مجله کنترل

ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752

نشریه علمی- پژوهشی
انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران- قطب علمی کنترل صنعتی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
جلد ۱۲، شماره ۱، بهار ۱۳۹۷

فهرست مقالات

www.joc-isice.ir

مجله کنترل

ISSN (print) 2008-8345

ISSN (online) 2538-3752

نشریه علمی- پژوهشی، انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران- قطب کنترل صنعتی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، جلد ۱۲، شماره ۱، بهار ۱۳۹۷

پست الکترونیک: control@isice.ir

صاحب امتیاز: انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران

مدیر مسئول: پروفسور ایرج گودرزنیا

سردبیر: پروفسور علی خاکی صدیق- تلفن: ۸۴۰۶۲۳۱۷- پست الکترونیکی: sedigh@kntu.ac.ir

آدرس محل کار: خیابان دکتر شریعتی، پل سیدخندان، دانشکده مهندسی برق دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

شورای سردبیری: پروفسور علی خاکی صدیق، پروفسور حمید خالوزاده، دکتر علیرضا فاتحی، دکتر مهدی علیاری شوره دلی.

دبیر اجرایی: دکتر مهدی علیاری شوره دلی -تلفن ۸۴۰۶۲۴۰۳ - پست الکترونیکی aliyari@kntu.ac.ir

به نام خدا

فهرست مقالات

مجله کنترل، مجله‌ای علمی – پژوهشی است که دربرگیرنده تازه‌ترین نتایج تحقیقات نظری و کاربردی در علوم مختلف مرتبط با مهندسی کنترل و ابزار دقیق می‌باشد. مقالات ارسالی به مجله کنترل می‌بایست به زبان فارسی و دارای چکیده انگلیسی باشند. از میان مباحث مورد نظر این مجله می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

۱) مدلسازی، شناسایی، شبیه سازی، پیش بینی، بهینه سازی و پایش عملکرد سیستم‌ها.

۲) تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل پیشرفته از قبیل سیستم‌های کنترل خطی و غیرخطی، سیستم‌های کنترل تطبیقی، کنترل مقاوم و کنترل بهینه، سیستم‌های کنترل هوشمند، سیستم‌های کنترل تصادفی، سیستم‌های کنترل گسسته پیشامد و ترکیبی، سیستم‌های ابعاد وسیع، سیستم‌های کنترل چندمتغیره.

۳) مکاترونیک و رباتیک.

۴) ابزار دقیق و سیستم‌های ترکیب داده و اطلاعات سنسوری.

۵) اتوماسیون صنعتی از قبیل سیستم‌های کنترل گسترده، رابط انسان – ماشین، سیستم‌های ایمنی و تشخیص عیب، تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل کسری، شناسایی، تشخیص و جبران عیب در سیستم‌ها، سیستم‌های کنترل پیچیده، سیستم‌های زمان حقیقی و سیستم‌های کنترل تحت نظارت، کنترل مدل چندگانه.

کاربردهای مورد علاقه مجله "کنترل"، وسیع بوده و می تواند در برگیرنده موارد زیر باشد:

۱) سیستم‌های هدایت و ناوبری.

۲) فرآیندهای صنعتی شامل فرآیندهای شیمیایی و بیوتکنولوژی.

۳) تولید و توزیع نیروی برق.

۴) انرژی های تجدیدپذیر.

۵) مهندسی محیط زیست و هواشناسی.

۶) سیستم‌های اقتصادی و مالی.

۷) سیستم‌های اطلاعاتی، مخابراتی و شبکه های صنعتی.

۸) مهندسی پزشکی، مهندسی زیستی و سامانه‌های زیستی.

۹) نانو کنترل.

۱۰) پردازش داده.

۱۱) مهندسی خودرو.

۱۲) سیستم های حمل و نقل.

از کلیه پژوهشگران و کارشناسان فعال در زمینه های مرتبط با مهندسی کنترل و ابزار دقیق دعوت بعمل می آید تا مقالات و نتایج آخرین دستاوردهای علمی و پژوهشی خود را به این مجله ارسال نمایند. خواهشمند است مقالات خود را به صورت الکترونیکی از طریق سایت مجله www.joc-isice.ir ارسال فرمایید. برای کسب اطلاعات بیشتر و دریافت نحوه تهیه و ارسال مقالات می توانید به سایت مجله مراجعه نمایید.

شیوه تدوین

متن مقالات شامل چکیده، بدنه مقاله، مراجع و زیرنویس‌ها باید با فونت B Zar ۱۲ و با فاصله double میان خطوط، در صفحات A4 یک ستونی و تحت نرم‌افزار Word تهیه گردد.

آدرس نویسندگان

آدرس پستی کامل همه نویسندگان همراه با شماره تلفن و دورنگار(فکس) و نشانی پست الکترونیک(email) نویسنده عهده‌دار مکاتبات در برگه مستقلی چاپ و به همراه مقاله ارسال گردد.

چکیده

هر مقاله باید شامل، عنوان (فارسی و انگلیسی)، چکیده (فارسی و انگلیسی) مقاله در حداکثر ۲۰۰ واژه، کلیدواژه (فارسی و انگلیسی) در حداکثر ۵ واژه باشد.

تصاویر و عکس‌ها

در هنگام ارسال مقاله جهت داوری نیازی به ارسال اصل تصاویر و عکس‌ها نمی‌باشد، ولی رونوشت ارسالی باید واضح باشد. پس از تایید مقاله، ارسال اصل تصاویر و عکس‌ها جهت چاپ مقاله ضروری می‌باشد.

مراجع

به کلیه مراجع باید در متن ارجاع داده شده باشد. مراجع باید با شماره مشخص گردند و جزئیات آنها به شرح زیر در پایان مقاله به ترتیب حروف الفبای نویسندگان ظاهر گردد:

مقالات

[شماره مرجع] نام خانوادگی و علامت اختصاری اول نام، سال انتشار یا تاریخ برگزاری، "عنوان مقاله"، *نام کامل نشریه یا کنفرانس*، شماره مجله یا شماره جلد، شماره صفحات.

کتابها

[شماره مرجع] نام خانوادگی و نام کامل همه نویسندگان، *عنوان کتاب*، نام مترجم (در صورت وجود)، نام کامل ناشر، سال انتشار.

واحدها

کلیه مقالات باید از واحد استاندارد SI (متریک) در تمام بخشهای مقاله استفاده نمایند. در کنار واحد SI می‌توان از واحد انگلیسی در داخل پرانتز نیز استفاده نمود.

طول مقالات

حداکثر تعداد صفحات مقاله ۱۵ صفحه است که معادل حدود ۷۵۰۰ واژه است. برای چاپ صفحات بیشتر و یا رنگی لازم است هزینه‌ای معادل ۱۰۱۰۰۰۰ ریال (۲۵ دلار آمریکا) برای هر صفحه پرداخت گردد.

فرآیند ارسال مقاله

مقالات قابل چاپ در مجله شامل مقالات کامل پژوهشی، مقالات کوتاه و یادداشتهای پژوهشی است. مقالات ارسالی نباید در هیچ مجله داخلی و یا خارجی چاپ شده باشد و یا در حال داوری باشد.

- برای ارسال مقاله خود به سایت مجله به آدرس www.joc-isice.ir مراجعه نموده و طبق دستورالعمل مندرج در سایت عمل نمایید.
- مقالات جهت داوری به داوران متخصص ارسال می‌گردد. در پایان تایید یا رد هر مقاله توسط هیئت تحریریه مجله انجام خواهد پذیرفت. سردبیر مجله نتیجه داوری را برای نویسنده عهده دار مکاتبات ارسال خواهد نمود.
- درصورتی‌که نیاز به تصحیح مقاله باشد، تصحیحات باید تنها محدود به موارد ذکرشده باشد. در سایر موارد نویسنده لازم است سردبیر را در جریان هرگونه تغییر و یا تصحیح دیگری قرار دهد. درهرصورت مسئولیت صحت و سقم مطالب بر عهده نویسنده خواهد بود.

حق کپی

در صورت تایید مقاله، نویسندگان لازم است فرم انتقال حق انتشار آن به "انجمن مهندسان کنترل و ابزاردقیق ایران" را تکمیل و به همراه اصل مقاله ارسال نماید. نویسندگان لازم است موافقت کتبی دارندگان حق کپی بخشهایی از مقاله که از مراجع و منابع دیگر نسخه‌برداری شده است را دریافت و به دفتر مجله ارسال نمایند.

مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۲، شماره ۱، بهار ۱۳۹۷، صفحه ۱۱-۱

طراحی قانون کنترل تعقیب مبتنی بر رویتگر برای کلاسی از سیستم‌های فازی چندجمله‌ای

روزبه سلیمی طاری[۱]، علی معرفیان‌پور[۲]

[۱] فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد، گروه کنترل، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران ، ایران، kurosh_st@yahoo.com

[۲] استادیار، گروه کنترل، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران ، ایران، moarefian@srbiau.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۶/۶/۶، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۶/۷/۱۳)

چکیده: در این مقاله قانون کنترل تعقیب برای کلاسی از سیستم های فازی چندجمله ای طراحی می شود. قانون کنترل از دو بخش رویتگر و فیدبک حالت تشکیل شده است. با استفاده از یک رویتگر فازی چندجمله ای، بردار حالت سیستم تخمین زده می‌شود و بهره فیدبک چندجمله‌ای، از بردار حالت تخمین زده شده برای تحقق قانون کنترل استفاده می‌کند. قانون کنترل فازی چندجمله‌ای، بردار حالت فرایند را به تعقیب از بردار حالت یک مدل مرجع پایدار تحت شاخص نرم بینهایت وادار می‌کند. شرایط کافی برای تعیین پارامترهای قانون کنترل در قالب یک برنامه مجموع مربعات ارائه خواهد شد. برای نشان دادن کارایی روش ارائه شده طراحی قانون کنترل و شبیه‌سازی در قالب چند مثال انجام می‌شود.

کلمات کلیدی: سیستم‌های فازی چندجمله ای، قانون کنترل تعقیب، رویتگر چندجمله‌ای، بهره فیدبک چندجمله‌ای، شاخص نرم بی‌نهایت، مجموع مربعات.

Observer-Based Tracking Control Design for a Class of Fuzzy Polynomial Systems

Roozbeh Salimi Tari, Ali Moarefianpour

Abstract: In this paper tracking control law design for a class of polynomial fuzzy systems is considered. The control law consists of an observer and a state feedback. A polynomial fuzzy observer estimates the state vector of the plant, and then the estimated state vector is employed by a polynomial feedback gain to fulfill the control law. The polynomial fuzzy control law leads the state vector of the plant to track the state vector of a stable reference model subject to an H_∞ performance. Sufficient conditions for determination of the control law parameters will be presented in the form of an SOS program. Additionally simulation results are presented to show the merits of the proposed control design approach.

Keywords: Polynomial fuzzy systems, tracking control law, polynomial observer, polynomial feedback gain, H_∞ performance, sum of squares (SOS).

۱- مقدمه

پایدارسازی و تعقیب همواره به صورت دو مسأله مهم در کنترل سیستم‌های غیر خطی مورد توجه محققین بوده است. در سالهای اخیر مطالعات گوناگونی در رابطه با طراحی کنترل تعقیب سیستم‌های غیرخطی انجام شده است [۱-۴]. رویکردهای مختلفی اعم از فیدبک حالت و فیدبک خروجی در طراحی قانون کنترل مورد توجه قرار می-گیرند. یکی از روش‌های طراحی قانون کنترل مبتنی بر فیدبک خروجی که در طراحی قانون کنترل پایدارساز و همچنین تعقیب مورد استفاده قرار می‌گیرند، روش مبتنی بر طراحی رویتگر است. اهمیت این روش نسبت به طراحی فیدبک خروجی این است که کنترلگر نه تنها می‌تواند هدف کنترل را برآورده کند، بلکه به تخمینی از بردار حالت سیستم نیز دسترسی دارد.

یک دسته از سیستم‌های فازی که مطالعات زیادی بر روی آن انجام شده است، سیستم فازی تاکاگی-سوگنو است که از آن جمله می‌توان به طراحی قانون کنترل پایدارساز [۵-۹] طراحی قانون کنترل تعقیب [۱۰-۱۴] و طراحی رویتگر فازی [۶-۲۲] اشاره کرد. مطالعات انجام شده در زمینه رویتگرهای فازی به دو دسته عمومی قابل تقسیم‌بندی هستند. در دسته اول طراحی رویتگر به منظور طراحی قانون کنترل فیدبک انجام می‌شود که دلیل اصلی آن عدم دسترسی یا غیرقابل اندازه‌گیری بودن بردار حالت است [۶-۹, ۱۱, ۱۲, ۱۴-۱۷, ۲۳]. دسته دوم مطالعاتی است که در آن طراحی رویتگر به دلایلی مانند شناسایی عیب در حلقه‌های کنترلی انجام می‌شود [۱۸-۲۰, ۲۲].

در سال‌های اخیر دسته‌ای از سیستم‌های فازی مورد توجه محققین قرار گرفته است که به سیستم‌های فازی چندجمله‌ای معروف هستند [۲۴-۲۸]. تفاوت این دسته از سیستم‌ها با سیستم‌های فازی تاکاگی-سوگنو این است که در بخش تالی قواعد فازی، سیستم‌هایی غیرخطی به فرم چندجمله‌ای ظاهر می‌شوند. مطالعات انجام شده نشان می‌دهد که این دسته از سیستم‌ها نسبت به سیستم‌های فازی تاکاگی-سوگنو توانایی بهتری در توصیف سیستم‌های غیرخطی دارند [۲۴-۲۸]. ارائه شرایط پایداری و پایدارسازی سیستم‌های فازی چندجمله‌ای [۲۴-۲۸] و طراحی قانون کنترل پایدارساز مبتنی بر رویتگر برای سیستم‌های فازی چندجمله-ای مورد توجه محققین بوده است [۲۹-۳۲]. یکی از اولین مطالعات در خصوص طراحی رویتگر برای سیستم‌های فازی چندجمله‌ای در [۲۹] دیده می‌شود که در آن بر اساس روش مجموع مربعات [۳۳, ۳۴] برای سه دسته از سیستم‌های فازی چندجمله‌ای قانون کنترل پایدارساز طراحی شده است. به طور مشابه در مقاله [۳۰] طراحی رویتگر فازی چندجمله‌ای برای سیستم‌های غیرخطی که در معرض یک اغتشاش خارجی محدود قرار دارند انجام شده است که با استفاده از روشی موسوم به بسط سری تیلور مدل فازی چندجمله‌ای سیستم استخراج شده است. در مقاله [۳۵] بر اساس روش ارائه شده در [۲۹] از رویتگر فازی چندجمله‌ای جهت شناسایی پدیده رسوب در یک دستگاه تبادل حرارتی استفاده شده است. در مرجع [۳۲] طراحی کنترلگر برای پایدارسازی یک سیستم فازی چندجمله‌ای با در نظر گرفتن اغتشاش خارجی انجام شده است که در آن ابتدا به طراحی رویتگر حالت و رویتگر اغتشاش برای فرایند پرداخته شده و سپس قانون کنترل پایدارساز برای سیستم حلقه بسته طراحی شده است.

در مقابل مطالعات انجام شده در خصوص پایدارسازی سیستم‌های فازی چندجمله‌ای، مطالعات کمتری در خصوص حل مساله تعقیب برای سیستم‌های فازی چندجمله‌ای در مراجع دیده می‌شود. از جمله معدود مطالعات انجام شده در این زمینه می‌توان به [۳۶] اشاره کرد که در آن مسأله تعقیب فیدبک خروجی برای سیستم‌های فازی چندجمله‌ای با تضمین یک شاخص تعقیب نرم بی‌نهایت انجام شده است. در مرجع [۳۶] قانون کنترل به گونه‌ای عمل می‌کند که بردار حالت فرایند تحت کنترل از بردار حالت یک مدل مرجع پایدار تبعیت کند. یکی دیگر از مراجعی که مساله تعقیب را مورد توجه قرار داده مرجع [۳۷] است که در آن مسأله کنترل تعقیب برای سیستم‌های شبکه‌ای غیرخطی با غیرخطی‌گری‌های اسکالر تکراری مورد بررسی قرار گرفته است. در [۳۷] ابتدا یک مدل فازی چندجمله‌ای برای مدلسازی سیستم غیرخطی ارائه شده و سپس مشابه آنچه در [۳۶] انجام شده است یک کنترلگر فازی چندجمله‌ای به گونه‌ای طراحی شده است که حالت‌های سیستم بردار حالت یک مدل مرجع پایدار را دنبال کند. شرایط کافی برای طراحی کنترلگر برای تعقیب بردار حالت مدل مرجع توسط سیستم فازی چندجمله‌ای بر اساس مجموع مربعات به دست آمده است که پایداری اتفاقی[1] و شرط کارایی نرم بی‌نهایت را نیز تضمین می‌کند.

در مقاله حاضر طراحی قانون کنترل تعقیب برای سیستم‌های فازی چندجمله‌ای با فرض عدم دسترسی به بردار حالت سیستم تحت کنترل، مورد توجه قرار گرفته است. تفاوت عمده مطالعه انجام شده در مقاله حاضر با مطالعه انجام شده در مرجع [۳۶] این است که در مقاله حاضر برای طراحی قانون کنترل از رویتگر حالت بهره گرفته شده است در حالیکه در مرجع [۳۶] طراحی فیدبک خروجی انجام شده و هیچ تخمینی از بردار حالت سیستم تحت کنترل صورت نگرفته است. تفاوت اصلی مقاله حاضر با مقاله [۲۹] که در آن به طراحی رویتگر پرداخته شده این است که در مرجع [۲۹] تنها مساله پایدارسازی سیستم حلقه بسته مد نظر محققین بوده است در صورتیکه در مقاله حاضر هدف نویسندگان طراحی قانون کنترل تعقیب است. بعلاوه در مرجع [۲۹] فرض شده بردار خروجی سیستم ثابت و مستقل از حالت‌های سیستم است در صورتیکه در مقاله حاضر ماتریس خروجی به طور کلی وابسته به بردار حالت سیستم در نظر گرفته شده است.

در بخش ۲ مقدمات ریاضی مورد نیاز ارائه می‌شوند. معرفی مدل فازی چندجمله‌ای در بخش ۳ انجام خواهد شد. بخش ۴ به تعریف مساله

[1] Stochastic stability

اختصاص دارد. در بخش ۵ شرایط طراحی قانون کنترل در قالب یک مساله مجموعه مربعات فرموله خواهد شد. در بخش ۶ با شبیه‌سازی سه مثال، کارایی روش ارائه شده نشان داده می‌شود و در نهایت بخش ۷ به نتیجه‌گیری از بحث اختصاص دارد.

۲- مقدمات ریاضی

یک تک‌جمله‌ای[1] از $x(t) \in \mathbb{R}^n$ تابعی است به صورت $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ که در آن $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ اعداد صحیح غیرمنفی هستند. چندجمله‌ای $P(x(t))$ به صورت حاصل جمع خطی تک‌جمله‌ای‌هایی از $x(t)$ با ضرایب ثابت است. چندجمله‌ای $P(x(t))$ به فرم مجموع مربعات است اگر چندجمله‌ای‌های $f_1(x), \dots, f_m(x)$ به‌گونه‌ای وجود داشته باشند به طوریکه بتوان $P(x(t))$ را به صورت $P(x(t)) = \sum_{i=1}^{m} f_i^2(x(t))$ نوشت [۳۸]. اگر $M = M^T$ یک ماتریس مربعی باشد عبارت $M \geq 0$، $M > 0$، $M \leq 0$ و $M < 0$ به ترتیب نشان دهنده مثبت نیمه معین، مثبت معین، منفی نیمه معین و منفی معین بودن ماتریس M هستند. همچنین $\mathcal{L}\{M\} = M + M^T$ تعریف می‌شود.

لم ۱- متمم شور[۳۹]: فرض کنید ماتریس‌های $A(x) = A(x)^T$ و $D(x) = D(x)^T$ باشند. در اینصورت عبارت‌های زیر معادل هستند

الف- $\begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ B(x)^T & D(x) \end{bmatrix} < 0$

ب- $A(x) < 0\,,\ A(x) - B(x)D(x)^{-1}B(x)^T < 0$

ج- $D(x) < 0\,, D(x) - B(x)^T A(x)^{-1} B(x) < 0$

لم ۲- سیستم دینامیکی

$$\dot{x} = f(x, \omega) \tag{۱}$$

را در نظر بگیرید که در آن x بردار حالت سیستم و ω یک سیگنال خارجی است. فرض کنید تابع $V(t)$ وجود دارد به گونه‌ای که

$$\begin{gathered} V(t) > 0 \\ \dot{V}(t) \leq -x^T x + \sigma^2 \omega^T \omega \end{gathered} \tag{۲}$$

که در آن σ یک مقدار تعیین شده است، در اینصورت بهره انرژی سیستم از ورودی ω تا خروجی $\tilde{x}$ محدود است.

اثبات- با انتگرالگیری از طرفین عبارت دوم رابطه (۲) نسبت به زمان و با فرض پایداری سیستم می‌توان نوشت:

$$\int_0^\infty x^T x \,\mathrm{d}t - V(0) \leq \sigma^2 \int_0^\infty \omega^T \omega \,\mathrm{d}t \tag{۳}$$

رابطه اخیر بیان کننده محدود بودن بهره انرژی سیستم یا همان معیار نرم بی‌نهایت است. ■

لم ۳- فرض کنید ماتریس‌های $A < 0$، $D > 0$ و ماتریس‌های B و C با ابعاد مناسب وجود دارند. در اینصورت اگر

$$\begin{bmatrix} A & \frac{1}{\sqrt{2}}(-B + C^T) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-B^T + C) & -D \end{bmatrix} \leq 0$$

آنگاه

$$A - BD^{-1}C \leq 0$$

اثبات- با استفاده از لم مکمل شور می‌توان گفت:

$$\begin{bmatrix} A & \frac{1}{\sqrt{2}}(-B + C^T) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-B^T + C) & -D \end{bmatrix} \leq 0$$

معادل است با

$$\begin{aligned} A + \frac{1}{2}(-B + C^T)D^{-1}(-B + C^T)^T \\ = A + \frac{1}{2}BD^{-1}B^T - \frac{1}{2}BD^{-1}C \\ - \frac{1}{2}C^T D^{-1} B^T + \frac{1}{2} C^T D^{-1} C \leq 0 \end{aligned} \tag{۴}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} A - \frac{1}{2}(BD^{-1}C + C^T D^{-1} B^T) \\ \leq -\frac{1}{2}C^T D^{-1} C - \frac{1}{2} BD^{-1}B^T \end{aligned} \tag{۵}$$

با توجه به اینکه سمت راست نامساوی اخیر مثبت نیست بنابراین اثبات تمام است. ■

۲-۱- مدل فازی چندجمله‌ای سیستم زمان پیوسته

یک سیستم فازی با r قاعده را در نظر بگیرید که قاعده i ام آن به صورت

$$\begin{gathered} \text{If } z_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } z_p(t) \text{ is } M_{ip} \\ \text{Then } \dot{x}(t) = A_i(x(t))x(t) + B_i(x(t))u(t) \\ i = 1,2,\dots,r \end{gathered} \tag{۶}$$

تعریف می‌شود ([۲۸]). همانطور که ملاحظه می‌شود بخش تالی سیستم فازی (۶) شامل ماتریس‌های چندجمله‌ای $A_i(x(t))$ و $B_i(x(t))$ که این نکته تفاوت اصلی میان سیستم‌های فازی چندجمله‌ای و سیستم‌های فازی تاکاگی-سوگنو است. می‌توان گفت سیستم‌های فازی چندجمله‌ای تعمیم یافته سیستم‌های فازی تاکاگی-سوگنو هستند. بعبارتی در رابطه (۶) اگر ماتریس‌های A_i و B_i ثابت باشند سیستم فازی توصیف شده همان سیستم تاکاگی-سوگنو خواهد بود. مدل دینامیکی سیستم (۶) به صورت

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) \{A_i(x(t))x(t) + B_i(x(t))u(t)\} \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) C_i(x(t)) x(t) \end{gathered} \tag{۷}$$

[1] Monomial

قابل نمایش است که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی، $y \in \mathbb{R}^q$ خروجی سیستم هستند. ماتریس‌های $A_i(x(t)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $B_i(x(t)) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ و $C_i(x(t)) \in \mathbb{R}^{q\times n}$ که ماتریس‌های چندجمله‌ای از x هستند، به ترتیب ماتریس سیستم، ماتریس ورودی و ماتریس خروجی هستند. در رابطه (۷) عبارت M_{ij} تابع عضویت متناظر با i امین قانون و j امین متغیر مقدم و $z_j(t)$ متغیر مقدم است که در حالت کلی می‌تواند هرکدام از متغیرهای حالت و یا متغیر قابل اندازه‌گیری خارج از سیستم باشد.

