\varphi\big(u_{sw}(t)\big)$ تابعی از ورودی کنترل‌کننده سوئیچینگ می‌باشد و یک تابع پیوسته با شرایط $\varphi(0) = 0$ ، $u_{sw}(t) \to \varphi\big(u_{sw}(t)\big)$ و محدود به شعاع قطاعی $[\xi_L, \xi_U]$ می‌باشد که در نامعادله‌ی زیر صدق می‌کند.

$$\xi_L u_{sw}(t)^2 \le u_{sw}(t)\, \varphi\big(u_{sw}(t)\big) \le \xi_U u_{sw}(t)^2,\ \ 0 < \xi_L < \xi_U, \quad (۱۲)$$

در رابطه‌ی (۱۲)، ξ_L و ξ_U ثابت‌های مثبت می‌باشند. ورودی کنترلی قبل از اعمال به سیستم از این عامل غیر خطی بایستی عبور کند که کنترل سیستم را مشکل تر می سازد و در صورتی که کنترل کننده مقاوم نباشد، این عامل غیر خطی می تواند باعث ناپایداری سیستم بشود. از سوی دیگر در مبحث تئوری اثبات پایداری وجود این عامل غیر خطی اثبات پایداری سیستم حلقه بسته را پیچیده تر می سازد. شکل ۴ تابع غیرخطی را در محدوده‌ی شعاع قطاعی $[0.2, 0.6]$ نشان می‌دهد. در ادامه، پایداری سیستم حلقه بسته با استفاده از کنترل‌کننده (۶) در حضور عامل غیرخطی بررسی می‌شود.

قضیه ۲: برای سیستم غیرخطی (۱) با سطح لغزش ترمینال (۵)، کنترل‌کننده (۶) و قوانین تطبیق (۱۳)، شرایط سطح لغزش $\dot{\sigma}(t) = 0$ برآورده می‌شود.

$$\begin{cases} \dot{\hat{c}} = \alpha_1 |e_2| \big|\sigma(t)\big|, \hat{c}(0) = c_0, \alpha_1 > 0 \\ \dot{\hat{\lambda}} = \alpha_2\, \beta \xi_L |e_2|^{\beta-1} \sigma(t)^2, \hat{\lambda}(0) = \lambda_0, \alpha_2 > 0 \\ \dot{\hat{\gamma}} = \alpha_3 \beta \xi_L |e_2|^{\beta-1} \big|\sigma(t)\big|, \hat{\gamma}(0) = \gamma_0, \alpha_3 > 0 \\ \dot{\hat{\psi}} = \alpha_4 \beta |e_2|^{\beta-1} |\sigma(t)|, \hat{\psi}(0) = \psi_0, \alpha_4 > 0 \\ \dot{\hat{\Theta}} = \alpha_5 \beta |e_2|^{\beta-1} \big|\sigma(t)\big|, \hat{\Theta}(0) = \Theta_0, \alpha_5 > 0 \end{cases} \quad (۱۳)$$

اثبات: یک تابع لیاپانوف مثبت، به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$V(t) = {}^1\!/_2 \left(\sigma(t)^2 + \alpha_1{}^{-1}\tilde{c}^2 + \alpha_2{}^{-1}\tilde{\lambda}^2 + \alpha_3{}^{-1}\tilde{\gamma}^2 + \alpha_4{}^{-1}\tilde{\psi}^2 + \alpha_5{}^{-1}\tilde{\Theta}^2\right) \quad (۱۴)$$

در رابطه‌ی (۱۴)، $\tilde{c} = (c - \hat{c})$، $\tilde{\lambda} = \left(\lambda - \hat{\lambda}\right)$، $\tilde{\gamma} = (\gamma - \hat{\gamma})$، $\tilde{\psi} = \left(\psi - \hat{\psi}\right)$ و $\tilde{\Theta} = \left(\Theta - \hat{\Theta}\right)$. همچنین $\alpha_i, (i = 1,2, \dots ,5)$ نرخ‌های یادگیری می‌باشند.

با گرفتن مشتق زمانی از رابطه‌ی (۱۴) و با استفاده از فرض ۱، رابطه‌ی (۱۵) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sigma(t)\dot{\sigma}(t) - \alpha_1{}^{-1}\tilde{c}\dot{\hat{c}} - \alpha_2{}^{-1}\tilde{\lambda}\dot{\hat{\lambda}} - \alpha_3{}^{-1}\tilde{\gamma}\dot{\hat{\gamma}} - \alpha_4{}^{-1}\tilde{\psi}\dot{\hat{\psi}} - \alpha_5{}^{-1}\tilde{\Theta}\dot{\hat{\Theta}} = \sigma(t)\left(c\dot{e}_1 + \beta|\dot{e}_1|^{\beta-1}\ddot{e}_1\right) - \\ & \alpha_1{}^{-1}\tilde{c}\dot{\hat{c}} - \alpha_2{}^{-1}\tilde{\lambda}\dot{\hat{\lambda}} - \alpha_3{}^{-1}\tilde{\gamma}\dot{\hat{\gamma}} - \alpha_4{}^{-1}\tilde{\psi}\dot{\hat{\psi}} - \alpha_5{}^{-1}\tilde{\Theta}\dot{\hat{\Theta}} \le \\ & \sigma(t)\Big(ce_2 + \beta|e_2|^{\beta-1}\big(-2\varepsilon\mu e_2 + (0.1667e_1 - 0.1667e_1{}^3) + \Omega + |\Delta f(e,t)| + |d(t)| + u(t)\big)\Big) - \alpha_1{}^{-1}\tilde{c}\dot{\hat{c}} - \\ & \alpha_2{}^{-1}\tilde{\lambda}\dot{\hat{\lambda}} - \alpha_3{}^{-1}\tilde{\gamma}\dot{\hat{\gamma}} - \alpha_4{}^{-1}\tilde{\psi}\dot{\hat{\psi}} - \alpha_5{}^{-1}\tilde{\Theta}\dot{\hat{\Theta}} \end{aligned} \quad (۱۵)$$

که در رابطه (۱۵) داریم

$$\Omega = \varepsilon\left(f_m + f_e\Omega_e{}^2\cos(\Omega_e\tau + \varphi_e)\right)$$

با جایگذاری کنترل‌کننده معادل $\left(u_{eq}\right)$ از رابطه‌ی (۶) در رابطه‌ی (۱۵) ، نامعادله‌ی (۱۶) به‌صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$\dot{V}(t) \leq |e_2||\sigma(t)| + \beta|\sigma(t)||e_2|^{\beta-1}(|\Delta f(e,t)| + |d(t)|) - \beta|\sigma(t)||e_2|^{\beta-1}(\hat{\psi} + \hat{\Theta}) - \beta|e_2|^{\beta-1}\sigma(t)\,\varphi(u_{sw}(t)) - {\alpha_1}^{-1}\tilde{c}\dot{\hat{c}} - {\alpha_2}^{-1}\tilde{\lambda}\dot{\hat{\lambda}} - {\alpha_3}^{-1}\tilde{\gamma}\dot{\hat{\gamma}} - {\alpha_4}^{-1}\tilde{\psi}\dot{\hat{\psi}} - {\alpha_5}^{-1}\tilde{\Theta} \quad (۱۶)$$

از رابطه‌ی (۱۲) به نتایج زیر می‌رسیم:

$$u_{sw}(t)\varphi(u_{sw}(t)) = \chi(t)sgn\left(\sigma(t)\right)\varphi(u_{sw}(t)) \geq \xi_L\chi(t)^2\left(sgn\left(\sigma(t)\right)\right)^2$$

به‌طوری‌که $\chi(t) = (\hat{\lambda}|\sigma(t)| + \hat{\gamma}) \geq 0$.

از $\sigma(t)^2 \geq 0$ داریم:

$$\chi(t)\sigma(t)|\sigma(t)|\varphi(u_{sw}(t)) \geq \xi_L\chi(t)^2|\sigma(t)|^2 \Rightarrow -\sigma(t)\varphi(u_{sw}(t)) \leq -\xi_L\chi(t)|\sigma(t)| \quad (۱۷)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۱۷) و سپس قوانین تطبیق (۱۳) در نامعادله‌ی (۱۶)، به نامعادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\dot{V}(t) \leq -\beta|e_2|^{\beta-1}\xi_L(\lambda|\sigma(t)| + \gamma)|\sigma(t)| \quad (۱۸)$$

با توجه به این‌که ثابت‌های ξ_L، λ و γ همواره مثبت می‌باشند؛ در نتیجه، سمت راست نامعادله‌ی (۱۸) همواره منفی است، بنابراین حالت‌های سیستم خطای (۴) به‌طور مجانبی، به‌سمت سطح لغزش $\sigma(t) = 0$ میل خواهند کرد.

۶- شبیه سازی و تحلیل مباحث تئوری

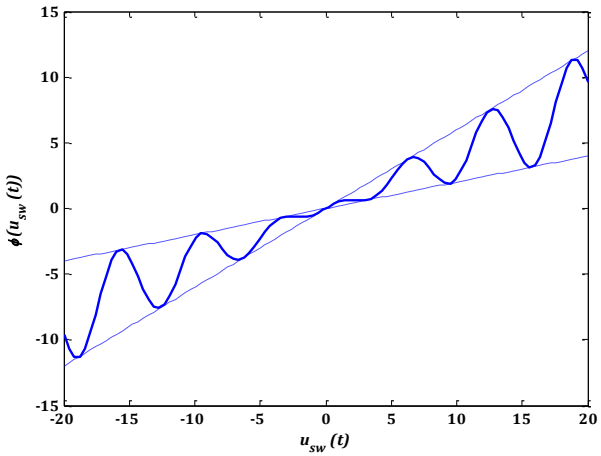
در این قسمت، به منظور بررسی صحت مباحث تئوری و مؤثر بودن کنترل‌کننده پیشنهادی، شبیه‌سازی عددی صورت گرفته است. جهت حذف وزوز[1] در کنترل‌کننده، از تابع اشباع[2] به‌جای تابع sign استفاده شده است.برای بررسی مقاوم بودن کنترل‌کننده، نامعینی مدل و همچنین اغتشاش خارجی به‌ترتیب به‌صورت:

$$\Delta f(e,t) = 0.3\sin(e_1(t))\cos(e_2(t))$$

و $d(t) = 0.2\sin(t)$ در نظر گرفته شده‌اند. پارامترهای کنترل‌کننده به‌ترتیب:

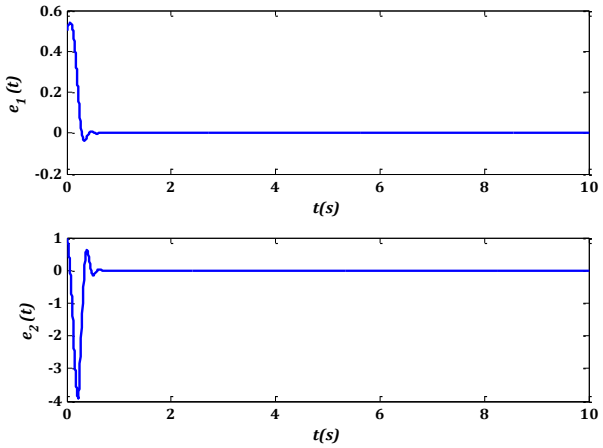
$\varepsilon = 0.01$، $f_m = 1$، $\mu = 9$، $\Omega_e = 0.5$، $f_e = 30$ و $\beta = (\frac{13}{9})$ می‌باشند. همچنین نرخ‌های یادگیری $\alpha_1 = 5$، $\alpha_2 = 5$، $\alpha_3 = 5$، $\alpha_4 = 5$ و $\alpha_5 = 10$ انتخاب شده‌اند. مقدار پارامتر سطح لغزش $c = 20$ و شرایط اولیه پارامترهای کنترل‌کننده $c_0 = 0.6$، $\lambda_0 = 0.5$، $\gamma_0 = 0.5$، $\psi_0 = 0.5$ و $\Theta_0 = 0.8$ درنظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که تغییر در شرایط اولیه پارامترهای کنترل‌کننده نقطه شروع نمودار ها را در شکل ۸ تغییرخواهد داد، همچنین تغییر نرخ یادگیری باعث تغییر نمودار ها در شکل ۸ خواهد شد، اما در عملکرد سیستم در کنترل آشوب تاثیر محسوسی نمی گذارد. شبیه‌سازی با استفاده از نرم‌افزار MATLAB بوده، و از روش رانگ‌کوتای[3] مرتبه‌ی ۴ با شرایط اولیه‌ی $(e_1, e_2) = (0.5,1)$ با گام زمانی 0.001 استفاده شده است

پاسخ زمانی حالت‌های پایدارشده سیستم در شکل ۵، پاسخ زمانی سطح لغزش و ورودی کنترلی، به‌ترتیب در شکل‌های ۶ و ۷ و پاسخ زمانی پارامترهای کنترل‌کننده در شکل ۸ نشان داده شده است. در شکل۵ مشاهده می شود که پاسخ زمانی حالت‌های سیستم بعد از مدت زمان کوتاهی به سمت صفر همگرا می شوند و با توجه به مقاوم بودن کنترل کننده، اثر نامعینی و اغتشاش در آنها بسیار ناچیز می باشد. از روی شکل‌های ۶ و ۷ مشخص است که پاسخ زمانی سطح لغزش بعد از زمان کوتاهی به صفر همگرا می شود و همچنین سیگنال کنترل نسبتا هموار بوده و دامنه مناسبی دارد. در شکل ۸ می توان مشاهده نمود که پارامترهای کنترل کننده بر اساس قوانین تطبیق هر لحظه بروز می شوند و زمانی که خطا به سمت صفر میل می کند پاسخ زمانی پارامترهای کنترل‌کننده در شکل ۸ نیز به سمت مقادیر ثابت میل میکند.

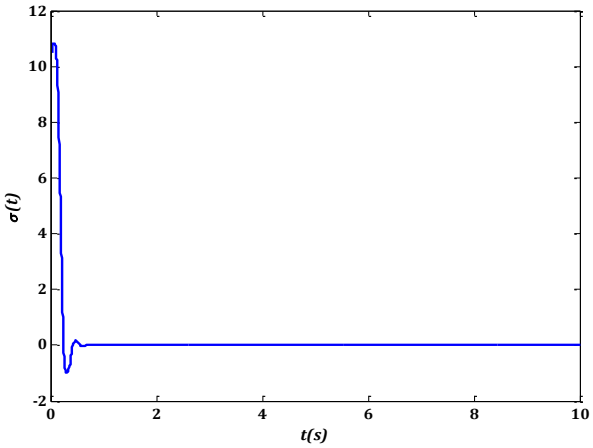


شکل ۴: تابع ورودی غیرخطی $\varphi(u_{sw}(t))$

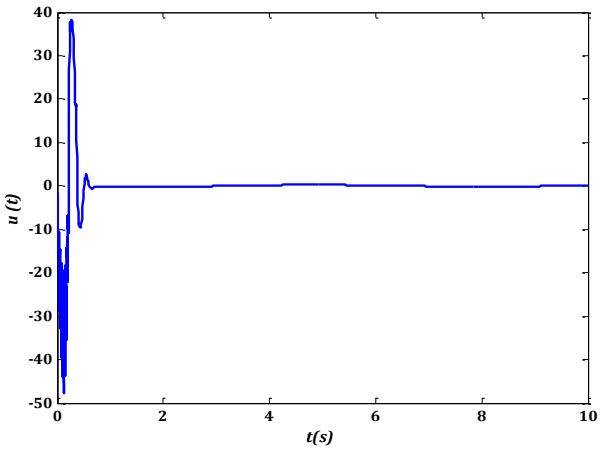
[1] Chattering
[2] Saturation
[3] Runge-Kutta



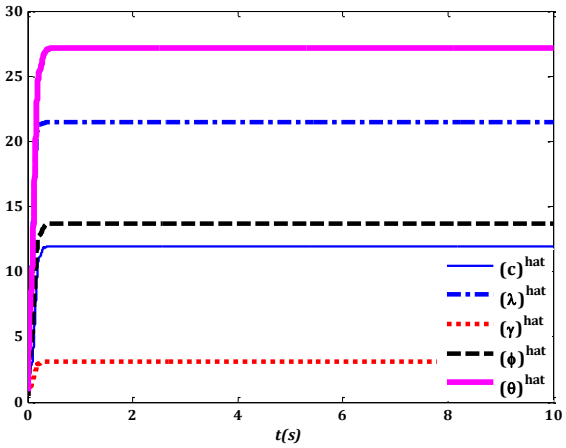
شکل ۵ : پاسخ زمانی حالت‌های پایدارشده‌ی سیستم



شکل ۶ : پاسخ زمانی سطح لغزش



شکل ۷ : پاسخ زمانی ورودی کنترلی



شکل ۸ : پاسخ زمانی پارامترهای کنترل‌کننده

برای بررسی و مقایسه بین نتایج این مقاله با سایر پژوهش های مرتبط با موضوع، مرجع [۷] انتخاب گردید، زیرا کنترل کننده پیشنهادی در آن، از خانواده کنترل کننده های مد لغزشی بوده و همچنین در ورودی کنترلی آن از عامل غیرخطی مشابه به عامل غیرخطی بکار گرفته شده در این مقاله استفاده شده است. برای مقایسه بهتر، تابع هزینه ای بصورت زیر تعریف گردید:

$$IAE = \int(|e_1(t) - e_{1\,ud}(t)| + |e_2(t) - e_{2\,ud}(t)|)dt \qquad (۱۹)$$

که در آن $e_1(t)$ و $e_2(t)$ خطا ها بدون اعمال نامعینی و اغتشاش هستند، و $e_{1\,ud}(t)$ و $e_{2\,ud}(t)$ خطاها با اعمال نامعینی و اغتشاش در سیستم هستند. نتایج در جدول زیر تنظیم شده است:

جدول ۱- عملکرد کنترل کننده ها

کنترل کننده	IAE
کنترل کننده پیشنهادی در این مقاله	6.249
کنترل کننده پیشنهادی در [۷]	8.138

نتایج مندرج در جدول ۱ نشان می دهد که روش پیشنهادی در این مقاله از مقاومت بالاتری برخوردار است.

۷- نتیجه گیری

در این مقاله،کنترل آشوب در پاسخ ارتعاشی سیستم انتقال چرخ‌دنده، مورد بررسی قرار گرفت. در ابتدا یک سطح‌لغزشی ترمینال معرفی شد و با استفاده از آن، یک کنترل‌کننده مود لغزشی ترمینال تطبیقی جدید که در مقابل نامعینی مدل، اغتشاش خارجی و عامل غیرخطی در ورودی مقاوم می‌باشد، طراحی گردید. مطابق با نتایج

به‌دست آمده مشخص شد که حالت‌های سیستم با استفاده از کنترل‌کننده پیشنهادی، پایدار شده و پس از گذشت زمان محدود به‌سمت نقطه تعادل صفر همگرا می‌شوند. سیگنال کنترلی طراحی‌شده فاقد وزوز بوده و مقدار آن در حد قابل قبولی می‌باشد، از این رو استفاده از این کنترل‌کننده به‌عنوان یک روش مناسب جهت کنترل آشوب در سیستم انتقال چرخ‌دنده پیشنهاد می گردد.

مراجع

[1] E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke, "Using chaos to direct trajectories to targets," Physical Review Letters, vol. 65, pp. 3215-3218, 1990.

[2] N. S. Pai, H. T. Yau, C. L. Kuo, "Fuzzy logic combining controller design for chaos control of a rod-type plasma torch system," Expert Systems with Applications, vol. 37, pp. 8278-8283, 2010.

[3] C. L. Kuo, C. C. Wang, N. S. Pai, "Design of variable structure controller for two different hyperchaotic systems containing nonlinear inputs," Journal of Applied Sciences, vol. 9, pp. 2635-2639, 2009.

[4] M. R. Faieghi, H. Delavari, D. Baleanu, "A note on stability of sliding mode dynamics in suppression of fractional-order chaotic systems," Computers and Mathematics with Applications, vol. 66, pp. 832-837, 2013.

[5] H. T. Yau, J. J. Yan, "Adaptive sliding mode control of a high-precision ball-screw-driven stage," Nonlinear Analysis: Real World Applications, vol. 10, pp. 1480-1489, 2009.

[6] M. R. Faieghi, H. Delavari, D. Baleanu, "A novel adaptive controller for two-degree of freedom polar robot with unknown perturbations," Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 17, pp. 1021-1030, 2012.

[7] J. Li, W. Li , Q. Li, "Sliding mode control for uncertain chaotic systems with input nonlinearity," Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, vol. 17, pp. 341–348, 2012.

[8] Y. M. Lei, W. Xu, J. W. Shen, T. Fang, "Global synchronization of two parametrically excited systems using active control," Chaos, Solitons and Fractals, vol. 28, pp. 428-436, 2006.

[9] J. P. Cai, X. F. Wu, S. H. Chen, "Synchronization criteria for non-autonomous chaotic systems via sinusoidal state error feedback control," Physica Scripta, vol. 75, pp. 379–387, 2007.

[10] A. Keymasi Khalaji, S. A. A. Moosavian, "Design and implementation of a fuzzy sliding mode control law for a wheeled robot towing a trailer," Modares Mechanical Engineering, vol. 14, pp. 81-88, 2014. (In Persian)

[11] Z. M. Ge, H. S. Yang, H. H. Chen, H. K. Chen, "Regular and chaotic dynamics of a rotational machine with a centrifugal governor," International Journal of Engineering Science, vol. 37, pp. 921-943, 1999.