۳- تعریف مساله

در این مقاله دسته خاصی از سیستم‌های فازی چندجمله‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرند که به صورت

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\{A_i(x(t))x(t) + B_i(\zeta(t))u(t)\}$$
$$y(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))C_i(x(t))x(t) \quad (۸)$$

نشان داده می‌شوند. در رابطه (۸) ماتریس سیستم تابعی از بردار حالت سیستم است ولی ماتریس ورودی به طور صریح تابعی از بردار حالت سیستم نیست. پارامتر $\zeta(t)$ یک بردار متغیر با زمان است که می‌تواند یک متغیر خارجی قابل اندازه‌گیری باشد.

برای وادار کردن بردار حالت سیستم (۸) به پیروی از بردار حالت یک سیستم مرجع پایدار، قانون کنترل به صورت

$$u(t) = \sum_{j=1}^{r} h_j(z(t))\, K_j(\hat{x}(t))(\hat{x}(t) - x_r(t)) \quad (۹)$$

در نظر گرفته می‌شود که در آن $K_j(\hat{x}(t))$ یک ماتریس چندجمله‌ای از بردار حالت رویتگر فازی

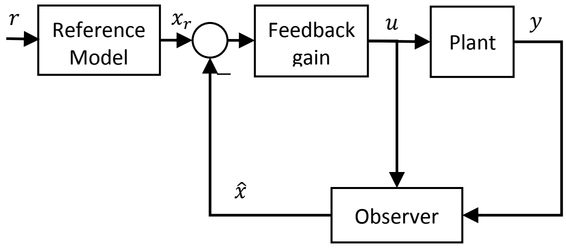
$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\{A_i(\hat{x}(t))\hat{x}(t) + B_i(\zeta(t))u(t) + L_i(\hat{x}(t))(y(t) - \hat{y}(t))\} \quad (۱۰)$$
$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))C_i(\hat{x}(t))\hat{x}(t)$$

است. بعبارتی $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت رویتگر فازی و $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^q$ بردار خروجی رویتگر است. در رابطه (۹) متغیر $x_r(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت مدل مرجع پایدار

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r r(t)$$
$$y_r(t) = C x_r(t) \quad (۱۱)$$

است که در آن $r(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی مرجع، $y_r(t) \in \mathbb{R}^q$ بردار خروجی مدل مرجع، $A_r \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $B_r \in \mathbb{R}^{n\times m}$ و $C_r \in \mathbb{R}^{q\times n}$ به‌ترتیب ماتریس سیستم، ماتریس ورودی و ماتریس خروجی مدل مرجع پایدار هستند.

دیاگرام بلوکی سیستم حلقه بسته در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱: دیاگرام بلوکی سیستم حلقه بسته

٤- طراحی قانون کنترل مبتنی بر رویتگر

در این قسمت شرایط طراحی قانون کنترل تعقیب برای سیستم (۸) به ازای قانون کنترل (۹) به صورت مجموع مربعات ارائه خواهد شد. برای سادگی و اجتناب از پیچیده شدن روابط، متغیر زمان در روابط حذف می‌شود. بعبارتی $x(t)$ به صورت x نشان داده خواهد شد. همانطور که در قسمت قبل اشاره شد در مقاله حاضر دو هدف اصلی تعقیب و تخمین بردار حالت سیستم به طور همزمان مورد توجه است. برای این منظور خطای تخمین بردار حالت سیستم، به صورت

$$e = x - \hat{x} \quad (۱۲)$$

تعریف می‌شود. بر اساس رابطه اخیر و با استناد به رابطه‌های (۸) و (۱۰) دینامیک خطای تخمین به صورت

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z)h_j(z)\Big[[A_i(x)x + B_i u] - [A_i(\hat{x})\hat{x} + B_i u + L_i(\hat{x})(C_j(x)x - C_j(\hat{x})\hat{x})]\Big] \quad (۱۳)$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z)h_j(z)[(A_i(x)x - A_i(\hat{x})\hat{x} - L_i(\hat{x})(C_j(x)x - C_j(\hat{x})\hat{x})]$$

قابل استخراج است. با تغییر متغیر $A_i(x)x - A_i(\hat{x})\hat{x} = \bar{A}_i(x,\hat{x})e$ و $C_j(x)x - C_j(\hat{x})\hat{x} = \bar{C}_j(x,\hat{x})e$ معادله (۱۳) به‌صورت

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z)h_j(z)\left(\bar{A}_i(x,\hat{x}) - L_i(\hat{x})\bar{C}_j(x,\hat{x})\right)e \quad (۱۴)$$

قابل بیان است. رابطه اخیر دینامیک خطای تخمین را توصیف می‌کند که در آن $L_i(\hat{x})$ بهره رویتگر است و در حالت کلی می‌تواند یک چندجمله‌ای از بردار حالت رویتگر باشد.

برای اینکه قانون کنترل، اهداف پایدارسازی و تعقیب را به طور همزمان فراهم کند سیستم جدیدی به صورت

$$\dot{\tilde{x}} = \sum_{i=1}^{r} h_i(z) \sum_{j=1}^{r} h_j(z)\left[\tilde{A}_{ij}\tilde{x} + \tilde{E}_i r\right] \tag{۱۵}$$

در نظر گرفته می‌شود که در آن

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i(x) + B_i(\zeta)K_j(\hat{x}) & -B_i(\zeta)K_j(\hat{x}) & A_i(x) - A_r \\ 0 & \bar{A}_i - L_i(\hat{x})\bar{C}_j & 0 \\ 0 & 0 & A_r \end{bmatrix} \tag{۱۶}$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x - x_r \\ e \\ x_r \end{bmatrix}, \tilde{E}_i = \begin{bmatrix} -B_r \\ 0 \\ B_r \end{bmatrix}$$

که در آن، $\bar{A}_i = \bar{A}_i(x,\hat{x})$ و $\bar{C}_j = \bar{C}_j(x,\hat{x})$ در نظر گرفته شده است.

قضیه ۱- سیستم (۱۵) را در نظر بگیرید. اگر ماتریس‌های $X_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $X_{22} \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $X_{33} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و چندجمله‌ای $\epsilon_{2_{ij}}(x) \ge 0$ و $\epsilon_{1_i} > 0$ به ازای $i,j = 1,\dots,r$ و ضریب $\sigma > 0$ وجود داشته باشند به‌گونه‌ای که

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & X_{33} \end{bmatrix} - \epsilon_{1_i} I \ \text{ is SOS} \\ -\left(\Omega_{ij}(x) + \epsilon_{2_{ij}}(x) I\right) \ \text{ is SOS} \end{gathered} \tag{۱۷}$$

که در آن

$$\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{(A_i^x + B_iK_j)X_{11}^{-1}\} + \mathcal{L}\{B_iK_j\} & * & * & * & * & * \\ -(B_iK_j)^T & \mathcal{L}(X_{22}\bar{A}_i - Z_i\bar{C}_j) & * & * & * & * \\ (A_i^x - A_r)^T & 0 & \mathcal{L}\{X_{33}A_r\} & * & * & * \\ -B_r^T & 0 & B_r^T X_{33} & -\sigma^2 I & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X_{11}^{-1} - I + B_iK_j\right)^T & 0 & 0 & 0 & -I & * \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X_{11}^{-1} - I + B_iK_j\right)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \tag{۱۸}$$

برقرار باشند آنگاه به ازای قانون کنترل (۹) بهره انرژی از ورودی مرجع تا خطای تعقب و خطای تخمین بردار حالت محدود خواهد بود. در رابطه اخیر برای اجتناب از بزرگ شدن روابط $B_i = B_i(\zeta)$، $K_j = K_j(\hat{x})$، $A_i = A_i(\hat{x})$، $A_i^x = A_i(x)$ و $Z_i = Z_i(\hat{x}) = X_{22}L_i(\hat{x})$ در نظر گرفته شده است.

اثبات- تابع

$$V(t) = \tilde{x}^T X \tilde{x} \tag{۱۹}$$

را به عنوان کاندیدای تابع لیاپانوف در نظر بگیرید که در آن

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & X_{33} \end{bmatrix} \tag{۲۰}$$

مشتق زمانی تابع $V(t)$ در امتداد مسیر حالت‌های سیستم به صورت

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{\tilde{x}}^T X \tilde{x} + \tilde{x}^T X \dot{\tilde{x}} \\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z)h_j(z)\left\{\tilde{x}^T {\tilde{A}_{ij}}^T X\tilde{x} + r^T {\tilde{E}_i}^T X \tilde{x} \right. \\ &\qquad \left. + \tilde{x}^T X \tilde{A}_{ij}\tilde{x} + \tilde{x}^T X \tilde{E}_i r\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z)h_j(z)\tilde{x}^T\left({\tilde{A}_{ij}}^T X + X\tilde{A}_{ij}\right)\tilde{x} \\ &\qquad + r^T {\tilde{E}_i}^T X \tilde{x} + \tilde{x}^T X \tilde{E}_i r - r^T\sigma^2 r \\ &\qquad + r^T \sigma^2 r \end{aligned} \tag{۲۱}$$

بدست می‌آید. رابطه اخیر را می‌توان به صورت

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z)h_j(z)\,\Phi^T \Psi_{ij}\Phi - \tilde{x}^T\tilde{x} + \sigma^2 r^T r \tag{۲۲}$$

بازنویسی کرد که در آن

$$\begin{gathered} \Psi_{ij} = \begin{bmatrix} {\tilde{A}_{ij}}^T X + X\tilde{A}_{ij} + I & X\tilde{E}_i \\ {\tilde{E}_i}^T X & -\sigma^2 I \end{bmatrix} \\ \Phi = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ r \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{۲۳}$$

و σ اسکالری است که باید توسط طراح تعیین شود. از آنجایی که در رابطه (۲۲) باید $\dot{V}(t) \le 0$ باشد، با استفاده از لم ۲ می‌توان دید در صورتیکه $\Psi_{ij} \le 0$ باشد شاخص نرم بی‌نهایت سیستم (۱۵) از ورودی r تا خروجی $\tilde{x}$ کمتر از مقدار از قبل تعیین شده σ خواهد شد. حال رابطه (۲۲) را در نظر بگیرید. با جایگذاری $\tilde{A}_{ij}$ و X در رابطه اخیر می‌توان نشان داد

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{X_{11}(A_i^x + B_iK_j)\} & * & * & * \\ -(B_iK_j)^T X_{11} & \mathcal{L}\{X_{22}(\bar{A}_i - L_i\bar{C}_j)\} & * & * \\ (A_i^x - A_r)^T X_{11} & 0 & \mathcal{L}\{X_{33}A_r\} & * \\ -B_r^T X_{11} & 0 & B_r^T X_{33} & -\sigma^2 I \end{bmatrix} \le 0 \tag{۲۴}$$

رابطه اخیر بدلیل ظاهر شدن ضرب پارامترهای مجهول در یکدیگر غیر محدب است. با استفاده از تبدیل همانندی می‌توان گفت برقرار بودن رابطه (۲۴) معادل برقراری رابطه

$$\chi^T \Psi_{ij}\,\chi \le 0 \tag{۲۵}$$

است که در آن $\chi = \mathrm{diag}(X_{11}^{-1}, I, I, I)$. رابطه اخیر را می‌توان به صورت

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}\{(A_i^x+B_iK_j)X_{11}^{-1}+B_iK_j-B_iK_j\} & * & * & * \\ -(B_iK_j)^T & \mathcal{L}\{X_{22}(\bar{A}_i-L_i\bar{C}_j)\} & * & * \\ (A_i^x-A_r)^T & 0 & \mathcal{L}\{X_{33}A_r\} & * \\ -B_r^T & 0 & B_r^TX_{33} & -\sigma^2 I \end{bmatrix} \le 0 \tag{۲۶}$$

بازنویسی کرد که در آن $Z_i = X_{22}L_i$ است. به سادگی می‌توان دید رابطه اخیر معادل

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}\{A_i^xX_{11}^{-1}+B_iK_j\} & * & * & * \\ -(B_iK_j)^T & \mathcal{L}\{X_{22}(\bar{A}_i-L_i\bar{C}_j)\} & * & * \\ (A_i^x-A_r)^T & 0 & \mathcal{L}\{X_{33}A_r\} & * \\ -B_r^T & 0 & B_r^TX_{33} & -\sigma^2 I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_{11}^{-1}-I & B_iK_j \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (B_iK_j)^T & 0 & 0 & 0 \\ X_{11}^{-1}-I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \le 0 \tag{۲۷}$$

است. ماتریس ظاهر شده در سمت چپ رابطه اخیر متقارن است. با توجه به این خاصیت و با استفاده از لم ۳ می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}\{(A_i^x+B_iK_j)X_{11}^{-1}\}+\mathcal{L}\{B_iK_j\} & * & * & * & * & * \\ -(B_iK_j)^T & \mathcal{L}(X_{22}\bar{A}_i-Z_i\bar{C}_j) & * & * & * & * \\ (A_i-A_r)^T & 0 & \mathcal{L}\{X_{33}A_r\} & * & * & * \\ -B_r^T & 0 & B_r^TX_{33} & -\sigma^2 I & * & * \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(X_{11}^{-1}-I+B_iK_j)^T & 0 & 0 & 0 & -I & * \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(X_{11}^{-1}-I+B_iK_j)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} \le 0 \tag{۲۸}$$

■.

نتیجه فرعی ۱- در صورتیکه تنها طراحی رویتگر مد نظر باشد، اگر رابطه

$$\begin{gathered} (\bar{A}_i-L_i\bar{C}_j)^TP+P(\bar{A}_i-L_i\bar{C}_j) \le 0 \\ i=1,\dots,r \\ j=1,\dots,r \end{gathered} \tag{۲۹}$$

برقرار باشد که در آن P یک ماتریس مثبت معین است، آنگاه رویتگر (۱۰) با بهره چندجمله‌ای L_i که از نامساوی رابطه (۲۹) به دست می‌آید می‌تواند بردار حالت سیستم (۸) را تخمین بزند. در اینجا نیز مشابه آنچه در اثبات قضیه ۱ بیان شد، $\bar{C}_j = \bar{C}_j(x,\hat{x})$، $\bar{A}_i = \bar{A}_i(x,\hat{x})$ و $L_i = L_i(\hat{x})$ در نظر گرفته شده است.

اثبات- از آنجاییکه هدف تنها تخمین بردار حالت سیستم (۸) است بنابراین تابع لیاپانوف به صورت

$$V(t) = e^TPe \tag{۳۰}$$

در نظر گرفته می‌شود که در آن $e = x - \hat{x}$ بردار خطای تخمین حالت است. با استفاده از قضیه لیاپانوف می‌توان به رابطه

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{e}^TXe + e^TP\dot{e} \\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z)h_j(z)e^T\Big[(\bar{A}_i-L_i\bar{C}_j)^TP \\ &\qquad + P(\bar{A}_i-L_i\bar{C}_j)\Big]e \le 0 \end{aligned} \tag{۳۱}$$

رسید. رابطه (۳۱) در صورتی برقرار است که $(\bar{A}_i-L_i\bar{C}_j)^TP+P(\bar{A}_i-L_i\bar{C}_j) \le 0$. ■

قضیه ۲- حالتی را در نظر بگیرید که در آن $C = I$ باشد. در اینصورت مساله طراحی فیدبک خروجی به طراحی فیدبک حالت برای سیستم (۸) تبدیل خواهد شد به این ترتیب که اگر ماتریس‌های $X_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $X_{22} \in \mathbb{R}^{n\times n}$، چندجمله‌ای $\epsilon_{2_{ij}}(x) \ge 0$ و $\epsilon_{1_i} > 0$ به ازای $i,j = 1,\dots,r$ و ضریب $\sigma > 0$ وجود داشته باشند به‌گونه‌ای که

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix} - \epsilon_{1_i}I \ \text{ is SOS} \\ -\left(\Omega_{ij}(x) + \epsilon_{2_{ij}}(x)I\right) \ \text{ is SOS} \end{gathered} \tag{۳۲}$$

برقرار باشد که در آن

$$\Omega_{ij}(x) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{A_i^xX_{11}^{-1}+B_iZ_j\} & * & * \\ (A_i^x-A_r)^T & \mathcal{L}\{X_{22}A_r\} & * \\ -B_r^T & B_r^TX_{22} & -\sigma^2 I \end{bmatrix} \tag{۳۳}$$

و $Z_j = Z_j(x) = K_j(x)X_{11}^{-1}$ ، $B_i = B_i(\zeta)$ در نظر گرفته شده‌اند آنگاه با قانون کنترل

$$u = \sum_{j=1}^{r} h_j(z)\left[K_j(x)(x-x_r)\right] \tag{۳۴}$$

بهره انرژی سیستم حلقه بسته از ورودی مرجع تا خروجی خطای تعقیب محدود است.

اثبات- اثبات تا حد زیادی مشابه اثبات قضیه ۱ است با این تفاوت که باید $x = \hat{x}$ در نظر گرفته شود. برای فراهم کردن همزمان شرایط تعقیب و پایداری، سیستمی به صورت

$$\dot{\tilde{x}} = \sum_{i=1}^{r} h_i(z)\sum_{j=1}^{r} h_j(z)\left[\tilde{A}_{ij}\tilde{x} + \tilde{E}_ir\right] \tag{۳۵}$$

در نظر گرفته می‌شود که در آن

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} A_i^x + B_iK_j & A_i^x - A_r \\ 0 & A_r \end{bmatrix}$$
$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x - x_r \\ x_r \end{bmatrix}, \tilde{E}_i = \begin{bmatrix} -B_r \\ B_r \end{bmatrix} \quad (۳۶)$$

است. مانند آنچه در اثبات قضیه ۱ بیان شد با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف به صورت (۱۹) و با استفاده از قضیه لیاپانوف می‌توان نتیجه گرفت که

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z)h_j(z)\,\Phi^T\Psi_{ij}\Phi - \tilde{x}^T\tilde{x} + \sigma^2 r^T r \le 0 \quad (۳۷)$$

که در آن $\Phi = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ r \end{bmatrix}$ و

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{X_{11}(A_i^x + B_iK_j)\} & * & * \\ (A_i^x - A_r)^T X_{11} & \mathcal{L}\{X_{22}A_r\} & * \\ -B_r^T X_{11} & B_r^T X_{22} & -\sigma^2 I \end{bmatrix} \le 0 \quad (۳۸)$$

است. مانند آنچه در اثبات قضیه ۱ ذکر شد برقراری رابطه (۳۸) معادل برقراری رابطه

$$\chi^T\Psi_{ij}\chi = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{(A_i^x + B_iK_j)X_{11}^{-1}\} & * & * \\ (A_i^x - A_r)^T & \mathcal{L}\{X_{22}A_r\} & * \\ -B_r^T & B_r^T X_{22} & -\sigma^2 I \end{bmatrix} \le 0 \quad (۳۹)$$

است که در آن $\chi = \mathrm{diag}(X_{11}^{-1}, I, I)$ است. رابطه (۳۹) به دلیل حاصلضرب دو پارامتر مجهول X_{11}^{-1} و K_j غیر محدب است. بنابراین با تغییر متغیر $K_jX_{11}^{-1} = Z_j$ رابطه (۳۹) به صورت

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}\{A_i^x X_{11}^{-1} + B_iZ_j\} & * & * \\ (A_i^x - A_r)^T & \mathcal{L}\{X_{22}A_r\} & * \\ -B_r^T & B_r^T X_{22} & -\sigma^2 I \end{bmatrix} \le 0 \quad (۴۰)$$

قابل بازنویسی است.■

۵- شبیه‌سازی

در این بخش برای نشان دادن کارایی قضایای ارائه شده در بخش قبل، سه مثال شبیه‌سازی ارائه می‌شود. در مثال اول سیستم غیرخطی آشوبناک لورنز مورد بررسی قرار می‌گیرد. سیستم آشوبناک بوسیله یک سیستم فازی تاکاگی-سوگنو به طور دقیق توصیف و سپس طراحی قانون کنترل تعقیب برای سیستم مذکور انجام خواهد شد. در مثال دوم یک سیستم غیرخطی توسط یک سیستم فازی چندجمله‌ای توصیف شده است که در آن ماتریس سیستم وابسته به بردار حالت است. در نتیجه طراحی قانون کنترل بر اساس مدل فازی چندجمله‌ای انجام می‌شود. در مثال سوم برای یک سیستم غیرخطی هم مدل فازی تاکاگی-سوگنو و هم مدل فازی چندجمله‌ای ارائه و طراحی قانون کنترل تعقیب برای هر دو سیستم فازی انجام می‌شود.

در همه مثال‌ها از جعبه ابزار یالمیپ[1] در متلب برای به دست آوردن پارامترهای کنترلگر استفاده شده است.

۵-۱- مثال ۱

سیستم آشوبناک لورنز را در نظر بگیرید ([۴۰])

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10(x_2 - x_1) + u_1 \\ \dot{x}_2 = 28x_1 - x_2 - x_1x_3 + u_2 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - \frac{8}{3}x_3 + u_3 \end{cases} \quad (۴۱)$$

که در آن $x_1 \in [-30,30]$ است. با استفاده از روش غیرخطی‌گری قطاعی [۴۱]، می‌توان یک مدل فازی تاکاگی-سوگنو با دوقاعده که در آن متغیر مقدم $z = x_1$ است را به گونه‌ای تعریف کرد که رفتار سیستم (۴۱) را در بازه تعریف شده را به طور دقیق توصیف کند. پارامترهای سیستم فازی به صورت

$$A_1 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & -30 \\ 0 & 30 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 30 \\ 0 & -30 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$
$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_1 = C_2 = [1 \quad 0 \quad 0]$$
$$h_1(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x_1}{30}\right), h_2(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x_1}{30}\right)$$

بدست می‌آیند. با انتخاب پارامترهای مدل مرجع به صورت

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}, B_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$C_r = [1 \quad 0 \quad 0]$$

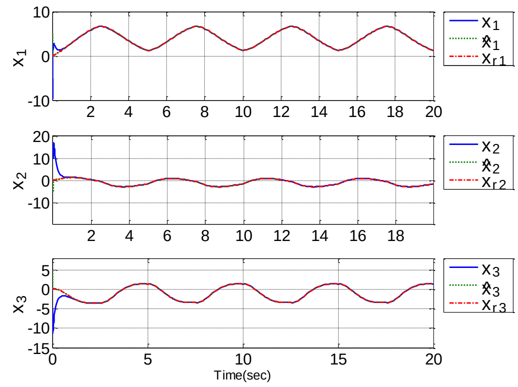
و با انتخاب $\sigma = 5$ متغیرهای تصمیم‌گیری و پارامترهای کنترلگر و رویتگر به صورت

$$X_{11} = 10^{-7}\begin{bmatrix} 0.1369 & -0.3255 & -0.0018 \\ -0.3255 & 0.9082 & 0.0003 \\ -0.0018 & 0.0003 & 0.6679 \end{bmatrix},$$
$$X_{22} = \begin{bmatrix} 0.4325 & -0.2616 & 0 \\ -0.2616 & 0.2748 & 0 \\ 0 & 0 & 0.247 \end{bmatrix}$$
$$X_{33} = \begin{bmatrix} 0.0114 & -0.0133 & 0.0266 \\ -0.0133 & 0.0114 & 0.0398 \\ 0.0266 & 0.0398 & 0.0513 \end{bmatrix}$$
$$K_1 = \begin{bmatrix} -6457.481 & 492.268 & -0.729 \\ 787.778 & -6895.572 & 0.188 \\ -0.182 & 0.517 & -5747.302 \end{bmatrix}$$
$$K_2 = \begin{bmatrix} -6451.520 & 492.440 & -0.381 \\ 787.216 & -6895.329 & 0.404 \\ -0.498 & 0.0935 & -5747.282 \end{bmatrix}$$
$$L_1 = \begin{bmatrix} 44.704 \\ 61.498 \\ 18.582 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 44.704 \\ 61.497 \\ -18.582 \end{bmatrix}$$

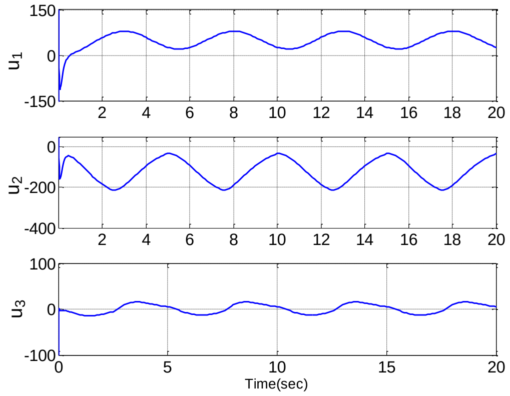
بدست می‌آیند. نتایج شبیه‌سازی سیستم حلقه بسته را به ازای انتخاب شرایط اولیه سیستم اصلی به صورت $x(0) = [-5 \quad 10 \quad -5]^T$ و شرایط اولیه رویتگر به صورت $\hat{x}(0) = [5 \quad -5 \quad 5]^T$ می‌توان در

[1] Yalmip Toolbox

شکل ۲ و شکل ۳ مشاهده کرد. همانطور که در شکل ۲ ملاحظه می‌شود قانون کنترل باعث شده که تعقیب با دقت بالایی انجام شود. همچنین تخمین مناسبی از بردار حالت سیستم بدست آمده است. شکل ۳ سیگنال‌های کنترلی تولید شده را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که ورودی مرجع r به صورت سیگنال پالس با دامنه ۲، دوره تناوب ۵ ثانیه و عرض پالس ۵۰٪ در نظر گرفته شده است.



شکل ۲: نتایج تعقیب و تخمین همزمان سیستم مثال اول



شکل ۳: قانون کنترل سیستم مثال اول

۵–۲– مثال ۲

سیستم غیرخطی

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_1 - 0.3x_2 + ({x_1}^2+1)u \\ \dot{x}_2 = -1.5x_1 - 2x_2 - {x_2}^3 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (۴۲)$$

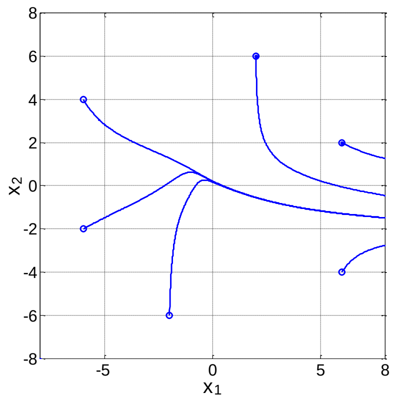
را در نظر بگیرید که در آن متغیر حالت x_1 قابل اندازه‌گیری است ([۲۹]). با استفاده از روش غیرخطی‌گری قطاعی، یک مدل فازی چندجمله‌ای با دو قاعده می‌توان بدست آورد به گونه‌ای که به طور دقیق و جامع سیستم (۴۲) را توصیف کند. بردار متغیر مقدم $z = x_1$ شامل متغیر حالت غیرقابل اندازه‌گیری x_2 نیست و x_2 در ماتریس های چندجمله‌ای A_i و B_i ظاهر می‌شود. مدل فازی چندجمله‌ای توصیف کننده سیستم غیرخطی (۴۲) به صورت

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & -0.3x_2 \\ -1.5 & -2-{x_2}^2 \end{bmatrix}, A_2(x) = \begin{bmatrix} -0.2172 & -0.3x_2 \\ -1.5 & -2-{x_2}^2 \end{bmatrix}$$

$$B_1(x) = B_2(x) = \begin{bmatrix} x_1^2+1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C_1 = C_2 = [1 \quad 0]$$

$$h_1(z) = \frac{\sin x_1 + 0.21727}{1.2172x_1}, h_2(z) = \frac{x_1 - \sin x_1}{1.2172x_1}$$

قابل استخراج است. نمودار فاز سیستم (۴۲) در شکل ۴ نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود سیستم (۴۲) در حالت حلقه باز ناپایدار است.



شکل ۴: نمودار فاز سیستم حلقه باز مثال دوم

با انتخاب ماتریس‌های مدل مرجع به‌صورت

$$A_r = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, B_r = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}, C_r = [1 \quad 0]$$

و با انتخاب $\sigma = 0.4$ متغیرهای تصمیم‌گیری و پارامترهای کنترلگر و رویتگر فازی چندجمله‌ای به صورت

$$X_{11} = 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.0064 & 0 \\ 0 & 0.3557 \end{bmatrix}$$

$$X_{22} = \begin{bmatrix} 0.0799 & 0 \\ 0 & 0.006 \end{bmatrix}$$

$$X_{33} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0265 & 0.0097 \\ 0.0097 & 0.2049 \end{bmatrix}$$

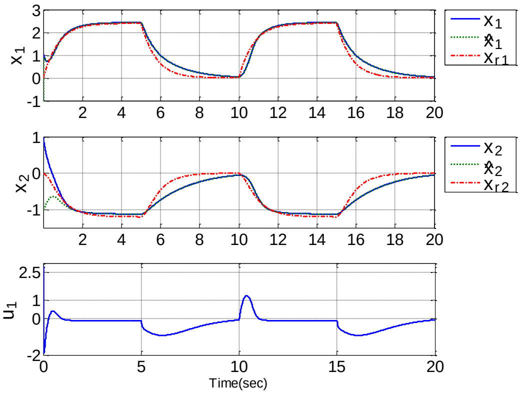
$$K_1 = [-2.468 \quad -0.0593 + 0.0064\hat{x}_2]$$

$$K_2 = [-4.051 \quad -0.515 + 0.318\hat{x}_2]$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 88.655 - 2.35 \times 10^{-12}\hat{x}_2 \\ -4.415 - 1.824\hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 86.994 - 2.35 \times 10^{-12}\hat{x}_2 \\ -4.428 - 1.838\hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

بدست می‌آیند. نتایج شبیه‌سازی با انتخاب شرایط اولیه به صورت $x(0) = [1 \quad 1]^T$ و شرایط اولیه رویتگر فازی چندجمله‌ای به صورت $\hat{x}(0) = [-1 \quad -1]^T$ در شکل ۵ نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود سیستم حلقه بسته پایدار شده و تعقیب و تخمین بردار حالت به طور مناسب انجام شده است. لازم به ذکر است که ورودی مرجع r به صورت سیگنال پالس با دامنه ۰/۳، دوره تناوب ۱۰ ثانیه و عرض پالس ۵۰٪ در نظر گرفته شده است.



شکل ۵: نتایج شبیه‌سازی سیستم مثال دوم

۵–۳– مثال ۳

سیستم غیر خطی

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = 0.1x_1^3 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 = \sin x_1 - x_1^2 x_2 \\ y = x_1\end{cases} \quad (۴۳)$$

را در نظر بگیرید([۲۹]). در این مثال به دو روش مبتنی بر مدل تاکاگی–سوگنو و مدل فازی چندجمله‌ای طراحی قانون کنترل انجام می‌شود. برای به دست آوردن مدل فازی تاکاگی–سوگنو به روش غیرخطی گری قطاعی فرض شده است که $x_1 \in [-1,1]$ است. بنابراین مدل فازی تاکاگی–سوگنو با ۴ قاعده به صورت

$$A_1 = \begin{bmatrix}0.1 & -1 \\ 1 & -1\end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix}0.1 & -1 \\ -0.217 & -1\end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix}0 & -1 \\ -0.217 & 0\end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = [1 \quad 0]$$

$$h_1(x) = x_1^2 \frac{\sin x_1 + 0.217x_1}{1.217x_1},$$

$$h_2(x) = x_1^2 \frac{x_1 - \sin x_1}{1.217x_1},$$

$$h_3(x) = (1 - x_1^2)\frac{\sin x_1 + 0.217x_1}{1.217x_1},$$

$$h_4(x) = (1 - x_1^2)\frac{x_1 - \sin x_1}{1.217x_1}$$

بدست می‌آید. با انتخاب پارامتر $\sigma = 5$ و با انتخاب پارامترهای مدل مرجع به صورت

$$A_r = \begin{bmatrix}-4.9 & 0 \\ 1 & -1\end{bmatrix}, B_r = \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}, C_r = [1 \quad 0]$$

متغیرهای تصمیم‌گیری و پارامترهای کنترلگر و رویتگر فازی به صورت

$$X_{11} = \begin{bmatrix}0.8676 & 0.2861 \\ 0.2861 & 0.7334\end{bmatrix}, X_{22} = \begin{bmatrix}0.3066 & 0.2021 \\ 0.2021 & 0.6991\end{bmatrix}$$

$$X_{33} = \begin{bmatrix}2.1787 & -0.1536 \\ -0.1536 & 1.3586\end{bmatrix}$$

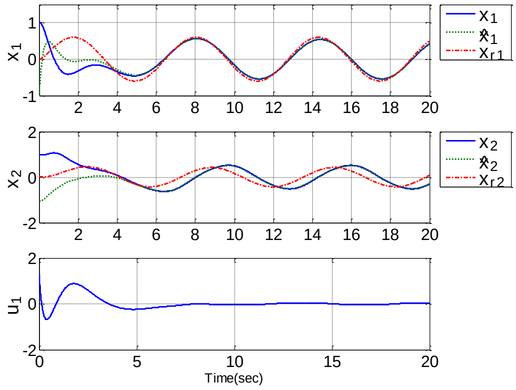
$$K_1 = [-1.4982 \quad 0.2189], K_2 = [-1.5013 \quad 0.2243]$$

$$K_3 = [-1.5013 \quad 0.2243], K_4 = [-1.5013 \quad 0.2243]$$

$$L_1 = \begin{bmatrix}3.2682 \\ -0.9292\end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix}3.2295 \\ -1.0764\end{bmatrix},$$

$$L_3 = \begin{bmatrix}3.1668 \\ -0.8591\end{bmatrix}, L_4 = \begin{bmatrix}3.1666 \\ -1.0586\end{bmatrix}$$

بدست می‌آیند. نتایج شبیه‌سازی درشکل ۶ نشان داده شده است که در آن شرایط اولیه سیستم به صورت $x(0) = [1 \quad 1]^T$، شرایط اولیه رویتگر فازی به صورت $\hat{x}(0) = [-1 \quad -1]^T$ و ورودی مرجع به صورت سیگنال سینوسی با دامنه ۳ و فرکانس ۱$^{rad}/_{sec}$ انتخاب شده‌اند.



شکل ۶: نتایج شبیه‌سازی مثال سوم برای مدل تاکاگی–سوگنو

حال به طراحی قانون کنترل بر اساس مدل فازی چندجمله‌ای پرداخته می‌شود. دینامیک سیستم غیرخطی (۴۳) به طور جامع (بدون در نظر گرفتن بازه تغییرات برای حالت x_1) توسط مدل فازی چندجمله‌ای قابل نمایش است که در آن $z = y$ و

$$A_1 = \begin{bmatrix}0.1y^2 & -1 \\ 1 & -y^2\end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix}0.1y^2 & -1 \\ -0.2172 & -y^2\end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}, C_1 = C_2 = [1 \quad 0]$$

$$h_1(z) = \frac{\sin y + 0.2172y}{1.217y}, h_2(z) = \frac{y - \sin y}{1.2172y},$$

با در نظر گرفتن سایر پارامترهای طراحی مطابق با آنچه در طراحی حالت قبل انجام شد، متغیرهای تصمیم‌گیری و پارامترهای کنترلگر و رویتگر فازی به صورت

$$X_{11} = \begin{bmatrix}0.0415 & 0.0086 \\ 0.0086 & 0.0707\end{bmatrix},$$

$$X_{22} = \begin{bmatrix}2.4376 & 0.3848 \\ 0.3848 & 3.8856\end{bmatrix},$$

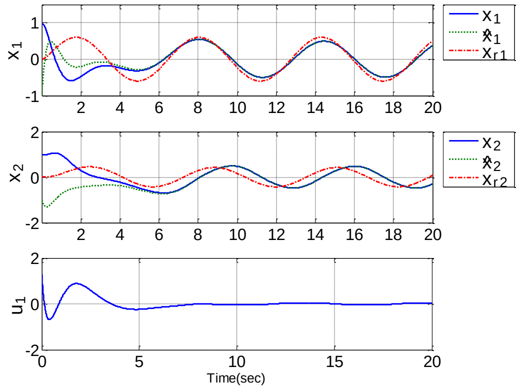
$$X_{33} = \begin{bmatrix}1.7516 & 0.0448 \\ 0.0448 & 2.1999\end{bmatrix}$$

$$K_1 = [-1.1728 \quad 0.22032]$$

$$K_2 = [-1.1728 \quad 0.2032]$$

$$L_1 = \begin{bmatrix}0.7008 \\ -0.0671\end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix}0.7124 \\ -0.1511\end{bmatrix}$$

بدست می‌آیند. نتایج شبیه‌سازی با انتخاب شرایط اولیه سیستم به صورت $x(0) = [1 \quad 1]^T$ و شرایط اولیه رویتگر فازی چندجمله‌ای به صورت $\hat{x}(0) = [-1 \quad -1]^T$ در شکل ۷ قابل مشاهده است.



شکل ۷: نتایج شبیه‌سازی مثال سوم برای مدل فازی چندجمله‌ای

همانطور که در شکل ۶ و شکل ۷ ملاحظه می‌شود در طراحی به روش فازی چندجمله‌ای با وجود یکسان بودن پارامترهای طراحی با روش فازی تاکاگی–سوگنو، مقداری بهبود در میزان خطای تخمین حالت و خطای تعقیب مدل مرجع پایدار دیده می‌شود. همچنین طراحی به روش تاکاگی–سوگنو اعتبار مدلسازی به بازه $x_1 \in [-1,1]$ محدود می‌شود در صورتیکه در روش فازی چندجمله‌ای مدلسازی و در نتیجه قانون کنترل به طور جامع معتبر است.

٦- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، قانون کنترل تعقیب مبتنی بر رویتگر برای کلاس خاصی از سیستم‌های فازی چندجمله‌ای با تضمین شاخص تعقیب نرم بی‌نهایت طراحی شد. در این کلاس از سیستم‌های فازی چندجمله‌ای، ماتریس سیستم و خروجی وابسته به بردار حالت ولی ماتریس ورودی به طور مستقیم تابعی از بردار حالت سیستم نیست. شرایط کافی برای محاسبه بهره‌های قانون کنترل بر اساس روش مجموع مربعات ارائه شد به گونه‌ای که بتواند علاوه بر وادار کردن بردار حالت سیستم به پیروی از بردار حالت یک سیستم مرجع پایدار، شاخص نرم بی‌نهایت از ورودی خارجی تا خطاهای تعقیب و تخمین از مقدار مشخص داده شده کمتر باشد. در انتها برای نشان دادن کارایی قانون کنترل ارائه شده، طراحی قانون کنترل و شبیه‌سازی آن برای چند سیستم مبنا انجام شد.

مراجع

[1] Z. Wang, R. Lu, and H. Wang, "Finite-Time Trajectory Tracking Control of a Class of Nonlinear Discrete-Time Systems," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 47, pp. 1679-1687, 2017.

[2] Y. F. Gao, X. M. Sun, C. Wen, and W. Wang, "Adaptive Tracking Control for a Class of Stochastic Uncertain Nonlinear Systems With Input Saturation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, pp. 2498-2504, 2017.

[3] H. Yang, X. Fan, P. Shi, and C. Hua, "Nonlinear Control for Tracking and Obstacle Avoidance of a Wheeled Mobile Robot With Nonholonomic Constraint," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 24, pp. 741-746, 2016.

[4] G. Wen, W. Yu, Y. Xia, X. Yu, and J. Hu, "Distributed Tracking of Nonlinear Multiagent Systems Under Directed Switching Topology: An Observer-Based Protocol," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 47, pp. 869-881, 2017.

[5] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. F. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4, pp. 14-23, 1996.

[6] K. Tanaka and H. O. Wang, "Fuzzy regulators and fuzzy observers: a linear matrix inequality approach," in *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, 1997, pp. 1315-1320 vol.2.

[7] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang, "Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 6, pp. 250-265, 1998.

[8] M. C. M. Teixeira, E. Assunção, and H. C. Pietrobom, "On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers," in *2001 European Control Conference (ECC)*, 2001, pp. 120-125.

[9] M. C. M. Teixeira, E. Assuncao, and R. G. Avellar, "On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 11, pp. 613-623, 2003.

[10] T. Chung-Shi, C. Bor-Sen, and U. Huey-Jian, "Fuzzy tracking control design for nonlinear dynamic systems via T-S fuzzy model," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 9, pp. 381-392, 2001.

[11] G. H. Chang and J. C. Wu, "Robust Tracking Control Design for Nonlinear Systems via Fuzzy Observer," in *2012 Fifth International Symposium on Computational Intelligence and Design*, 2012, pp. 366-369.

[12] M. H. Asemani and V. J. Majd, "A robust H∞ observer-based controller design for uncertain T–S fuzzy systems with unknown premise variables via LMI," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 212, pp. 21-40, 2013.

[13] C. Lin, Q.-G. Wang, and T. Heng Lee, "Improvement on observer-based control for T–S fuzzy systems," *Automatica*, vol. 41, pp. 1651-1656, 2005.

[14] C.-S. Tseng and C.-K. Hwang, "Fuzzy observer-based fuzzy control design for nonlinear systems with persistent bounded disturbances," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 158, pp. 164-179, 2007.

[15] H. Dahmani, O. Pagès, A. E. Hajjaji, and N. Daraoui, "Observer-Based Robust Control of Vehicle Dynamics for Rollover Mitigation in Critical Situations," *IEEE Transactions on*

IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 17, pp. 1284-1295, 2009.

[29] K. Tanaka, H. Ohtake, T. Seo, M. Tanaka, and H. O. Wang, "Polynomial Fuzzy Observer Designs: A Sum-of-Squares Approach," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics),* vol. 42, pp. 1330-1342, 2012.

[30] A. Sala, J. L. Pitarch, M. Bernal, A. Jaadari, and T. M. Guerra, "Fuzzy Polynomial observers," *IFAC Proceedings Volumes,* vol. 44, pp. 12772-12776, 2011.

[31] C. Liu, H. K. Lam, X. Ban, and X. Zhao, "Design of polynomial fuzzy observer–controller with membership functions using unmeasurable premise variables for nonlinear systems," *Information Sciences,* vol. 355–356, pp. 186-207, 2016.

[32] H. Han, J. Chen, and H. R. Karimi, "State and disturbance observers-based polynomial fuzzy controller," *Information Sciences,* vol. 382–383, pp. 38-59, 2017.

[33] S. Prajna, A. Papachristodoulou, and W. Fen, "Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: a Lyapunov-based approach," in *2004 5th Asian Control Conference (IEEE Cat. No.04EX904)*, 2004, pp. 157-165 Vol.1.

[34] A. Papachristodoulou and S. Prajna, "A tutorial on sum of squares techniques for systems analysis," in *Proceedings of the 2005, American Control Conference, 2005.*, 2005, pp. 2686-2700 vol. 4.

[35] F. Delmotte, M. Dambrine, S. Delrot, and S. Lalot, "Fouling detection in a heat exchanger: A polynomial fuzzy observer approach," *Control Engineering Practice,* vol. 21, pp. 1386-1395, 2013.

[36] H. K. Lam and H. Li, "Output-Feedback Tracking Control for Polynomial Fuzzy-Model-Based Control Systems," *IEEE Transactions on Industrial Electronics,* vol. 60, pp. 5830-5840, 2013.

[37] Z. Chen, B. Zhang, H. Li, and J. Yu, "Tracking control for polynomial fuzzy networked systems with repeated scalar nonlinearities," *Neurocomputing,* vol. 171, pp. 185-193, 2016.

[38] S. Prajna, A. Papachristodoulou, and P. A. Parrilo, "Introducing SOSTOOLS: a general purpose sum of squares programming solver," in *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002.*, 2002, pp. 741-746 vol.1.

[39] S. Boyd. et. al., *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory,* in *Applied Mathematics,* vol. 15, PHL:SIAM, 1994.

[40] C.-W. Park, C.-H. Lee, and M. Park, "Design of an adaptive fuzzy model based controller for chaotic dynamics in Lorenz systems with uncertainty," *Information Sciences,* vol. 147, pp. 245-266, 2002.

[41] H. Ohtake, K. Tanaka, and H. O. Wang, "Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept," in *Proceedings Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference (Cat. No. 01TH8569)*, 2001, pp. 127-132.

Intelligent Transportation Systems, vol. 15, pp. 274-284, 2014.

[16] H. Dahmani, O. Pagès, and A. E. Hajjaji, "Observer-Based State Feedback Control for Vehicle Chassis Stability in Critical Situations," *IEEE Transactions on Control Systems Technology,* vol. 24, pp. 636-643, 2016.

[17] P. Bergsten, R. Palm, and D. Driankov, "Observers for Takagi-Sugeno fuzzy systems," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics),* vol. 32, pp. 114-121, 2002.

[18] L. Li, S. X. Ding, J. Qiu, Y. Yang, and D. Xu, "Fuzzy Observer-Based Fault Detection Design Approach for Nonlinear Processes," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems,* vol. PP, pp. 1-12, 2016.

[19] L. Li, S. X. Ding, J. Qiu, and Y. Yang, "Real-Time Fault Detection Approach for Nonlinear Systems and its Asynchronous T-S Fuzzy Observer-Based Implementation," *IEEE Transactions on Cybernetics,* vol. 47, pp. 283-294, 2017.

[20] Y. Wu, J. Dong, X. J. Li, and G. H. Yang, "A new fault detection observer scheme for T-S fuzzy systems with unmeasurable variables," in *2016 12th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA)*, 2016, pp. 120-125.

[21] Y. Yang, S. X. Ding, and L. Li, "On observer-based fault detection for nonlinear systems," *Systems & Control Letters,* vol. 82, pp. 18-25, 2015.

[22] L. Li, S. X. Ding, Y. Yang, and Y. Zhang, "Robust fuzzy observer-based fault detection for nonlinear systems with disturbances," *Neurocomputing,* vol. 174, Part B, pp. 767-772, 2016.

[23] T. Agustinah, A. Jazidie, M. Nuh, and D. Haiping, "Fuzzy tracking control design using observer-based stabilizing compensator for nonlinear systems," in *2010 International Conference on System Science and Engineering*, 2010, pp. 275-280.

[24] K. Tanaka, H. Yoshida, H. Ohtake, and H. O. Wang, "A Sum of Squares Approach to Stability Analysis of Polynomial Fuzzy Systems," in *2007 American Control Conference*, 2007, pp. 4071-4076.

[25] K. Tanaka, H. Yoshida, H. Ohtake, and H. O. Wang, "Stabilization of Polynomial Fuzzy Systems via a Sum of Squares Approach," in *2007 IEEE 22nd International Symposium on Intelligent Control*, 2007, pp. 160-165.

[26] K. Tanaka, H. Ohtake, and H. O. Wang, "Guaranteed Cost Control of Polynomial Fuzzy Systems via a Sum of Squares Approach," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics),* vol. 39, pp. 561-567, 2009.

[27] K. Tanaka, H. Yoshida, H. Ohtake, and H. O. Wang, "A Sum-of-Squares Approach to Modeling and Control of Nonlinear Dynamical Systems With Polynomial Fuzzy Systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems,* vol. 17, pp. 911-922, 2009.

[28] A. Sala and C. Arino, "Polynomial Fuzzy Models for Nonlinear Control: A Taylor Series Approach,"

مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۲، شماره ۱، بهار ۱۳۹۷، صفحه ۲۴-۱۳

طراحی کنترل کننده زمان محدود برای سیستم های لیپ شیتز یک طرفه تأخیری

هادی غلامی [۱]، طاهره بینازاده [۲]

[۱] فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی برق و الکترونیک، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شیراز، h.gholami@sutech.ac.ir

[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و الکترونیک، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شیراز، binazadeh @sutech.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۶/۶/۲۲، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۶/۸/۵)

چکیده: در این مقاله سیستم‌های دینامیکی با توابع غیرخطی لیپ شیتز یک طرفه در حضور تأخیر زمانی و ترم های نامعلوم ناشی از عدم قطعیت‌های مدل و اغتشاشات خارجی مورد مطالعه قرار می‌گیرند. شرط لیپ شیتز یک طرفه نسبت به شرط متداول و مرسوم لیپ شیتز محافظه کاری کمتری داشته و دسته وسیع تری از توابع غیر خطی را شامل می شود. هدف از این مقاله، طراحی کنترل کننده فیدبک حالت برای سیستم مذکور است به نحوی که پایداری مقاوم و زمان محدود متغیرهای حالت سیستم حلقه بسته تضمین شود. برای این منظور، براساس رویکرد لیاپانوفی در آنالیز پایداری سیستم های تأخیری، تابعک لیاپانوف-کراسوفسکی مناسب برای سیستم تأخیری مذکور، انتخاب گردیده و شرایط کافی جهت پایدارسازی زمان محدود مقاوم بر اساس نامساوی‌های ماتریسی خطی بیان شده است. همچنین از حل نامساوی های ماتریسی استخراج شده، بهره فیدبک حالت محاسبه گردیده است. در پایان نیز مثالهای عددی و شبیه سازی هایی برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی ارائه شده است. همچنین نشان داده شده است که قضیه ارائه شده در این مقاله دارای محافظه کاری کمتری بوده و محدوده عملکردی وسیعتری را شامل می‌شود.