[12] S. Ramezani, S. M. Rezaei, M. Zareinejad, K. Baghestan, "Control of pneumatic servo system based on simultaneous pressure observing on both sides of the cylinder by high-gain observer," Modares Mechanical Engineering, vol. 15, pp. 1-10, 2015. (In Persian)

[13] H. Pan, W. Sun, "Finite-time stabilization for vehicle active suspension systems with hard constraints," IEEE transactions on intelligent transportation systems, pp. 1-10, 2015.

[14] A. Shiri, "Robust Sliding Mode Control of Electromagnetic Suspension System with Parameter Uncertainty," Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology, vol. 4, pp. 1677-1683, 2012.

[15] S. Bhat, D. Bernstein, "Finite-time stability of continuous autonomous systems," SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 38, pp. 751-766, 2000.

[16] M. Byrtus, V. Zeman, "On modeling and vibration of gear drives influenced by nonlinear couplings," Mechanism and Machine Theory, vol. 46, 375-397, 2011.

[17] C. W. Chang-Jian, "Strong nonlinearity analysis for gear-bearing system under nonlinear suspension-bifurcation and chaos," Nonlinear Analysis: Real World Applications, vol. 11, pp. 1760-1774, 2010.

[18] C. W. Chang-Jian, H. C. Hsu, "Chaotic responses on gear pair system equipped with journal bearings under turbulent flow," Applied Mathematical Modelling, vol. 36, pp. 2600-2613, 2012.

[19] S. L. T. De Souza, I. L. Caldas, R. L. Viana, J. M. Balthazar, "Sudden changes in chaotic attractors and transient basins in a model for rattling in gearboxes," Chaos, Solitons and Fractals, vol. 21, pp. 763-772, 2004.

[20] J. Wang, R. Li, X. Peng, "Survey of nonlinear vibration of gear transmission systems," ASME Journal, vol. 56, pp. 309-329, 2003.

[21] J. Wang, J. Zheng, A. Yang, "An Analytical Study of Bifurcation and Chaos in a Spur Gear Pair with Sliding Friction," Procedia Engineering, vol. 31, pp. 563 – 570, 2012.

[22] A. Farshidianfar, A. Saghafi, "Global bifurcation and chaos analysis in nonlinear vibration of spur gear systems," Nonlinear Dyn, vol. 75, pp. 783–806, 2014.

[23] C.-W. Chang-Jian, "Strong nonlinearity analysis for gear-bearing system under nonlinear Suspension bifurcation and chaos," Nonlinear Analysis: Real World Applications, vol. 11, pp. 1760–1774, 2010.

[24] C.-W. Chang-Jian, S.-M.g Chang, "Bifurcation and chaos analysis of spur gear pair with and without nonlinear suspension," Nonlinear Analysis: Real World Applications, vol. 12, pp. 979–989, 2011.

[25] A. Farshidianfar, A. Saghafi, "Identification and control of chaos in nonlinear gear dynamic systems using Melnikov analysis," Physics Letters A, vol. 378, pp. 3457–3463, 2014.

[26] A. Saghafi, A. Farshidianfar, "An analytical study of controlling chaotic dynamics in a spur gear system," Mechanism and Machine Theory, vol. 96, pp. 179–191, 2016.

[27] W. Jingyue, G. Lixin, W. Haotian, "Analysis of Bifurcation and Nonlinear Control for Chaos in Gear Transmission System," Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology, vol. 6, pp. 1818-1824, 2013.

[28] A. Saghafi, A. Farshidianfar, "Bifurcation and chaos control in a gear transmission system," Modares Mechanical Engineering, vol. 14, pp. 61-68, 2015. (In Persian)

[29] Zh. Shihua, S. Guiqiu, R. Zhaohui, and W. Bangchun, "Nonlinear Dynamic Analysis of Coupled Gear-Rotor-Bearing System with the Effect of Internal and External Excitations," Chinese journal of mechanical engineering, vol. 124, pp. 1-12, 2015.

[30] S. Dadras, H. R. Momeni, "Fractional terminal sliding mode control design for a class of dynamical systems with uncertainty," Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 17, pp. 367-377, 2012.

[31] L. Yang, J. Y. Yang, "Robust finite-time convergence of chaotic systems via adaptive terminal sliding mode scheme," Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 16, pp. 2405-2413, 2011.

[32] M. Chen, Q. X. Wu, R. X. Cui, "Terminal sliding mode tracking control for a class of SISO uncertain nonlinear systems," ISA Transactions, vol. 52, pp. 198-206, 2013.

[33] H. Wang, Z. Han, Q. Xie, W. Zhang, "Finite-time chaos control via nonsingular terminal sliding mode control," ISA Transactions, vol. 14, pp. 2728–2733, 2009.

مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۱۰، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۵، صفحه ۶۸-۵۵

طراحی فیلتر کالمن غیرخطی برای سیستمهای مرتبه کسری تصادفی غیرخطی همراه با نویز اندازه‌گیری با توزیع استیودنت تی

سید حامد ترابی[۱]، ناصر پریز[۲]، علی کریم‌پور[۳]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه فردوسی مشهد، hamed.torabi@yahoo.com

[۲] استاد، گروه کنترل، دانشگاه فردوسی مشهد، n-pariz@um.ac.ir

[۳] دانشیار، گروه کنترل، دانشگاه فردوسی مشهد، Karimpor@um.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۹/۸، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۵/۱۱/۱۰)

چکیده: در این مقاله یک فیلتر کالمن غیرخطی برای سیستمهای مرتبه کسری غیرخطی تصادفی زمانیکه نویز اندازه‌گیری دارای توزیع استیودنت تی[۱] ارائه می‌گردد. مدلسازی نویز سیستم و اندازه‌گیری، برای مسائل ردیابی اهداف[۲]، غالبا بصورت نویز گوسی جمع شونده انجام شده است. اما مدلسازی نویز با توزیع گوسی نسبت به داده‌های با مقادیر دورافتاده[۳] مقاوم نمی‌باشد. به عبارت دیگر مدلسازی نویز سیستم با توزیع گوسی در مقایسه با توزیع استیودنت تی نسبت به نویزهایی با مقادیر دورافتاده‌ی زیاد، دارای قوام[۴] کمتری می‌باشد. یعنی اگر سیستم ردیابی، تحت تاثیر نویزهایی که دارای مقادیر دورافتاده‌ی زیادی هستند قرار گیرد، مدلسازی این نوع نویزها با توزیع گوسی ممکن است منجر به خطای ردیابی بزرگ و یا واگرایی فیلتر در مسایل تخمین و ردیابی حالت گردد. در این مقاله در ابتدا، سیستمهای مرتبه کسری غیرخطی تصادفی[۵] تعریف می‌گردد. پس از آن با مقایسه عملکرد دو توزیع گوسی و استیودنت تی در مدلسازی نویزهای دارای مقادیر دورافتاده، به طراحی فیلتر کالمن غیرخطی برای سیستمهای مرتبه کسری با نویز اندازه‌گیری استیودنت تی با استفاده از روش حل استنباط بیزین تغییراتی[۶] پرداخته می‌شود. نهایتاً با ارائه‌ی دو مثال و نتایج شبیه‌سازی آنها، عملکرد فیلتر طراحی شده در این مقاله با یک فیلتر کالمن توسعه یافته مرتبه کسری در حضور نویزهای گوسی و استیودنت تی مقایسه گردیده که نتایج شبیه‌سازی، عملکرد مناسب فیلتر طراحی شده را در تخمین متغیرهای حالت سیستمهای مرتبه کسری غیرخطی تصادفی نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: سیستمهای مرتبه کسری غیرخطی تصادفی، توزیع استیودنت تی، تخمینگر حالت، استنباط بیزین تغییراتی.

Nonlinear Kalman Filter Design for the Fractional Order Nonlinear Stochastic Systems with Student's t measurement Noise

Hamed Torabi, Naser Pariz, Ali Karimpour

Abstract: This paper presents a fractional order Kalman filter for the stochastic nonlinear fractional order systems where the measurement noise is assumed to have Student's t distribution. Modeling of the system and measurement noises in the state space representation, for target tracking problems, often carried out by additive Gaussian noise, but Gaussian distribution is not enough robust to the outliers, in the other words, Gaussian distribution has much less robustness against

[1] Student's t
[2] Target tracking
[3] Outliers
[4] Robustness
[5] Fractional order systems
[6] Variational Bayesian inference

outliers than Student's t distribution, so if the tracking system affected by noises that have outliers, modeling of theses noises by the Gaussian distribution, may cause large estimation error or divergence of filter in the filtering and estimation problems. In this paper, after defining the stochastic fractional order systems, by comparing the performance of two Student's t and Gaussian distributions in the modeling of noises that have outliers, try to design a nonlinear Kalman filter for fractional order systems using variational Bayesian inference method. Finally by comparing the simulation results of proposed filter in this paper and a fractional extended Kalman filer in the presence of Gaussian and Student's t noises, the effectiveness of the proposed filter in estimation of states of the fractional order systems is demonestrated.

Keywords: Fractional order nonlinear systems, Student's t distribution, State estimation and Kalman filtering, Variational Bayesian inference

.

۱- مقدمه

امروزه از امکانات نهفته‌ی موجود در حسابان کسری[1] به منظور مدلسازی دقیق‌تر پدیده‌های فیزیکی، ارائه مدلهای شبه فضای حالتی مرتبه کسری، بهبود کارایی تخمینگرهای حالت و همچنین طراحی کنترل کننده‌های مرتبه کسری استفاده‌ی فراوان برده می‌شود. موارد ذکر شده، نمونه‌هایی از دلایل توجه روزافزون محققین به این مبحث ریاضیاتی می‌باشد. سیستم‌های مرتبه کسری[2] به دلیل آنکه پارامترهای بیشتری نسبت به سیستم‌های مرتبه صحیح (سیستمهای معمولی) دارند از تنوع رفتاری و دینامیکی بالاتری برخوردار هستند، در واقع محاسبات مرتبه کسری حالت تعمیم یافته محاسبات مرتبه صحیح می‌باشد که در دهه‌ی گذشته توجه روز افزونی یافته است. امروزه بسیاری از سیستمهای فیزیکی موجود به خوبی با معادلات دیفرانسیلی مرتبه کسری مدلسازی و یا کنترل شده‌اند. به طور خاص سیستمهایی که دارای حافظه دراز مدت می‌باشند، یعنی سیستمهایی که حالت فعلی آن به مقادیر حالت در چندین لحظه‌ی قبل وابسته است، با سیستمهای مرتبه کسری، بهتر از مرتبه صحیح مدلسازی می‌شوند [۱]، بعنوان مثال، سیستمهای انتقال حرارت و انتشار جرم [۲]، خطوط انتقال انرژی الکتریکی [۳]، پروسه‌های الکترومغناطیسی [۴] و پلاریزاسیون دی‌الکتریک توسط سیستمهای مرتبه کسری با دقت بالاتری مدلسازی شده‌اند. سیستمهای دینامیکی به دو دسته مرتبه صحیح[3] (سیستمهای متداول مرتبه معمولی) و سیستمهای مرتبه کسری قابل تقسیم‌بندی می‌باشند، از طرفی سیستمهای مرتبه کسری نیز خود به دو دسته‌ی سیستمهای مرتبه کسری تناسبی[4] و غیر تناسبی افراز می‌گردند. می‌دانیم معادله یک سیستم مرتبه کسری به صورت زیر ارائه می شود.

$$\begin{aligned} a_n y^{\alpha_n} + a_{n-1} y^{\alpha_{n-1}} + \ldots + a_0 y^{\alpha_0} \\ = b_m u^{\beta_m} + b_{m-1} u^{\beta_{m-1}} + \ldots + b_0 u^{\beta_0} \end{aligned} \quad (۱)$$

که u سیگنال ورودی به سیستم و y سیگنال خروجی سیستم است. همچنین α و β مرتبه کسری که می‌تواند هر عدد حقیقی $\mathbb{R}$ باشد. اگر مرتبه سیستم بصورت $\alpha_k, \beta_k = k\sigma$ باشد (k عدد صحیح) سیستم را مرتبه کسری تناسبی می‌نامند و چنانچه $\sigma \in \mathbb{R}$ باشد سیستم را مرتبه کسری تناسبی گویا[5] می‌نامند در غیر اینصورت سیستم مرتبه کسری تناسبی غیرگویا[6] می‌نامند.

۱-۱ تعریف مشتق و انتگرال مرتبه کسری

اپراتور ${}_aD_t^{\alpha}$ نمایشگر اپراتور دیفرانسیلی- انتگرالی[7] مرتبه کسری می‌باشد اگر $\alpha > 0$ اپراتور مرتبه کسری مشتقی (تفاضلی) بوده و چنانچه $\alpha < 0$ نشان دهنده‌ی اپراتور مرتبه کسری انتگرالی می‌باشد [۵]. بنابراین می‌توان نوشت:

$${}_aD_t^{\alpha} = \begin{cases} \dfrac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} & ,\alpha > 0 \\ 1 & ,\alpha = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha} & ,\alpha < 0 \end{cases} \quad (۲)$$

[1] Fractional calculus
[2] Fractional order
[3] Integer order
[4] Commensurate
[5] Rational
[6] Irrational
[7] Integro-differential operator

برای مشتق و انتگرال مرتبه کسری در مراجع مختلف سه تعریف متفاوت ارائه شده است [۶] که عبارتند از:

الف- تعریف ریمان- لیوویل[۱]

$$ {}^{RL}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_{a}^{t}\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau \qquad (۳) $$
$$ n-1 \le \alpha < n $$

که n یک عدد صحیح و α مرتبه مشتق مرتبه کسری است و تابع گاما برابر است با:

$$ \Gamma(m) = \int_{0}^{\infty} t^{m-1}e^{-t}dt $$

چنانچه m یک عدد صحیح باشد آنگاه تابع گاما برابر است با $\Gamma(m) = (m-1)!$ که همان تابع فاکتوریل خواهد بود.

ب- تعریف گرانوالد- لیتنیکوف[۲]

$$ {}^{GL}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t) = \lim \frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]}(-1)^{j}\binom{\alpha}{j}f(t-jh) \qquad (۴) $$
$$ h \to 0 \ , \ \left[\frac{t-a}{h}\right] \to \text{int}eger $$

$$ \binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)} $$

که α یک عدد حقیقی مثبت است.

ج- تعریف کاپوتو[۳]

$$ {}^{C}_{a}D^{\alpha}_{t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}\frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau \qquad (۵) $$
$$ n-1 \le \alpha < n $$

در مشتق ریمان لیوویل، بلوک اول انتگرالگیر و بلوک دوم مشتقگیر است، اما در تعریف کاپوتو، ابتدا مشتق گیری با مرتبه صحیح انجام گرفته و سپس انتگرال کسری بین صفر و یک گرفته می‌شود. در این مقاله از تعریف گرانوالد- لیتنیکوف استفاده می‌شود. مساله تخمین حالت و طراحی فیلتر برای سیستمهای مرتبه کسری اولین بار در مرجع [۷] ارائه گردید. در این مرجع به طراحی فیلتر کالمن مرتبه کسری برای سیستمهای خطی و غیرخطی مرتبه کسری پرداخته شده است. سپس در [۸] با استفاده از روش بردار الحاقی[۴] به مساله فیلترینگ و هموارسازی حالت برای این سیستمها در حضور نویز سفید پرداخته شده است و نتایج تخمین حالت را بهبود بخشیده است، در [9] تخمین حالت در حضور نویز رنگی مرتبه کسری ارائه شده است. در مرجع [۱۰] به مساله طراحی تخمینگر زمانیکه نویز سیستم و نویز اندازه‌گیری وابسته بهم می‌باشند پرداخته شده است. در [۱۱] مساله طراحی تخمینگر در سیستمهای مرتبه کسری گسسته در حضور نویز گوسی به روش تصویرسازی متعامد انجام شده است. در مرجع [۱۲] طراحی فیلتر کالمن مرتبه کسری برای سیستمهای مرتبه کسری با سیگنال اندازه‌گیری دارای تاخیر ارائه شده است در این مساله d گام تاخیر در مساله فیلترینگ را به مساله پیش‌بینی d گام به جلو تبدیل شده و مساله پیش‌بینی حالت برای سیستم مرتبه کسری حل شده است. در [۲۲] به صورت جامع به بررسی تخمینگرها و فیلترهای مختلف در دینامیکهای خطی، غیرخطی و آشوبی و همچنین پروسه‌های صنعتی پرداخته شده است. از طرفی کارهای اولیه در خصوص نویزهای غیرگوسی با استفاده از روش جمع گوسی و یا ترکیب گوسی تابع چگالی پسین غیرگوسی بوده است اشکال این روشهای تقریب که بسیار هم متداول است آن است که فقط در مسایل یک بعدی قابل استفاده است [۱۳]. هایکین در [۱۴] با استفاده از روشهای حل عددی، فیلتری برای مدلهای غیرخطی و نویز گوسی ارائه کرده است هرچند فیلتر طراحی شده برای سایر توزیعها کاربردی هست اما مستقیما راه حلی برای توزیع تی ارائه نشده است، در [۱۵] با استفاده از ترکیب چندین توزیع تی شکل، به تقریب تابع چگالی اصلی با توزیع تی پرداخته شده است که روش حل، یک روش تقریبی است. طراحی فیلتر حالت برای سیستمهای مرتبه صحیح خطی در حضور داده‌های نویزی دورافتاده در [۱۶] با استفاده از یک روش بهینه‌سازی یعنی تنظیم l_1 انجام شده است در این مرجع نویز پروسه خوش رفتار[۵] فرض شده است که این فرض در پروژه‌های نظامی مانند ردیابی اهداف[۶] با مانور بالا[۷] به راحتی نقض می‌گردد. در [۱۷] با استفاده از یک روش محاسباتی ابتکاری به حل انتگرالهای بیزین با توزیع تی پرداخته شده است. در این مقاله با استفاده از روش حل استنباط بیزین تغییراتی[۸] [۱۸] به حل مساله تخمین حالت و طراحی تخمینگر مقاوم برای سیستمهای غیرخطی مرتبه کسری تصادفی در حضور نویز اندازه‌گیری با توزیع استیودنت تی پرداخته شده است. برای این منظور ابتدا در بخش دوم مقاله، مدل فضای حالت سیستمهای غیرخطی مرتبه کسری تصادفی ارائه می‌گردد. سپس توزیع گوسی را با توزیع تی مقایسه کرده، کارایی و قدرت توزیع تی برای

[1] Riemann–Liouville
[2] Grunwald-Letnikov
[3] Caputo
[4] Augmented vector
[5] Well behaved
[6] Target tracking
[7] High maneuver
[8] Variational Bayesian inference

مدل کردن نویزهای دنباله‌دار[1] (نویزهایی با مقادیر دورافتاده‌ی زیاد) را نمایش می‌دهیم، پس از آن الگوریتم استنباط بیزین تغییراتی توضیح داده می‌شود و کاربرد آن در تخمین پارامترهای توزیع از روی یک سری داده‌های نویزدار تشریح می‌گردد. در بخش چهارم مقاله، تخمینگر مقاوم مرتبه کسری برای سیستمهای مرتبه کسری غیرخطی تصادفی در حضور نویزهای دنباله‌دار ارائه می‌گردد. نهایتاً با ارائه‌ی دو مثال، کارایی و قدرت فیلتر طراحی شده با فیلتر کالمن توسعه یافته مرتبه کسری مقایسه و نتایج شبیه‌سازی نشان داده می‌شود.

۲- مدلسازی سیستم‌های مرتبه کسری

مدل فضای حالت گسسته زمان غیرخطی مرتبه کسری با معادلات (۶) ارائه می‌شود [۷].

$$\begin{aligned} \Delta^{\alpha} x_{k+1} &= f\left(x_k, u_k\right) + \omega_k \\ x_{k+1} &= \Delta^{\alpha} x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \alpha_j x_{k+1-j} \\ y_k &= h\left(x_k\right) + v_k \end{aligned} \qquad (۶)$$

که f و h توابعی غیرخطی از متغیرهای حالت و ورودی می‌باشند و مرتبه کسری α_j برابر است با:

$$\alpha_j = diag\left[\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ j \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha_N \\ j \end{pmatrix}\right]$$

$$\Delta^{\alpha} x_{k+1} = \begin{bmatrix} \Delta^{\alpha_1} x_{1,k+1} \\ \vdots \\ \Delta^{\alpha_N} x_{N,k+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ j \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha - j)!} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha - j + 1)}$$

که $\alpha \in R$ مرتبه کسری برابر است با $\left[\alpha_1, \ldots, \alpha_N\right]$ ، N تعداد معادلات سیستم، x_k بردار حالت، y_k بردار خروجی، u_k بردار ورودی، ω_k نویز سیستم و v_k نویز اندازه گیری می‌باشد که مستقل از یکدیگر هستند.

دو شرط (۷) و (۸) برای تخمین حالت در سیستم‌های مرتبه کسری در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} &E\left[x_{k-j+1} \mid Z_k\right] \cong E\left[x_{k-j+1} \mid Z_{k-j+1}\right] \\ &j = 1 \ldots (k+1) \end{aligned} \qquad (۷)$$

که $Z_k = \{y_0, y_1, \ldots, y_k, u_0, u_1, \ldots, u_k\}$ همان داده‌های اندازه‌گیری شده تا لحظه k می‌باشد. $E\left[x_{k-j+1} \mid Z_k\right]$ به معنای تخمین حالت در لحظه k-j+1 زمانی‌که داده‌های اندازه‌گیری تا لحظه k فراهم باشد که اصطلاحا به آن هموارسازی[2] گفته می‌شود. در حالی که $E\left[x_{k-j+1} \mid Z_{k-j+1}\right]$ به معنای تخمین حالت در لحظه k-j+1 زمانی که داده‌های اندازه‌گیری تا لحظه k-j+1 فراهم باشد که اصطلاحا فیلترینگ[3] نامیده می‌شود. در واقع این شرط می‌گوید تخمین حالت در لحظه‌ی k-j+1 ، وقتی که داده‌های اندازه‌گیری تا لحظه k فراهم باشد با تخمین در همین لحظه وقتی داده‌های اندازه‌گیری تا لحظه‌ی k-j+1 فراهم است تقریبا برابر می‌باشد. به عبارت دیگر، از مقداری از داده‌ها از لحظه‌ی k-j+1 تا لحظه k در تخمین صرف نظر شده است.

$$\begin{aligned} &E\left[\left(x_k - \hat{x}_k\right)\left(x_j - \hat{x}_j\right)^T\right] = 0 \\ &k \neq j \end{aligned} \qquad (۸)$$

این شرط یعنی وابستگی[4] بین لحظات فعلی و گذشته وجود ندارد.

۳- مفاهیم اولیه معیار کولبک- لیبلر[5] ، الگوریتم استنباط بیزین تغییراتی و توزیع استیودنت تی

در این بخش از مقاله به توضیح کامل معیار کولبک-لیبلر و دلیل استفاده از آن، توضیح تفسیری استنباط بیزین تغییراتی و توزیع تی و همچنین مقایسه توزیع تی با توزیع گوسی پرداخته می‌شود.

۳-۱ معیار واگرایی کولبک- لیبلر KL

اگر $p(x)$ و $q(x)$ دو تابع چگالی با توزیع مختلف باشند، اصل کولبک- لیبلر به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$KL(p \| q) = -\int p(x) \ln\left\{\frac{q(x)}{p(x)}\right\} dx \qquad (۹)$$

این معیار دارای دو خاصیت زیر است:

۱- $KL(p \| q) \neq KL(q \| p)$ یعنی خاصیت تقارنی ندارد.

[1] Heavy tailed

[2] Smoothing
[3] Filtering
[4] Correlation
[5] Kullback-Leibler divergence

۲- $KL(p\,\|\,q)\geq 0$ و تساوی فقط به ازای $p(x)=q(x)$ روی می‌دهد.

اگر داده‌های x_n از تابع چگالی نامشخص $p(x)$ تولید شده باشند چنانچه بخواهیم این توزیع را با استفاده از یک توزیع پارامتریک $q(x\mid\theta)$ و داده‌های x_n تقریب بزنیم، یک راه حل برای تخمین θ و در نتیجه بدست آوردن تابع چگالی $q(x\mid\theta)$، می‌نیمم‌سازی اصل واگرایی کولبک-لیبلر بین دو توزیع $p(x)$ و $q(x\mid\theta)$ با توجه به پارامتر θ می‌باشد. (به عنوان مثال پارامتر θ برای توزیع گوسی پارامترهای متوسط و واریانس توزیع می باشد) اگر یک مجموعه متناهی نقاط داده از تابع چگالی $p(x)$ به صورت x_n و به ازای $n=1,\ldots,N$ به صورت تصادفی تولید شده باشند، امید ریاضی تابع غیرخطی $f(x)$ به صورت رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$E[f(x)]\approx\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(x_n) \qquad (۱۰)$$

با توجه به رابطه فوق و همچنین اصل واگرایی کولبک-لیبلر خواهیم داشت:

$$KL(p\,\|\,q)\approx \sum_{n=1}^{N}\{-\ln q(x_n\mid\theta)+\ln p(x_n)\} \qquad (۱۱)$$

در رابطه (۱۱) ترم دوم مستقل از θ است و ترم اول منفی تابع لگاریتمی درست‌نمایی می‌باشد بنابراین می‌توان گفت مینیمم‌سازی اصل واگرایی کولبک-لیبلر معادل ماگزیمم سازی تابع درست‌نمایی می‌باشد.

۳-۲ حساب تغییرات[1] و استنباط بیزین تغییراتی

در روش بیزین تغییراتی، می‌توان تابع چگالی پسین را مستقیما بوسیله انتگرال‌گیری به جای نمونه‌برداری و حل عددی، تخمین زد و برای مسایل چند بعدی هم قابل استفاده است. اگر داده‌های تصادفی x_n از یک توزیع نامشخص $p(x)$ در دسترس باشد، الگوریتم بیزین تغییراتی با استفاده از اصل کولبک-لیبلر، تابع چگالی پارامتریک $p(x\mid\theta)$ را اینگونه محاسبه می‌کند:

$$\begin{aligned}\ln p(x)&=\ln\frac{p(x,\theta)}{p(\theta\mid x)}\\&=\int q(\theta)\ln\frac{p(x,\theta)}{p(\theta\mid x)}d\theta\\&=\int q(\theta)\ln\frac{p(x,\theta)}{p(\theta\mid x)}\frac{q(\theta)}{q(\theta)}d\theta\\&=\int q(\theta)\left(\ln\frac{q(\theta)}{p(\theta\mid x)}+\ln\frac{p(x,\theta)}{q(\theta)}\right)d\theta\\&=\int q(\theta)\ln\frac{q(\theta)}{p(\theta\mid x)}d\theta\\&\quad+\int q(\theta)\ln\frac{p(x,\theta)}{q(\theta)}d\theta\\&=KL(q\,\|\,p)+F(q,x)\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

که ترم اول واگرایی کالبک- لیبلر بین $q(x)$ و $p(x)$ و ترم دوم یعنی $F(q,x)$ انرژی آزاد[2] نامیده می‌شود. مینیمم‌سازی $KL(q\,\|\,p)$ معادل ماگزیمم‌سازی $F(q,x)$ می‌باشد، ترم $F(q,x)$ را بصورت زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}F(q,x)&=\int q(\theta)\ln\frac{p(x,\theta)}{q(\theta)}d\theta\\&=\int q(\theta)\ln p(x,\theta)d\theta-\int q(\theta)\ln q(\theta)d\theta\\&=\langle\ln p(x,\theta)\rangle_q+H[q]\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

که ترم $\langle\ln p(x,\theta)\rangle_q$ امید ریاضی تابع لگاریتم چگالی توام و $q(\theta)$ تابع چگالی پارامتر θ است. اگر پارامتر $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)$ باشد با فرض مستقل بودن پارامترها، می‌توان داشت:

$$q(\theta)=\prod_{i=1}^{n}q_i(\theta_i) \qquad (۱۴)$$

با جایگذاری رابطه (۱۴) در (۱۳) خواهیم داشت:

[1] Variational calculus

[2] Free energy

$$
\begin{aligned}
F(q,x) &= \int q(\theta)\ln\frac{p(x,\theta)}{q(\theta)}d\theta \\
&= \int \prod_{i=1}^{n} q_i(\theta_i)\times\left(\ln p(x,\theta)-\sum_{i=1}^{n}\ln q_i\right)d\theta \\
&= \int q_j \prod_{\backslash j} q_i \times\left(\ln p(x,\theta)-\ln q_j\right)d\theta \\
&\quad -\int q_j \prod_{\backslash j} q_i \sum_{\backslash j}\ln q_i d\theta \\
&= \int q_j\left(\int \prod_{\backslash j} q_i \ln p(x,\theta)d\theta_{\backslash j}-\ln q_j\right)d\theta_j \\
&\quad -\int q_j \int \prod_{\backslash j} q_i \ln \prod_{\backslash j} q_i d\theta_{\backslash j} d\theta_j \\
&= \int q_j\left(\left\langle \ln p(x,\theta)\right\rangle_{q\backslash j}-\ln q_j\right)d\theta_j + c \\
&= \int q_j \ln\frac{\exp\left(\left\langle \ln p(x,\theta)\right\rangle_{q\backslash j}\right)}{\ln q_j}d\theta_j + c \\
&= -KL\left[q_j \,\|\, \exp\left(\left\langle \ln p(x,\theta)\right\rangle_{q\backslash j}\right)\right]+c
\end{aligned}
$$

که $\prod_{\backslash j} q_i$ به معنی حاصلضرب همه عوامل تابع چگالی به جز عامل j ام است و c پارامتر ثابت است. مطابق محاسبات فوق رابطه زیر بدست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
&F(q,x) = \\
&-KL\left[q_j \,\|\, \exp\left(\left\langle \ln p(x,\theta)\right\rangle_{q\backslash j}\right)\right]+c
\end{aligned}
\tag{۱۵}
$$

اگر تابع چگالی $q_{\backslash j}=q(\theta_{\backslash j})$ مشخص در نظر گرفته شود تقریب پسین $q_j=q(\theta_j)$ که $F(x,\theta)$ را ماگزیمم می‌سازد توسط رابطه زیر بدست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
q_j^* &= \arg\max_{q_j} F(x,\theta) \\
&= \frac{1}{c}\left(\exp\left(\left\langle \ln p(x,\theta)\right\rangle_{q\backslash j}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{۱۶}
$$

در نتیجه لگاریتم پاسخ برابر است با:

$$
\begin{aligned}
\ln q_j^* &= \left(\left\langle \ln p(x,\theta)\right\rangle_{q\backslash j}\right)-\ln c \\
&= \left(\left\langle \ln p(x,\theta)\right\rangle_{q\backslash j}\right)+C
\end{aligned}
$$

که جمله اول در سمت راست رابطه تابعی از θ_j یعنی $I(\theta_j)$ می‌باشد. بنابراین استنباط بیزین تغییراتی بصورت زیر انجام می‌شود.

الف- همه تابع چگالی‌های $q(\theta_i)$ را با مقادیر اولیه[1] مقداردهی کنید.

ب- با ایجاد یک حلقه تکراری، بعد از محاسبه هر یک از عاملهای $q(\theta_i)$ و با جایگذاری آن عامل در (۱۶) عامل دیگری را بدست آورده و حلقه را تا رسیدن همگرایی ادامه دهید.

ج- همگرایی تضمین شده است زیرا $F(x,\theta)$ نسبت به هریک از عوامل $q(\theta_i)$ محدب[2] است.

۳-۳ توزیع استیودنت تی

متغیر تصادفی x دارای توزیع گاما به صورت $Gam(\alpha,\beta)$ می‌باشد. این توزیع دارای دو پارامتر α و β می‌باشد که α پارامتر قالب و β پارامتر نرخ نامیده شده که دارای تابع چگالی به صورت زیر می‌باشد:

$$
Gam(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\exp(-\beta x), & x>0\\ 0, & otherwise\end{cases}
$$

که در رابطه فوق توزیع فوق تابع گاما به صورت $\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt$ می‌باشد. متوسط و واریانس متغیر x با توزیع $Gam(\alpha,\beta)$ برابر با $E[x]=\frac{\alpha}{\beta}$ و $\mathrm{var}[x]=\frac{\alpha}{\beta^2}$ می‌باشد. حال اگر $y\in R^d$ یک بردار با توزیع گوسی با متوسط صفر و کواریانس Σ بصورت $N(0,\Sigma)$ و $\omega>0$ یک متغیر تصادفی با توزیع گاما بصورت $Gam(\frac{\vartheta}{2},\frac{\vartheta}{2})$ باشد آنگاه متغیر تصادفی x که با رابطه $x=\mu+\omega^{\frac{-1}{2}}y$ توصیف می‌شود، دارای توزیع تی به صورت $St(\mu,\Sigma,\vartheta)$ می‌باشد که μ متوسط توزیع و ماتریس دقت Σ و درجه آزادی ϑ می‌باشد [۱۹].

$$
\begin{aligned}
&St(x;\mu,\Sigma,\vartheta) = \\
&\int_0^{\infty} N(x;\mu,(\eta\Sigma)^{-1})Gam(\eta;\frac{\vartheta}{2},\frac{\vartheta}{2})d\eta
\end{aligned}
\tag{۱۷}
$$

[1] Prior distribution
[2] Convex

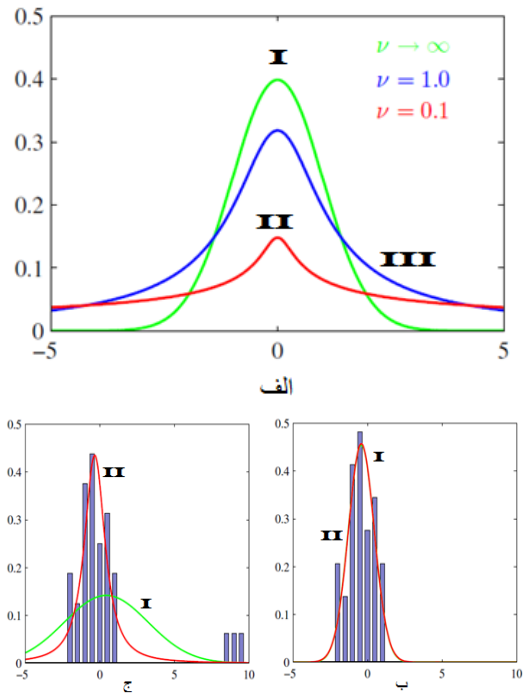
بنابراین $p(x)$ با توزیع تی دارای تابع چگالی به صورت زیر می‌باشد.

$$p(x) = \frac{\Gamma(\frac{\vartheta+d}{2})}{\Gamma(\frac{\vartheta}{2})}\frac{1}{(\vartheta\pi)^{\frac{d}{2}}}\frac{1}{\sqrt{\det(\Sigma)}}(1+\frac{\Delta^2}{\vartheta})^{-\frac{\vartheta+d}{2}} \quad (۱۸)$$

که $\Delta^2 = (x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)$ می باشد. متوسط و واریانس متغیر X با توزیع تی عبارت است از:

$$E[x] = \mu, \mathrm{var}[x] = \Sigma\frac{\vartheta}{\vartheta-2}$$

اگر درجه آزادی[1] ϑ به سمت بینهایت میل کند توزیع $st(\mu,\Sigma,\vartheta)$ به توزیع گوسی بصورت $N(\mu,\Sigma^{-1})$ میل می‌کند. به ازای $\vartheta = 1$ توزیع $st(\mu,\Sigma,\vartheta)$ به توزیع کشی تبدیل می‌گردد، در واقع توزیع تی با جمع بینهایت تعداد توزیع گوسی که دارای میانگین یکسان اما با واریانس های مختلف می‌باشند تولید می‌شود. این موضوع بصورت ترکیب بینهایت توزیع گوسی بیان می‌گردد که نتیجه توزیعی است مشابه توزیع گوسی ولی با دنباله‌ای کشیده‌تر[2] از گوسی مطابق شکل ۱ می‌باشد. این خاصیت منجر به افزودن خاصیت مقاوم بودن[3] به توزیع می‌شود که به معنی آن است که توزیع تی نسبت به توزیع گوسی به مقادیر و یا داده‌های دور افتاده[4] حساسیت کمتری دارد. در شکل ۱-الف نمودار I نشان دهنده توزیع تی به ازای درجه آزادی بی نهایت بوده که همان توزیع گوسی را نشان می‌دهد که دارای بیشترین ارتفاع و کمترین عرض می‌باشد. نمودارهای II و III (در شکل ۱- الف) توزیع تی را به ازای درجات آزادی ۱ و ۰/۱ نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشخص است نمودارهای II و III نسبت به I (یعنی توزیع تی نسبت به توزیع گوسی) کشیده‌تر یا دارای دنباله بزرگتری می‌باشند. به عبارت دیگر توزیع تی دارای دنباله بزرگتر و برای مدلسازی نویزهای دنباله‌دار مناسبتر است. در شکل ۱- ب با استفاده از تعداد محدودی داده (نمودارهای میله ای III) و بکارگیری روش ماگزیمم درستنمایی[5] به مقایسه قدرت دو توزیع گوسی و تی در مدلسازی این داده‌ها پرداخته شده است. در شکل ۱- ب داده‌ها در بازه‌ی [-2,1] قرار داشته و داده‌ی دورافتاده هم وجود ندارد. همانطور که از شکل ۱- ب مشخص است هر دو توزیع یعنی توزیع گوسی و توزیع تی (نمودار I و II) به خوبی و با دقت بالا داده‌ها را مدل می‌کنند و خطایی وجود ندارد. اما در شکل ۱- ج که داده‌های دورافتاده نیز وجود دارند توزیع گوسی (نمودار I) نتوانسته برخلاف توزیع تی (نمودار II) داده‌های اصلی را مدل کند. این نشان می‌دهد توزیع تی در برابر داده‌های دورافتاده مقاوم‌تر از توزیع گوسی می‌باشد. بنابراین در مسائل تخمین و فیلترینگ حالت و برای سیستم هایی که مواجه با نویزهایی با پراکندگی بالا و مقادیر دورافتاده می‌باشند به نظر می‌رسد مدلسازی نویز با توزیع تی به‌جای توزیع گوسی مناسب‌تر بوده زیرا که حساسیت توزیع تی نسبت به نویزهای دورافتاده نسبت به توزیع گوسی کمتر است نتیجتا عمل ردیابی و تخمین بهتر و واگرایی فیلتر طراحی شده کمتر اتفاق می‌افتد. بنابراین یکی از کاربردهای مهم مدلسازی عدم قطعیت‌ها و نویز سیستم با توزیع تی به جای توزیع گوسی در مبحث ردیابی اهداف در پروژه‌های نظامی و تعقیب و ردیابی اهداف با مانور بالا زمانیکه محیط دارای کلاتر زیادی است می‌باشد که به عنوان مثال می‌توان از مساله ردیابی زیردریایی دشمن، زمانیکه دسته‌های ماهی به عنوان کلاتر و یا داده‌های دور افتاده قلمداد می‌گردند نام برد. طبعا مدلسازی نویز این محیط همراه با کلاتر بالا (دسته های متحرک ماهی) با توزیع تی به جای توزیع گوسی به ردیابی بهتر هدف و عدم واگرایی فیلتر کمک شایانی می‌کند.



شکل ۱: الف- توزیع تی به ازای مقادیر مختلف درجه آزادی
ب- مدلسازی با توزیع تی و گوسی داده‌های بدون مقادیر دورافتاده
ج- مدلسازی توزیع تی و گوسی داده‌های با مقادیر دورافتاده

۴-۳ تابع لگاریتمی توزیع های نرمال و گاما

[1] Degree of freedom
[2] Heavy Tail
[3] Robustness
[4] Outlier
[5] Maximum likelihood

لگاریتم توزیعهای گوسی تک بعدی و چند بعدی و همچنین توزیع گاما بصورت رابطه (۱۹) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned}
&\ln N(x \mid \mu,\lambda) \\
&= \frac{1}{2}\ln\lambda^{-1} - \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{\lambda^{-1}}{2}(x-\mu)^2 \\
&= -\frac{1}{2}\lambda^{-1}x^2 + \lambda^{-1}\mu x + c \\
&\ln N(x \mid \mu,\Sigma) \\
&= -\frac{1}{2}\ln|\Sigma^{-1}| - \frac{d}{2}\ln 2 \\
&\quad -\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu) \\
&= -\frac{1}{2}x^T\Sigma^{-1}x + x^T\Sigma^{-1}\mu + c \\
&\ln Ga(x \mid a,b) \\
&= a\ln - \ln\Gamma(a) + (a-1)\ln x - bx \\
&= (a-1)\ln x - bx + c
\end{aligned} \tag{۱۹}$$

۴- بیان مساله و طراحی فیلتر

مدل فضای حالت غیرخطی گسسته زمان مرتبه کسری را همراه با نویز گوسی سیستم و نویز اندازه‌گیری تی بصورت معادلات زیر در نظر بگیرید.

$$\Delta^{\alpha}x_{k+1} = f(x_k, u_k) + \omega_k$$

$$y_k = h(x_k) + v_k$$

که نویز سیستم گوسی با $\omega_k \sim N(\mu,\Sigma)$ و نویز اندازه‌گیری دارای توزیع تی با $v_k \sim st(\mu,\Sigma,\vartheta)$ می‌باشد. می‌خواهیم با طراحی یک فیلتر جدید بر مبنای روش کالمن متغیرهای حالت سیستم مرتبه کسری غیرخطی را از روی داده‌های نویزی زمانیکه نویز اندازه‌گیری دارای توزیع تی است را با استفاده از روش حل بیزین تغییراتی تخمین بزنیم. در واقع در فیلترینگ هدف بدست آوردن تخمین توزیع حالت $p(x_k \mid y_{1:k})$ در گام‌های زمانی $k = 1,\ldots,T$ می‌باشد.

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= \Delta^{\alpha}x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^j\lambda_j x_{k+1-j} \\
&= f(x_k, u_k) + \omega_k - \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^j\lambda_j x_{k+1-j}
\end{aligned}$$

بدون کاستن از عمومیت مساله، ورودی را $u_k = 0$ در نظر می‌گیریم. در سیکل پیش بینی[1] طراحی فیلتر کالمن ، متوسط و کواریانس پیش‌بینی به ترتیب با روابط (۲۲) و (۲۳) محاسبه می‌گردد.