کلمات کلیدی: پایداری زمان محدود، سیستم های تأخیری، سیستم های لیپ شیتز یک طرفه، کنترل کننده مقاوم.

Finite time Controller Design for Time-Delay One-sided Lipschitz Systems

Hadi Gholami, Tahereh Binazadeh

Abstract: This article studies dynamical systems with one-sided Lipchitz nonlinear functions in the presence of time-delay and unknown terms due to model uncertainties and external disturbances. The one-sided Lipchitz condition is less conservatism with respect to well-known Lipchitz condition and includes a wider class of nonlinear functions. The goal of this paper is design of state feedback controller for the considered system which guarantees the robust and finite time stability of the state variables of the closed-loop system. For this purpose, based on the Lyapunov approach in stability analysis of time-delay systems; the appropriate Lyapunov-Krasovskii functional is selected and the sufficient conditions for robust finite-time stabilization are given based on linear matrix inequalities. The feedback gain is also calculated by solving the obtained matrix inequalities. Finally, numerical examples and simulations are given to show the performance of the proposed method. Additionally, it is shown that the proposed theorem has been less conservative and its functional range is wider.

Keywords: Finite-time stability, time-delay systems, one-sided Lipchitz systems, robust controller.

۱- مقدمه

دسته ی مهمی از سیستم های غیر خطی، سیستم هایی هستند که توابع غیرخطی آن در شرطی موسوم به شرط لیپ شیتز به ازای یک ثابت مثبت صدق می‌کند. تحلیل پایداری و طراحی کنترل کننده برای چنین سیستم‌هایی موضوع بحث مراجع بسیاری بوده است[۱-۴]. از طرف دیگر در طراحی رویتگرهای غیرخطی برای چنین سیستم‌هایی، شروط تضمین همگرایی عمدتاً برای سیستم‌های غیر خطی با ثوابت لیپ‌شیتز کوچک برقرار می‌شود. برای رفع این محدودیت‌ها، اخیراً تعاریف جدیدی نظیر لیپ شیتز یک طرفه[1] و شبه لیپ شیتز یک طرفه[2] در مقالات معرفی شده‌اند[۵-۹].

قضایای لیاپانوف به الگوی مجانبی سیستم ها دریک فاصله‌ی زمانی نامحدود توجه می کند، در حالی که در بسیاری از سیستم‌های عملی، بازه عملکرد و مطالعه سیستم محدود است و این ضرورت طرح مباحث پایداری و زمان ناگریزی سیستم در یک بازه زمانی محدود را می‌طلبد[۱۰-۱۳]. از سوی دیگر در مدلسازی سیستم های دینامیکی، ترم‌های نامعلومی ناشی از اغتشاشات خارجی و یا عدم قطیت های مدل (شامل عدم قطعیت‌های پارامتری و یا ترم‌های نایقینی ناشی از ساده سازی مدل) ظاهر می‌شود که اگر در روند طراحی کنترل کننده لحاظ نشوند، کنترل کننده حاصل از کارایی مناسبی در عمل برخوردار نبوده و کارایی مقاومی را دارا نیست[۱۴, ۱۵]. پایداری زمان محدود مقاوم سیستم‌های غیر خطی لیپ شیتز مورد توجه محققان بسیاری بوده است[۱۶-۲۱]. اخیراً طراحی کنترل کننده زمان محدود مقاوم برای سیستم‌های لیپ‌شیتزیک‌طرفه نیز مورد مطالعه محققان قرار گرفته است[۲۲, ۲۳] .

یکی دیگر از عوامل مهمی که می‌تواند در سیستم های دینامیکی وجود داشته باشد و باعث عملکرد نامطلوب سیستم‌ها شود، تأخیر است. تأخیر در سیستم‌های عملی مختلفی مانند فرآیندهای شیمیایی، بیولوژیکی، اقتصادی، مکانیکی و غیره مشاهده می‌شود[۲۴-۲۷]. همانند سیستم‌های بدون تأخیر، طراحی کنترل کننده زمان محدود برای سیستم‌های تأخیری نیز مورد توجه محققان واقع شده است[۲۸-۳۱]. در مورد سیستم‌های غیرخطی لیپ شیتز یک طرفه تأخیری، مراجع [۳۲-۳۴] به طراحی رویتگرهای زمان محدود برای این سیستم‌ها پرداخته‌اند. براساس آخرین تحقیقات نویسندگان این مقاله، طراحی کنترل‌کننده زمان‌محدود برای سیستم‌های تأخیری لیپ شیتز یک طرفه هنوز صورت نپذیرفته است. مقاله حاضر به مطالعه این موضوع می‌پردازد.

در این مقاله، پایدارسازی زمان محدود مقاوم سیستم‌های غیرخطی لیپ‌شیتز یک طرفه تأخیری مورد مطالعه قرار گرفته است. برای این منظور، کنترل کننده فیدبک حالت به نحوی طراحی می‌گردد که سیستم حلقه بسته علاوه بر پایداری زمان محدود، عملکرد مقاومی در برابر عدم‌قطعیت‌های مدل و اغتشاشات خارجی داشته باشد. اغتشاشات خارجی، سیگنالهای متغیر با زمان نامعلوم ولی با انرژی محدود فرض شده‌اند. جهت طراحی بهره فیدبک حالت، قضایایی ارائه گردیده است. در این قضایا شروط کافی جهت پایدارسازی زمان محدود مقاوم در قالب نامساوی‌های ماتریسی ارائه شده است. سپس این شروط بر اساس LMI بیان شده اند که در صورت حل پذیری آنها، بهره فیدبک حالت محاسبه می‌گردد. در روند اثبات ارائه شده، تابعک لیاپانوف- کراسوفسکی مناسب انتخاب و بر اساس آن نامساوی‌های ماتریسی استخراج شده که برقراری آنها منجر به تحقق هدف کنترلی مساله می‌گردد. همچنین شبیه‌سازی‌هایی ارائه گردیده و با مقایسه‌ای که صورت پذیرفته کارایی مناسب و محافظه کاری کمتری که رویکرد ارائه شده در این مقاله دارد، نشان داده شده است.

در ادامه مقاله، تعاریف اولیه و توصیف سیستم در بخش ۲ ارائه می‌شود. در بخش ۳ روند طراحی کنترل کننده فیدبک حالت زمان محدود با جزئیات مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد و قضایای مربوطه ارائه می‌شود. در بخش ۴ نتایج بدست آمده از بخش ۲ جهت پردازش کامپیوتری بازنویسی می‌گردد. به منظور نشان دادن کارایی روش مطرح شده، مثال ها و شبیه سازی هایی در بخش ۵ ارائه گردیده است. در پایان نتیجه گیری مقاله در بخش ۶ آورده شده است.

۲- تعاریف اولیه و توصیف سیستم

در این بخش ابتدا تعاریف پایه ذکر می‌گردد. سپس به توصیف سیستم و تبیین هدف کنترلی مقاله پرداخته می‌شود.

۲-۱- تعاریف اولیه

تعریف ۱ [۳۵] **:** تابع غیرخطی $f(x)$ را لیپ شیتز بر روی ناحیه‌ی D (ناحیه D شامل مبداء بوده و $D \subseteq R^n$ است) گویند اگر ثابت $l>0$ (ثابت لیپ شیتز) وجود داشته باشد به نحوی که به ازای $\forall x_1, x_2 \in D$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\| f(x_1) - f(x_2) \| \le l \| x_1 - x_2 \| \qquad (۱)$$

تعریف ۲ [۳٦] **:** تابع غیر خطی $f(x)$ را لیپ شیتز یک طرفه گویند اگر برای $\forall x_1, x_2 \in D$، ثابت حقیقی $\rho \in R$ (R نشانگر مجموعه اعداد حقیقی) وجود داشته باشد به نحوی که:

$$\left(f(x_1) - f(x_2) \right)^T (x_1 - x_2) \le \rho (x_1 - x_2)^T (x_1 - x_2) \qquad (۲)$$

که در آن ρ ثابت لیپ شیتز یک طرفه بوده و می تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد.

تعریف۳ [۳٦]**:** تابع غیرخطی $f(x)$ را دارای حد داخلی مربعی[3] بر روی D گویند اگر برای $\forall x_1, x_2 \in D$ ثوابت $\sigma, \varphi \in R$ وجود داشته باشد به نحوی که:

[1] One-sided Lipschitz

[2] Quasi one-sided Lipchitz

[3] Quadratically inner-bounded

$$\left(f(x_1)-f(x_2)\right)^T\left(f(x_1)-f(x_2)\right)\le\sigma\left(x_1-x_2\right)^T\left(x_1-x_2\right)+\varphi\left(x_1-x_2\right)^T\left(f(x_1)-f(x_2)\right) \quad (۳)$$

که در آن $\varphi,\ \sigma$ می‌تواند یک ثابت مثبت، منفی و یا صفر باشد. براساس تعریف فوق توابع دارای حد داخلی مربعی به ازای $\varphi=0$ و ثابت $\sigma>0$ ، لیپ شیتز هستند لذا توابع غیرخطی لیپ شیتز دارای حد داخلی مربعی نیز هستند ولی عکس آن صادق نیست. شکل (۱) وضعیت توابع غیرخطی لیپ شیتز، لیپ شیتز یک طرفه و توابع دارای حدداخلی‌مربعی را نسبت به یکدیگر نشان می دهد. همان طورکه مشاهده می‌شود، سیستم‌های غیرخطی لیپ‌شیتز، دسته‌ای خاصی از کلاس وسیع‌تر سیستم‌های غیرخطی لیپ شیتز یک طرفه می‌باشد. ثابت لیپ‌شیتز یک‌طرفه می‌تواند هر عدد حقیقی باشد در حالی که ثابت لیپ‌شیتز مثبت می‌باشد. از مزایای لیپ شیتز یک طرفه این است که معمولا ثابت لیپ‌شیتز یک طرفه نسبت به ثابت لیپ شیتز کوچکتر است که این امر باعث می‌شود که اثرات توابع غیر خطی را نسبت به شرط لیپ‌شیتز بیشتر کاهش دهد[۳۷]. لازم به ذکر است که شرط لیپ‌شیتز صرفاً شرط کافی جهت یکتایی پاسخ است و شروط یکتایی پاسخ در غیاب شرط لیپ‌شیتز نیز در مراجع بررسی قرار گرفته است[۳۸]. لذا سیستم دینامیکی با توابع غیرخطی لیپ شیتز یک طرفه نیز می‌توانند در شروط یکتایی پاسخ صدق نمایند.

شکل۱: توابع لیپ شیتز، لیپ شیتز یک طرفه و حد داخلی مربعی

تعریف ٤ [۳۹]**:** نرم وزن یافته بردار $x(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x(t)\|_{\bar R}=x(t)^T\bar R x(t) \quad (۴)$$

که در آن $\bar R$ یک ماتریس مثبت معین است. اگر $\bar R=I$ باشد آنگاه $\|x(t)\|_{\bar R}=\|x(t)\|_2^{\,2}=x(t)^T x(t)$ است. تعریف فوق برای نرم تمامی خصوصیات اپراتور نرم را داراست.

تعریف ٥ [٤٠]**:** سیستم غیر خطی $\dot x(t)=f\left(x(t),x(t-\tau),w(t),t\right)$ که در آن $x(t)$ بردار حالت، $x(t-\tau)$ بردار حالت با تأخیر زمانی و $w(t)$ سیگنال اغتشاش خارجی نامعلوم ولی با انرژی محدود ($\delta>0$ حد بالای انرژی سیگنال اغتشاشی و یک عدد معلوم است $\left(w(t)\in L_2 \Rightarrow \int_0^{t_f} w(t)^T w(t)dt\le\delta,\ \delta>0\right)$ را در نظر بگیرید، سیستم فوق نسبت به پارامترهای $(c_1,c_2,t_f,\delta,\bar R)$ دارای حد زمانی محدود (FTB) [۱] است اگر $0<c_1<c_2$ وجود داشته باشد به نحوی‌که:

$$x(t_0)^T\bar R\,x(t_0)\le c_1 \Rightarrow x^T(t)\,\bar R\,x(t)<c_2,\quad \forall t_0\in\left[-\tau\quad 0\right],\forall t\in\left[0\quad t_f\right] \quad (۵)$$

که در آن $\tau>0$ تأخیر زمانی و مقداری ثابت است.

۲-۲- تعریف مساله و فرضیات

سیستم غیرخطی دارای ترم های نایقینی و تأخیری زیر را در نظربگیرید:

$$\begin{cases}\dot x(t)=[A+\Delta A(t)]x(t)+Bu(t)\\ \qquad +[G+\Delta G(t)]w(t)+f(x)\\ \qquad +[A_\tau+\Delta A_\tau(t)]x(t-\tau)\\ x(t)=\sigma(t),\forall(t)\in[-\tau\quad 0]\end{cases} \quad (۶)$$

که در این سیستم $x(t)\in R^n$ بردار حالت، $x(t-\tau)\in R^n$ بردار حالت با تأخیر زمانی، $u(t)\in R^p$ بردار ورودی، $w(t)\in L_2{}^q$ عوامل اغتشاشی خارجی با انرژی محدود، $\sigma(t)\in L_2[-\tau\quad 0]$ بردار توابع‌اولیه، $f(x):R^n\times R^p\to R^n$ تابع برداری غیر خطی است $\left(f(0)=0\right)$. همچنین ماتریس های A,B,G,C و A_τ ماتریس‌های حقیقی و ثابت با ابعاد مناسب هستند. $\Delta A(t),\Delta G(t)$ و $\Delta A_\tau(t)$ ماتریس‌های ناشناخته و متغیر با زمان هستند. τ تأخیرزمانی و ثابت است. همچنین فرض شده است که تمام متغیرهای حالت بدون اختلال در دسترس می‌باشند.

هدف طراحی قانون کنترل فیدبک حالت $u(t)=Kx(t)$ به نحوی است که سیستم حلقه بسته‌ی زیر در حضور عوامل اغتشاشی $w(t)$ و ترم های نایقینی سیستم، پایداری حدی زمان محدود (FTB) باشد:

$$\begin{cases}\dot x(t)=[A+\Delta A(t)+BK]x+[G+\Delta G(t)]w(t)\\ \qquad +f(x)+\left[A_\tau+\Delta A_\tau(t)\right]x(t-\tau)\\ x(t)=\sigma(t),\forall(t)\in[-\tau\quad 0]\end{cases} \quad (۷)$$

فرض ۱[۳۹]**:** ماتریس‌های نایقینی $\Delta A(t),\Delta G(t)$ و $\Delta A_\tau(t)$ را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\begin{cases}\Delta A(t)=M_1S(t)H_1\\ \Delta G(t)=M_1S(t)H_2\\ \Delta A_\tau(t)=M_1S(t)H_3\end{cases} \quad (۸)$$

که در آن ماتریس های M_1,H_1,H_2,H_3 ماتریس‌های ثابت حقیقی و معلوم هستند و $S(t)$ یک تابع ماتریسی ناشناخته و متغیر با زمان است که در رابطه ی زیر صادق است:

$$S^T(t)S(t)\le I,\quad \forall t\ge 0 \quad (۹)$$

فرض ۲: تابع غیر خطی $f(x)$ دارای شروط لیپ شیتز یک طرفه و حدداخلی مربعی می‌باشد و سیستم (۷) شروط یکتایی پاسخ را دارد[۳۸].

۳- تعاریف اولیه و توصیف سیستم

در این قسمت به طراحی کنترل‌کننده فیدبک حالت زمان محدود مقاوم برای سیستم‌های غیر خطی لیپ شیتز یک طرفه همراه با عامل تأخیر پرداخته می‌شود. قضیه‌ای در این بخش ارائه و اثبات می گردند که مهمترین نوآوری‌های این مقاله محسوب می‌شوند. قضیه‌ی زیر شرایط

[۱] Finite-Time Boundedness

کافی را برای اینکه سیستم حلقه بسته‌ی (۷) دارای ویژگی FTB باشد را ارائه می‌دهد:

قضیه ۱: سیستم حلقه بسته‌ی (۷) با در نظر گرفتن پارامترهای $(c_1,c_2,t_f,\delta,\bar{R})$، FTB است اگر زوج (A,B) کنترل پذیر باشند و ثوابت مثبت $(\alpha,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ و ماتریس های متقارن و مثبت معین P و Q وجود داشته باشند به نحوی که شروط زیر برقرار باشد:

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{22} & \Sigma_{33} & \Sigma_{44}\\ * & -\varepsilon_2 I & 0 & 0\\ * & * & -\alpha I & 0\\ * & * & * & -Q\end{bmatrix}<0 \qquad (۱۰)$$

که در آن

$$\begin{aligned}\Sigma_{11}&=[A+\Delta A(t)+BK]^T P+P[A+\Delta A(t)+BK]\\&\quad+Q-\alpha P+\varepsilon_1\rho I+\varepsilon_2\sigma I\\ \Sigma_{22}&=P-\frac{\varepsilon_1}{2}I+\frac{\varepsilon_2}{2}\varphi I,\\ \Sigma_{33}&=P[G+\Delta G(t)],\\ \Sigma_{44}&=P[A_\tau+\Delta A_\tau(t)]\end{aligned}$$

و همچنین

$$\beta_2 c_1+\beta_3\tau c_1+\delta\alpha\le c_2\beta_1 e^{-\alpha t_f} \qquad (۱۱)$$

که در آن

$$\begin{aligned}&\beta_1=\lambda_{\min}(\tilde{P}),\beta_2=\lambda_{\max}(\tilde{P}),\beta_3=\lambda_{\max}(\tilde{Q})\\ &\tilde{P}=\bar{R}^{-\frac{1}{2}}P\bar{R}^{-\frac{1}{2}},\\ &\tilde{Q}=\bar{R}^{-\frac{1}{2}}Q\bar{R}^{-\frac{1}{2}}\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

اثبات:

تابعک لیاپانوف -کراسوفسکی زیر را در نظر بگیرید:

$$V[x(t)]=x^T(t)Px(t)+\int_{t-\tau}^{t}x^T(\theta)Qx(\theta)d\theta \qquad (۱۳)$$

با مشتق گیری از تابع فوق در راستای سیستم حلقه بسته‌ی (۷) خواهیم‌داشت:

$$\begin{aligned}\dot{V}[x(t)]&=\dot{x}^T(t)Px(t)+x^T(t)P\dot{x}(t)+x^T(t)Qx(t)\\&\quad-x^T(t-\tau)Qx(t-\tau)\\&=x^T(t)[A+\Delta A(t)+BK]^T Px(t)\\&\quad+w^T(t)[G+\Delta G(t)]^T Px(t)+f^T(x)Px(t)\\&\quad+x^T(t-\tau)[A_\tau+\Delta A_\tau(t)]^T Px(t)\\&\quad+x^T(t)P[A+\Delta A(t)+BK]x(t)\\&\quad+x^T(t)P[G+\Delta G(t)]w(t)\\&\quad+x^T(t)Pf(x)+x^T(t)P[A_\tau+\Delta A_\tau(t)]x(t-\tau)\\&\quad+x^T(t)Qx(t)-x^T(t-\tau)Qx(t-\tau)\end{aligned}$$

تابع J_1 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}J_1&=\dot{V}[x(t)]-\alpha V[x(t)]-\alpha w^T(t)w(t)\\&\quad+\alpha\int_{t-\tau}^{t}x^T(\theta)Qx(\theta)d\theta\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

با جایگذاری $V[x(t)]$ و $\dot{V}[x(t)]$ در J_1، عبارت زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned}J_1&=x^T(t)[A+\Delta A(t)+BK]^T Px(t)\\&\quad+w^T(t)[G+\Delta G(t)]^T Px(t)+f^T(x)Px(t)\\&\quad+x^T(t-\tau)[A_\tau+\Delta A_\tau(t)]^T Px(t)\\&\quad+x^T(t)P[A+\Delta A(t)+BK]x(t)\\&\quad+x^T(t)P[G+\Delta G(t)]w(t)+x^T(t)Pf(x)\\&\quad+x^T(t)P[A_\tau+\Delta A_\tau(t)]x(t-\tau)+x^T(t)Qx(t)\\&\quad-x^T(t-\tau)Qx(t-\tau)-\alpha x^T(t)Px(t)\\&\quad-\alpha\int_{t-\tau}^{t}x^T(\theta)Qx(\theta)d\theta-\alpha w^T(t)w(t)\\&\quad+\alpha\int_{t-\tau}^{t}x^T(\theta)Qx(\theta)d\theta\end{aligned}$$

عبارت فوق را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned}J_1&=\underbrace{\begin{bmatrix}x(t)\\ f(x)\\ w(t)\\ x(t-\tau)\end{bmatrix}^T}_{\xi^T(t)}\underbrace{\begin{bmatrix}\Sigma_{55} & P & \Sigma_{33} & \Sigma_{44}\\ * & 0 & 0 & 0\\ * & * & -\alpha I & 0\\ * & * & * & -Q\end{bmatrix}}_{\Gamma_1}\underbrace{\begin{bmatrix}x(t)\\ f(x)\\ w(t)\\ x(t-\tau)\end{bmatrix}}_{\xi(t)}\\&=\xi^T(t)\Gamma_1\xi\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

که در آن

$$\Sigma_{55}=[A+\Delta A(t)+BK]^T P+P[A+\Delta A(t)+BK]+Q-\alpha P \qquad (۱۶)$$

از آنجایی که تابع $f(x)$ دارای شروط لیپ شیتز یک طرفه و حد داخلی مربعی است لذا با در نظر گرفتن تعریف (۲) به ازای $x_1(t)=x(t)$ و $x_2(t)=0$ و ضرب طرفین رابطه ی (۲) در $\varepsilon_1>0$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_1 f^T(x)x(t)-\varepsilon_1\rho x^T(t)x(t)\le 0\\ &\Rightarrow \varepsilon_1\rho x^T(t)x(t)-\frac{\varepsilon_1}{2}f^T(x)x(t)-\frac{\varepsilon_1}{2}x^T(t)f(x)\ge 0\end{aligned}$$

نامساوی فوق به صورت نامساوی ماتریسی زیر نیز قابل نمایش است:

$$\begin{aligned}&\underbrace{\begin{bmatrix}x(t)\\ f(x)\\ w(t)\\ x(t-\tau)\end{bmatrix}^T}_{\xi^T(t)}\underbrace{\begin{bmatrix}\varepsilon_1\rho & -\frac{\varepsilon_1}{2} & 0 & 0\\ * & 0 & 0 & 0\\ * & * & 0 & 0\\ * & * & * & 0\end{bmatrix}}_{\Gamma_2}\underbrace{\begin{bmatrix}x(t)\\ f(x)\\ w(t)\\ x(t-\tau)\end{bmatrix}}_{\xi(t)}\\ &=\xi^T(t)\Gamma_2\xi(t)\ge 0\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

به طریق مشابه برای اعمال شرط حد داخلی مربعی بر روی تابع $f(x)$ با در نظر گرفتن تعریف (۳) به ازای $x_1(t)=x(t)$ و $x_2(t)=0$ و ضرب طرفین رابطه ی (۳) در $\varepsilon_2>0$ داریم:

$$f^T(x)f(x) \le \sigma x^T(t)x(t) + \varphi x^T(t)f(x)$$
$$\Rightarrow \varepsilon_2 \sigma x^T(t)x(t) + \frac{\varepsilon_2}{2}\varphi x^T(t)f(x) + \frac{\varepsilon_2}{2}\varphi f^T(x)x(t) - \varepsilon_2 f^T(x)f(x) \ge 0$$

نامساوی فوق به صورت نامساوی ماتریسی زیر نیز قابل نمایش است:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ f(x) \\ w(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}^T}_{\xi^T(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_2\sigma & \frac{\varepsilon_2}{2}\varphi & 0 & 0 \\ * & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix}}_{\Gamma_3} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ f(x) \\ w(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}}_{\xi(t)} = \xi^T(t)\Gamma_3\xi(t) \ge 0 \qquad (۱۸)$$

از نامساوی‌های ماتریسی (۱۵)، (۱۷) و (۱۸) نتیجه زیر حاصل می گردد:

$$\begin{aligned} J_1 &= \xi^T(t)\Gamma_1\xi(t) \\ &\le \xi^T(t)\Gamma_1\xi(t) + \xi^T(t)\Gamma_2\xi(t) + \xi^T(t)\Gamma_3\xi(t) \\ &= \xi^T(t)\left(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3\right)\xi(t) \end{aligned}$$

در ادامه نشان داده می‌شود که منفی بودن J_1 منجر به تحقق شرط پایداری زمان محدود برای سیستم حلقه بسته (۷) می‌گردد. برای اینکه $J_1 < 0$ باشد باید ماتریس $\left(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3\right)$ منفی معین گردد.

$$\Lambda = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{22} & \Sigma_{33} & \Sigma_{44} \\ * & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ * & * & -\alpha I & 0 \\ * & * & * & -Q \end{bmatrix} < 0$$