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{k|k-1} &= m_{k|k-1} = E[x_k \mid y_{k-1}] \\
&= E[f(x_{k-1}) \mid y_{k-1}] \\
&\quad - \sum_{j=1}^{k}(-1)^j\lambda_j E[x_{k-j} \mid y_{k-1}] \\
&\quad + E[w_{k-1} \mid y_{k-1}]
\end{aligned} \tag{۲۰}$$

$$\begin{aligned}
&P_{k|k-1} = \\
&E[f(\hat{x}_{k-1})\delta x_{k-1}^T]P_{k-1}^{-1}E[f(\hat{x}_{k-1})\delta x_{k-1}^T]^T \\
&+ Q_{k-1} + \sum_{j=1}^{k}\Psi_j\Psi_j^T P_{k-j|k-j}
\end{aligned} \tag{۲۱}$$

با استفاده از شروط (۷) و (۸) روابط فوق بدست آمده‌اند. ترم $E[f(x_{k-1}) \mid y_{k-1}]$ به روشهای مختلفی قابل محاسبه است اگر از روش بسط سری تیلور استفاده کنیم فیلتر کالمن توسعه یافته[2] مرتبه کسری بدست می‌آید و اگر به روش عددی مانند تبدیل بی‌بو[3] و یا مکعبی[4] استفاده شود فیلتر کالمن بی‌بو و یا کالمن مکعبی بدست می آید. در این مقاله از روش توسعه یافته یعنی بسط سری تیلور کوتاه شده به صورت (۲۲) بهره گرفته شده است. از طرفی ترم $E[x_{k-j} \mid y_{k-1}]$ با استفاده از (۷) بدست می‌آید. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{k|k-1} &= m_{k|k-1} = E[x_k \mid y_{k-1}] \\
&= f(\hat{x}_{k-1}) - \sum_{j=1}^{k}(-1)^j\lambda_j\hat{x}_{k-j}
\end{aligned} \tag{۲۲}$$

خطای پیش بینی حالت مرتبه کسری با رابطه (۲۳) و ماتریس کواریانس خطای پیش بینی برای سیستم مرتبه کسری با توجه به (۸) با رابطه (۲۴) مشخص می‌گردد.

[1] Prediction cycle
[2] Extended
[3] Unscented
[4] Cubature

$$
\begin{aligned}
e_k &= x_k - \hat{x}_{k|k-1} \\
&= f(x_{k-1}) + \omega_{k-1} - \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^j \lambda_j x_{k-j} \\
&\quad - f(\hat{x}_{k-1}) - \sum_{j=1}^{k}(-1)^j \lambda_j \hat{x}_{k-j} \\
&= f(\hat{x}_{k-1}) + F_x(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) \\
&\quad + \omega_{k-1} - \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^j \lambda_j x_{k-j} \\
&\quad - f(\hat{x}_{k-1}) + \sum_{j=1}^{k}(-1)^j \lambda_j \hat{x}_{k-j} \\
&= F_x(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + \omega_{k-1} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^j \lambda_j (x_{k-j} - \hat{x}_{k-j})
\end{aligned}
\tag{۲۳}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{k|k-1} &= E[e_k . e_k^T] \\
&= F_x P_{k-1} F_x^T + Q_{k-1} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_{k-j|k-j} \lambda_j^T
\end{aligned}
\tag{۲۴}
$$

برای سیکل به روز رسانی[1] از روش استنباط بیزین تغییراتی استفاده می‌شود. اگر چگالی پسین گام قبلی یعنی $k-1$ بصورت $p(x_k \mid y_{1:k-1}) \approx N(x_k \mid m_{k|k-1}, P_{k|k-1})$ تقریب زده شود و تابع چگالی اندازه‌گیری‌های نویزی با توزیع تی را براساس ترکیب گوسی می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$
\begin{aligned}
&p(y_k \mid x_k) \\
&= \int p(y_k \mid x_k, \beta_k) p(\beta_k) d\beta_k
\end{aligned}
\tag{۲۵}
$$

که β_k متغیر کمکی تصادفی با توزیع گاما بصورت $\beta_k \sim Gam(\frac{\vartheta}{2}, \frac{\vartheta}{2}) \propto \beta_k^{\frac{\vartheta}{2}-1} e^{-\frac{\vartheta}{2}\beta_k}$ می‌باشد و $p(y_k \mid x_k, \beta_k)$ توزیع گوسی با تابع چگالی (۲۶) می‌باشد.

$$
p(y_k \mid x_k, \beta_k) = N(h(x_k), \frac{1}{\beta_k} R_k)
\tag{۲۶}
$$

تابع چگالی توام x_k و β_k با استفاده از قانون بیز بصورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$
\begin{aligned}
p(x_k, \beta_k \mid y_{1:k}) &= p(x_k, \beta_k \mid y_{1:k-1}, y_k) \\
&= \frac{p(y_k \mid x_k, \beta_k, y_{1:k-1}) p(x_k, \beta_k, y_{1:k-1})}{p(y_{1:k})} \\
&= \frac{p(y_k \mid x_k, \beta_k) p(x_k, \beta_k \mid y_{1:k-1}) p(y_{1:k-1})}{p(y_{1:k})} \\
&\propto p(y_k \mid x_k, \beta_k) p(x_k, \beta_k \mid y_{1:k-1})
\end{aligned}
\tag{۲۷}
$$

با توجه به $p(y_k \mid x_k, \beta_k)$ در رابطه (۲۶)، تابع چگالی گاما β_k و همچنین تابع چگالی $p(x_k \mid y_{1:k-1})$ که در گام پیش‌بینی فیلتر محاسبه شده است یعنی رابطه (۲۲) و مقداری محاسبات، چگالی توام پسین $p(x_k, \beta_k \mid y_{1:k})$ توسط رابطه (۲۸) بدست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
&p(x_k, \beta_k \mid y_{1:k}) \propto \\
&\beta_k^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\beta_k}{2}(y_k - h(x_k))^T R_k^{-1}(y_k - h(x_k))} \\
&. e^{-\frac{1}{2}(x_k - m_{k|k-1})^T P_{k|k-1}^{-1}(x_k - m_{k|k-1})} \\
&. \beta_k^{\frac{\upsilon}{2}-1} e^{-\frac{\vartheta\beta_k}{2}}
\end{aligned}
\tag{۲۸}
$$

برای بدست آوردن تابع چگالی پسین $p(x_k \mid y_{1:k})$ از تقریبی به صورت زیر می‌توان بهره برد:

$$
p(x_k, \beta_k \mid y_{1:k}) \approx p(x_k) p(\beta_k)
\tag{۲۹}
$$

همانطور که در بخش ۳-۲ مقاله توضیح داده شد با استفاده از الگوریتم بیزین تغییراتی و با مینیم‌سازی اصل واگرایی کولبک- لیبلر میان تقریب حاصلضرب توزیعها (۲۹) و تابع چگالی توزیع پسین $p(x_k, \beta_k \mid y_{1:k})$، می‌توان محاسبات زیر را طبق آنچه در بخش ۳-۲ آورده شد، انجام داد:

$$
\begin{aligned}
&KL(p(x_k, \beta_k \mid y_{1:k}) \parallel p(x_k) p(\beta_k)) = \\
&\int p(x_k) p(\beta_k) \log(\frac{p(x_k) p(\beta_k)}{p(x_k, \beta_k \mid y_{1:k})}) dx_k d\beta_k
\end{aligned}
\tag{۳۰}
$$

برای حداقل‌سازی واگرایی کالبک- لیبلر فوق با ثابت نگه داشتن $p(x_k)$، تابع چگالی $p(\beta_k)$ را مطابق توضیحات و روابط بخش ۳-۲ به صورت زیر بدست آورد.

[1] Updating cycle

$$\begin{aligned}&\ln p(\beta_k)\\&=\langle \ln p(x_k,\beta_k \mid y_{1:k})\rangle_{p(x_k)}+c\\&=-\frac{1}{2}\beta_k\bar{\chi}_k+(\frac{\vartheta+d}{2}-1)\ln\beta_k-\frac{\vartheta\beta_k}{2}+c\end{aligned} \quad (۳۱)$$

که $\bar{\chi}_k$ برابر است با:

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_k&=\left\langle (y_k-h(x_k))^T R_k^{-1}(y_k-h(x_k))\right\rangle_{p(x_k)}\\&=tr\left(\left\langle (y_k-h(x_k))^T(y_k-h(x_k))\right\rangle_{p(x_k)}.\Sigma_k^{-1}\right)\end{aligned}$$

و ترم $\left\langle (y_k-h(x_k))^T(y_k-h(x_k))\right\rangle_{p(x_k)}$ امید ریاضی تابع غیرخطی با تابع چگالی $p(x_k)=N(x_k,\hat{x}_k,P_k)$ می‌باشد. β_k دارای توزیع گاما بصورت $\beta_k \sim Gam(\frac{\vartheta+d}{2},\frac{\bar{\chi}_k+\vartheta}{2})$ با متوسط $\bar{\beta}_k$ بوده که مقدار متوسط آن برابرست با:

$$\begin{aligned}\bar{\beta}_k&=E[\beta_k]\\&=\int\beta_k p(\beta_k)d\beta_k=\frac{\vartheta+d}{\vartheta+\bar{\chi}_k}\end{aligned} \quad (۳۲)$$

بصورت مشابه روند بالا و با مینیمم‌سازی واگرایی کولبک-لیبلر ولی این بار با ثابت نگه داشتن $p(\beta_k)$ ، تابع چگالی $p(x_k)$ را به صورت (۳۳) می‌توان محاسبه نمود.

$$\begin{aligned}&\ln p(x_k)\\&=\langle \ln p(x_k,\beta_k \mid y_{1:k})\rangle_{p(\beta_k)}+c\\&=-\frac{1}{2}\bar{\beta}_k(y_k-h(x_k))^T\Sigma_k^{-1}(y_k-h(x_k))\\&\quad-\frac{1}{2}(x_k-m_{k|k-1})^T P_{k|k-1}^{-1}(x_k-m_{k|k-1})+c\end{aligned} \quad (۳۳)$$

رابطه (۳۳) معادل مساله تخمین حالت در گام به روز رسانی برای فیلتر کالمن غیرخطی و با ماتریس کواریانس اندازه‌گیری $\frac{1}{\bar{\beta}_k}\Sigma_k$ می‌باشد، بنابراین روش بیزی تغییراتی با ایجاد یک حلقه تکراری با تعداد تکرار ثابت N ، توزیع نهایی حالت x_k و β_k را بدین صورت تقریب می‌زند:

با ثابت فرض کردن تابع چگالی $p(x_k)$، تابع چگالی $p(b_k)$ را از رابطه (۳۱) بدست آورده سپس با دانستن این تابع چگالی، تابع چگالی $p(x_k)$ را طبق رابطه (۳۳) بدست آورده این حلقه N بار تکرار می‌شود.

۵- نتایج شبیه‌سازی

مثال ۱- سیستم غیرخطی مرتبه کسری (۳۶) با مشخصات نویز (۳۷) در نظر بگیرید. فیلترکالمن توسعه یافته مرتبه کسری طراحی شده در مرجع [۸] نیز جهت مقایسه با فیلتر طراحی شده ما پیاده‌سازی و اجرا شده است. در اجرای فیلتر کالمن توسعه یافته مرجع [۸] تمام اطلاعات نویز یعنی نویز اصلی با واریانس R و نویزهای دورافتاده با واریانس 100R از ابتدا مشخص می‌باشند..

$$\begin{cases}\Delta^{\alpha}x(t+1)=\\0.5x(t)+\dfrac{25x(t)}{1+x(t)}+8\cos(1.2t)+w(t)\\y(t)=\dfrac{1}{20}x(t)^2+v(t)\end{cases} \quad (۳۴)$$

$$\begin{aligned}&w_k\sim N(0,Q)\\&v_k\sim\begin{cases}N(0,R), & \text{w.p. } 0.9\\N(0,100R), & \text{w.p. } 0.1\end{cases}\end{aligned} \quad (۳۵)$$

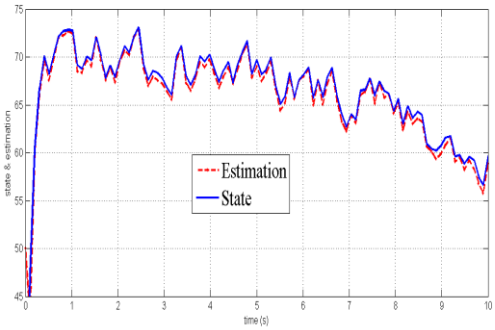
که α مرتبه کسری مدل فضای حالت سیستم مرتبه کسری غیرخطی تصافی می‌باشد که دارای بازه‌ی مقادیر حقیقی بین صفر الی دو می‌باشد. که در اینجا ۰/۵ در نظر گرفته شده است. نویز سیستم w_k دارای توزیع گوسی با میانگین صفر و ماتریس کواریانس Q بوده $N(0,Q)$، اما ۹۰ درصد نویز اندازه‌گیری $v(t)$ از توزیع $N(0,R)$ تولید می‌شود و ۱۰ درصد از توزیع با کواریانس بشدت افزایش یافته 100R یعنی $N(0,100R)$ تولید می‌گردد، این ده درصد نویز، مدل کننده‌ی داده‌های دورافتاده می‌باشد. مطابق بخش ۳-۳ نویز گوسی $N(0,Q)$ با نویز $St(0,Q,3)$ قابل تقریب است. با انتخاب این نوع ساختار برای نویز اندازه‌گیری، قابلیت فیلتر طراحی شده در ردیابی حالت در حضور عدم قطعیت داده‌های دورافتاده آشکار می‌گردد. جهت مقایسه نتایج، فیلتر کالمن توسعه یافته ارائه شده در [۸] با همین مقادیر نویز سیستم و اندازه‌گیری اجرا می‌شود و نتایج این فیلتر توسعه یافته با فیلتر طراحی شده در این مقاله، مقایسه شده که نتایج شبیه‌سازی در شکلهای ۲ و ۳ نشان داده شده است. همچنین با استفاده از رابطه (۳۶) ریشه متوسط مربع خطا[1] را به ازای ۱۰۰ اجرای مونت کارلو[2]

[1] Root mean square error (RMSE)
[2] Monte-Carlo runs

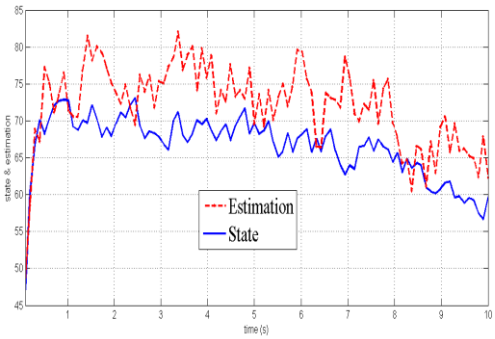
(N=100) برای دو فیلتر طراحی شده و کالمن توسعه یافته محاسبه شده، که نتیجه در شکل ۴ نمایش داده شده است.

$$RMSE(k)=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_k^i-\hat{x}_k^i\right)^2} \qquad (۳۶)$$

شکل ۲ عملکرد فیلتر طراحی شده را برای سیستم مرتبه کسری با مرتبه ۰/۵ در حضور نویزهایی با مقادیر دورافتاده نشان می‌دهد. همانطوری که در این شکل قابل مشاهده است فیلتر ارائه شده به خوبی و با دقت بسیار بالایی متغیر حالت را تخمین زده و تاثیر حضور مقادیر دورافتاده را حذف نموده است. اما شکل ۳ پاسخ فیلتر کالمن توسعه یافته مرتبه کسری ارائه شده در مرجع [۸] را نشان می‌دهد که در برابر داده‌های اندازه‌گیری دورافتاده دارای خطای تخمین بزرگتری می‌باشد.

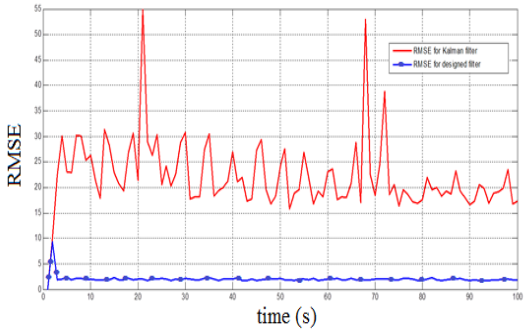


شکل ۲: تخمین حالت با فیلتر ارائه شده



شکل ۳: تخمین حالت با فیلتر کالمن توسعه یافته

در شکل ۴ ریشه متوسط مربع خطا RMSE برای دو فیلتر به ازای ۱۰۰ اجرای مستقل مونت کارلو مطابق رابطه (۳۶) نمایش داده شده است. نوسانات زیاد همراه با دامنه‌ی بزرگ برای فیلتر کالمن مرتبه کسری نمایشگر خطای تخمین زیاد در ردیابی اهداف می‌باشد. که چنانچه واریانس و احتمال حضور این داده‌های دورافتاده بیشتر گردد منجر به واگرایی فیلتر کالمن توسعه یافته شده است. با توجه به شکل ۴ عملکرد فیلتر طراحی شده برای داده‌های دورافتاده بسیار مناسب بوده که نشان دهنده‌ی مقاوم بودن این فیلتر در برابر داده‌های دورافتاده است.



شکل ۴: مقایسه ریشه متوسط مربع خطا

مثال ۲- در این مثال قدرت و توانایی فیلتر طراحی شده برای ردیابی اهداف مانوردار بررسی می گردد. در مسایل کنترل ترافیک هوایی، هدف دارای دو نوع حرکت مستقیم یکنواخت و حرکت مانوردار است [۲۰, ۲۱]. دینامیک هدف با مدل دور مرتبه کسری (۳۷) مدلسازی شده است. بردار حالت برابر با $X=\left(x,y,v_x,v_y,\omega\right)$ بوده که موقعیت مکانی دو بعدی هدف با $\left(x,y\right)$ و سرعت آن با $\left(v_x,v_y\right)$ مشخص می‌گردد و ω نرخ چرخش هدف است. مدل دینامیکی هدف عبارت است از:

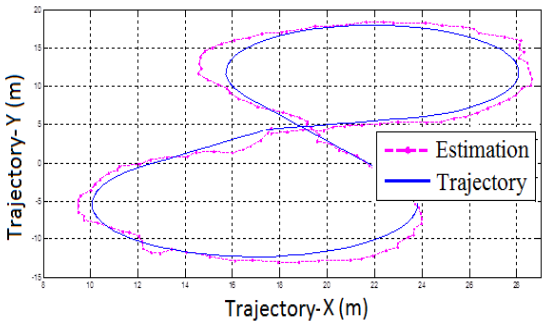
$$\Delta^{\alpha}X(k)=\begin{pmatrix}1 & \frac{\sin(w\Delta t)}{w} & 0 & \frac{-1+\cos(w\Delta t)}{w} & 0\\ 0 & \cos(w\Delta t) & 0 & -\sin(w\Delta t) & 0\\ 0 & \frac{1-\cos(w\Delta t)}{w} & 1 & \frac{\sin(w\Delta t)}{w} & 0\\ 0 & \sin(w\Delta t) & 0 & \cos(w\Delta t) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}X(k)+e_k \qquad (۳۷)$$

به منظور تخمین موقعیت و سرعت هدف، راداری در مرکز صفحه قرارگرفته که موقعیت و سمت هدف را با معادله اندازه‌گیری (۳۸)، اندازه‌گیری می کند:

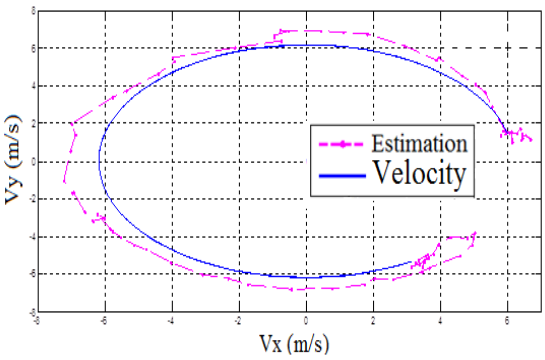
$$Z_k=\begin{bmatrix}r_k\\ \theta_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{x^2+y^2}\\ \tan^{-1}\left(\frac{y_k}{x_k}\right)\end{bmatrix}+v_k \qquad (۳۸)$$

که e_k نویز پروسه دارای توزیع گوسی $N(0,Q_k)$ به صورت $Q_k=\begin{bmatrix}e_1M & 0 & 0\\ 0 & e_1M & 0\\ 0 & 0 & e_2\end{bmatrix}$ که می‌باشد. و $e_1=1, e_2=0.1$ و $M=\begin{bmatrix}\Delta t^3/3 & \Delta t^2/2\\ \Delta t^2 & \Delta t\end{bmatrix}$ می‌باشد که $\Delta t=0.1$ ، α مرتبه کسری مدل فضای حالت که در این مثال برابر ۰/۹۵ در نظر گرفته شده است. از طرفی v_k نویز اندازه‌گیری

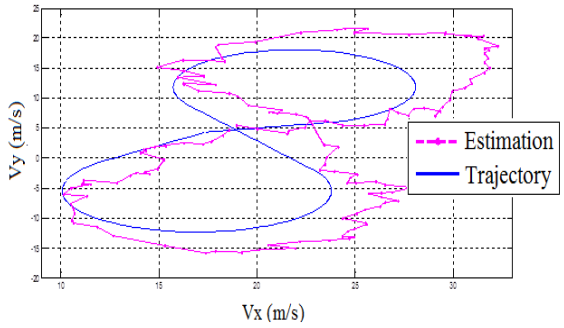
می‌باشد که دارای دو توزیع طبق رابطه (۳۵) می‌باشد. بخش اول توزیع یعنی $N(0,R)$ که یک توزیع گوسی با متوسط صفر و ماتریس کواریانس R می‌باشد که نقش توزیع اصلی را بازی می‌کند. بخش دوم نویز یعنی $N(0,100R)$ که یک توزیع گوسی با متوسط صفر و ماتریس کواریانس 100R می‌باشد که نقش داده‌های دورافتاده را بازی می‌کند. با پیاده‌سازی فیلتر کالمن توسعه یافته مرتبه کسری مرجع [۸] در حضور این نویز اندازه‌گیری همراه با داده‌های دورافتاده، مشاهده گردید این فیلتر نمی‌تواند هدف مانوردار را ردیابی کند. یعنی با اجرای چندین باره فیلتر توسعه یافته بدلیل حضور نویزهایی با واریانس بالا، یا منجر به واگرایی فیلتر کالمن توسعه یافته گشته و یا خطای تخمین بسیار بزرگی پدید می‌آید که در نتیجه عدم رهگیری هدف مخصوصا زمانیکه هدف در حال مانور است اتفاق می‌افتد. لیکن اگر نویز اندازه‌گیری را با تابع چگالی تی به صورت $St(0,Q,3)$ تقریب بزنیم (یعنی نویز اندازه‌گیری با توزیع تی در نظر گرفته شود) و فیلتر طراحی شده در این مقاله را به منظور تخمین هدف پیاده‌سازی کنیم، مشاهده می‌شود فیلتر طراحی شده به خوبی هدف مانوردار را ردیابی نموده و موقعیت و سرعت هدف را مطابق با شکلهای ۵ و۶ با دقت بالایی تخمین می‌زند. چرا که این مدلسازی با توزیع تی به خوبی نسبت به داده‌های دورافتاده مقاوم بوده و فیلتر تحت تاثیر نویزهای دورافتاده قرار نمی‌گیرد. نتایج عملکردی فیلتر طراحی شده برای تخمین هدف مانوردار در شکلهای ۵، ۶ و ۷ نشان داده شده است. نقطه شروع حرکت هدف مانوردار نقطه $[16.5,4,1,0.25,1]$ می‌باشد. هدف دارای سه نوع حرکت مختلف چپگرد، راست گرد، حرکت مستقیم الخط به ترتیب با مقادیر $w=1$ ، $w=-1$ و $w=0$ می‌باشد. مطابق شکل ۵ هدف دارای مانور چپ، حرکت مستقیم و نهایتا مانور راست می‌باشد که این حرکت بیانگر حرکت هدف با مانور بالاست. همانگونه که در این شکل قابل مشاهده است موقعیت هدف به خوبی ردیابی شده و در قسمتهایی که هدف در حال مانور است، خطای ردیابی زیاد شده اما فیلتر در گامهای بعدی جبران و خطای تخمین کاهش یافته است این پاسخ به ازای واریانس داده‌های دورافتاده 100R و با احتمال حضور ۱۰ درصد می‌باشد. شکل ۶ سرعت هدف و تخمین سرعت آن را با استفاده از فیلتر طراحی شده نشان می‌دهد که بیانگر تخمین سرعت هدف با خطای کوچک می‌باشد. در شکل ۷ مجددا به تخمین موقعیت ومسیر حرکت هدف پرداخته شده اما واریانس داده‌های دورافتاده دو برابر یعنی 200R منظور شده است. همانگونه که در این شکل قابل مشاهده است هدف ردیابی شده اما میزان خطای تخمین موقعیت هدف افزایش یافته است. جدولهای ۱،۲ و ۳ نتایج شبیه‌سازی برای دو فیلتر کالمن توسعه یافته و تی را به ازای سه حالت مختلف نویز اندازه‌گیری با مقادیر داده‌های دورافتاده، یعنی با مقادیر 100R، 200R و بدون داده‌های دورافتاده (یعنی حالتی که نویز اندازه‌گیری فقط دارای جمله اصلی بصورت $N(0,R)$ بوده و فاقد داده‌های دورافتاده است) به ازای ۱۰۰ بار تکرار آزمایش و با متوسط‌گیری خطای تخمین موقعیت هدف و خطای تخمین سرعت هدف را نشان می‌دهد. همانگونه که در جدولهای ۱ و ۲ قابل مشاهده است فیلتر طراحی شده در این مقاله با خطای کم، موقعیت و سرعت هدف را تخمین زده که با افزایش واریانس داده‌های دورافتاده اندکی متوسط خطای تخمین افزایش می‌یابد. اما فیلتر کالمن توسعه یافته در مقابل این نویز اندازه‌گیری و داده‌های دورافتاده واگرا شده و قادر به ردیابی هدف نمی‌باشد. جدول ۳ یعنی حالتی که نویز اندازه‌گیری فاقد داده‌های دورافتاده است نشان می‌دهد که فیلتر کالمن توسعه یافته مرتبه کسری، اندکی دارای پاسخ و دقت بهتری در تخمین حالت نسبت به فیلتر تی می‌باشد که دلیل آن به استفاده از تقریبهای استفاده شده در طراحی فیلتر تی ارائه شده باز می‌گردد. از طرفی از آنجا که فیلتر تی ارائه شده یک فیلتر کالمن با تقریبهای بکار رفته جهت ارائه فرم بسته برای این فیلتر می‌باشد (در واقع با استفاده از تقریبهای بکار رفته در استنباط بیزین، ما یک فیلتر کالمن گوسی با مقادیر میانگین و واریانس تغییر یافته در هرگام داریم) زمان، سرعت و حجم فضای حافظه اشغالی پردازنده جهت اجرای این فیلتر تقریبا مانند فیلتر کالمن توسعه یافته بوده و طبعا این فیلتر می‌تواند در همه‌ی پروسه‌های صنعتی برخط با دقت بسیار بالا بکار گرفته شود.



شکل ۵: مسیر حرکت هدف و تخمین مسیر با فیلتر ارائه شده



شکل ۶ : سرعت هدف و تخمین سرعت با فیلتر ارائه شده



شکل ۷: مسیر حرکت هدف و تخمین مسیر با فیلتر ارائه شده به ازای ۲۰۰R

جدول ۱: خطای متوسط تخمین با داده های دورافتاده 100R

فیلتر کالمن توسعه یافته	فیلتر student 's t	خطای متوسط تخمین با داده های دورافتاده 100R
واگرا	1.7	خطای متوسط تخمین موقعیت هدف [m]
واگرا	0.8	خطای متوسط تخمین سرعت هدف [m/s]

جدول ۲: خطای متوسط تخمین با داده های دورافتاده 200R

فیلتر کالمن توسعه یافته	فیلتر student 's t	خطای متوسط تخمین با داده های دورافتاده 200R
واگرا	3.1	خطای متوسط تخمین موقعیت هدف [m]
واگرا	1.2	خطای متوسط تخمین سرعت هدف [m/s]

جدول ۳: خطای متوسط تخمین بدون داده های دورافتاده

فیلتر کالمن توسعه یافته	فیلتر student 's t	خطای متوسط تخمین بدون داده‌های دورافتاده
0.9	1	خطای متوسط تخمین موقعیت هدف[m]
0.44	0.5	خطای متوسط تخمین سرعت هدف [m/s]

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک تخمینگر حالت برای سیستمهای مرتبه کسری غیرخطی تصادفی در حضور نویز سیستم با توزیع گوسی و نویز اندازه‌گیری با توزیع تی طراحی شده است. کاربرد اصلی این فیلتر برای مسایل ردیابی اهداف زمانیکه در محیط نویزهایی با پراکندگی بالا موجود است، می‌باشد. در این مقاله با طراحی فیلتر حالت برای سیستمهای مرتبه کسری با استفاده از روش استنباط بیزین تغییراتی نشان دادیم، زمانیکه اندازه‌گیریها تحت تاثیر نویزهایی با مقادیر دورافتاده زیادی باشند، مدلسازی این داده‌های نویزی در معادله خروجی مدل فضای حالت با توزیع تی به جای توزیع گوسی و طراحی فیلتر حالت برای این مدل، دقت ردیابی و همچنین مقام بودن فیلتر طراحی شده را افزایش می‌دهد.

مراجع

[1] C. A. Monje, Y. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue, and V. Feliu-Batlle, Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications: Springer Science & Business Media, 2010.

[2] Y. Luchko, "Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation," Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 351, pp. 218-223, 2009.

[3] Z. Yanzhu and X. Dingyu, "Modeling and simulating transmission lines using fractional calculus," in Wireless Communications, Networking and Mobile Computing, 2007. WiCom 2007. International Conference on, 2007, pp. 3115-3118.

[4] N. Engheia, "On the role of fractional calculus in electromagnetic theory," Antennas and Propagation Magazine, IEEE, vol. 39, pp. 35-46, 1997.

[5] M. S. Tavazoei and M. Haeri, "A note on the stability of fractional order systems," Mathematics and Computers in Simulation, vol. 79, pp. 1566-1576, 2009.

[6] D. Baleanu, J. A. T. Machado, and A. C. Luo, Fractional dynamics and control: Springer Science & Business Media, 2011.

[7] D. Sierociuk and A. Dzielinski, "Fractional Kalman filter algorithm for the states, parameters and order of fractional system estimation," International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, vol. 16, p. 129, 2006.

[8] D. Sierociuk, I. Tejado, and B. M. Vinagre, "Improved fractional Kalman filter and its application to estimation over lossy networks," Signal Processing, vol. 91, pp. 542-552, 2011.

[9] D. Sierociuk and P. Ziubinski, "Fractional order estimation schemes for fractional and integer order systems with constant and variable fractional order colored noise," Circuits, Systems, and Signal Processing, vol. 33, pp. 3861-3882, 2014.

[10] D. Sierociuk, "Fractional Kalman Filter algorithms for correlated system and measurement noises," Control and Cybernetics, vol. 42, 2013.

[11] H. Sadeghian, H. Salarieh, A. Alasty, and A. Meghdari, "On the general Kalman filter for discrete time stochastic fractional systems," Mechatronics, vol. 23, pp. 764-771, 2013.

[12] H. Torabi, N. Pariz, and A. Karimpour, "Kalman filters for fractional discrete-time stochastic systems along with time-delay in the observation signal," The European Physical Journal Special Topics, vol. 225, pp. 107-118, 2016.

[13] H. W. Sorenson and D. L. Alspach, "Recursive Bayesian estimation using Gaussian sums," Automatica, vol. 7, pp. 465-479, 1971.

[14] I. Arasaratnam and S. Haykin, "Cubature kalman filters," IEEE Transactions on automatic control, vol. 54, pp. 1254-1269, 2009.

[15] R. J. Meinhold and N. D. Singpurwalla, "Robustification of Kalman filter models," Journal of the American Statistical Association, vol. 84, pp. 479-486, 1989.

[16] J. Mattingley and S. Boyd, "Real-time convex optimization in signal processing," IEEE Signal processing magazine, vol. 27, pp. 50-61, 2010.

[17] M. Roth, E. Özkan, and F. Gustafsson, "A Student's t filter for heavy tailed process and measurement noise," in 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2013, pp. 5770-5774.

[18] N. D. Lawrence, "Variational inference in probabilistic models," University of Cambridge, 2001.

[19] C. M. Bishop, "Pattern recognition," Machine Learning, vol. 128, 2006.

[20] Y. Bar-Shalom, P. K. Willett, and X. Tian, Tracking and data fusion: YBS publishing, 2011.

[21] T. Yuan, Y. Bar-Shalom, P. Willett, R. Ben-Dov, and S. Pollak, "A comparison of multiple-IMM estimation approaches using EKF, UKF, and PF for impact point prediction," in SPIE Defense+ Security, 2014, pp. 90920D-90920D-15.

[۲۲] حمید خالوزاده، عطیه کشاورز محمدیان، "مروری بر کاربردهای نظریه تخمین، شناسایی و کنترل تصادفی در سیستم‌های صنعتی"، مجله کنترل، جلد ۸، شماره ۳، پاییز۱۳۹۳ ، صفحه ۱۴۱-۱۱۹

مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۱۰، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۵، صفحه ۸۰-۶۹

کنترل غیرخطی بهینه مقاوم یک توربین بادی مجهز به ژنراتور القایی از دوسوتغذیه

آزاده عزیزی[۱]، علی حسامی نقشبندی[۲]، یزدان باتمانی[۳]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد برق- کنترل، گروه مهندسی برق، دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان، azadeh_azizi1986@yahoo.com

[۲] استادیار گروه مهندسی برق، دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان، hesami@uok.ac.ir

[۳] استادیار گروه مهندسی برق، دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان، yazdan_batmany@ee.kntu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۹/۱۲، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۵/۱۲/۴)

چکیده: در این مقاله با استفاده از روش معادله ریکاتی وابسته به حالت، دو کنترل‌کننده غیرخطی زیربهینه (یک تنظیم‌کننده و یک ردیاب) برای سیستم توربین بادی مجهز به ژنراتور القایی از دوسوتغذیه طراحی شده‌اند. اهداف کنترلی مورد نظر شامل افزایش حاشیه پایداری سیستم و ردیابی همزمان سیگنال‌های مطلوب گشتاور الکترومغناطیسی و توان راکتیو استاتور می‌باشند. در فرآیند طراحی کنترل‌کننده، از یک مدل غیرخطی برای مدل‌سازی رفتار دینامیکی توربین بادی مورد مطالعه استفاده شده است. عملکرد کنترل‌کننده طراحی شده جهت بهبود پایداری سیستم، در شرایط کاری مختلف توربین بادی با انجام یک مجموعه شبیه‌سازی در محیط نرم‌افزار متلب ارزیابی شده است. همچنین جهت بررسی تأثیر کنترل‌کننده طراحی شده در بهبود پایداری سیستم، تحلیل مقادیر ویژه هم انجام گرفته است. در عین حال عملکرد ردیاب طراحی شده، با انجام یک مجموعه شبیه‌سازی دیگر بررسی شده است. عملکرد سیستم کنترل شده در هر دو حالت ردیاب و پایدارساز در حضور عدم قطعیت در پارامترهای سیستم مورد ارزیابی قرار گرفته است. در مجموع نتایج شبیه‌سازی‌های انجام شده، نشان دهنده عملکرد مؤثر و مقاوم کنترل‌کننده‌های پیشنهادی می‌باشند.

کلمات کلیدی: توربین بادی، ژنراتور القایی از دوسوتغذیه، معادله ریکاتی وابسته به حالت، کنترل‌کننده غیرخطی زیربهینه.

Robust Nonlinear Optimal Control of DFIG based Wind Turbine

Azadeh Azizi, Ali Hesami Naghshbandi, Yazdan Batmany

Abstract: In this paper, based on the state-dependent Riccati equation (SDRE) technique, two nonlinear suboptimal controllers (a regulator and a tracker) are designed for a wind turbine with doubly fed induction generator (DFIG). The control objectives include increasing the system stability margin and setting of the electromagnetic torque and the stator reactive power signals to the desired values. In the designed procedure of the controller, a nonlinear model is used for modeling the dynamical properties of the considered DFIG. The performance of the designed controllers to improve the system stability is evaluated in MATLAB software through some simulations for different working conditions of the wind turbine. In addition, an eigen-analysis of the closed-loop system is carried out to evaluate the effects of the proposed SDRE controller on the system stability. The performance of the designed SDRE tracking controller is also investigated through some simulations. In closing, simulation results demonstrate the effectiveness and robustness of the proposed SDRE controllers.

Keywords: Wind turbine, doubly fed induction generator, state-dependent Riccati equation, nonlinear suboptimal controller.

۱- مقدمه

در میان انواع ژنراتورهایی که در سیستم‌های مدرن تولید توان بادی به کار گرفته می‌شوند، ژنراتورهای القایی ازدوسوتغذیه به علت دارا بودن مزایایی مانند عملکرد سرعت متغیر، امکان تنظیم مستقل توان اکتیو و راکتیو و هزینه کم مبدل، بیشترین توجه را به خود اختصاص داده‌اند [۱]. حضور گسترده توربین‌های بادی در سیستم‌های قدرت مدرن رفتار دینامیکی سیستم را تحت تأثیر قرار داده و سبب پیچیده‌تر شدن آن می‌شود. این موضوع اهمیت استفاده از روش‌های پیشرفته در کنترل این سیستم‌ها را بیشتر می‌کند. تاکنون روش‌های بسیاری در رابطه با کنترل DFIG ها به کار گرفته شده‌اند [۲-۷]. کنترل ادوات توان در مدار روتور DFIG عموماً توسط کنترل‌کننده‌های تناسبی– انتگرالی (PI) مقاوم انجام شده است. با این حال عملکرد سیستم تحت کنترل با وجود این کنترل‌کننده‌ها به دلیل نیاز به مقادیر پارامترهای ماشین و دینامیک‌های سیستم قدرت جهت تنظیم صحیح بهره‌های آن‌ها، مطلوب نمی‌باشند. مطالعات مربوط به تحلیل پایداری سیگنال کوچک مزارع بادی نوع DFIG در حالت متصل به شبکه عمدتاً یک رویکرد قطعی را برای تحلیل پایداری در نظر گرفته‌اند که برای طبیعت نوسانی باد چنین تحلیل‌هایی بسیار خوش‌بینانه بوده و منجربه نتایج مربوط به یک نقطه کار خاص خواهد شد. به منظور تحلیل پایداری احتمالاتی چنین سیستمی روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو[1] [۵-۷] در برخی از متون پیشنهاد شده است. در [۸] یک کنترل‌کننده PI بهینه چندهدفه با استفاده از الگوریتم تکامل تفاضلی (DE[2]) برای سیستم توربین بادی DFIG پیشنهاد شده است که در آن توابع هدف، پایداری حالت ماندگار و عملکرد دینامیکی را در نقاط کار مختلف، جهت بهینه‌سازی پارامترهای کنترل‌کننده به کار گرفته‌اند و جهت اعمال محدودیت‌ها و مسأله بهینه‌سازی چندهدفه از روش‌های خاصی استفاده شده که پیچیدگی طراحی کنترل‌کننده را افزایش می‌دهند. به منظور ردیابی توان بهینه سیستم توربین بادی DFIG یک کنترل‌کننده غیرخطی به روش مد لغزشی در [۱۱-۱۲] طراحی شده است. در رابطه با ژنراتورهای DFIG کنترل‌کننده‌های PI نقش مهمی را ایفا می‌کنند. اما جهت دستیابی به سطوح کیفیت توان مطلوب که صنایع جدید نیازمند آن هستند، روش‌های پیشرفته‌تری به منظور کنترل این ژنراتورها مورد نیاز می‌باشند. برای اطلاع بیشتر در رابطه با روش‌های استفاده شده برای کنترل سیستم توربین بادی DFIG می‌توان به مرجع [۱۳] مراجعه نمود.

روش SDRE برای اولین بار توسط پیرسون[3] در سال ۱۹۶۲ به منظور حل تقریبی مسأله کنترل بهینه برای سیستم‌های غیرخطی پیشنهاد شد [۱۴]. نمایش یک سیستم غیرخطی به صورت یک سیستم خطی وابسته به حالت که شبه‌خطی‌سازی[4] نامیده می‌شود [۱۵]، ایده اصلی روش SDRE است. پس از آن روش‌های بسیاری براساس شبه‌خطی‌سازی برای حل مسائل مختلف مانند طراحی فیلتر H_∞ مقاوم [۱۶]، طراحی کنترل‌کننده مد لغزشی زیربهینه برای سیستم‌های تأخیردار [۱۷]، طراحی رؤیتگر برای سیستم‌های غیرخطی تأخیردار [۱۸] و غیره توسعه داده شده‌اند. این روش‌ها به طور مؤثری در زمینه‌های کاربردی بسیاری مانند تجویز دارو برای بیماری سرطان [۱۹] و کنترل سرعت موتور سنکرون مغناطیس دائم (PMSM[5]) [۲۰] به کار گرفته شده‌اند. از جمله ویژگی‌های بسیار جذاب روش SDRE این است که طراح می‌تواند توسط تنظیم توابع وزنی کنترل و حالت، عملکرد سیستم را به صورت پیش‌بینی شده‌ای تحت تأثیر قرار دهد. به عنوان مثال جهت سرعت بخشیدن به پاسخ می‌توان تابع وزنی مربوط به حالت‌های سیستم را افزایش داد که منجر به افزایش تلاش کنترلی نیز خواهد شد. در عین حال طراح به دلیل وجود نمایش‌های SDC[6] بی‌شمار برای سیستم غیرخطی دارای درجه آزادی بیشتری بوده که می‌تواند آن را به منظور بهبود عملکرد کلی سیستم مورد استفاده قرار دهد. از سوی دیگر روش SDRE به دلیل اینکه از هیچ گونه تقریبی در مدل‌سازی سیستم استفاده نمی‌کند، خصوصیات غیرخطی سیستم را حفظ می‌کند که از نقطه نظر عملی به ویژه زمانی که دینامیک سیستم پیچیده باشد، بسیار حائز اهمیت است. در [۱۵ و ۱۶] به مروری بر روش SDRE و نظریه‌های مرتبط با آن پرداخته شده است.