لذا شرط (۱۰) حاصل شد. از طرفی با در نظر گرفتن عبارت (۱۴) و مثبت بودن عبارت انتگرالی $\alpha\int_{t-\tau}^{t} x^T(\theta)Qx(\theta)d\theta$ $(\alpha, Q > 0)$ و همچنین منفی شدن J_1 نتیجه می‌شود که باید عبارت $\dot{V}[x(t)] - \alpha V[x(t)] - \alpha w^T(t)w(t)$ منفی باشد پس:

$$J_2 = \dot{V}[x(t)] - \alpha V[x(t)] - \alpha w^T(t)w(t) < 0 \qquad (۱۹)$$

با ضرب طرفین نامساوی (۱۹) در $e^{-\alpha t}$ داریم:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\alpha t}V[x(t)]\right) < \alpha e^{-\alpha t}w^T(t)w(t) \qquad (۲۰)$$

با انتگرال گیری از عبارت فوق در بازه زمانی 0 تا t خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & e^{-\alpha t}V[x(t)] - V[x(0)] < \alpha\int_0^t e^{-\alpha s}w^T(s)w(s)ds \\ & \Rightarrow V[x(t)] < e^{\alpha t}V[x(0)] \\ & \quad + \alpha e^{\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha s}w^T(s)w(s)ds \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

از طرف دیگر از رابطه‌ی (۱۳) به ازای $t = 0$ عبارت زیر نتیجه می‌شود:

$$V[x(0)] = x^T(0)Px(0) + \int_{-\tau}^{0} x^T(\theta)Qx(\theta)d\theta \qquad (۲۲)$$

بنابراین با جایگذاری رابطه‌ی(۲۲) در نامساوی (۲۱) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} V[x(t)] &< e^{\alpha t}x^T(0)Px(0) + e^{\alpha t}\int_{-\tau}^{0} x^T(\theta)Qx(\theta)d\theta \\ &\quad + \alpha e^{\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha s}w^T(s)w(s)ds \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

با تعریف $\tilde{P} = \bar{R}^{-\frac{1}{2}}P\bar{R}^{-\frac{1}{2}}, \tilde{Q} = \bar{R}^{-\frac{1}{2}}Q\bar{R}^{-\frac{1}{2}}$ و جایگذاری در رابطه ی (۲۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} V[x(t)] &\le e^{\alpha t_f}\lambda_{\max}(\tilde{P})x^T(0)\bar{R}x(0) \\ &\quad + e^{\alpha t_f}\int_{-\tau}^{0}\lambda_{\max}(\tilde{Q})x^T(\theta)\bar{R}x(\theta)d\theta + \alpha e^{\alpha t_f}\delta \\ &\le e^{\alpha t_f}\lambda_{\max}(\tilde{P})c_1 + e^{\alpha t_f}\lambda_{\max}(\tilde{Q})\tau c_1 + \alpha e^{\alpha t_f}\delta \end{aligned} \qquad (۲۴)$$

از طرف دیگر با توجه به رابطه (۱۳) داریم:

$$\begin{aligned} V[x(t)] &= x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau}^{t} x^T(\theta)Qx(\theta)d\theta \\ &\ge x^T(t)Px(t) \\ &\ge \lambda_{\min}(\tilde{P})x^T(t)\bar{R}x(t) \end{aligned} \qquad (۲۵)$$

از نامساوی های (۲۴) و(۲۵) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(\tilde{P})x^T(t)\bar{R}x(t) &\le V[x(t)] \\ &\le e^{\alpha t_f}\lambda_{\max}(\tilde{P})c_1 + e^{\alpha t_f}\lambda_{\max}(\tilde{Q})\tau c_1 \\ &\quad + \delta e^{\alpha t_f}\alpha \end{aligned} \qquad (۲۶)$$

چون در شرط زمان محدود $x^T(t)\bar{R}x(t) < c_2$ است بنابراین از نامساوی (۲۶) می توان نتیجه گرفت که:

$$x^T(t)\bar{R}x(t) \le \frac{e^{\alpha t_f}\lambda_{\max}(\tilde{P})c_1 + e^{\alpha t_f}\lambda_{\max}(\tilde{Q})\tau c_1 + \delta e^{\alpha t_f}\alpha}{\lambda_{\min}(\tilde{P})} \le c_2 \qquad (۲۷)$$

از طرفی با فرض اینکه $\beta_1 I < \tilde{P} < \beta_2 I \;,\; 0 < \tilde{Q} < \beta_3 I$ آنگاه خواهیم داشت:

$$\beta_2 c_1 + \beta_3 \tau c_1 + \delta\alpha \le c_2\beta_1 e^{-\alpha t_f} \qquad (۲۸)$$

لذا شرط (۱۱) حاصل شد.

٤- تبدیل شروط قضیه ی (۱) به LMI:

شروط قضیه ی (۱) به صورت استاندارد LMI نیستند چون ترم‌های غیر خطی و متغیر با زمان در آن ها وجود دارد و حل آن ها دشوار است . برای تبدیل نامساوی‌های قضیه‌ی (۱) به LMI از دو لم زیر کمک گرفته می‌شود.

لم ۱ [٤۰] **:** برای دو ماتریس حقیقی M, N با ابعاد مناسب و هر ماتریس $S(t)$ که رابطه‌ی $S^T(t)S(t) \le I$ را برآورده کند، اسکالر $\mu > 0$ وجود دارد به نحوی که:

$$MS(t)N + [MS(t)N]^T \le \mu^{-1}MM^T + \mu N^T N$$

لم ۲[٤۰]**:** برای ماتریس $W = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12}^{\;T} & Z_{22} \end{bmatrix}$ که در آن $Z_{11}, Z_{12}, Z_{12}, Z_{22}$ ماتریس‌هایی با ابعاد مناسب باشند، شروط زیر با هم معادل اند:

$$\begin{aligned} &(i)\; W < 0 \\ &(ii)\; Z_{11} < 0,\; Z_{22} - Z^T{}_{12}Z^{-1}{}_{11}Z_{12} < 0 \\ &(iii)\; Z_{22} < 0, Z_{11} - Z_{\;12}Z^{-1}{}_{22}Z^T{}_{12} < 0 \end{aligned}$$

با تبدیل شروط قضیه‌ی (۱) به LMI می‌توان طراحی کنترل کننده فیدبک حالت زمان محدود مقاوم را برای سیستم‌های غیر خطی لیپ‌شیتزیک طرفه همراه با عامل تأخیر را به نحوی انجام داد که سیستم حلقه بسته‌ی (۷) در حضور عوامل اغتشاشی $w(t)$ پایدار FTB باشد. این مطلب در قضیه۲ آمده است.

قضیه۲: سیستم حلقه بسته‌ی (۷) نسبت به ثوابت $(c_1, c_2, t_f, \delta, \bar{R})$، FTB است اگر زوج (A, B) کنترل پذیر باشند و ماتریس‌های متقارن و مثبت معین P و Q و ماتریس حقیقی L و پارامترهای حقیقی و مثبت $(\beta_3, \beta_2, \beta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ و اسکالر معین و مثبت α به نحوی وجود داشته باشند که شروط زیر برقرار شود:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|cccc}
\Omega_1 & \Sigma_{22} & PG & PA_\tau & \Psi_3 & PM_1 & \mu_1 H_1^T & PM_1 & 0 & PM_1 & 0 \\
* & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & -\alpha I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 H_2^T & 0 & 0 \\
* & * & * & -Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_3 H_3^T \\
* & * & * & * & -\Psi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\mu_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -\mu_1 I & -\mu_2 I & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & -\mu_2 I & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & -\mu_3 I & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\mu_3 I
\end{array}\right] < 0 \qquad (۲۹)$$

که در آن

$$\Omega_1 = A^T P + PA + L + L^T + Q - \alpha P,$$
$$\Sigma_{22} = P - \frac{\varepsilon_1}{2} I + \frac{\varepsilon_2}{2} \varphi I$$
$$\Psi_3 = \varepsilon_1 \rho I + \varepsilon_2 \sigma I,$$

و

$$\beta_1 \bar{R} < P < \beta_2 \bar{R} \qquad (۳۰)$$

و

$$0 < Q < \beta_3 \bar{R} \qquad (۳۱)$$

و همچنین

$$\begin{bmatrix} \delta\alpha - c_2 \beta_1 e^{-\alpha t_f} & \sqrt{c_1}\beta_2 & \sqrt{c_1 \tau}\beta_3 \\ * & -\beta_2 & 0 \\ * & * & -\beta_3 \end{bmatrix} < 0 \qquad (۳۲)$$

اگر حداقل یک مقدار $\alpha > 0$ موجود باشد به نحوی که شروط نامساوی‌های ماتریسی (۲۹)-(۳۲) برقرار شوند آنگاه سیستم دارای پاسخ است. از حل شروط نامساوی‌های ماتریسی (۲۹)-(۳۲) مقادیر P, L معلوم گشته و بهره کنترل کننده فیدبک حالت مناسب (K) از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$K = (B^T B)^{-1} B^T P^{-1} L \qquad (۳۳)$$

اثبات:
برای تبدیل نامساوی ماتریسی (۱۰) به LMI ابتدا باید ترم های نایقینی را جدا نموده و آن را به صورت زیر باز نویسی نمود:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Sigma_{22} & PG & PA_\tau \\ * & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ * & * & -\alpha I & 0 \\ * & * & * & -Q \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta A^T(t) P \\ + P\Delta A(t) \end{pmatrix} & 0 & P\Delta G(t) & P\Delta A_\tau(t) \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} < 0 \qquad (۳۴)$$

که در آن

$$\Psi_1 = [A + BK]^T P + P[A + BK] + Q - \alpha P + \varepsilon_1 \rho I + \varepsilon_2 \sigma I,$$
$$\Sigma_{22} = P - \frac{\varepsilon_1}{2} I + \frac{\varepsilon_2}{2} \varphi I$$

با استفاده از رابطه (۸)، نامساوی ماتریسی (۳۴) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Sigma_{22} & PG & PA_\tau \\ * & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ * & * & -\alpha I & 0 \\ * & * & * & -Q \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} \Psi_2 & 0 & PM_1 S(t) H_2 & PM_1 S(t) H_3 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} < 0 \qquad (۳۵)$$

$$\Psi_2 = H_1^T S(t)^T M_1^T P + PM_1 S(t) H_1$$

نامساوی ماتریسی (۳۵) را می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\Psi_1 & \Sigma_{22} & PG & PA_\tau\\ * & -\varepsilon_2 I & 0 & 0\\ * & * & -\alpha I & 0\\ * & * & * & -Q\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}PM_1\\0\\0\\0\end{bmatrix}S(t)\begin{bmatrix}H_1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\left\{\begin{bmatrix}PM_1\\0\\0\\0\end{bmatrix}S(t)\begin{bmatrix}H_1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right\}^T$$
$$+\begin{bmatrix}PM_1\\0\\0\\0\end{bmatrix}S(t)\begin{bmatrix}0 & 0 & H_2 & 0\end{bmatrix}+\left\{\begin{bmatrix}PM_1\\0\\0\\0\end{bmatrix}S(t)\begin{bmatrix}0 & 0 & H_2 & 0\end{bmatrix}\right\}^T$$
$$+\begin{bmatrix}PM_1\\0\\0\\0\end{bmatrix}S(t)\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & H_3\end{bmatrix}+\left\{\begin{bmatrix}PM_1\\0\\0\\0\end{bmatrix}S(t)\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & H_3\end{bmatrix}\right\}^T<0$$

با استفاده از لم (۱) نامساوی ماتریسی فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Lambda\le\begin{bmatrix}\Psi_1 & \Sigma_{22} & PG & PA_\tau\\ * & -\varepsilon_2 I & 0 & 0\\ * & * & -\alpha I & 0\\ * & * & * & -Q\end{bmatrix}$$
$$+\mu_1^{-1}\begin{bmatrix}PM_1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}PM_1\\0\\0\\0\end{bmatrix}^T+\underbrace{\mu_1\begin{bmatrix}H_1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}H_1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{\mu_1^{-1}\begin{bmatrix}\mu_1 H_1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\mu_1 H_1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}$$
$$+\mu_2^{-1}\begin{bmatrix}PM_1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}PM_1\\0\\0\\0\end{bmatrix}^T+\underbrace{\mu_2\begin{bmatrix}0 & 0 & H_2 & 0\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0 & 0 & H_2 & 0\end{bmatrix}}_{\mu_2^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0 & \mu_2 H_2 & 0\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0 & 0 & \mu_2 H_2 & 0\end{bmatrix}} \qquad (۳۶)$$
$$+\mu_3^{-1}\begin{bmatrix}PM_1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}PM_1\\0\\0\end{bmatrix}^T+\underbrace{\mu_3\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & H_3\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & H_3\end{bmatrix}}_{\mu_3^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \mu_3 H_3\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \mu_3 H_3\end{bmatrix}}<0$$

با اعمال لم (۲) بر روی نامساوی ماتریسی (۳۶) خواهیم داشت:

$$\Lambda<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{cccccccccccc}\Omega_1 & \Sigma_{22} & PG & PA_\tau & \Psi_3 & PM_1 & \mu_1 H_1^T & PM_1 & 0 & PM_1 & 0\\ * & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & -\alpha I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 H_2^T & 0 & 0\\ * & * & * & -Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_3 H_3^T\\ * & * & * & * & -\Psi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -\mu_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\mu_1 I & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & -\mu_2 I & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\mu_2 I & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\mu_3 I & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\mu_3 I\end{array}\right]<0 \qquad (۳۷)$$

که در آن

$$\Omega_1=[A+BK]^T P+P[A+BK]+Q-\alpha P$$
$$=A^T P+PA+L+L^T+Q-\alpha P,$$

با تغییر متغیر $L=PBK$ و معلوم بودن پارامتر α، نامساوی ماتریسی (۳۷) به LMI (۲۹) تبدیل می شود. از طرف دیگر نامساوی‌های (۳۰) و (۳۱) نیز به ازای ماتریس معلوم و مثبت معین $\bar{R}$، LMI هستند. با استفاده از لم (۲) نامساوی (۳۲) را نیز می توان به شکل زیر باز نویسی کرد:

$$\beta_2 c_1+\beta_3\tau c_1+\delta\alpha\le c_2\beta_1 e^{-\alpha t_f}$$
$$\Rightarrow\delta\alpha-c_2\beta_1 e^{-\alpha t_f}+\beta_2^T\beta_2\beta_2^{-1}c_1+\beta_3^T\beta_3\beta_3^{-1}\tau c_1\le 0$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\delta\alpha-c_2\beta_1 e^{-\alpha t_f} & \sqrt{c_1}\beta_2 & \sqrt{c_1\tau}\beta_3\\ * & -\beta_2 & 0\\ * & * & -\beta_3\end{bmatrix}<0 \qquad (۳۸)$$

لذا شرط (۳۲) بر روی نامساوی مذکور حاصل شد.

۵- مثال و شبیه سازی

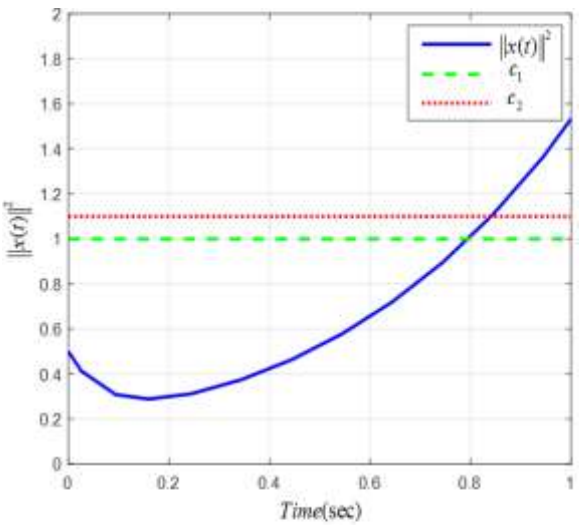
مثال ۱: فرض کنید سیستم دینامیکی (۶) دارای مقادیر زیر است:

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0.7\\1.2\end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix}0.4\\0.3\end{bmatrix},\ A_\tau=\begin{bmatrix}0.1&0\\0.1&0.1\end{bmatrix},$$
$$\tau=0.04,\ f(x)=\begin{bmatrix}\sin(x_1)-2x_1\\-10x_2+\sin(x_2)\end{bmatrix}$$
$$w(t)=0.5\cos(3t)e^{-5t},\ \Delta A(t)=\begin{bmatrix}0.14&0.084\\0.06&0.036\end{bmatrix}\sin(t) \qquad (۳۹)$$
$$\Delta G(t)=\begin{bmatrix}0.042\\0.018\end{bmatrix}\sin(t),\ \Delta A_\tau(t)=\begin{bmatrix}0.014&0.014\\0.006&0.006\end{bmatrix}\sin(t)$$

با توجه به روابط (۸) مقادیر $M_1,H_1,H_2,H_3,S(t)$ به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

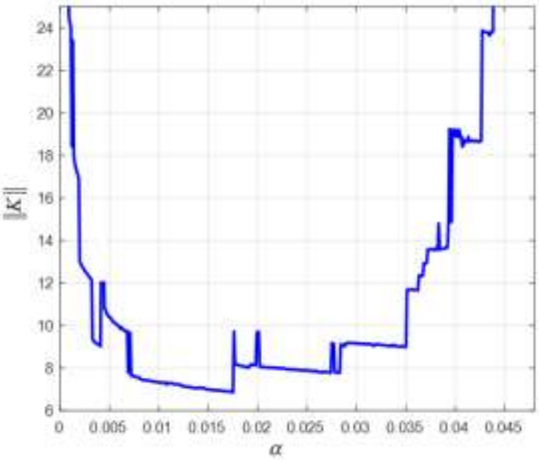
$$S(t)=0.2\sin(t),\ M_1=\begin{bmatrix}0.7\\0.3\end{bmatrix},\ H_1=\begin{bmatrix}1&0.6\end{bmatrix},H_2=[0.3],$$
$$H_3=\begin{bmatrix}0.1&0.1\end{bmatrix}$$

جهت انجام شبیه سازی پارامترهای $c_1=1,\ c_2=1.1,\ t_f=2,\ \bar{R}=I$ و همچنین تابع اولیه $\sigma(t)=[-0.5\ \ 0.5]^T,-0.4\le t\le 0$ لحاظ شده اند. شکل ۲، پاسخ زمانی مربع نرم ۲ متغیر های حالت ها برای سیستم حلقه باز نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می شود سیستم حلقه باز پایدار FTB نیست.



شکل ۲: پاسخ زمانی $\|x\|_2^2$ برای سیستم حلقه باز

با توجه به ساختار $f(x)$ که در رابطه (۳۹) آمده است، مقدار $\sigma=104$, $\rho=-1$, $\varphi=0$ بدست می‌آید. با در نظر گرفتن α به عنوان پارامتر ثابت و مثبت و حل LMIهای قضیه ی (۲) به ازای αهای مختلف، محدوده ی مجاز α که در آن LMIها برقرار باشند با نوشتن یک برنامه ساده کامپیوتری بدست می‌آید. برای مثال مورد بررسی، محدوده $0<\alpha\le.047$ بدست آمده است. با رسم نمودار αهای مجاز بر حسب بهره K ملاحظه خواهد شد که به ازای αهای خیلی کوچک بهره K بزرگ می‌شود که مطلوب نمی‌باشد بنابراین مطابق شکل (۳) $\alpha=0.0153$ انتخاب شود که نرم بهره K مینیمم شود.

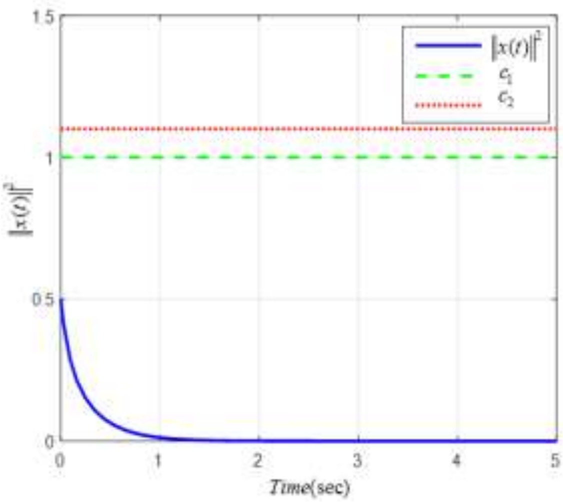


شکل ۳: نمودار نرم K بر حسب α برای تعیین بهترین

با در نظر گرفتن $\alpha=0.0153$ و حل LMIهای (۲۹)-(۳۲) نتایج زیر بدست می‌آید:

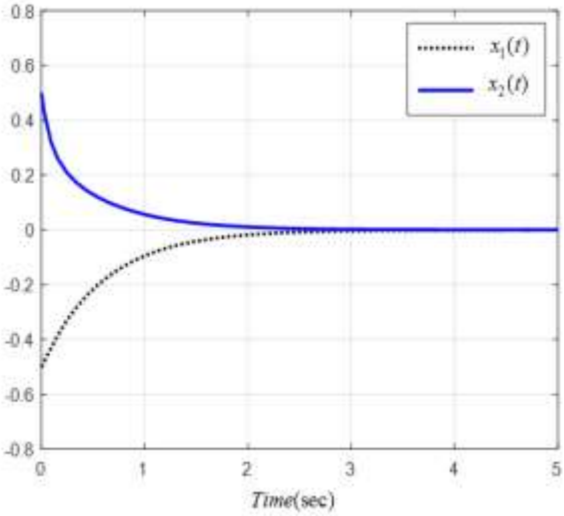
$$P=\begin{bmatrix}0.4129&-0.0001\\-0.0001&0.4130\end{bmatrix},$$
$$Q=\begin{bmatrix}0.1236&0.0017\\0.0017&0.1231\end{bmatrix},$$
$$L=\begin{bmatrix}-3.4775&-1.5904\\-1.5904&-1.8300\end{bmatrix},\ \mu_1=\ 0.3895,$$
$$\mu_2=\ 0.0733,\ \ \mu_3=\ 0.5243, \beta_1=\ 0.4099,$$
$$\beta_2=0.4162, \beta_3=\ 0.1908,\ \ \varepsilon_1=\ 0.8376,$$
$$\varepsilon_2=\ 0.0118,\ \ K=\begin{bmatrix}-5.4496&-4.1524\end{bmatrix}$$

شکل ۴ پاسخ مربع نرم بردار حالت را در سیستم حلقه بسته نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌گردد سیستم حلقه بسته ویژگی پایداری FTB نسبت به پارامترهای ذکر شده را دارا می‌باشد.