با توجه به ویژگی‌های جذاب کنترل‌کننده SDRE و دینامیک غیرخطی ژنراتورهای DFIG موجود در سیستم‌های قدرت مدرن، در این مقاله برآن شدیم که از کنترل‌کننده SDRE در راستای بهینه‌سازی عملکرد دینامیکی این سیستم‌ها استفاده کنیم. برای این منظور تمامی شرایط لازم جهت طراحی کنترل‌کننده بهینه SDRE برای یک ژنراتور DFIG بررسی شده است. در این مقاله از روش SDRE با دو هدف افزایش حاشیه پایداری سیستم با استفاده از طراحی پایدارساز و ردیابی

[1] Monte Carlo
[2] Differential evolution
[3] Pearson
[4] Pseudo-linearization
[5] Permanent magnet synchronous motor
[6] State dependent coefficient

همزمان سیگنال‌های مطلوب گشتاور الکترومغناطیسی و توان راکتیو استاتور توسط طراحی کنترل‌کننده ردیاب استفاده شده است. با توجه به وجود پارامترهای نامعلوم در دینامیک سیستم مورد مطالعه، مقاوم بودن سیستم حلقه بسته حاصل از اعمال کنترل‌کننده‌ی SDRE در حضور نامعینی در پارامترهای سیستم نیز بررسی شده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های انجام شده در محیط نرم‌افزار متلب دال بر بهبود عملکرد دینامیکی سیستم و مقاوم بودن عملکرد کنترل‌کننده طراحی شده در حضور عدم قطعیت درپارامترها، برای شرایط کاری مختلف سیستم است. در عین حال تحلیل مقادیر ویژه هم جهت بررسی کارایی روش پیشنهادی در بهبود حاشیه پایداری سیستم انجام شده است.

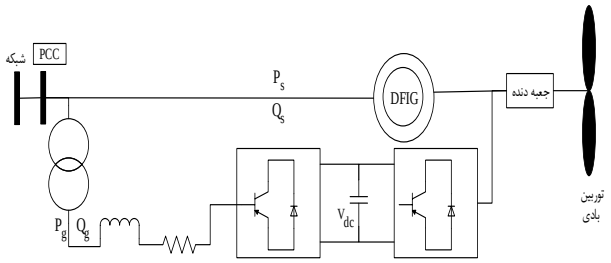
سایر قسمت‌های این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده اند: در بخش دوم به معرفی سیستم شامل بخش‌های مختلف توربین بادی DFIG و مدل فضای حالت آن پرداخته شده است. بخش سوم به بررسی کنترل‌کننده SDRE، گام‌های لازم جهت طراحی و تئوری‌های پایداری آن پرداخته است. در این بخش مراحل مختلفی که برای طراحی پایدارساز و ردیاب به روش SDRE لازم است به تفکیک بیان شده است. در بخش چهارم نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های انجام شده در محیط نرم‌افزار متلب همراه با تحلیل آن‌ها ارائه شده است. در انتها، بخش پنجم به نتیجه‌گیری مقاله اختصاص داده شده است.

۲- معرفی سیستم

در این بخش معادلات مربوط به DFIG، جهت استفاده در بخش‌های دیگر مقاله بررسی می‌شوند. برای مطالعات پایداری سیستم قدرت، ژنراتور به عنوان یک منبع ولتاژ پشت راکتانس گذرا مدل می‌شود [۲۱]. دیاگرام سیستم در شکل ۱ نشان داده شده است. معادلات دیفرانسیل مدارهای استاتور و روتور ژنراتور القایی در چارچوب مرجع d-q، به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega_b}\frac{di_{ds}(t)}{dt} &= -\frac{\omega_s}{X_s'}\left(R_s+\frac{X_s-X_s'}{\omega_s T_0}\right)i_{ds}(t)+\omega_s i_{qs}(t)+\\
&\quad \frac{\omega_r}{X_s'}E_{ds}'(t)-\frac{1}{X_s' T_0}E_{qs}'(t)+\frac{\omega_s L_m}{X_s' L_{rr}}v_{dr}(t)-\frac{\omega_s}{X_s'}v_{ds}(t),\\
\frac{1}{\omega_b}\frac{di_{qs}(t)}{dt} &= -\frac{\omega_s}{X_s'}\left(R_s+\frac{X_s-X_s'}{\omega_s T_0}\right)i_{qs}(t)-\omega_s i_{ds}(t)+\\
&\quad \frac{\omega_r}{X_s'}E_{qs}'(t)+\frac{1}{X_s' T_0}E_{ds}'(t)+\frac{\omega_s L_m}{X_s' L_{rr}}v_{qr}(t)-\frac{\omega_s}{X_s'}v_{qs}(t),\\
\frac{1}{\omega_b}\frac{dE_{ds}'(t)}{dt} &= \frac{1}{T_0}\left(X_s-\acute{X}_s\right)i_{qs}(t)-\frac{1}{T_0}E_{ds}'(t)+\\
&\quad \left(\omega_s-\omega_r(t)\right)E_{qs}'(t)-\frac{\omega_s L_m}{L_{rr}}v_{qr}(t),\\
\frac{1}{\omega_b}\frac{dE_{qs}'(t)}{dt} &= -\frac{1}{T_0}\left(X_s-\acute{X}_s\right)i_{ds}(t)-\frac{1}{T_0}E_{qs}'(t)-\\
&\quad \left(\omega_s-\omega_r(t)\right)E_s'(t)-\frac{\omega_s L_m}{L_{rr}}v_{dr}(t),
\end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن L_{ss} اندوکتانس خودی استاتور، L_{rr} اندوکتانس خودی روتور، L_m اندوکتانس متقابل، R_r مقاومت روتور، X_s راکتانس استاتور، T_0 ثابت زمانی مدار روتور، $X_s' = \omega_s(L_{ss}-L_m^2/L_{rr})$ راکتانس گذرای استاتور، $\omega_r(t)$ سرعت زاویه‌ای روتور، $E_{ds}'(t)$ و $E_{qs}'(t)$ به ترتیب ولتاژهای مربوط به راکتانس گذرای استاتور در راستای محورهای d و q، $v_{dr}(t)$ ولتاژ روتور در راستای محور d، $v_{qr}(t)$ ولتاژ روتور در راستای محور q، $i_{ds}(t)$ و $i_{qs}(t)$ به ترتیب جریان‌های استاتور در راستای محورهای d و q و $v_{ds}(t)$ و $v_{qs}(t)$ ولتاژهای متناظر با این جریان‌ها هستند.



شکل ۱: دیاگرام توربین بادی با ژنراتور DFIG.

درایو توربین بادی شامل توربین، جعبه‌دنده‌ها، محورها و سایر اجزای مکانیکی است. در مطالعات پایداری سیستم قدرت استفاده از مدل دوجرمه برای درایو توربین دارای اهمیت زیادی است. دلیل این موضوع این است که محور توربین بادی از محوری که در نیروگاه‌های متداول توان استفاده می‌شود نسبتاً نرم‌تر است[۲۲]. معادلات مربوط به مدل دو جرمه درایو توربین بادی در زیر آورده شده است:

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega_r(t)}{dt} &= \frac{1}{2H_g}\left(T_{sh}(t)-T_e(t)\right),\\
\frac{d\theta(t)}{dt} &= \omega_b\left(\omega_t(t)-\omega_r(t)\right),\\
\frac{d\omega_t(t)}{dt} &= \frac{1}{2H_t}\left(T_m-T_{sh}(t)\right),
\end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن $\omega_t(t)$ و $\theta(t)$ به ترتیب سرعت توربین و زاویه دوگانه محور و H_t و H_g به ترتیب ثابت‌های اینرسی توربین و ژنراتور هستند. روابط مربوط به $T_e(t)$، گشتاور الکترومغناطیسی و $T_{sh}(t)$، گشتاور محور به صورت زیر می‌باشند:

$$T_e(t) = L_m\left(i_{qs}(t)i_{dr}(t)-i_{ds}(t)i_{qr}(t)\right), \tag{۳}$$

$$T_{sh}(t) = K_{sh}\theta(t)+D_{sh}\omega_b\left(\omega_t(t)-\omega_r(t)\right), \tag{۴}$$

که در آن K_{sh} ضریب سختی محور، D_{sh} ضریب میرایی آن و T_m گشتاور مکانیکی است که ورودی توان توربین بادی بوده و ثابت در نظر گرفته شده است.

با در نظر گرفتن معادلات (۱) تا (۴) مدل فضای حالت توربین بادی DFIG به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f\big(x(t)\big) + Bu(t), \\ x(t) &= \left[i_{ds}, i_{qs}, E'_{ds}, E'_{qs}, \omega_t, \omega_r, \theta\right]^T, \\ u(t) &= \left[v_{dr}(t), v_{qr}(t)\right]^T, \end{aligned} \tag{۵}$$

که در آن $x(t) \in R^7$ بردار متغیرهای حالت سیستم و $u(t) \in R^2$ بردار ورودی کنترل است.

۳- کنترل‌کننده زیربهینه غیرخطی SDRE

با توجه به ویژگی‌های بسیار جذاب کنترل SDRE و دینامیک‌های غیرخطی توربین بادی DFIG، در این بخش روش SDRE و مراحل مختلف جهت پیاده‌سازی آن برای دو هدف کنترلی طراحی پایدارساز و ردیاب به تفکیک بیان شده است. با توجه به اشتراک هر دوی این روش‌ها در بحث شبه‌خطی‌سازی ابتدا این مبحث در زیربخش ۳-۱ بیان شده است و سپس نیازمندی‌ها و مراحل لازم جهت طراحی کنترلی به منظور برآورده نمودن هر یک از اهداف فوق به روش SDRE به صورت مجزا آورده شده است.

۳-۱ شبه‌خطی‌سازی

سیستم غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t)\big) + Bu(t), \; x(0) = x_0,$$

که در آن $x(t) \in R^n$ و $u(t) \in R^m$ بوده و x_0 شرایط اولیه می‌باشد. در نگاه اول فرآیند شبه‌خطی‌سازی بسیار ساده به نظر می‌رسد. به این صورت که یک فاکتورگیری به صورت $f(x(t)) = A\big(x(t)\big)x(t)$ انجام می‌شود، که در آن $A\big(x(t)\big): R^n \to R^{n\times n}$ یک ماتریس تابعی می‌باشد. نکته قابل توجه در این فاکتورگیری وجود ساختارهای مختلف برای تجزیه $f(x(t))$ به صورت ضریبی از $x(t)$ است. برای نمونه چنانکه تابع $f(x(t))$ به صورت $f(x(t)) = A_1\big(x(t)\big)x(t)$ و $f(x(t)) = A_2\big(x(t)\big)x(t)$ باشند، آنگاه هر ترکیب خطی دیگری از $A_1(x(t))$ و $A_2(x(t))$ نیز یک ساختار شبه‌خطی دیگر را به صورت

$$A(x(t)) = \alpha(x(t))A_1(x(t)) + (1-\alpha(x(t))A_2(x(t)),$$

تشکیل می‌دهند، که در آن $\alpha(x(t))$، تابعی معلوم از $x(t)$ است. در رابطه با سیستم‌های غیراسکالر، بی‌نهایت راه جهت تشکیل ماتریس حالت $A(x(t))$ وجود دارد که این خود یکی از مزیت‌های روش SDRE است که درجه اضافی از آزادی را در اختیار طراح قرار می‌دهد.

۳-۲ طراحی پایدارساز به روش SDRE

طراحی پایدارساز به منظور صفر کردن تمامی حالت‌ها در سیستم انجام می‌شود. در این مورد از یک کنترل‌کننده SDRE افق نامحدود استفاده می‌شود که هدف از این کنترل‌کننده، صفر کردن تمامی حالت‌ها بوده در حالی که تابع هزینه زیر را کمینه می‌کند:

$$J\big(x_0, u(t)\big) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \big(x^T(t)Q\big(x(t)\big)x(t) + u^T(t)R\big(x(t)\big)u(t)\big)dt, \tag{۶}$$

که در آن $R(x(t))$ و $Q(x(t))$ ماتریس‌های وزنی وابسته حالت هستند و به ترتیب باید مثبت معین و مثبت نیمه معین باشند.

گام اصلی طراحی کنترل‌کننده SDRE حل معادله ریکاتی وابسته به حالت زیر است:

$$\begin{aligned} &A^T\big(x(t)\big)P\big(x(t)\big) + P\big(x(t)\big)A\big(x(t)\big) - \\ &P\big(x(t)\big)B\big(x(t)\big)R^{-1}\big(x(t)\big)B^T\big(x(t)\big)P\big(x(t)\big) \\ &+Q\big(x(t)\big) = 0. \end{aligned} \tag{۷}$$

پس از حل این معادله، قانون کنترل بهینه‌ای که تابع هزینه مرتبه دوم تعریف شده در رابطه (۶) را حداقل می‌سازد به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$u(t) = -R^{-1}\big(x(t)\big)B^T\big(x(t)\big)P\big(x(t)\big)x(t). \tag{۸}$$

نکته بسیار مهم آن است که معادله (۷) دارای حل یکتای مثبت معین متقارن $P(x(t))$ است اگر و تنها اگر زوج‌های $(A(x(t)), B(x(t)))$ و $(A(x(t)), Q^{1/2}(x(t)))$ به ترتیب کنترل‌پذیر نقطه به نقطه و رؤیت‌پذیر نقطه به نقطه باشند. کنترل‌پذیری نقطه به نقطه جفت $(A(x(t)), B(x(t)))$ و رؤیت‌پذیری نقطه به نقطه جفت $(A(x(t)), Q^{1/2}(x(t)))$ هم در صورتی برآورده می‌شود که به ترتیب ماتریس‌های کنترل‌پذیری نقطه به نقطه و رؤیت‌پذیری نقطه به نقطه زیر دارای رتبه کامل باشند:

$$\begin{aligned} \varphi_c &= [B(x) \;\; A(x)B(x) \; \dots \; A^{n-1}(x)B(x)], \\ \varphi_o &= \left[Q^{1/2}(x) \;\; Q^{1/2}(x)A(x) \dots Q^{1/2}(x)A^{n-1}(x)\right]^T \end{aligned}$$

به دلیل وجود نمایش‌های SDC بی‌شمار برای ماتریس $A(x(t))$، این امکان فراهم می‌شود که طراح بتواند با آزادی عمل بیشتری در انتخاب نمایش SDC مناسب، شرایط فوق را برآورده نماید.

۳-۳ طراحی کنترل‌کننده ردیاب زیربهینه SDRE

کنترل‌کننده ردیاب به منظور ردیابی یک مسیر مطلوب، توسط سیگنال خروجی موردنظر طراحی می‌گردد، به گونه‌ای که سیگنال خروجی می‌بایست مسیر مطلوب را با حضور کنترل‌کننده طراحی شده، دنبال نماید. سیستم غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + b(x(t))u(t),\quad x(0) = x_0,\ y(t) = h(x(t)), \tag{۹}$$

که در آن $x(t) \in R^n$ بردار حالت سیستم، $u(t) \in R^m$ بردار ورودی کنترل و $y(t) \in R^p$ بردار خروجی سیستم بوده و توابع $f(x(t)) : R^n \to R^n$، $b(x) \neq 0$، $h(x(t)) : R^n \to R^p$ و $b(x(t)) : R^n \to R^{n\times m}$ و $f(0) = h(0) = 0$ می‌باشند. در ادامه از روش مراجع [۲۴] و [۲۵] جهت طراحی کنترل‌کننده ردیاب به روش SDRE استفاده شده است.

مسأله ردیابی بهینه غیرخطی افق نامحدود با تابع هزینه تخفیف‌یافته [۲۴]، یافتن تابع کنترل $u(t)$ است به گونه‌ای که خروجی سیستم، مسیر مطلوب $y_d(t)$ را ردیابی کرده و تابع هزینه زیر کمینه شود:

$$J(x_0, u(t), y_d(t)) = \int_0^\infty e^{-2\gamma t} \left((y(t) - y_d(t))^T Q_1 (y(t) - y_d(t)) + u^T(t) R u(t) \right) dt \tag{۱۰}$$

که در آن $\gamma > 0$ عامل تخفیف بوده و $R \in R^{m\times m}$ و $Q_1 \in R^{q\times q}$ به ترتیب ماتریس‌های متقارن مثبت معین و مثبت نیمه معین هستند.

فرض کنید مسیر مطلوب دارای معادلاتی به صورت زیر باشد:

$$\dot{x}_d(t) = f_d(x_d), x_d(0) = x_{d0}, y_d(t) = h_d(x_d), \tag{۱۱}$$

که در آن $x_d(t) \in R^{n_d}$ و $y_d(t) \in R^p$ به ترتیب بردار حالت و خروجی مربوط به مسیر مطلوب بوده و توابع $f_d(x_d(t)) : R^{n_d} \to R^{n_d}$، $h_d(x_d(t)) : R^{n_d} \to R^p$ و $f_d(0) = h_d(0) = 0$ می‌باشند.

بر اساس ایده شبه‌خطی‌سازی، برای حل مسأله فوق ابتدا توابع $f(x(t))$، $h(x(t))$، $f_d(x_d(t))$ و $h_d(x_d(t))$ به فرم شبه‌خطی خود (SDC) بازنویسی می‌شوند:

$$f(x(t)) = F(x)x(t), f_d(x_d) = F_d(x_d)x_d(t),\quad h(x(t)) = H(x)x(t), h_d(x_d) = H_d(x_d)x_d(t), \tag{۱۲}$$

که در آن توابع به صورت $F(x(t)) : R^n \to R^{n\times n}$، $F_d(x_d(t)) : R^{n_d} \to R^{n_d\times n_d}$، $H(x(t)) : R^n \to R^{p\times n}$ و $H_d(x_d(t)) : R^{n_d} \to R^{p\times n_d}$ هستند. با استفاده از تعاریف $X(t) = e^{-\gamma t}[x^T(t)\ \ x_d^T(t)]^T \in R^{n+n_d}$، $U(t) = e^{-\gamma t}u(t)$ تابع هزینه (۷) به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$J(X_0, U(t)) = \int_0^\infty (X^T(t) Q(e^{\gamma t}X(t))\, X(t) + U^T(t) R U(t)) dt,\quad Q(e^{\gamma t}X(t)) = [H(x(t)\ \ -H_d(x_d(t))]^T\, Q_1 [H(x(t)\ \ -H_d(x_d(t))], \tag{۱۳}$$

در این صورت دینامیک متغیر حالت جدید $X(t)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\dot{X}(t) = -\gamma X(t) + e^{-\gamma t}[\dot{x}^T(t)\quad \dot{x}_d^T(t)]^T$$

اکنون با توجه به روابط (۹)، (۱۱) و (۱۲)، دینامیک‌های شبه‌خطی‌سازی شده بردار حالت $X(t)$ به صورت زیر خواهند بود:

$$\dot{X}(t) = \left(-\gamma I + \begin{bmatrix} F(x) & 0 \\ 0 & F_d(x_d) \end{bmatrix}\right) X(t) + \begin{bmatrix} b(x) \\ 0 \end{bmatrix} U(t) \triangleq A(e^{\gamma t}X(t))X(t) + B(e^{\gamma t}X(t))U(t), \tag{۱۴}$$

که در آن I و 0 به ترتیب ماتریس‌های واحد و صفر با ابعاد مناسب هستند. بنابراین یک مسأله تنظیم بهینه غیرخطی افق نامحدود توصیف شده توسط روابط (۱۳) و (۱۴) به جای مسأله ردیابی موجود حل خواهد شد. در نهایت قانون کنترل بهینه برای مسأله ردیابی موردنظر به صورت زیر حاصل می‌شود[۲۴]:

$$u(x(t), x_d(t)) = -R^{-1}B^T(x)P(x, x_d)[x^T(t)\ \ x_d^T(t)]^T,$$

که در آن ماتریس P، حل یکتای متقارن مثبت معین معادله ریکاتی زیر است:

$$A^T(e^{\gamma t}X(t))P(e^{\gamma t}X(t)) + P(e^{\gamma t}X(t))A(e^{\gamma t}X(t)) - P(e^{\gamma t}X(t))B(e^{\gamma t}X(t))R^{-1}B^T(e^{\gamma t}X(t))P(e^{\gamma t}X(t)) + Q(e^{\gamma t}X(t)) = 0.$$

در مرجع [۲۴] نشان داده شده است که قانون کنترل فوق منجر به ردیابی مجانبی سیگنال $y_d(t)$ توسط خروجی $y(t)$ می‌شود.

۴- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش ابتدا در قسمت ۴-۱ نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها در محیط نرم‌افزار متلب جهت طراحی کنترل‌کننده SDRE به منظور بهبود پایداری سیستم توربین بادی DFIG آورده شده است. شبیه‌سازی‌ها برای شرایط کاری مختلف سیستم شامل سرعت‌های مختلف باد انجام شده است. همچنین تحلیل مقادیر ویژه سیستم در حضور کنترل‌کننده SDRE پیشنهادی انجام شده است. در عین حال عملکرد مقاوم کنترل‌کننده‌ی SDRE در حضور نامعینی در پارامترهای سیستم بررسی شده است. در قسمت ۴-۲ نتایج حاصل از طراحی کنترل‌کننده ردیاب زیربهینه به روش SDRE جهت ردیابی سیگنال‌های مطلوب توان راکتیو استاتور و گشتاور الکترومغناطیسی ژنراتور DFIG که به صورت سیگنال‌های متغیر با زمان در نظر گرفته شده‌اند و بررسی عملکرد کنترل‌کننده ردیاب طراحی شده در حضور عدم قطعیت در پارامترهای سیستم آورده شده است.

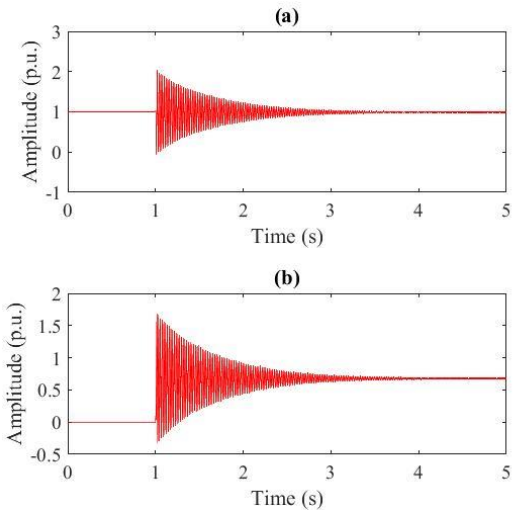
۴-۱ طراحی پایدارساز برای سیستم توربین بادی DFIG به روش SDRE

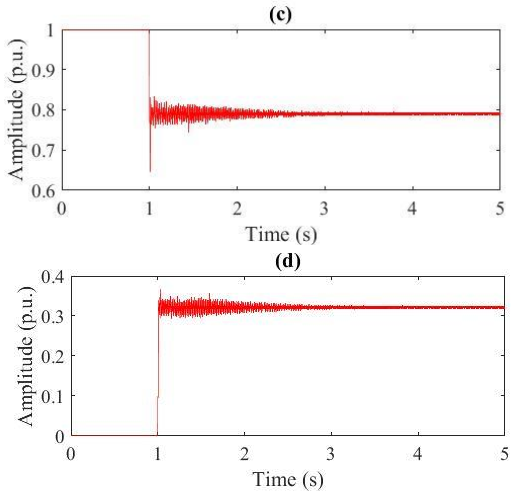
همانگونه که از معادلات ۱-۴ در بخش۲ مشاهده می‌شود، سیستم توربین بادی با ژنراتور DFIG یک سیستم غیرخطی است. مدلی که برای طراحی در این بخش استفاده شده است، یک مدل مرتبه ۷ با دو ورودی

کنترلی طبق روابط (۱) تا (۵) می‌باشد. مقادیر مربوط به پارامترهای سیستم در جدول (۱)، بخش ضمیمه آورده شده است. برای طراحی کنترل‌کننده به روش SDRE ابتدا ماتریس $A(x(t))$ به گونه‌ای انتخاب شده است که حتی اگر سیستم به طور کامل کنترل‌پذیر نقطه‌ای نباشد اما شرط پایدارپذیری نقطه‌ای جفت $(A(x(t)), B(x(t)))$ برآورده شود. پس از تعیین نمایش SDC مناسب، ماتریس‌های وزنی R و Q جهت طراحی کنترل‌کننده مورد نظر تعیین شده است. ماتریس‌های استفاده شده $A(x(t))$ و $B(x(t))$ جهت طراحی کنترلی به صورت آمده شده در پایین صفحه بعد می‌باشند.

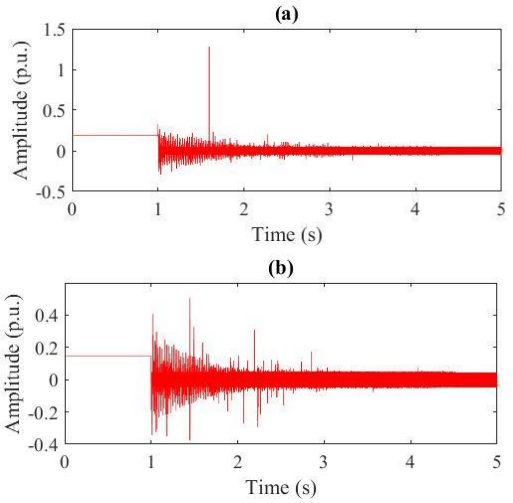
تذکر ۱: اگرچه روش‌هایی جهت انتخاب مدون ماتریس $A(X(t))$ وجود دارند [۲۷]، اما از میان بی‌شمار نمایش SDC ممکن، فقط یکی از آنها منجر به عملکرد بهینه سیستم حلقه بسته خواهد شدکه البته یافتن آن کار بسیار دشواری است. درنتیجه تنها قید مورد نظر جهت انتخاب $A(X(t))$ آن است که رابطه $f(X(t)) = A(X(t))X(t)$ برقرار باشد.

نتایج مربوط به شبیه‌سازی‌های انجام شده در حضور کنترل‌کننده SDRE پیشنهادی در شکل ۲ آورده شده است. نمودارهای (a) تا (d) در شکل ۲ به ترتیب مربوط به سیگنال‌های جریان استاتور و ولتاژ گذرای آن در راستای محورهای d و q هستند. فرض شده است که به سیستم در لحظه $t = 1s$ اغتشاشی اعمال شده است. سیگنال‌های فوق در حضور کنترل‌کننده SDRE طراحی‌شده، با میرا نمودن نوسانات به وجود آمده، به نقطه تعادل مطلوب خود تنظیم شده‌اند. نمودارهای (a) و (b) در شکل ۳ هم به ترتیب مربوط به $v_{dr}(t)$ و $v_{qr}(t)$، سیگنال‌های کنترلی تولید شده به روش SDRE می‌باشند.

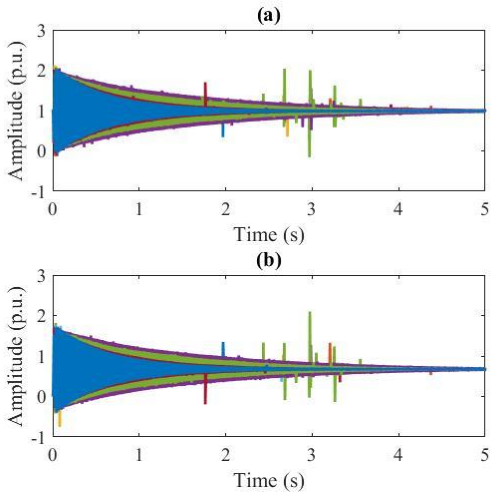




شکل ۲: نمودارهای (a)، (b)، (c) و (d) به ترتیب مربوط به سیگنال‌های جریان استاتور $i_{ds}(t)$، $i_{qs}(t)$ و ولتاژ گذرای آن $E'_{ds}(t)$، $E'_{qs}(t)$.

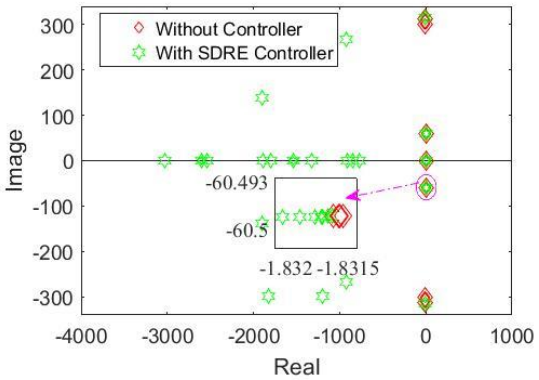


شکل ۳: نمودارهای (a) و (b) به ترتیب مربوط به سیگنال‌های ولتاژ روتور در راستای محور d، $v_{dr}(t)$ و محور q، $v_{qr}(t)$، ورودی‌های کنترل حاصل شده به روش SDRE.



شکل ۴: نمودارهای (a) و (b) به ترتیب مربوط به سیگنال‌های جریان استاتور در راستای محور d، $i_{ds}(t)$ و محور q، $i_{qs}(t)$، با وجود نامعینی در پارامترها.

همانطور که گفته شد یکی از مزایای کنترل‌کننده SDRE مقاوم بودن ذاتی آن است. بنابراین انتظار می‌رود که کنترل‌کننده طراحی شده دارای پایداری مقاوم مناسبی باشد. به منظور تأیید این ویژگی، شبیه‌سازی‌هایی در حضور نامعینی در پارامترهای سیستم با وجود کنترل‌کننده SDRE انجام شده است. به این منظور، طراحی کنترل‌کننده بر مبنای مقادیر نامی پارامترها (p^*) انجام شده است در حالی که مقادیر پارامترها در مدل فضای حالت سیستم به صورت مجموع مقدار نامی و یک مقدار تصادفی، $(p^* \pm \varepsilon p^*)$ در نظر گرفته شده است. (p^*) در اینجا نشان دهنده مقدار نامی پارامترها است و در شبیه‌سازی‌های انجام شده $\varepsilon = 0.1 * rand$ در نظر گرفته شده است. با قرار دادن مقادیر تغییر یافته‌ی پارامترهای مدل به صورت ذکر شده در بالا و پس از ۵۰ بار اجرای برنامه در متلب، نتایج حاصل شده، نشان از عملکرد مقاوم سیستم در برابر عدم قطعیت در پارامترهای مدل سیستم در حضور کنترل‌کننده پیشنهادی دارد. به گونه‌ای که در حضور کنترل‌کننده طراحی شده با همان پارامترهای قبلی، سیگنال‌های مربوطه باز هم به مقادیر نقاط تعادل خود میرا شده‌اند. به عنوان مثال نمودارهای (a) و (b) در شکل ۴ که به ترتیب مربوط به سیگنال‌های جریان استاتور در راستای محورهای d و q هستند، در حضور نامعینی در پارامترهای سیستم دچار نوساناتی شده‌اند ولی این نوسانات حول نقطه تعادل سیستم بوده و در نهایت مقادیر سیگنال‌ها به مقادیر نقطه تعادل خود میرا شده‌اند.



شکل ۵: مقادیر ویژه سیستم در نقطه کار نامی آن (سرعت سنکرون) با حضور کنترل‌کننده SDRE

به منظور بررسی عملکرد کنترل‌کننده‌ی SDRE پیشنهادی در بهبود حاشیه پایداری سیستم مورد نظر، تحلیل مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته نیز انجام شده است. شبیه‌سازی‌ها برای شرایط کاری مختلف توربین بادی شامل سرعت سنکرون $(V_{\text{Wind}} = 12\,m/s)$، سرعت زیرسنکرون $(V_{\text{Wind}} = 8\,m/s)$ و سرعت فوق‌سنکرون $(V_{\text{Wind}} = 15\,m/s)$ انجام شده است. نتایج به دست آمده گواه برتوانایی قابل توجه کنترل‌کننده‌ی SDRE طراحی شده، در افزایش حاشیه پایداری سیستم است. نمودار مربوط به مقادیر ویژه سیستم کنترل شده، در سرعت باد نامی در شکل ۵ نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود با وجود کنترل کننده SDRE ، قسمت‌های حقیقی مقادیر ویژه سیستم منفی‌تر شده‌اند و حاشیه پایداری سیستم به میزان قابل توجهی افزایش یافته است. البته برخی از مکان‌ها که مربوط به مدهای کنترل‌ناپذیر سیستم هستند، بدون تغییر باقی

$$A(x(t)) = \begin{bmatrix} -\frac{\omega_b\omega_s}{X'_s}\left(R_s + \frac{X_s - X'_s}{\omega_s T_0}\right) & \omega_b\omega_s & \frac{\omega_b\omega_r(t)}{X'_s} & -\frac{\omega_b}{X'_s T_0} & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_b\omega_s & -\frac{\omega_b\omega_s}{X'_s}\left(R_s + \frac{X_s - X'_s}{\omega_s T_0}\right) & \frac{\omega_b}{X'_s T_0} & \frac{\omega_b\omega_r(t)}{X'_s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega_b}{T_0}(X_s - X'_s) & -\frac{\omega_b}{T_0} & \omega_b(\omega_s - \omega_r(t)) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\omega_b}{T_0}(X_s - X'_s) & 0 & -\omega_b(\omega_s - \omega_r(t)) & -\frac{\omega_b}{T_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2H_t}D_{sh}\omega_b & \frac{1}{2H_t}D_{sh}\omega_b & -\frac{K_{sh}}{2H_t} \\ -\frac{E'_{ds}(t)}{2H_g\omega_s} & -\frac{E'_{qs}(t)}{2H_g\omega_s} & 0 & 0 & \frac{1}{2H_g}D_{sh}\omega_b & -\frac{1}{2H_g}D_{sh}\omega_b & \frac{K_{sh}}{2H_g} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_b & -\omega_b & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(x(t)) = \begin{bmatrix} \frac{\omega_b\omega_s L_m}{X'_s L_r} & 0 & 0 & \frac{\omega_b\omega_s L_m}{L_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega_b\omega_s L_m}{X'_s L_r} & -\frac{\omega_b\omega_s L_m}{L_r} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

مانده‌اند. در عین حال حضور کنترل‌کننده SDRE طراحی شده در هر سه شرایط کاری سرعت سنکرون، زیرسنکرون و فوق‌سنکرون توربین بادی، افزایش حاشیه پایداری سیستم را به دنبال داشته است که نشان می‌دهد عملکرد کنترل‌کننده طراحی شده محدود به یک نقطه کار خاص نیست و این خود یک مزیت قابل توجه در رابطه با کنترل‌کننده SDRE پیشنهادی، می‌باشد. در اینجا جهت اختصار، نتایج فقط برای نقطه کار نامی سیستم (سرعت نامی باد) نمایش داده شده است.

۴-۲ طراحی کنترل‌کننده ردیاب زیربهینه برای توربین بادی DFIG به روش SDRE

مدل استفاده شده به منظور طراحی کنترل‌کننده ردیاب با استفاده از روش SDRE جهت ردیابی سیگنال‌های مطلوب گشتاور الکترومغناطیسی و توان راکتیو استاتور، به فرم معادلات زیر می‌باشد[۲۶]:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = A\big(x(t)\big)x(t) + B\big(x(t)\big)u(t) + D_t v_s + H_t \\
&x(t) = [\omega_r(t), i_{ds}(t), i_{qs}(t), i_{dr}(t), i_{qr}(t)]^T \\
&y(t) = Cx(t) \qquad (۱۵) \\
&u(t) = [v_{dr}(t), v_{qr}(t)]^T, \\
&v_s(t) = [v_{ds}(t), v_{qs}(t)]^T,
\end{aligned}$$

که در آن سیگنال‌های سرعت روتور، جریان استاتور و جریان روتور به عنوان متغیرهای حالت در نظر گرفته شده‌اند. ماتریس خروجی C یک ماتریس واحد مرتبه ۵ بوده و ماتریس‌های $A\big(x(t)\big)$، $B\big(x(t)\big)$، D_t و H_t به صورت زیر می‌باشند:

$$A\big(x(t)\big) = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_s}{l_s\sigma} & a_3 & -\frac{l_m R_r}{l_s l_r \sigma} & -\frac{l_m}{l_s\sigma}\omega_r(t) \\ 0 & -a_3 & -\frac{R_s}{l_s\sigma} & \frac{l_m}{l_s\sigma}\omega_r(t) & -\frac{l_m R_r}{l_s l_r \sigma} \\ 0 & -\frac{l_m R_s}{l_s l_r \sigma} & \frac{l_m}{l_r\sigma}\omega_r(t) & -\frac{R_r}{l_r\sigma} & a_4 \\ 0 & -\frac{l_m}{l_r\sigma}\omega_r(t) & -\frac{l_m R_s}{l_s l_r \sigma} & -a_4 & -\frac{R_r}{l_r\sigma} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{l_m}{l_s l_r \sigma} & 0 \\ 0 & \frac{l_m}{l_s l_r \sigma} \\ \frac{1}{l_r\sigma} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_r\sigma} \end{bmatrix}, D_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{l_s\sigma} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l_s\sigma} \\ -\frac{l_m}{l_s l_r \sigma} & 0 \\ 0 & -\frac{l_m}{l_s l_r \sigma} \end{bmatrix}, H_t = \begin{bmatrix} \frac{n_p T_m}{2J} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

که در آن l_s اندوکتانس خودی استاتور، l_r اندوکتانس خودی روتور، J ممان اینرسی، n_p تعداد قطب‌ها، $\sigma = 1 - l_m^2/l_s l_r$، $i_{dr}(t)$ و $i_{qr}(t)$ به ترتیب جریان‌های روتور در راستای محورهای d و q و $T_e(t)$ سیگنال گشتاور الکترومغناطیسی می‌باشند. متغیرهای a_1، a_2، a_3 و a_4 موجود در رابطه $A(x(t)$، به صورت $a_1 = (3n_p^2 l_m/8J)i_{qr}(t)$، $a_2 = -(3n_p^2 l_m/8J)i_{dr}(t)$، $a_3 = \omega_s - ((\sigma-1)/\sigma)\omega_r(t)$ و $a_4 = \omega_s - \omega_r(t)/\sigma$ تعریف می‌شوند. خروجی‌های مورد نظر جهت ردیابی توسط کنترل‌کننده طراحی شده، سیگنال‌های گشتاور الکترومغناطیسی و توان راکتیو استاتور هستند که می‌بایست با استفاده از کنترل‌کننده طراحی شده، سیگنال‌های مرجع متغیر با زمان خود را ردیابی نمایند. توان راکتیو استاتور به منظور ثابت نگه داشتن مقدار ضریب توان الکتریکی، pf_s در ترمینال استاتور، تحت کنترل قرار گرفته است. روابط موجود برای سیگنال‌های گشتاور الکترومغناطیسی، $T_e(t)$، و توان راکتیو استاتور، $Q_s(t)$، به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}
&T_e(t) = i_r^T(t) M_{T_e} i_s(t),\ M_{T_e} = \tfrac{3}{4} n_p l_m \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
&Q_s(t) = v_s^T(t) M_Q i_s(t),\ M_Q = \tfrac{3}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

سیگنال‌های مربوط به توان راکتیو استاتور و گشتاور الکترومغناطیسی ژنراتور DFIG با استفاده از ضریب توان الکتریکی pf_s، به صورت $Q_s(t) = (p_s(t)/pf_s)\sqrt{1-pf_s^2}$، $p_s(t) \approx \omega_s T_e(t)$ در ارتباط هستند. یعنی عملا با کنترل یکی از دو سیگنال $T_e(t)$ یا $Q_s(t)$، عمل ردیابی مقادیر مطلوب انجام می‌شود.