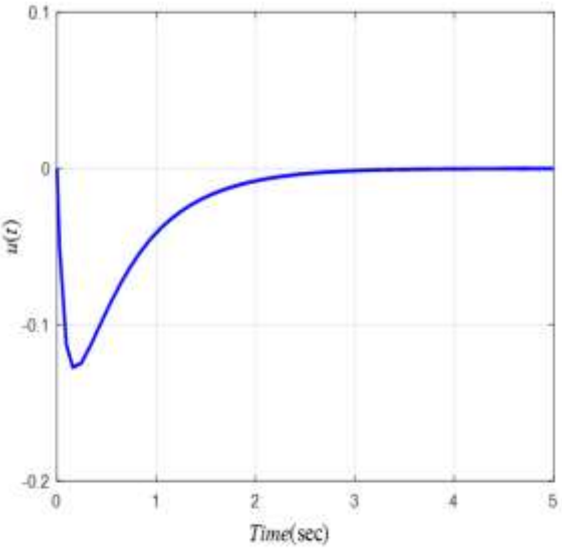


شکل ۴:پاسخ زمانی $\|x\|_2^2$ برای سیستم حلقه بسته

پاسخ زمانی متغیر های حالت در سیستم حلقه بسته و ورودی کنترلی به ترتیب در شکل های ۵ و ۶ آمده است:



شکل ۵: پاسخ زمانی متغیر های حالت در سیستم حلقه بسته



شکل 6: پاسخ زمانی ورودی کنترلی در سیستم حلقه بسته

مثال۲: در این مثال سیستم دیگری در نظر گرفته شده است تا کارایی روش مطرح شده مورد مقایسه قرار بگیرد. برای این منظور سیستم (۶) را به ازای مقادیر زیر را در نظر بگیرید:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0.5 & -1.2\end{bmatrix}, A_\tau=\begin{bmatrix}-1 & 0.5\\ 1.2 & 0.4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}, G=\begin{bmatrix}0.4\\ 0.3\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}, M_1=\begin{bmatrix}1\\ -0.8\end{bmatrix}, M_2=0,\ \tau=0.2$$

$$H_1=\begin{bmatrix}1.2 & 0.6\end{bmatrix}, H_2=0,\ H_3=\begin{bmatrix}0.7 & 1\end{bmatrix},$$

$$\bar{R}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \sigma(t)=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2\end{bmatrix}, S(t)=0.2\sin(t)$$

$$f\left(x(t)\right)=\begin{bmatrix}0\\ -0.333\sin\left(x_1(t)\right)\end{bmatrix}, w(t)=\frac{0.5\sin(20t)}{1+t^2}$$

با توجه به ساختار $f(x)$ و روابط (۲) و (۳) مقادیر $\rho=\sigma=0.333$ و $\varphi=0$ می‌باشد. هدف طراحی کنترل کننده به منظور پایداری زمان محدود نسبت به پارامترهای $(c_1,c_2,t_f,\delta,\bar{R})=\begin{pmatrix}0.5 & 1 & 4 & 0.5 & \bar{R}\end{pmatrix}$ می‌باشد. مراحل طی‌شده جهت بدست آوردن مقدار مطلوب پارامتر α همانند مثال قبل انجام پذیرفته و با استفاده از قضیه ۲ به ازای $\alpha=0.02$ نتایج زیر از حل نامساوی‌های ماتریسی حاصل می‌شود:

$$P=\begin{bmatrix}1.0837 & -0.0146\\ -0.0146 & 1.0944\end{bmatrix}, L=\begin{bmatrix}-13.3425 & -6.5940\\ -6.5940 & -8.8499\end{bmatrix},$$

$$Q=\begin{bmatrix}1.8743 & 0.2310\\ 0.2310 & 1.9078\end{bmatrix},$$

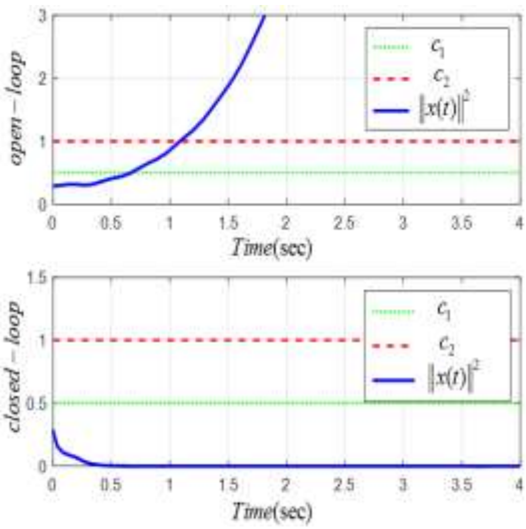
$$\mu_1=2.4621,\ \mu_2=3.8888,\ \mu_3=0.9338,$$

$$\beta_1=1.0048,\ \beta_2=1.2343,\ \beta_3=2.5685$$

$$\varepsilon_1=2.8506,\ \varepsilon_2=3.5197$$

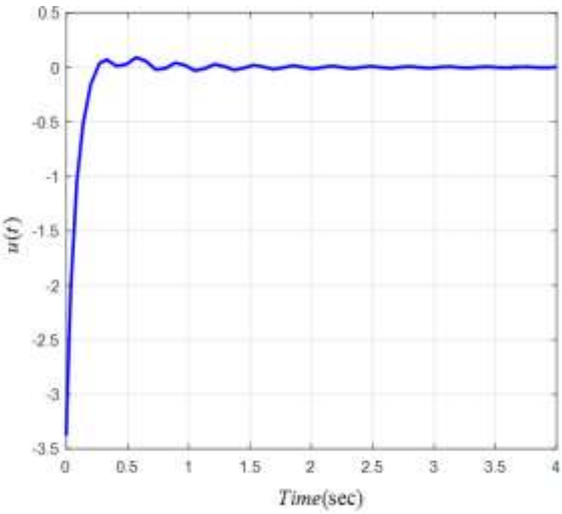
$$K=\begin{bmatrix}-4.9550 & -4.5063\end{bmatrix}$$

شکل ۷، پاسخ زمانی مربع نرم متغیرهای حالت را برای سیستم حلقه باز و حلقه بسته نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود سیستم حلقه باز ناپایدار بوده اما سیستم حلقه بسته پایدار FTB نسبت به پارامترهای ذکر شده می‌باشد.



شکل ۷:پاسخ زمانی $\|x\|_2^2$ برای سیستم حلقه بسته و حلقه باز

پاسخ زمانی ورودی کنترلی در شکل ۸ نشان داده شده است.



شکل ۸: پاسخ زمانی ورودی کنترلی در سیستم حلقه بسته

حال به منظور مقایسه عملکرد روش پیشنهادی در این مقاله با مرجع [۲۸]، پایداری FTB نسبت به پارامترهای متفاوت ارائه شده در جدول ۱ و با ازای $\bar{R}$ های یکسان مورد بررسی قرار گرفته است. همان طوری که از نتایج ذکر شده در جدول (۱) استنباط می‌گردد، قضیه مطرح شده در این مقاله بازه عملکردی وسیعتر و محافظه کاری کمتری نسبت به رویکرد ارائه شده در مرجع [۲۸] دارد. در واقع از آنجایی که بر طبق تعریف ۵ باید شرط $x^T(t)\bar{R}x(t)<c_2,$ برای همه زمانهای $\forall t\in\begin{bmatrix}0 & t_f\end{bmatrix}$ برقرار باشد لذا هرچه مقدار t_f افزایش و مقدار c_2 کاهش یابد، شرایط دستیابی به پاسخ دشوارتر خواهد شد.

مرجع [۲۸] صرفاً به ازای t_f های کوچک و c_2های نسبتاً بزرگ، پاسخ مناسب را خواهد داد، ولی رویکرد ارائه شده در این مقاله برای t_fهای بزرگ و مقدار c_2 های کوچک نیز دارای پاسخ مناسب است و لذا محافظه کاری به مقدار چشمگیری کاهش یافته و روش مذکور ارزش عملیاتی بیشتری را دارد. از طرف دیگر رویکرد ارائه شده در مرجع [۲۸] برای سیستم های لیپ شیتز مطرح شده است در صورتیکه روش ارائه شده در این مقاله علاوه بر سیستم‌های لیپ شیتز، سیستم‌های با توابع غیرخطی لیپ‌شیتزیک‌طرفه را که کلاس وسیعتری از توابع غیرخطی را شامل می‌شود نیز پوشش می‌دهد.

٦- نتیجه‌گیری

در این مقاله به مساله طراحی کنترل کننده زمان محدود مقاوم برای سیستم‌های غیر خطی لیپ شیتز یک طرفه با تأخیر زمانی، ورودی اغتشاشی و پارامتر های نایقینی متغیر با زمان پرداخته شد. در این مقاله با استفاده از رویکرد لیاپانوفی و با انتخاب تابعک لیاپانوفی-کراسوفسکی مناسب، شرایطی استخراج گردید که پایداری زمان محدود و مقاوم سیستم حلقه بسته را تضمین نماید. این شرایط به وسیله ی نامساوی‌های ماتریسی بیان گردید و سپس این نامساوی‌ها در قالب استاندارد نامساوی‌های ماتریسی خطی درآورده شد. از حل نامساوی‌های مذکور، بهره قانون کنترل فیدبک حالت جهت پایدارسازی زمان محدود و مقاوم برای سیستم تأخیری لیپ شیتز یک طرفه بدست آمد. در آخر نیز شبیه‌سازی هایی برای نشان دادن درستی نتایج و صحت عملکرد روش پیشنهادی صورت پذیرفت

جدول ۱: مقایسه مرجع [۲۸] با رویکرد پیشنهادی

شماره	c_1	c_2	t_f	δ	رویکرد پیشنهادی	مرجع [۲۸]
۱	۰,۵	۰,۸	۱	۰,۵	$K=[-1.9907 \quad -2.1769], \alpha=0.02$	به ازای هر α ای پاسخ ندارد
۲	۰,۵	۲,۹	۱	۰,۵	$K=[-2.0215 \quad -2.1275], \alpha=0.04$	به ازای هر α ای پاسخ ندارد
۳	۰,۵	۳	۱	۰,۵	$K=[-2.0440 \quad -2.1496], \alpha=0.04$	$K=[-3.7182 \quad -4.7818]\times10^4, \alpha=0.68$
٤	۰,۵	۵۰	۱	۰,۵	$K=[-1.5402 \quad -2.1775], \alpha=0.05$	$K=[-10.2382 \quad -12.1326], \alpha=1$
٥	۰,۵	۸	۲	۰,۵	$K=[-7.2741 \quad -6.2407], \alpha=0.01$	$K=[-346.1516 \quad -424.8733], \alpha=0.65$
٦	۰,۵	۸	۳	۰,۵	$K=[-7.2429 \quad -6.2176], \alpha=0.01$	به ازای هر α ای پاسخ ندارد
۷	۰,۵	۸	۲۰	۰,۵	$K=[-6.7320 \quad -5.8377], \alpha=0.02$	به ازای هر α ای پاسخ ندارد
۸	۰,۵	۸	۲۷۰	۰,۵	$K=[-9.8494 \quad -11.9445], \alpha=0.01$	به ازای هر α ای پاسخ ندارد

مراجع

[1] M. Rehan, K.-S. Hong, and S. S. Ge, "Stabilization and tracking control for a class of nonlinear systems," *Nonlinear Analysis: Real World Applications,* vol. 12, no. 3, pp. 1786-1796, 2011.

[2] A. Zemouche, and M. Boutayeb, "On LMI conditions to design observers for Lipschitz nonlinear systems," *Automatica,* vol. 49, no. 2, pp. 585-591, 2013.

[3] H. K. Khalil, *Nonlinear control*: Prentice Hall, 2014.

[4] S. Tong, B. Huo, and Y. Li, "Observer-based adaptive decentralized fuzzy fault-tolerant control of nonlinear large-scale systems with actuator failures," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems,* vol. 22, no. 1, pp. 1-15, 2014.

[5] W. Zhang, H.-S. Su, Y. Liang, and Z.-Z. Han, "Non-linear observer design for one-sided Lipschitz systems: an linear matrix inequality approach," *IET control theory & applications,* vol. 6, no. 9, pp. 1297-1303, 2012.

[6] M. C. Nguyen, and H. Trinh, "Observer Design for One-Sided Lipschitz Discrete-Time Systems Subject to Delays and Unknown Inputs," *SIAM Journal on Control and Optimization,* vol. 54, no. 3, pp. 1585-1601, 2016.

[7] J. Huang, W. Zhang, M. Shi, L. Chen, and L. Yu, "H∞ observer design for singular one-sided Lur'e differential inclusion system," *Journal of the Franklin Institute,* vol. 354, no. 8, pp. 3305-3321, 2017.

[8] L. Li, Y. Yang, Y. Zhang, and S. X. Ding, "Fault estimation of one-sided Lipschitz and quasi-one-sided Lipschitz systems." pp. 2574-2579.

[9] S. Xia, S. Ma, Z. Cai, and Z. Zhang, "Stochastic observer design for Markovian jump one-sided Lipschitz systems with partly unknown transition rates." pp. 1139-1144.

[10] J. Wang, F. Wang, Z. Zhang, S. Li, and J. Rodríguez, "Design and Implementation of Disturbance Compensation-Based Enhanced Robust Finite Control Set Predictive Torque Control for Induction Motor Systems," *IEEE Transactions on Industrial Informatics,* vol. 13, no. 5, pp. 2645-2656, 2017.

[11] Q. Meng, and Y. Shen, "Finite-time H∞ control for linear continuous system with norm-bounded disturbance," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* vol. 14, no. 4, pp. 1043-1049, 2009.

[12] C. Martín, M. R. Arahal, F. Barrero, and M. J. Durán, "Five-phase induction motor rotor current observer for finite control set model predictive control of stator current," *IEEE Transactions on Industrial Electronics,* vol. 63, no. 7, pp. 4527-4538, 2016.

[13] F. Amato, M. Ariola, and P. Dorato, "Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances," *Automatica,* vol. 37, no. 9, pp. 1459-1463, 2001.

[14] H. Chenarani, and T. Binazadeh, "Flexible structure control of unmatched uncertain nonlinear systems via passivity-based sliding mode technique," *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Electrical Engineering,* vol. 41, no. 1, pp. 1-11, 2017.

[15] Q. Guo, J. Yin, T. Yu, and D. Jiang, "Saturated Adaptive Control of Electrohydraulic Actuator with Parametric Uncertainty and Load Disturbance," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017.

[16] T. Binazadeh, and M. Shafiei, "A novel approach in the finite-time controller design," *Systems Science & Control Engineering: An Open Access Journal,* vol. 2, no. 1, pp. 119-124, 2014.

[17] A. Abooee, M. Moravej-Khorasani, and M. Haeri, "Global Finite Time Stabilization of a Class of Uncertain MIMO Nonlinear Systems," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control,* vol. 138, no. 2, pp. 021007, 2016.

[18] T. Binazadeh, "Finite-time tracker design for uncertain nonlinear fractional-order systems," *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics,* vol. 11, no. 4, pp. 041028, 2016.

[19] W. Xiang, and J. Xiao, "H∞ finite-time control for switched nonlinear discrete-time systems with norm-bounded disturbance," *Journal of the Franklin Institute,* vol. 348, no. 2, pp. 331-352, 2011.

[20] Y. Cao, W. Ren, D. W. Casbeer, and C. Schumacher, "Finite-time connectivity-preserving consensus of networked nonlinear agents with unknown Lipschitz terms," *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. 61, no. 6, pp. 1700-1705, 2016.

[21] H. Gholami, and T. Binazadeh, "Design finite-time output feedback controller for nonlinear discrete-time systems with time-delay and exogenous disturbances," *Systems Science & Control Engineering,* vol. 6, no. 1, pp. 20-27, 2018.

[22] Y. Huang, S. Fu, and Y. Shen, "Finite-time H∞ control for one-sided Lipschitz systems with auxiliary matrices," *Neurocomputing,* vol. 194, pp. 207-217, 2016.

[23] M. Benallouch, M. Boutayeb, and H. Trinh, "H_∞ Observer-Based Control for Discrete-Time One-Sided Lipschitz Systems with Unknown Inputs," *SIAM Journal on Control and Optimization,* vol. 52, no. 6, pp. 3751-3775, 2014.

[24] م. ا. اسدی‌نیا, and ط. بینازاده, "Stabilization of Time Varying Delay Singular Systems Subject to Actuator Saturation," مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز, vol. 47, no. 3, pp. 843-855, 2017.

[25] Y. Chen, and W. X. Zheng, "Stability analysis of time-delay neural networks subject to stochastic

[33] M. C. Nguyen, and H. Trinh, “Unknown input observer design for one-sided Lipschitz discrete-time systems subject to time-delay,” *Applied Mathematics and Computation,* vol. 286, pp. 57-71, 2016.

[34] Y. Dong, W. Liu, and S. Liang, “Nonlinear observer design for one- sided Lipschitz systems with time- varying delay and uncertainties,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control,* vol. 27, no. 11, pp. 1974-1998, 2017.

[35] H. K. Khalil, “Nonlinear systems, 3rd,” *New Jewsey, Prentice Hall,* vol. 9, 2002.

[36] J. Song, and S. He, “Robust finite-time H∞ control for one-sided Lipschitz nonlinear systems via state feedback and output feedback,” *Journal of the Franklin Institute,* vol. 352, no. 8, pp. 3250-3266, 2015.

[37] R. Wu, W. Zhang, F. Song, Z. Wu, and W. Guo, “Observer-based stabilization of one-sided Lipschitz systems with application to flexible link manipulator,” *Advances in Mechanical Engineering,* vol. 7, no. 12, pp. 1687814015619555, 2015.

[38] R. P. Agarwal, R. P. Agarwal, and V. Lakshmikantham, *Uniqueness and nonuniqueness criteria for ordinary differential equations*: World Scientific, 1993.

[39] M. Lacey, E. Sawyer, and I. Uriarte-Tuero, “A characterization of two weight norm inequalities for maximal singular integrals with one doubling measure,” *Analysis & PDE,* vol. 5, no. 1, pp. 1-60, 2012.

[40] J. Song, and S. He, “Finite-time H∞ control for quasi-one-sided Lipschitz nonlinear systems,” *Neurocomputing,* vol. 149, pp. 1433-1439, 2015.

perturbations,” *IEEE Transactions on Cybernetics,* vol. 43, no. 6, pp. 2122-2134, 2013.

[26] Y. Chen, and W. X. Zheng, “Stability and $ L_ {2} $ performance analysis of stochastic delayed neural networks,” *IEEE transactions on neural networks,* vol. 22, no. 10, pp. 1662-1668, 2011.

[27] X. Wang, G. Zong, and H. Sun, “Asynchronous finite-time dynamic output feedback control for switched time-delay systems with non-linear disturbances,” *IET Control Theory & Applications,* vol. 10, no. 10, pp. 1142-1150, 2016.

[28] J. Song, and S. He, “Finite-time robust passive control for a class of uncertain Lipschitz nonlinear systems with time-delays,” *Neurocomputing,* vol. 159, pp. 275-281, 2015.

[29] S. B. Stojanovic, D. L. Debeljkovic, and D. S. Antic, “Robust Finite- Time Stability and Stabilization of Linear Uncertain Time- Delay Systems,” *Asian Journal of Control,* vol. 15, no. 5, pp. 1548-1554, 2013.

[30] J. Cheng, H. Zhu, S. Zhong, Y. Zhang, and Y. Li, “Finite-time H∞ control for a class of discrete-time Markovian jump systems with partly unknown time-varying transition probabilities subject to average dwell time switching,” *International Journal of Systems Science,* vol. 46, no. 6, pp. 1080-1093, 2015.

[31] G. Zong, R. Wang, W. Zheng, and L. Hou, “Finite- time H∞ control for discrete- time switched nonlinear systems with time delay,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control,* vol. 25, no. 6, pp. 914-936, 2015.

[32] M. C. Nguyen, and H. Trinh, “Reduced-order observer design for one-sided Lipschitz time-delay systems subject to unknown inputs,” *IET Control Theory & Applications,* vol. 10, no. 10, pp. 1097-1105, 2016.

مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۲، شماره ۱، بهار ۱۳۹۷، صفحه ۳۷-۲۵

طراحی الگوریتم کالیبراسیون روی برد حسگر مغناطیسی ماهواره با استفاده از روش‌های پاسخ متمرکز و فیلتر کالمن دو مرحله‌ای

علی راهدان[۱]، حسین بلندی[۲]، مصطفی عابدی[۳]

[۱] کارشناسی ارشد مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه علم و صنعت، alirahdan1370@gmail.com
[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه علم و صنعت، h_bolandi@iust.ac.ir
[۳] استادیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه شهید بهشتی، mo_abedi@sbu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۶/۷/۳۰، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۶/۹/۹)

چکیده: حسگر مغناطیسی یکی از حسگرهای مهم مورد استفاده در سیستم تعیین وکنترل وضعیت ماهواره است. با توجه به بروز خطاهای مختلف در هنگام جدا شدن ماهواره از ماهواره‌بر و همچنین هنگام چرخش ماهواره در مدار، لازم است پارامترهای این حسگر به شکل روی برد دوباره اصلاح گردد. برای این منظور در این مقاله راهکارهایی برای استخراج پارامترهای حسگر ارائه شده است که در آنها نیاز به دانستن وضعیت لحظه‌ای ماهواره نمی‌باشد. در این راستا ابتدا یک مدل از حسگر مغناطیسی ارائه شده که بر خلاف مدل‌های مرسوم شامل اثر غیرخطی، اثر هیسترزیس، اثر کوانتیزه‌کردن داده‌ها، اثر نفوذپذیری و خطای نصب است. در ادامه به منظور کالیبراسیون روی برد حسگر، ساختارهای سری دو مرحله‌ای خارج از خط و برخط پیشنهاد شده است. در حالت خارج از خط، از ترکیب دو الگوریتم پاسخ متمرکز و لونبرگ مارکارد استفاده شده است و در حالت برخط دو الگوریتم مبتنی بر فیلتر کالمن توسعه یافته و خنثی پیشنهاد گردیده است. با استفاده از راهکارهای معرفی شده می‌توان انواع خطاهای حسگر شامل بایاس، ضریب مقیاس و خطای نصب را بطور همزمان تعیین نمود و دقت کالیبراسیون را در قیاس با کارهای مشابه بهبود بخشید. نتایج شبیه‌سازی روی یک ماهواره نزدیک به زمین نشان می‌دهد که این دو روش پارامترهای حسگر را با دقت قابل قبول استخراج می‌کنند. بر این اساس، رویکرد مبتنی بر پاسخ متمرکز هر چند دارای زمان محاسبات و همگرایی کوتاه‌تر در قیاس با روش‌های برخط دارا می‌باشد اما دارای دقت کمتر می‌باشد.

کلمات کلیدی: حسگر مغناطیسی، ماهواره، فیلتر کالمن دو مرحله‌ای، الگوریتم لونبرگ مارکاد.

Design of On Board Calibration Algorithms of Satellite Magnetometer based on Two Stage Centered Solution and Kalman Filter Methods

Ali Rahdan, Hossein Bolandi, Mostafa Abedi

Abstract: Magnetometer is one of the most important sensors used in the satellite attitude determination and control system. Due to occurrence of various errors when the satellite is separated from the launcher and also during its rotation in the orbit, it is necessary to re-adjust onboard the sensor parameters. For this purpose, some solutions are proposed in this paper in which the satellite current attitude is not required. In this regard, first a magnetometer model is presented that despite conventional models; it includes nonlinearity, hysteresis and data quantization effects, permeability and installation error. Then, for sensor onboard calibration purposes, two stages-offline and two-stage online series structures are suggested. In the offline case, the centered solution and Levenberg Marquardt methods have been integrated. Also, the extended and unscented Kalman filters are integrated for online case. Utilizing the suggested algorithms, different errors including bias, scale factor and installation errors are simultaneously determined and also the accuracy is improved compared to the similar works. The simulation results for a Leo satellite show that the sensor parameters are derived with acceptable accuracy. Accordingly, it will be illustrated that the centered solution method has lower computational load and shorter time convergence, but it has lower accuracy with respect to online methodology.

Keywords: Magnetometer, satellite, two-stage Kalman filter, Levenberg Marquardt.

۱- مقدمه

حسگرهای مغناطیسی[۱] اغلب در ماهواره‌های نزدیک به زمین[۲] برای تشخیص جهت و دامنه میدان مغناطیسی به کار گرفته می‌شوند. در این راستا خروجی این حسگر یکی از ورودی‌های مورد نیاز برای تعیین وضعیت ماهواره است. همچنین در ماهواره‌هایی که از گشتاوردهنده مغناطیسی[۳] برای کنترل وضعیت استفاده شده است، دانستن اطلاعات میدان مغناطیسی ضروری می‌باشد.[۱-۳] . با توجه به وجود خطاهای سیستماتیک و تصادفی مانند نویز اندازه‌گیری، دقت حسگرهای مغناطیسی کاهش می‌یابد که منجر به کاهش دقت زیر سیستم تعیین و کنترل وضعیت ماهواره می‌شود. این زیر سیستم وظیفه جهت‌دهی به ماهواره و پایدارسازی آن را بر عهده دارد. این جهت‌دهی به منظور قرار دادن ماهواره به سمت هدف مطلوب، قرار دادن پنل‌های خورشیدی به سمت خورشید و قرار دادن آنتن‌ها به سمت نقطه خاص انجام می‌گیرد[۴]. بنابراین تغییر پارامترهای حسگر می‌تواند تأثیر قابل ملاحظه بر مأموریت ماهواره داشته باشد و لذا دستیابی به یک راهکار برای تنظیم مجدد این پارامترها پس از پرتاب ماهواره ضروری می‌باشد. کالیبراسیون حسگرهای مغناطیسی ماهواره هم روی زمین و هم روی مدار صورت می‌گیرد. کالیبراسیون روی زمین با استفاده از ابزار دقیق آزمایشگاهی به منظور تعیین پارامترهای اولیه حسگر صورت می‌گیرد. به منظور تعیین پارامترهای حسگر مغناطیسی روی زمین، روش‌های زیادی ارائه شده است که با توجه به مدل حسگر و ثابت بودن میدان مغناطیسی مرجع در محیط آزمایشگاه، این روش‌ها بر پایه معیار تطبیق بیضی هستند. بر اساس این معیار، در مرجع [۵] یک تخمین‌گر تکرار حداقل مربعات دسته‌ای ارائه شده است و مقدار شروع آن توسط یک تخمین‌گر غیرخطی دیگر تعیین شده است. در مرجع [۶] الگوریتم حداقل مربعات بازگشتی پیشنهاد شده است. این الگوریتم برای کاربردهای برخط مناسب است ولی تعیین پارامترهای اولیه آن به منظور همگرایی الگوریتم دشوار است. در مرجع [۷] الگوریتم‌های تفاضل تکاملی[۴] و ژنتیک که جزو روش‌های جستجوی بهینه هستند جهت کالیبراسیون حسگر مغناطیسی معرفی شده اند. مزیت این روش‌ها نسبت به روش‌های گذشته، عدم حساسیت آن‌ها به شرایط اولیه است و مشکل تنظیم شرایط اولیه برای آن‌ها وجود ندارد. مرجع [۸] با در نظر گرفتن اثر غیرخطی حساسیت ورودی حسگر، مدل دقیق‌تری از حسگر مغناطیسی را به‌دست آورده و برای استخراج پارامترهای آن از الگوریتم حداقل مربعات غیرخطی استفاده کرده است. در مرجع [۹] یک الگوریتم کالیبراسیون سریع ارائه شده است که محاسبات کم آن، برخط بودن و همگرایی سریع باعث تمایز آن از دیگر روش‌ها شده است. مرجع [۱۰] با ترکیب حسگر مغناطیسی و ژیروسکوپ، اثر خطای هم ترازی را در روند کالیبراسیون از بین برده و باعث افزایش دقت کالیبراسیون شده است.

پس از نصب حسگر مغناطیسی روی بدنه ماهواره و پرتاب ماهواره به فضا، به دلیل وجود پسماند مغناطیسی ناشی از زیرسیستم‌های ماهواره، تغییرات دمایی، لرزش‌های ناشی از جدایش ماهواره و فرسودگی، پارامترهای حسگر مغناطیس دچار تغییر می‌شوند. با توجه به در دسترس نبودن ماهواره پس از پرتاب، لازم است این پارامترها روی برد تصحیح شوند. کالیبراسیون روی برد این حسگرها به دو دسته مستقل از وضعیت و وابسته به وضعیت تقسیم می‌شود. روش‌های مستقل از وضعیت به دلیل عدم تأثیرپذیری از خطای وضعیت دارای دقت بالاتری هستند و بیشتر مورد توجه قرار دارند. به منظور کالیبراسیون روی برد مستقل از وضعیت حسگرهای مغناطیسی با توجه به مدل ریاضی و ثابت نبودن میدان مغناطیسی مرجع ناشی از چرخش ماهواره، از ایده تفاضل مربع نرم بردار مرجع و بردار اندازه‌گیری استفاده می‌کنند. روش‌های مستقل از وضعیت به دو دسته خارج از خط[۵] یا برخط[۶] تقسیم می‌شوند. در روش‌های خارج از خط، داده‌های حسگر و داده‌های مرجع در یک زمان مشخص‌شده ذخیره می‌شوند و سپس توسط الگوریتم‌های موجود، پارامترهای حسگر استخراج می‌شوند. این روش‌ها در طول عمر ماهواره بارها تکرار شده تا بهترین دقت از پارامترها حاصل شود. در روش‌های برخط با هر بار نمونه برداری از خروجی حسگر، پارامترها تخمین زده می‌شوند[۱۱-۱۴].

روش‌های خارج از خط مختلفی برای تعیین پارامترهای حسگر مغناطیسی ارائه شده‌است. در مرجع [۱۵] روش‌های مبتنی بر تکرار نیوتون ـگوس[۷] و نقطه ثابت[۸] و همچنین روش‌های تک مرحله‌ای داونپورت[۹] و آکیونا[۱۰] به منظور تعیین بایاس حسگر مغناطیسی پیشنهاد شده است. این روش‌ها در ماهواره‌های چرخشی به کار گرفته می‌شوند و استفاده از آن‌ها در ماهواره‌های پایدار شده منجر به همگرایی نامطلوب یا حتی واگرایی

---

۱ Magnetometer

۲ Low earth orbit

۳ Magnetic torquer

۴ Deferential evolution

۵ Offline

۶ Online

۷ Newton - Gauss

۸ Fix point

۹ Davenport

۱۰ Acuna

می‌شود. در مرجع [۱۶] روش پاسخ متمرکز [۱] برای به‌دست آوردن بایاس، ضریب مقیاس و عدم تعامد حسگر مورد بررسی قرار گرفته است. این روش با استفاده از ایده تقریب مرکزی، ترم‌های غیرخطی مدل حسگر را حذف کرده و در نهایت با استفاده از الگوریتم حداقل مربعات خطی، پارامترها محاسبه می‌شود. این روش هم در ماهواره‌های چرخشی و هم در ماهواره‌های پایدار شده به کار گرفته می‌شود. در مرجع[۱۷] یک روش دو مرحله‌ای [۲] که تکمیل کننده روش پاسخ متمرکز است ارائه شده است. ابتدا با استفاده از روش پاسخ متمرکز، شرایط اولیه مرحله بعد حاصل می‌شود و در ادامه با استفاده از روش نیوتون ـ گوس پاسخ نهایی به‌دست می‌آید.

روش‌های بر خط اغلب بر پایه فیلتر کالمن هستند. در مرجع[۱۸] از فیلتر کالمن توسعه‌یافته و روش پاسخ متمرکز متوالی برای تخمین بایاس، ضریب مقیاس و عدم تعامد استفاده شده‌است. در مرجع [۱۹–۲۰] با ترکیب معادلات سینماتیک ماهواره و مدل حسگر مغناطیسی و مدل ژیروسکوپ و بهره‌گیری از فیلتر کالمن خنثی، پارامترهای وضعیت، بایاس حسگر مغناطیسی و بایاس ژیروسکوپ تخمین زده شده است. در مرجع [۲۱] با ترکیب معادلات موقعیت ماهواره و مدل حسگر مغناطیسی و به‌کارگیری فیلتر کالمن خنثی، پارامترهای موقعیت، بایاس و ضریب مقیاس حسگر مغناطیسی به‌دست آورده شده است. در [۲۲] با ارائه الگوریتم مقدار تفاضلی [۳] که توسعه یافته روش آکونیا است، آن را برای کاربردهای زمان واقعی مهیا کرده است. این الگوریتم تنها توانایی محاسبه خطای نصب را دارد.

در این مقاله نیز با توجه به اهمیت تعیین پارامترهای حسگر پس از پرتاب ماهواره، راهکارهائی برای انجام کالیبراسیون به شکل روی برد ارائه شده است. در این راستا ابتدا یک مدل از حسگر مغناطیسی ارائه می‌شود که بر خلاف مدل‌های مرسوم شامل اثر غیرخطی، اثر هیسترزیس، اثر کوانتیزه‌کردن داده‌ها، اثر نفوذپذیری و خطای نصب است. بنابراین کلیه خطاهای حسگر برای ارزیابی الگوریتم‌ها دخیل گردیده‌اند. براین اساس، یک روش خارج از خط جدید از ترکیب دو الگوریتم پاسخ متمرکز و لونبرگ مارکارد ارایه گردیده است که در قیاس با مراجعی همچون [۱۵] و [۱۶] امکان محاسبه همزمان بایاس، ضریب مقیاس،عدم تعامد را فراهم آورد. همچنین با بکارگیری الگوریتم حداقل مربعات خطی در کنار راهکار فوق امکان اندازه‌گیری خطای نصب نیز فراهم گردیده است. در این مقاله همچنین یک ساختار سری دو مرحله‌ای برخط معرفی گردیده است که در مرحله اول آن با به‌کارگیری الگوریتم فیلتر کالمن توسعه‌یافته یا خنثی، بایاس، ضریب مقیاس و عدم تعامد حسگر محاسبه می‌شود و در مرحله دوم با استفاده از خروجی مرحله اول و ماتریس وضعیت ماهواره و به‌کارگیری الگوریتم فیلتر کالمن خطی، خطای نصب حسگر حاصل می‌شود. بنابراین در مقایسه با روش‌هائی همچون [۲۰]و [۲۱] تمامی خطاهای محتمل در حسگر تخمین زده می‌شوند. نتایج شبیه‌سازی بهبود دقت کالیبراسیون را نسبت به کارهای مرتبط به اثبات می‌رساند. همچنین مقایسه روش‌های خارج از خط و برخط پیشنهاد شده نشان می‌دهد که رویکرد مبتنی بر پاسخ متمرکز هر چند دارای زمان محاسبات و همگرایی کوتاه‌تر در قیاس با روش‌های برخط دارا می‌باشد اما دارای دقت کمتر می‌باشد.

ساختار مقاله در ادامه به شرح زیر است. در بخش ۲، ابتدا یک مدل برای حسگر مغناطیسی پیشنهاد می‌شود و در ادامه مدل مستقل از وضعیت و وابسته به وضعیت حسگر نیز بررسی می‌شود. در بخش ۳، سناریوی تولید خروجی حسگر مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در بخش ۴، روش کالیبراسیون خارج از خط بیان می‌شود. در بخش ۵، روش برخط فیلتر کالمن دو مرحله‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۶، نتایج شبیه‌سازی و عملکرد این روش‌ها ارزیابی می‌شود. در نهایت در بخش۷ نیز جمع‌بندی مقاله ارائه می‌گردد.

۲- مدل‌سازی حسگر مغناطیسی

در ابتدا یک مدل از حسگر مغناطیسی ارائه می‌شود که بر خلاف مدل‌های مرسوم شامل اثر هیسترزیس، اثر غیرخطی، اثر نفوذپذیری ، اثر کوانتیزه کردن داده‌ه و خطای نصب است. مدل این حسگر به صورت زیر است[۱۷]:

$$\begin{aligned}\vec{B}_{meas} &= R_{body}^{sensor}\left(I+LS\right)^{-1}\times \\ &(R_{sensor}{}^{T}\times \mathrm{C}_{\mathrm{ECI}}^{\mathrm{body}}\times \vec{\mathrm{B}}_{ECI}+\vec{b}+\vec{\mathrm{nl}}+\overrightarrow{\mathrm{hys}}+\vec{n}+\vec{p}+\vec{q})\end{aligned} \quad (۱)$$

که در آن $\vec{B}_{ECI}$ میدان مغناطیسی زمین در سیستم مختصات اینرسی، $\vec{B}_{meas}$ میدان مغناطیسی اندازه‌گیری شده توسط حسگر، L ماتریس عدم تعامد محورها، E ماتریس قطری ضریب مقیاس، $\vec{b}$ مجموع بایاس حسگر، $\vec{nl}$ اثر غیر خطی بودن حسگر، $\overrightarrow{hys}$ خطای هیسترزیس، $\vec{p}$ اثر نفوذپذیری، $\vec{q}$ اثرکوانتیزه کردن داده‌ها، $\vec{n}$ نویز حسگر، R_{sensor} خطای نصب داخلی حسگر، R_{body}^{sensor} خطای نصب بین دستگاه بدنه و دستگاه حسگر و $\mathrm{C}_{\mathrm{ECI}}^{\mathrm{body}}$ ماتریس دوران بین دستگاه بدنه و دستگاه لخت را نشان می‌دهد.

با توجه به ماهیت تصادفی بودن $\vec{nl}$، $\overrightarrow{hys}$، $\vec{q}$ و $\vec{n}$، مدل وابسته به وضعیت به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\vec{B}_{meas} &= R_{body}^{sensor}\left(I+D\right)^{-1}\times \\ &(R_{sensor}{}^{T}\times \mathrm{C}_{\mathrm{ECI}}^{\mathrm{body}}\times \vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{ECI}}+\vec{b}+\vec{\varepsilon})\end{aligned} \quad (۲)$$

که در آن:

$$D = LS \quad (۳)$$

$$\vec{\varepsilon} = \vec{n}l + \overrightarrow{hys} + \vec{q} + \vec{n} \quad (۴)$$

---

[۱] Centered solution

[۲] Two step

[۳] Differential value

D ماتریس قطری شامل ضریب مقیاس و عدم تعامد و $\vec{\varepsilon}$ مجموع نویز با میانگین صفر و کوواریانس Σ است. با کم کردن اندازه دو میدان از یکدیگر مدل مستقل از وضعیت حسگر به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$y=\left\|\vec{B}_{meas}\right\|^2-\left\|\vec{B}_{ECI}\right\|^2=-\vec{B}_{meas}{}^T\left(2D+\left\|D\right\|^2\right)\vec{B}_{meas} +2\vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{meas}}{}^{\mathrm{T}}(I+D)\vec{b}-\left\|\vec{b}\right\|^2+v \quad (۵)$$

که در آن:

$$v=2\left(\left(I+D\right)\vec{B}_{meas}-\vec{b}\right)^T\vec{\varepsilon}-\left\|\vec{\varepsilon}\right\|^2 \quad (۶)$$

نویز این مدل دارای میانگین(μ) و واریانس(σ^2) زیر می‌باشد:

$$\mu=-tr\left(\Sigma\right) \quad (۷)$$

$$\sigma^2=4\left(\left(I+D\right)\vec{B}_{meas}-\vec{b}\right)^T\Sigma\left(\left(I+D\right)\vec{B}_{meas}-\vec{b}\right) +2\left(tr\left(\Sigma^{\mathrm{T}}\Sigma\right)\right) \quad (۸)$$

برای کاهش میزان غیرخطی بودن مدل، متغیرهای زیر تعریف می‌گردند:

$$E=2D+D^{\mathrm{T}}D=\begin{pmatrix}E_{11} & E_{12} & E_{13}\\ E_{12} & E_{22} & E_{23}\\ E_{13} & E_{23} & E_{33}\end{pmatrix} \quad (۹)$$

$$\vec{c}=\left(I+D\right)\vec{b} \quad (۱۰)$$

با در نظر گرفتن عناصر ماتریس E به صورت برداری، خواهیم داشت:

$$\vec{F}=\left[E_{11}\ E_{22}\ E_{33}\ E_{12}\ E_{13}\ E_{23}\right]^T \quad (۱۱)$$

بر این اساس، مدل اصلاح شده به صورت زیر به‌دست آورده می‌شود:

$$y=\vec{L}^{\mathrm{T}}x'-\left\|\vec{b}\left(x'\right)\right\|^2+v \quad (۱۲)$$

که در آن:

$$x'=\begin{bmatrix}c^T & \vec{F}^T\end{bmatrix}^T \quad (۱۳)$$

$$\vec{L}=\begin{bmatrix}2\vec{B}^{\mathrm{T}}{}_{meas} & -\vec{\mathrm{B}}^T\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \quad (۱۴)$$

$$\vec{B}=[B_{meas1}{}^2\ B_{meas2}{}^2\ B_{meas3}{}^2\ 2B_{meas1}B_{meas2}\ 2B_{meas1}B_{meas3}\ 2B_{meas2}B_{meas3}]^T \quad (۱۵)$$

اندیس‌های ۱، ۲ و ۳، شماره عنصر بردار $\vec{B}_{meas}$ است. هدف کالیبراسیون به دست‌آوردن x' است. بعد از به دست آوردن x' لازم است آن را به D و $\vec{b}$ تبدیل کنیم. به دلیل متقارن بودن ماتریس E، تجزیه مقدار تکین آن به صورت زیر است:

$$E=UVU^T \quad (۱۶)$$

که در آن U ماتریس متعامد و V ماتریس قطری با المان های v_1، v_2 و v_3 است. برای محاسبه D ابتدا المان‌های ماتریس قطری W را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$w_i=-1+\sqrt{1+v_i} \qquad i=1,2,3 \quad (۱۷)$$

در نهایت $\vec{b}$ و D به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$D=U\mathrm{diag}(\mathrm{w_i})U^T \quad (۱۸)$$

$$\vec{b}=\left(I+D\right)^{-1}\vec{c} \quad (۱۹)$$

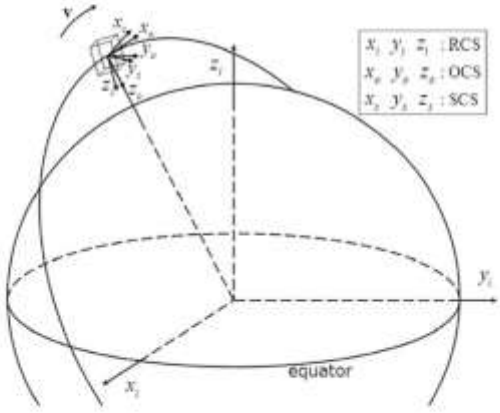
۳- سیستم های توصیف کننده حرکت ماهواره

مطابق با شکل (۱) سیستم‌های مختصات استفاده شده برای توصیف حرکت ماهواره عبارت است از [۲۳]:

سیستم مختصات بدنه[۱]: مبدا آن مرکز جرم ماهواره است ومحورهای آن منطبق بر محورهای اصلی است.

سیستم مختصات مداری[۲]: مبدا آن مرکز جرم ماهواره است. محور z به سمت مرکز جرم زمین و محور y در جهت مخالف ممنتوم زاویه‌ای صفحه مدار و محورx توسط قانون دست راست تعیین می شود.

سیستم مختصات لخت[۳]: مبدا آن مرکز زمین است. محور z با محور چرخش زمین تراز می شود ومحور x در جهت اعتدال بهاری و محورy توسط قانون دست راست تعیین می‌شود.



شکل۱: سیستم‌های مختصات توصیف حرکت ماهواره[۲۴]

٤- سناریوی تولید خروجی حسگر مغناطیسی

مطابق با شکل (۲) برای تولید خروجی حسگر مغناطیسی باید ماتریس دوران سیستم مختصات اینرسی نسبت به سیستم مختصات حسگر نصب-شده روی بدنه ماهواره و همچنین اطلاعات میدان مغناطیسی مرجع را بدانیم. ماتریس دوران ذکر شده از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

[۱] Satellite coordinate system
[۲] Orbit coordinate system
[۳] Inertial coordinate system

$$C_{inertial}^{body} = C_{inertial}^{orbit} \times C_{orbit}^{body} \tag{۲۰}$$

$C_{inertial}^{orbit}$ ماتریس دوران بین سیستم مختصات اینرسی و سیستم مختصات مداری است که تابعی از موقعیت و سرعت خطی ماهواره است و از رابطه زیر به‌دست می‌آید[۲۳]:

$$C_{inertial}^{orbit} = [o_1 \ \ o_2 \ \ o_3] \tag{۲۱}$$

که در آن:

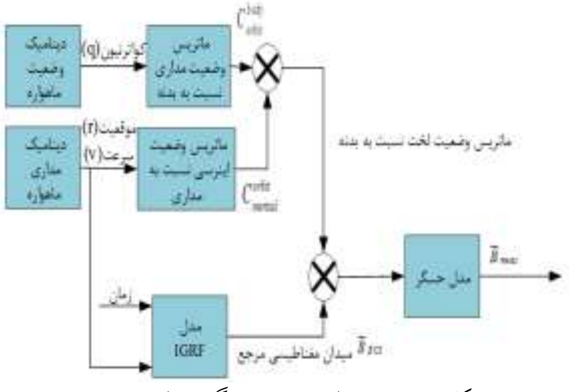
$$o_3 = \frac{r}{\|r\|} \tag{۲۲}$$

$$o_2 = \frac{r \times v}{\|r \times v\|} \tag{۲۳}$$

$$o_1 = o_3 \times o_2 \tag{۲۴}$$

r بردار موقعیت ماهواره و v بردار سرعت خطی ماهواره است. برای تولید این دو بردار نیاز به مدل‌سازی دینامیک مداری ماهواره است. C_{orbit}^{body} ماتریس دوران بین دستگاه مداری و دستگاه بدنه است که از مدل‌سازی دینامیک و سینماتیک وضعیت ماهواره به‌دست می‌آید.

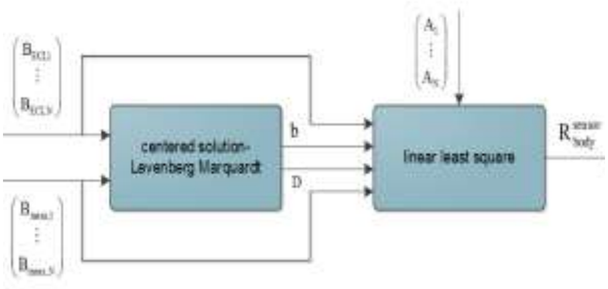
جهت تعیین میدان مغناطیسی مرجع چندین مدل ارائه شده است که دقیق‌ترین آن‌ها مدل میدان مرجع ژئو مغناطیسی بین‌المللی است که توسط انجمن بین المللی ژئومغناطیسی[۱] و فضاکاوی در سال ۱۹۴۵ میلادی برای اولین بار ارائه شد. اساس این نوع مدل‌سازی بر این اصل استوار است که میدان مغناطیسی ناشی از منابع درونی زمین در هر نقطه واقع بر سطح زمین و یا نواحی بالاتر از آن متناسب با گرادیان تابع اسکالر پتانسیل مغناطیسی در آن نقطه است. آخرین نسخه این مدل IGRF12 است که در سال ۲۰۱۴ عرضه شد. این مدل تابعی از زمان و موقعیت است و برای به کارگیری آن باید موقعیت و زمان ماهواره را بدانیم[۲۵]. با ضرب بردار لخت میدان مغناطیسی مرجع در ماتریس دوران ذکر شده، بردار ایده‌آل میدان مغناطیسی در دستگاه بدنه حاصل می‌شود و در نهایت با به کارگیری مدل حسگر، خروجی آن به‌دست می‌آید.



شکل ۲: سناریوی تولید خروجی حسگر مغناطیسی

۵- روش خارج از خط حداقل مربعات دو مرحله‌ای

مطابق با شکل (۳) برای به‌دست آوردن پارامترهای حسگر با دقت بالا و پارامترهای نصب از یک ساختار سری استفاده می‌شود. ابتدا اطلاعات میدان مغناطیسی مرجع $\left(\vec{B}_{ECI,1} \ \ ... \ \ \vec{B}_{ECI,N}\right)^T$ و خروجی حسگر $\left(\vec{B}_{meas,1} \ \ ... \ \ \vec{B}_{meas,N}\right)^T$ پس از ذخیره‌سازی در یک دوره زمانی مشخص وارد بلوک اول می‌شوند. در این بلوک با به کارگیری الگوریتم پیشنهادی جدید پاسخ متمرکز- لونبرگ مارکاد، پارامترهای حسگر شامل بایاس، ضریب مقیاس و عدم تعامد به‌دست می‌آید. سپس خروجی این بلوک به عنوان ورودی وارد بلوک دوم می‌شود. در بلوک دوم با استفاده از خروجی بلوک قبل و اطلاعات ماتریس وضعیت $\left(C_{ECI\ 1}^{Bbody} \ \ ... \ \ C_{ECI\ N}^{Bbody}\right)^T$ و بهره‌گیری از الگوریتم حداقل مربعات خطی، پارامترهای ماتریس خطای نصب استخراج می‌شود. در بخش بعد جزئیات هر یک از این بلوک‌ها بیان شده است.



شکل ۳: روش حداقل مربعات دو مرحله‌ای

۵-۱- مرحله اول از روش حداقل مربعات دو مرحله‌ای

در این مرحله ابتدا با تعریف متغیرهای مرکزی و متغیرهای متمرکز، اثر $\|b\|^2$ از رابطه ۱۰ حذف می‌شود. سپس با به‌کمک الگوریتم حداقل مربعات خطی، پاسخ اولیه به‌دست می‌آید[۱۷]. در ادامه با به‌کارگیری الگوریتم لونبرگ مارکاد پاسخ نهایی حاصل می‌شود. جهت استفاده از الگوریتم لونبرگ مارکاد ، مدل اندازه‌گیری (۱۲) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$y_k = \vec{L}_k^{\mathrm{T}} x' - \left\|\vec{b}\left(x'\right)\right\|^2 + v_k = h_k\left(x'\right) + v_k \tag{۲۵}$$

با در نظر مقدار X_0 به عنوان شرایط اولیه الگوریتم، ماتریس ژاکوبی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathrm{H}_k = \frac{\partial h_k\left(x'\right)}{\partial x'}\left(x_k\right) = \vec{L}_k^{\mathrm{T}} - \frac{\partial \left\|\vec{b}\left(x'\right)\right\|^2}{\partial x'}\left(x_k\right) \tag{۲۶}$$

که در آن:

[۱] International geographic reference field

$$\frac{\partial\left\|\vec{b}\left(x'\right)\right\|^{2}}{\partial c_{m}}=\left(2\left(I+E\right)^{-1}\vec{c}\right)_{m} \quad (۲۷)$$

$$\frac{\partial\left\|\vec{b}\left(x'\right)\right\|^{2}}{\partial E_{mn}}=-\left(2-\delta_{mn}\right)\left(\left(I+E\right)^{-1}\vec{c}\right)_{m}\times \left(\left(I+E\right)^{-1}\vec{c}\right)_{n} \quad (۲۸)$$

m و n معرف مولفه‌های mام و nام بردار مورد نظر هستند. همچنین در صورتی‌که m با n برابر باشد مقدار δ_{mn} برابر یک و در غیر این صورت برابر صفر است. با توجه به N داده اندازه‌گیری، ماتریس M و T و R به صورت تعریف می‌گردند:

$$M=\begin{pmatrix} H_{1} \\ \vdots \\ H_{N}\end{pmatrix} \quad (۲۹)$$

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_{1}-\boldsymbol{h}_{1}\left(\boldsymbol{x}_{k}\right) \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_{N}-\boldsymbol{h}_{N}\left(\boldsymbol{x}_{k}\right)\end{pmatrix} \quad (۳۰)$$

$$R=\begin{pmatrix} \sigma_{1}^{2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{N}^{2}\end{pmatrix} \quad (۳۱)$$

بر این اساس میزان تغییرات پارامترها از معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\Delta x=\left(M^{T}R^{-1}M\right)^{-1}M^{T}R^{-1}\mathrm{T} \quad (۳۲)$$

در نهایت پارامترها با استفاده از رابطه زیر به روز می‌شوند:

$$x_{k+1}=x_{k}+\Delta x \quad (۳۳)$$

روابط (۲۶) تا (۳۳) آنقدر تکرار می‌شوند تا الگوریتم همگرا شود. شرط همگرایی تعداد تکرار یا کوچک شدن $\|\Delta x\|$ از یک مقدار معین است.