با تشکیل ماتریس کنترل‌پذیری سیستم به صورت زیر، به بررسی کنترل‌پذیری نقطه‌ای زوج $(A\big(x(t)\big), B\big(x(t)\big))$ پرداخته شده است.

$$\begin{aligned}
\varphi_c &= \Big[B\big(x(t)\big)\ \ A\big(x(t)\big)B\big(x(t)\big) \ldots \ \big(A\big(x(t)\big)\big)^4 B\big(x(t)\big)\Big] \\
&= [\varphi_c^1\ \varphi_c^2\ \varphi_c^3\ \varphi_c^4\ \varphi_c^5\ \varphi_c^6\ \varphi_c^7\ \varphi_c^8\ \varphi_c^9\ \varphi_c^{10}],
\end{aligned}$$

که در آن φ_c^1 تا φ_c^{10} ستون‌های ماتریس کنترل‌پذیری نقطه‌ای به دست آمده می‌باشند. با یافتن یک کهاد مرتبه ۵ از ماتریس φ_c، که دترمینان غیرصفر داشته باشد می‌توان نتیجه گرفت که φ_c، دارای رتبه کامل بوده و سیستم به طور کامل کنترل‌پذیر نقطه‌ای است. با تشکیل کهاد حاصل از ۵ ستون اول ماتریس φ_c جهت بررسی کنترل‌پذیری نقطه‌ای زوج $(A\big(x(t)\big)B\big(x(t)\big))$، به محاسبه دترمینان ماتریس حاصل پرداخته شد.

$$[\varphi_c^1\ \varphi_c^2\ \varphi_c^3\ \varphi_c^4\ \varphi_c^5],$$

$$\varphi_c^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 20.9 \\ 0 \\ 21.9 \\ 0 \end{bmatrix}, \varphi_c^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20.9 \\ 0 \\ 21.9 \end{bmatrix}, \varphi_c^3 = \begin{bmatrix} 2.4\times 10^4 a_1 \\ -7.5\times 10^3 \\ 20.9a_3 - 3.9\times 10^3 \\ -7.3\times 10^3 \\ 21.9a_3 - 4.1\times 10^3 \end{bmatrix},$$

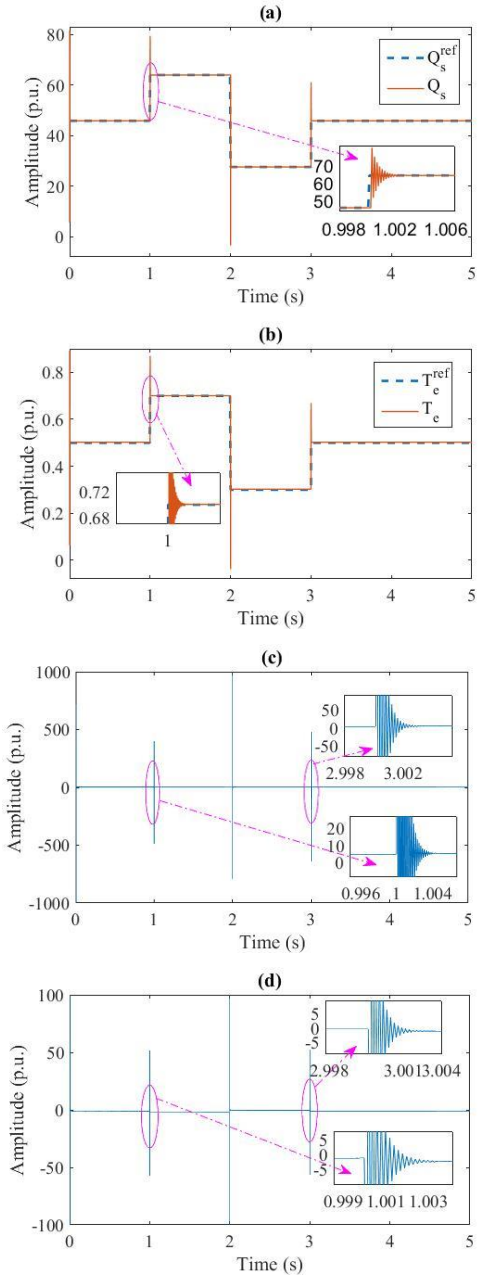
$$\varphi_c^4 = \begin{bmatrix} -2.4\times 10^4 a_2 \\ -20.9a_3 + 3.9\times 10^3 \\ -7.5\times 10^3 \\ -21.9a_3 + 4.1\times 10^3 \\ -7.3\times 10^3 \end{bmatrix},$$

$$\varphi_c^5 = \begin{bmatrix} -2.3\times 10^6 a_1 - 2.4\times 10^4 a_2 a_3 - 1.1\times 10^7 \\ 1.8\times 10^4 a_3^2 - 7.8\times 10^4 a_3 - 1.9\times 10^{11} \\ -9.3\times 10^3 a_3 + 2.8\times 10^6 \\ -21.9 a_3^2 - 1.03\times 10^5 a_3 + 1.8\times 10^6 \\ -9.2\times 10^3 a_3 + 2.7\times 10^6 \end{bmatrix}$$

که در آن $a_1 = i_{qr}(t)$، $a_2 = i_{dr}(t)$ و $a_3 = \omega_r(t)$ است. دترمینان ماتریس فوق، برابر عبارت $0.0037(a_1 - 1.6\times 10^{17} a_2)$ می‌باشد. با توجه به تعریف a_1 و a_2 و با توجه به مقادیر نقطه تعادل آنها، می‌توان از جمله a_1 در برابر جمله $1.6\times 10^{17} a_2$ صرف‌نظر کرد. درنتیجه دترمینان ماتریس فوق برابر $6.1\times 10^{14} a_2$ است که با توجه به نقطه تعادل، نتیجه می‌گیریم که این دترمینان مقداری غیرصفر دارد. بنابراین زوج $(A(X(t)), B(X(t)))$ در نظر گرفته شده، کنترل‌پذیر نقطه به نقطه است. به طور مشابه با تشکیل ماتریس رؤیت‌پذیری نقطه‌ای، می‌توان رؤیت‌پذیری نقطه‌ای زوج $(A(X(t)), (Q(X(t))^{1/2})$ را بررسی کرد. می‌توان نشان داد که این شرط در رابطه با نمایش SDC استفاده شده، برقرار بوده است که به دلیل حجم بالای محاسبات از آوردن آن‌ها امتناع شده است.

به منظور طراحی کنترل‌کننده ردیاب برای سیستم توصیف شده توسط روابط (۱۵)، پارامترهای موجود به صورت جدول (۲) در بخش ضمیمه تعریف شده‌اند. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها در شکل ۶ نمایش داده شده است. همانگونه که از شکل موج‌ها پیداست سیگنال‌های توان راکتیو استاتور و گشتاور الکترومغناطیسی به خوبی مقادیر مرجع خود را دنبال می‌کنند. به گونه‌ای که عمل ردیابی با سرعتی خوب و با میرا کردن نوسانات به وجود آمده‌ی حاصل از تغییر سیگنال مرجع، انجام شده است. در واقع ردیابی سیگنال مطلوب توان راکتیو استاتور نشان دهنده ثابت ماندن ضریب توان الکتریکی pf_s، است. شبیه‌سازی‌ها در شرایطی انجام گرفته که مقادیر مطلوب در نظر گرفته شده برای سیگنال‌های $T_e(t)$ و $Q_s(t)$، به صورت زیر تغییر یافته‌اند:

- ابتدا $Q_s^{ref} = 45.86\ \text{Var}$ و $T_e^{ref} = 0.5\ \text{N.m}$ می‌باشد.
- در $t = 2\ \text{s}$ مقادیر مطلوب به $Q_s^{ref} = 63.97\ \text{Var}$ و $T_e^{ref} = 0.7\ \text{N.m}$ تغییر می‌یابند.
- در $t = 3\ \text{s}$ مقادیر مرجع به صورت $Q_s^{ref} = 27.6\ \text{Var}$ و $T_e^{ref} = 0.3\ \text{N.m}$ می‌باشد.
- در زمان $t = 4\ \text{s}$ مقادیر مطلوب به $Q_s^{ref} = 45.86\ \text{Var}$ و $T_e^{ref} = 0.5\ \text{N.m}$ تغییر یافته‌اند.



شکل ۶: نمودارهای (a)، (b)، (c) و (d) به ترتیب مربوط به عملکرد ردیابی توان راکتیو استاتور و گشتاور الکترومغناطیسی در حضور کنترل‌کننده SDRE و سیگنال‌های $v_{dr}(t)$ و $v_{qr}(t)$، سیگنال‌های کنترلی طراحی شده.

همانگونه که از نمودارهای (a) و (b) در شکل ۶ مشاهده می‌شود سیگنال‌های توان راکتیو استاتور و گشتاور الکترومغناطیسی در حضور کنترل‌کننده پیشنهادی، به خوبی مقادیر مرجع خود را دنبال نموده‌اند به گونه‌ای که خطای ردیابی مقادیر مرجع، عملا قابل چشم‌پوشی است و این تأییدی بر توانایی قابل توجه روش SDRE جهت طراحی کنترل‌کننده ردیاب برای سیستم غیرخطی بحث شده است. نمودارهای (c) و (d) در شکل ۶ هم به ترتیب سیگنال‌های ولتاژ روتور، $v_{dr}(t)$ و $v_{qr}(t)$،

سیگنال‌های کنترلی تولید شده به روش SDRE جهت ردیابی سیگنال‌های مطلوب ذکرشده، می‌باشند.

به منظور بررسی عملکرد کنترل‌کننده ردیاب طراحی شده در مواجهه با عدم قطعیت در پارامترهای سیستم هم شبیه‌سازی‌هایی در حضور نامعینی ۱۰ درصدی پارامترها، همانند آنچه برای پایدارساز طراحی شده به روش SDRE در زیربخش ۴-۱ بیان شد، انجام شده است. نتایج به دست آمده در اینجا هم مقاوم بودن عملکرد این کنترل‌کننده را در حضور عدم قطعیت در پارامترهای سیستم تأیید می‌نماید. به گونه‌ای که در حضور اغتشاش وارده به سیستم، عمل ردیابی مقادیر مطلوب سیگنال‌های گشتاور الکترومغناطیسی و توان راکتیو استاتور به خوبی در حضور کنترل‌کننده ردیاب طراحی شده به روش SDRE انجام می‌شود. جهت رعایت اختصار از آوردن شکل موج‌های مربوطه اجتناب شده است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش غیرخطی و زیربهینه SDRE به منظور بهبود عملکرد سیستم غیرخطی توربین بادی مجهز به ژنراتور DFIG به کار گرفته شده است. روش پیشنهادی با دو هدف بهبود حاشیه پایداری سیستم و ردیابی همزمان سیگنال‌های مطلوب گشتاور الکترومغناطیسی و توان راکتیو استاتور استفاده شده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها برای کنترل‌کننده طراحی شده به روش SDRE، تأییدی بر عملکرد مطلوب سیستم در حضور کنترل‌کننده پیشنهادی برای نقاط کار مختلف سیستم است. علاوه بر شبیه‌سازی‌های حوزه زمان، تحلیل مقادیر ویژه هم برای شرایط کاری مختلف شامل سرعت‌های مختلف باد، با وجود کنترل‌کننده SDRE انجام گرفته است که نشان از افزایش قابل توجه حاشیه پایداری سیستم کنترل شده به روش SDRE دارد. در عین حال نتایج به دست آمده در رابطه با ردیاب بهینه طراحی شده به روش SDRE، نشان از ردیابی مطلوب سیگنال‌های مرجع متغیر با زمان گشتاور الکترومغناطیسی و توان راکتیو استاتور دارد. در نهایت بررسی عملکرد سیستم کنترل شده به روش SDRE در هر دو حالت تنظیم‌کننده و ردیاب در حضور عدم قطعیت در پارامترهای آن، تأییدی بر ویژگی مقاوم بودن ذاتی این کنترل‌کننده در حضور نامعینی در پارامترهای سیستم است. با توجه به نتایج قابل توجه حاصل شده در این مقاله که ناشی از طراحی منظم کنترل‌کننده‌های SDRE بوده است، می‌توان انتظار داشت که در صورت اعمال روش پیشنهادی در محیط نرم‌افزار FAST، نتایج قابل قبولی استخراج گردد، که این گام یک گام اساسی جهت پیاده‌سازی عملی روش پیشنهادی است.

مراجع

[1] A. Grauers, “Efficiency of three wind energy generator system,” IEEE Transactions on Energy Conversion, vol. 11, no. 3, pp. 650–657, 1996.

[2] A. Feijoo, J. Cidras, and C. Carrillo, “A third order model for the doubly-fed induction machine,” Electric Power Systems Research, vol. 56, no. 1, pp. 121–127, 2000.

[3] R.G. Almeida, J.A.P. Lopes, and J.A.L. Barreiros, “Improving power system dynamic behavior through doubly fed induction machines controlled by static converter using fuzzy control,” IEEE Transactions on Power Systems, vol. 19, no. 4, pp. 1942–1950, 2004.

[4] A. Mullane, G. Lightbody, and R. Yacamini, “Wind-turbine fault ride through enhancement,” IEEE Transactions on Power Systems, vol. 20, no. 4, pp. 1929–1937, 2005.

[5] J.L. Rueda, D.G. Colomé, and I. Erlich, “Assessment and enhancement of small signal stability considering uncertainties,” IEEE Transactions on Power Systems, vol. 24, no. 1, pp. 198–207, 2009.

[6] L.B. Shi, C. Wang, L.Z. Yao, L.M. Wang, and Y.X. Ni, “Analysis of impact of grid-connected wind power on small signal stability,” Wind Energy, vol. 14, no. 4, pp. 517–537, 2011.

[7] S.Q. Bu, W. Du, H.F. Wang, Z. Chen, L.Y. Xiao, and H.F. Li, “Probabilistic analysis of small-signal stability of large-scale power systems as affected by penetration of wind generation,” IEEE Transactions on Power Systems, vol. 27, no. 2, pp. 762–770, 2012.

[8] L. Yang, G.Y. Yang, Z. Xu, Z.Y. Dong, K.P. Wong, and X. Ma, “Optimal controller design of a doubly-fed induction generator wind turbine system for small signal stability enhancement,” IET Generation, Transmission and Distribution, vol. 4, no. 5, pp. 579–597, 2010.

[9] F. Wu, X.P Zhang, P. Ju, and M.J.H. Sterling, “Decentralized nonlinear control of wind turbine with doubly fed induction generator,” IEEE Transactions on Power Systems, vol. 23, no. 2, pp. 613–621, 2008.

[10] F. Wu, Z. Zhang, K. Godfrey, and P. Ju, “Small signal stability analysis and optimal control of a wind turbine with doubly fed induction generator,” IET Generation, Transmission and Distribution, vol. 1, no. 5, pp. 751–760, 2007.

[11] I. Munteanu, S. Bacha, A.I. Bratcu, J. Guiraud, and D. Roye, "Energy-reliability optimization of wind energy conversion systems by sliding mode control," IEEE Transactions on Energy Conversion, vol. 23, no. 3, pp. 985–997, 2008.

[12] C. Evangelista, P. Puleston, and F. Valenciaga, "A simple robust controller for power maximization of a variable-speed wind turbine," International Journal of Renewable Energy Research, vol. 34, no. 10, pp. 924–932, 2009.

[13] H.T. Jadhav and R. Roy, "A comprehensive review on the grid integration of doubly fed induction generator," Electrical Power and Energy Systems, vol. 49, no. 1, pp. 8–18, 2013.

[14] R. Pena, J.C. Clare, and G.M. Asher, "Doubly fed induction generator using back to back PWM converters and its application to variable speed wind energy generation," IEEE Proceedings**,** Electric Power Applications, vol. 143, no. 3, pp. 231–241, 1996.

[15] T. Cimen, "Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependent Riccati equation (SDRE) methode," Annual Reviews in control, vol. 34, no. 1, pp. 32–51, 2010.

[16] T. Cimen, "Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 35, no. 4, pp. 1025–1047, 2012.

[17] K. Reif, F. Sonnemann, and R. Unbehauen, "Nonlinear state observation using H_∞–filtering Riccati design," IEEE Transactions on Automatic control, vol. 44, no. 1, pp. 203–208, 1999.

[18] Y. Batmani and H. Khaloozadeh, "On the design of suboptimal sliding manifold for a class of nonlinear uncertain time-delay systems," International Journal of Systems Science, vol. 47, no. 11, pp. 1–10, 2015.

[19] Y. Batmani and H. Khaloozadeh, "On the design of observer for nonlinear time-delay systems," Asian Journal of Control, vol. 16, no. 4, pp. 1191–1201, 2014.

[20] Y. Batmani and H. Khaloozadeh, "Optimal chemotherapy in cancer treatment: state dependent Riccati equation control and extended Kalman filter," Optimal Control Applications and Methods, vol. 34, no. 5, pp. 562–577, 2013.

[21] T.D. Do, H.H. Choi, and J.W. Jung, "SDRE-based near optimal control system design for PM synchronous motor," IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 59, no. 11, pp. 4063–4074, 2012.

[22] P. Kundur, "Power System Stability and Control," (McGraw-Hill, New York, 1994).

[23] V. Khmatov, "Induction Generators for Wind Power," (Multi-science Publishing Company Ltd, Brentwood, 2005).

[24] Y. Batmani, M. Davoodi, and N. Meskin, "Nonlinear suboptimal tracking controller design using state-dependent Riccati equation technique," IEEE Transactions on Control Systems Technology, pp. 1–7, 2016, DOI: 10.1109/TCST.2016.2617285.

[25] Y. Batmani, M. Davoodi, and N. Meskin, "On design of suboptimal tracking controller for a class of nonlinear systems," American Control Conference (ACC), IEEE, pp. 1094–1098, 2016, DOI: 10.1109/ACC.2016.7525061.

[26] F. Ornelas-Tellez, J. Jesus Rico, and R. Ruiz-Cruz, "Optimal tracking for state-dependent coefficient factorized nonlinear systems," Asian Journal of Control, vol. 16, no. 3, pp. 890–903, 2014.

[27] Jeff S. Shamma, and R. Cloutier. James "Existence of SDRE stabilizing feedback." IEEE Transactions on Automatic Control vol. 48, no. 3, pp. 513-517, 2003.

ضمیمه : پارامترهای مورد نیاز جهت طراحی

جدول ۱ : پارامترهای سیستم توربین بادی DFIG به منظور طراحی کنترل‌کننده پایدارساز [۸].

اندوکتانس استاتور	$L_s = 0.171$ p.u.
اندوکتانس روتور	$L_r = 0.156$ p.u.
ضریب سختی شفت	$K_{sh} = 10$ p.u.
راکتانس استاتور	$X_s = 94.4$ p.u.
ثابت اینرسی توربین	$H_t = 3$ s
سرعت نامی روتور	$\omega_{rated} = 1.1\ \omega_s$
فرکانس پایه	$\omega_b = 314$ rad/s
سرعت سنکرون	$\omega_s = 1$ p.u.
مقاومت استاتور	$R_s = 0.00706$ p.u.
مقاومت روتور	$R_r = 0.005$ p.u.
اندوکتانس متقابل	$L_m = 3.5$ p.u.
ثابت اینرسی ژنراتور	$H_g = 0.5$ s
ضریب میرایی توربین	$D_{sh} = 0.01$
ثابت زمانی مدار روتور	$T_0 = 24.2051$

جدول ۲ : پارامترهای سیستم توربین بادی DFIG به منظور طراحی کنترل‌کننده ردیاب [۲۶].

سرعت سنکرون	$\omega_s = 240\pi/n_p$
فرکانس پایه	$\omega_b = 2\pi 60$
تعداد قطب‌ها	$n_p = 4$
اندوکتانس مغناطیسی	$L_m = 0.4775$
ممان اینرسی	$J = 0.0024\ \mathrm{kg.m^2}$
اندوکتانس روتور	$L_r = 0.5008$
راکتانس مغناطیسی	$X_m = 180\ \Omega$
راکتانس نشتی استاتور	$X_{ls} = 8.8\ \Omega$
راکتانس نشتی روتور	$X_{lr} = 8.8\ \Omega$
مقاومت استاتور	$R_s = 12.5\ \Omega$
مقاومت روتور	$R_r = 3.9\ \Omega$
اندوکتانس استاتور	$L_s = 0.5008$

Industrial Control Center of Excellence
K.N. Toosi University of Technology

Journal of Control
(ISSN 2008-8345)

A Joint Publication of the Iranian Society of Instrument and Control Engineers and the Industrial Control Center of Excellence of K.N. Toosi University of Technology, Vol. 10, No. 4, Winter 2017.

Publisher: **I**ranian **S**ociety of **I**nstrumentation and **C**ontrol **E**ngineers

Managing Director: Prof. Iraj Goodarznia

Editor-in-Chief: Prof. Ali Khaki-Sedigh

Tel: 84062317

Email: sedigh@kntu.ac.ir

Assistant Editor: Prof. Hamid Khaloozadeh, Dr. Alireza Fatehi, Dr. Mahdi Aliyari Shoorehdeli

Executive Director: Dr. Mahdi Aliyari Shoorehdeli, Tel: 84062403, Email: aliyari@kntu.ac.ir

Editorial Board:

Prof. A. Khaki-Sedigh, Prof. I. Goodarznia, Prof. H. Khaloozadeh, Prof. P. Jabedar-Maralani, Prof. A. Ghafari, Dr. H.R. Momeni (Associate Prof), Prof. S.K. Nikravesh, Prof. M. Shafiee, Prof. B. Moshiri.

Advisory Board:

Dr. H.R. Momeni, Prof. B. Moshiri, Prof. M. Shafiee, Prof. A. Khaki-Sedigh, Prof. P. Jabedar-Maralani, Prof. A. Ghaffari, Prof. H. Khaloozadeh, Prof. H.R. Taghirad, Dr. K. Masroori, Dr. M.T. Bathaei, Dr. M.T. Hamidi-Beheshti, Dr. F. Jafarkazemi, Dr. R. Amjadifard, Prof. S.A. Moosavian, Prof. M. Teshnelab, Prof. M. Haeri, Prof. S.A. Safavi, Prof. H. Seyfi, Dr. A. Fatehi, Prof. M.R. Akbarzadeh- Toutounchi, Prof. M. Golkar, Prof. N. Pariz, Dr. M. Javadi, Dr. J. Heirani-Nobari, Prof. F. Hossein- Babaei, Dr. B. Moaveni, Dr. M. Aliyari Sh., Dr. M. Arvan , Prof. M. Tavakoli-Bina, Dr. F. Farivar, Dr. M. Ayati, Dr. M. Mansouri, Dr. R. Havangi, Dr. A. Ramezani, Dr. A. Ghasemi, Prof. M. Farrokhi, Dr. Y. Batmani.

Site Manager: Nasibeh Farahani

Page Editor: Kiyan Khaloozadeh

I S I C E

Journal of Control

ISSN 2008-8345

Industrial Control Center of Excellence
K.N. Toosi University of Technology

A Joint Publication of the Iranian Society of Instrument and Control Engineers and the Industrial Control Center of Excellence of K.N. Toosi University of Technology

Vol. 10, No. 4, Winter 2017

Contents

A Systematic Approach to Design and Analysis of Univariate Alarm Systems Using Penalty Approaches 1

Jafar Taheri Kalani, Kourosh Aslansefat, Gholamreza Latif Shabgahi

Containment Control of Linear Multi-Agent Systems with Non-Identical Agents Using Dynamic Output Feedback 17

Hamed Haghshenas, Mohammad Ali Badamchizadeh, Mahdi Baradarannia

Designing a Stability Algorithm for Swarm Robots in the Cases of Obstacle Avoidance and Absence of Tendency to Aggregate based on Lagrange Equations 29

Ali Ghaffari, Alireza Khodayari, Abbas Pourmahmou

Chaos Control in a Gear Transmission System via a Novel Adaptive Terminal Sliding Mode Control Approach with Nonlinearity in the Control Input 45

Hadi Delavari, Milad Mohadeszadeh

Nonlinear Kalman Filter Design for the Fractional Order Nonlinear Stochastic Systems with Student's t measurement Noise 55

Hamed Torabi, Naser Pariz, Ali Karimpour

Robust Nonlinear Optimal Control of DFIG based Wind Turbine 69

Azadeh Azizi, Ali Hesami Naghshbandi, Yazdan Batmany