۵-۲- مرحله دوم از الگوریتم حداقل مربعات

این مرحله برای استخراج پارامترهای خطای نصب مورد استفاده قرار می‌گیرد. با بهره‌گیری از پارامترهای حسگر به‌دست‌آمده از مرحله اول و ماتریس وضعیت ماهواره و همچنین رابطه (۲) می‌توان ماتریس خطای نصب حسگر نسبت به بدنه را به‌دست آورد. ابتدا رابطه (۲) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\vec{B}_{meas}=R_{body}^{sensor}(I+D)^{-1}(C_{ECI}^{Bbody}\times\vec{B}_{ECI}+\vec{b}) +R_{body}^{sensor}(I+D)^{-1}\vec{\varepsilon} \quad (۳۴)$$

در ادامه متغیرهای زیر تعریف می‌شوند:

$$\vec{B}_{body}=(I+D)^{-1}(C_{ECI}^{Bbody}\times\vec{B}_{ECI}+\vec{b}) \quad (۳۵)$$

$$R_{body}^{sensor}(I+D)^{-1}\vec{\varepsilon}\approx(I+D)^{-1}\vec{\varepsilon}=\vec{\eta} \quad (۳۶)$$

$$R_{body}^{sensor}=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{pmatrix} \quad (۳۷)$$

در روابط بالا η نویز سفید و $\vec{B}_{body}$ میدان مغناطیسی اندازه‌گیری در دستگاه حسگر است. بنابراین مدل حسگر به صورت زیر خلاصه می‌گردد:

$$\vec{B}_{meas}=R_{body}^{sensor}\vec{B}_{body}+\vec{\eta} \quad (۳۸)$$

برای تبدیل مدل حسگر به یک مدل خطی مورد استفاده در الگوریتم، متغیرهای زیر تعریف می‌شوند:

$$W=\begin{pmatrix} B_{body1} & B_{body2} & B_{body3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{body1} & B_{body2} & B_{body3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{body1} & B_{body2} & B_{body3}\end{pmatrix} \quad (۳۹)$$

$$\vec{V}=\vec{B}_{meas} \quad (۴۰)$$

$$x=\left(r_{11} \quad \dots \quad r_{33}\right)^{T} \quad (۴۱)$$

اندیس‌های ۱، ۲ و ۳، شماره عنصر بردار $\vec{B}_{\mathrm{body}}$ است. مدل خطی مد نظر به صورت زیر است:

$$\vec{V}=Wx+\vec{\eta} \quad (۴۲)$$

با توجه به وجود N داده اندازه‌گیری، ماتریس W و V و R' به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$W=\begin{pmatrix} W_{1} \\ \vdots \\ W_{N}\end{pmatrix}_{3N\times 3} \quad (۴۳)$$

$$V=\begin{pmatrix} \vec{V}_{1} \\ \vdots \\ \vec{V}_{N}\end{pmatrix}_{3N\times 1} \quad (۴۴)$$

$$R'=\begin{pmatrix} (I+D)^{-1}\Sigma_{1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & (I+D)^{-1}\Sigma_{N}\end{pmatrix} \quad (۴۵)$$

در نهایت پاسخ حداقل مربعات خطی برای محاسبه x به صورت زیر خواهد بود:

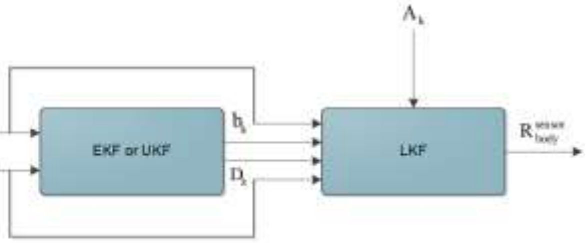
$$x=(W^{T}R'^{-1}W+\gamma I)^{-1}W^{T}R^{-1}V \quad (۴۶)$$

که γ یک ضریب ثابت مثبت است.

٦- روش برخط فیلتر کالمن دو مرحله‌ای

مطابق با شکل (۴) اطلاعات میدان مغناطیسی مرجع $\vec{B}_{ECI,k}$ و خروجی حسگر $\vec{B}_{meas,k}$ پس از نمونه برداری در هر لحظه وارد بلوک اول می‌شوند. در این بلوک با به کارگیری الگوریتم فیلتر کالمن توسعه‌یافته یا فیلتر کالمن خنثی، پارامترهای حسگر شامل بایاس، ضریب مقیاس و عدم تعامد تخمین زده می‌شوند. این مقادیر تخمین زده شده در هر لحظه به عنوان ورودی وارد مرحله دوم می‌شوند. در لایه دوم با استفاده از خروجی لایه قبل و اطلاعات ماتریس وضعیت $C_{ECI\ k}^{body}$ و بهره‌گیری از فیلتر کالمن خطی، پارامترهای ماتریس خطای نصب استخراج می‌شود. در

بخش بعد جزییات هر یک از این مراحل بیان شده است.



شکل۴: روش فیلتر کالمن دو مرحله‌ای

۶-۱- مرحله اول از الگوریتم فیلتر کالمن دو مرحله‌ای

۶-۱-۱- الگوریتم فیلترکالمن توسعه یافته

جهت به‌کارگیری فیلتر کالمن توسعه یافته باید معادله حالت و معادله اندازه‌گیری مشخص باشد. در این راستا پارامترهای حسگر به عنوان حالت‌ها در نظر گرفته می‌شوند. به دلیل ثابت بودن پارامترهای حسگر، معادله حالت به شکل زیر است:

$$x(k+1)=x(k) \qquad (۴۷)$$

با توجه به رابطه (۳)، معادله اندازه گیری به صورت رابطه (۴۸) درنظر گرفته می‌شود:

$$y=\left\|\vec{B}_{means}\right\|^2-\left\|\vec{B}_{ECI}\right\|^2=-\vec{B}_{means}{}^T(2D+D^2)\vec{B}_{means} +2\vec{B}_{means}{}^T(I+D)\vec{b}-\left\|b\right\|^2+v=h(x)+v \qquad (۴۸)$$

که در آن:

$$x=\left[\vec{b}^T\ D_{11}\ D_{22}\ D_{33}\ D_{12}\ D_{13}\ D_{23}\right]^T \qquad (۴۹)$$

بر اساس روابط (۴۸) و (۴۹) ، الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته به صورت زیر طراحی می‌شود:

ابتدا شرایط اولیه برای حالت‌ها($\hat{x}_0$) و ماتریس کوواریانس خطای حالت‌ها(P_0) انتخاب می‌شود. سپس روابط فیلتر کالمن توسعه‌یافته به صورت زیر بیان می‌شود:

$$K_k=P_kH_{k+1}{}^T(\hat{x}_k)(H_{k+1}(\hat{x}_k)P_kH_{k+1}{}^T(\hat{x}_k) +\sigma_{k+1}{}^2(\hat{x}_k))^{-1} \qquad (۵۰)$$

$$\hat{x}_{k+1}=\hat{x}_k+K_k\left(y_{k+1}-h_{k+1}(\hat{x}_k)\right) \qquad (۵۱)$$

$$P_{k+1}=\left(I-K_kH_{k+1}(\hat{x}_k)\right)P_k \qquad (۵۲)$$

در روابط بالا ماتریس ژاکوبی به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$H(x)=\frac{\partial h(x)}{\partial x}= \left[2B_{meas}{}^T(I+D)-2b^T\ -S^TM_{ED}(D)+2J\right] \qquad (۵۳)$$

که در آن:

$$M_{ED}(D)=2I+\begin{pmatrix} 2D_{11} & 0 & 0 & 2D_{12} & 2D_{13} & 0 \\ 0 & 2D_{22} & 0 & 2D_{12} & 0 & 2D_{23} \\ 0 & 0 & 2D_{33} & 0 & 2D_{13} & 2D_{23} \\ D_{12} & D_{12} & 0 & D_{11}+D_{22} & D_{23} & D_{13} \\ D_{13} & 0 & D_{13} & D_{23} & D_{11}+D_{33} & D_{12} \\ 0 & D_{23} & D_{23} & D_{13} & D_{12} & D_{22}+D_{33} \end{pmatrix}$$

(۵۴)

$$J=\left[B_{meas1}b_1\ \ B_{meas2}b_2\ \ B_{meas3}b_3\ \ B_{meas1}b_2+B_{meas2}b_1\ \ B_{meas1}b_3+B_{meas3}b_1\ \ B_{meas2}b_3+B_{meas3}b_2\right]$$

(۵۵)

روابط (۵۱) تا (۵۵) آنقدر تکرار می‌شوند تا الگوریتم به مقدار مطلوب همگرا شود.

۶-۱-۲- الگوریتم فیلترکالمن خنثی

معادله حالت و اندازه‌گیری جهت به کارگیری این الگوریتم طبق روابط (۵۴) و (۵۵) است. بر اساس این روابط، الگوریتم فیلتر کالمن خنثی در ادامه عنوان می گردد. پس از تعیین شرایط اولیه برای حالت‌ها($\hat{x}_0(+)$) و ماتریس کوواریانس خطای حالت‌ها($P_{xx,0}(+)$)، ۱۹ نقطه سیگما از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\chi_{i,k}=\begin{cases} \hat{x}_k(+) & i=0 \\ \hat{x}_k(+)+(\sqrt{(9+\lambda)P_{xx,k}(+)})_i & i=1,...,9 \\ \hat{x}_k(+)-(\sqrt{(9+\lambda)P_{xx,k}(+)})_i & i=10,...,18 \end{cases} \qquad (۵۶)$$

که $(\sqrt{(9+\lambda)P_{xx,k}(+)})_i$ستون iام ریشه دوم ماتریس $(9+\lambda)P_{xx,k}(+)$ است. سپس ضرایب وزنی به صورت زیر به‌دست می آید:

$$w_i^{(m)}=\begin{cases} \dfrac{\lambda}{9+\lambda} & i=0 \\ \dfrac{1}{2(9+\lambda)} & i=1,...,18 \end{cases} \qquad (۵۷)$$

$$w_i^{(c)}=\begin{cases} \dfrac{\lambda}{9+\lambda}+(1-\alpha^2+\beta) & i=0 \\ \dfrac{1}{2(9+\lambda)} & i=1,...,18 \end{cases} \qquad (۵۸)$$

$$\lambda=\alpha^2(9+\kappa)-n \qquad (۵۹)$$

در این روابط λ پارامتر مقیاس، α توزیع نقاط سیگما، β دانش قبلی توزیع حالت‌ها و κ پارامتر مقیاس ثانویه است. λ معمولا بین ۰/۱ تا ۱ و κ برابر n–۳ در نظر گرفته می‌شود. در ادامه نقاط سیگما بر اساس رابطه (۶۰) انتشار می‌یابد:

$$\chi_{i,k+1}=\chi_{i,k} \qquad (۶۰)$$

حالت‌های پیشین و ماتریس کواریانس خطای حالت پیشین به صورت زیر است:

$$x_{k+1}(-)=\sum_{i=0}^{18}w_i^{(m)}\chi_{i,k+1} \qquad (۶۱)$$

$$P_{xx,k+1}(-)=\sum_{i=0}^{18}w_i^{(c)}(\chi_{i,k+1}-\hat{x}_{k+1}(-))(\chi_{i,k+1}-\hat{x}_{k+1}(-))^T \qquad (۶۲)$$

پس از آن معادله اندازه‌گیری به شکل زیر انتشار می‌یابد:

$$z_{i,k+1}=h(\chi_{i,k+1}) \qquad (۶۳)$$

$$\hat{z}_{k+1}(-)=\sum_{i=0}^{18} w_i^{(m)} z_{i,k+1} \tag{۶۴}$$

همچنین کوواریانس اندازه‌گیری و ماتریس همبستگی متقابل به شکل زیر است:

$$P_{zz,k+1}=\sum_{i=0}^{18} w_i^{(c)}(z_{i,k+1}-\hat{z}_{k+1}(-))(z_{i,k+1}-\hat{z}_{k+1}(-))^T+\sigma_{k+1} \tag{۶۵}$$

$$P_{xz,k+1}=\sum_{i=0}^{18} w_i^{(c)}(\chi_{i,k+1}-\hat{x}_{k+1}(-))(z_{i,k+1}-\hat{z}_{k+1}(-))^T \tag{۶۶}$$

در نهایت بهره کالمن فیلتر، حالت‌های پسین و ماتریس کوواریانس خطای حالت پسین به صورت زیر است:

$$K_{k+1}=P_{xz,k+1}P_{zz,k+1}^{-1} \tag{۶۷}$$

$$\hat{x}_{k+1}(+)=\hat{x}_{k+1}(-)+K_{k+1}(z_{k+1}-\hat{z}_{k+1}(-)) \tag{۶۸}$$

$$P_{xx,k+1}(+)=P_{xx,k+1}(-)-K_{k+1}P_{zz}K_{k+1}^T \tag{۶۹}$$

روابط (۵۶) تا (۶۹) آنقدر تکرار می‌شوند تا الگوریتم به مقدار مطلوب همگرا شود.

۶-۲-مرحله دوم از الگوریتم فیلتر کالمن دو مرحله‌ای

این مرحله برای استخراج پارامترهای خطای نصب مورد استفاده قرار می‌گیرد. با استفاده از پارامترهای حسگر به‌دست آمده از مرحله اول و ماتریس وضعیت ماهواره می‌توان ماتریس خطای نصب حسگر نسبت به بدنه را به‌دست آورد. با توجه به رابطه (۴۸)، روابط فیلتر کالمن خطی به صورت زیر خواهد بود:

$$K_k=P_kW_{k+1}^T(W_{k+1}P_kW_{k+1}^T+(I+D)^{-1}\Sigma_{k+1})^{-1} \tag{۷۰}$$

$$\hat{x}_{k+1}=\hat{x}_k+K_k\left(\vec{V}_{k+1}-W_{k+1}\hat{x}_k\right) \tag{۷۱}$$

$$P_{k+1}=\left(I-K_kW_{k+1}\right)P_k \tag{۷۲}$$

روابط (۷۰) تا (۷۲) تکرار می‌شوند تا الگوریتم به مقدار مطلوب همگرا شود.

۷- نتایج شبیه‌سازی

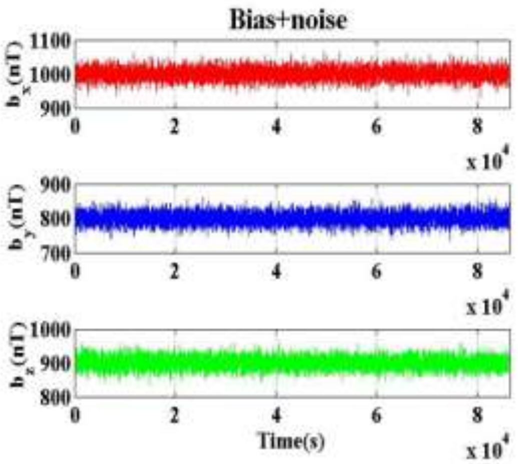
در این بخش هدف از شبیه‌سازی بررسی هر یک از روش‌ها از نظر دقت، زمان همگرایی یا زمان جمع‌آوری داده، میزان حافظه ذخیره‌سازی و حجم محاسبات برای یک حسگر مغناطیسی نصب‌شده روی یک ماهواره مدار پایین است. در این راستا چارچوب بدنه ماهواره منطبق بر چارچوب مداری ماهواره در نظر گرفته می‌شود و از یک مدل مداری ایده‌آل در ارتفاع ۵۵۰ کیلومتری سطح زمین استفاده می‌شود. زمان شروع حرکت ماهواره در مدار ۲۰۱۶/۱/۱ در نظر گرفته می‌شود. همچنین از حسگر مغناطیسی AMR-RS422-LV شرکت ZARM جهت شبیه‌سازی استفاده می‌شود. مشخصات این حسگر در جدول (۱) آورده شده است. در ضمن ماتریس خطای نصب بین بدنه و حسگر به صورت زیر است:

$$R=\begin{pmatrix} 0.9992 & 0.0349 & -0.0175 \\ -0.0346 & 0.9992 & 0.0174 \\ 0.0180 & -0.0168 & 0.9997 \end{pmatrix} \tag{۷۳}$$

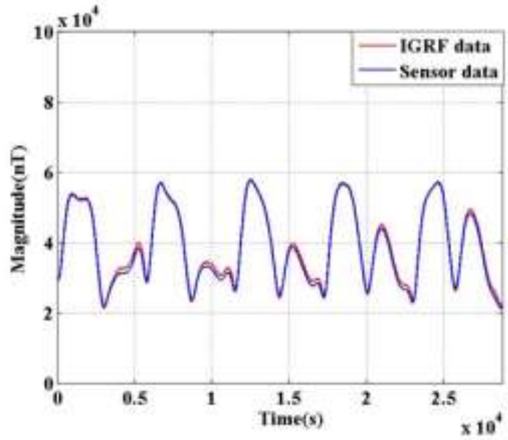
شکل (۵) مجموع بایاس و نویز حسگر مغناطیسی را نشان می‌دهد و شکل (۶) اندازه بردار خروجی حسگر و اندازه بردار مدل میدان مغناطیسی مرجع شبیه سازی شده را نشان می‌دهد که به عنوان ورودی الگوریتم‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

جدول ۱: مشخصات حسگر مغناطیسی AMR-RS422-LV

پارامتر	مقدار
مجموع بایاس(بایاس+رانش بایاس)	(۱۰۰۰،۸۰۰،۹۰۰)nT
ضریب نویز هر محور	۳ $nT/sqrt(Hz)$
ضریب غیرخطی هر محور	۰،۰۱٪
ضریب هیسترزیس هر محور	۰،۰۱٪
ضریب نفوذپذیری هر محور	۰
ضریب دمایی بایاس	۶ $nT/°C$
ضریب بلند مدت بایاس	۶ $nT/year$
محدوده	۲۰۰۰۰۰ nT
پهنای باند	۱۰۰ Hz
تعداد بیت گسسته‌سازی	۱۶ bit
ماتریس D = LS	$D=\begin{pmatrix} 0.01 & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.02 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 & 0.01 \end{pmatrix}$
خطای نصب داخلی برای هر محور	۵ mrad



شکل ۵: مجموع بایاس و نویز حسگر مغناطیسی



شکل ۶: اندازه بردار خروجی حسگر و اندازه بردار مدل میدان مغناطیسی مرجع

۷-۱- روش خارج از خط دو مرحله‌ای

۷-۱-۱- الگوریتم لونبرگ مارکاد

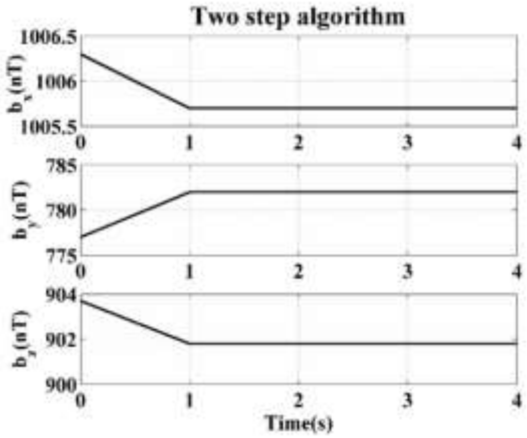
با جمع‌آوری داده با زمان نمونه‌برداری ۱۰ ثانیه به مدت ۱۲ ساعت و ده مرتبه اجرای روش پاسخ متمرکز و میانگین گرفتن از مقادیر حاصله، جدول (۲) به‌دست می‌آید. بر اساس جدول (۲) میانگین خطای بایاس برابر ۱۱ nT و میانگین خطای ماتریس D برابر ۰/۰۰۰۲۵ است که دقت قابل قبولی است. برای افزایش دقت، الگوریتم لونبرگ مارکارد را اجرا می‌کنیم. شکل (۷) نتیجه اجرای این الگوریتم را برای بایاس حسگر مغناطیسی نشان می‌دهد. مطابق با این شکل، الگوریتم بعد از یک بار تکرار همگرا می‌شود. جدول (۳) مقدار پارامترها بعد از همگرایی را نشان می‌دهد. بر اساس این جدول میانگین خطای بایاس برابر ۸/۵ nT و میانگین خطای ماتریس D برابر ۰/۰۰۰۱۶ است که نشان می‌دهد دقت نسبت به مرحله اول بیش‌تر شده است.

جدول ۲: نتایج الگوریتم پاسخ متمرکز

پارامترها	مقدارصحیح (نانوتسلا)	مقداربه‌دست آمده (نانوتسلا)
$(b_1 \quad b_2 \quad b_3)^T$	(۱۰۰۰,۸۰۰,۹۰۰)	(۱۰۰۶/۳,۷۷۷,۹۰۳/۷)
$(D_{11} \quad D_{22} \quad D_{33})^T$	(۰/۰۱,۰/۰۲,۰/۰۱)	(۰/۰۱۰۲,۰/۰۱۹۵,۰/۰۱۰۰)
$(D_{12} \quad D_{13} \quad D_{23})^T$	(۰/۰۱,۰/۰۱,۰/۰۱)	(۰/۰۱۰۲,۰/۰۱۰۲,۰/۰۰۹۶)

جدول ۳: نتایج الگوریتم پاسخ لونبرگ مارکاد

پارامترها	مقدارصحیح (نانوتسلا)	مقداربه‌دست آمده (نانوتسلا)
$(b_1 \quad b_2 \quad b_3)^T$	(۱۰۰۰,۸۰۰,۹۰۰)	(۱۰۰۵/۷,۷۸۲/۰,۹۰۱/۸)
$(D_{11} \quad D_{22} \quad D_{33})^T$	(۰/۰۱,۰/۰۲,۰/۰۱)	(۰/۰۱۰۲,۰/۰۱۹۷,۰/۰۱۰۰)
$(D_{12} \quad D_{13} \quad D_{23})^T$	(۰/۰۱,۰/۰۱,۰/۰۱)	(۰/۰۱۰۱,۰/۰۱۰۲,۰/۰۰۹۸)



شکل ۷: نتایج الگوریتم حداقل مربعات غیرخطی برای بایاس حسگر مغناطیسی

۷-۱-۲- الگوریتم حداقل مربعات خطی

با اجرای الگوریتم حداقل مربعات خطی، ماتریس خطای نصب به‌دست آمده به‌صورت زیر است:

$$R_{body}^{sensor} = \begin{pmatrix} 0.9992 & 0.0365 & -0.0190 \\ -0.0358 & 0.9992 & 0.0189 \\ 0.0199 & -0.0192 & 0.9996 \end{pmatrix} \qquad (۷۴)$$

بر اساس این ماتریس، زوایای خطای نصب مطابق با جدول (۴) است. طبق جدول، میانگین خطا برابر ۰,۰۸۵ درجه است که دقت قابل قبولی است.

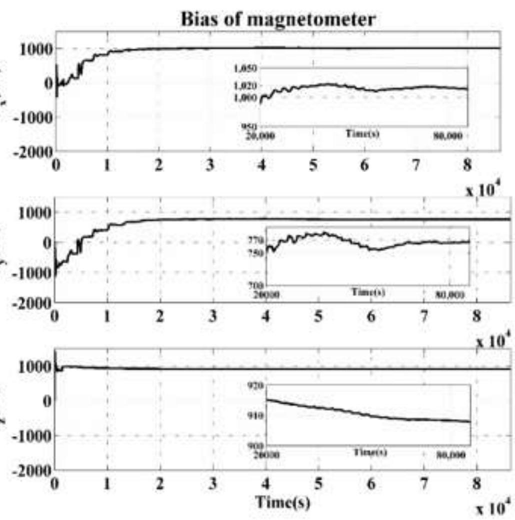
جدول ۴: زوایای ماتریس خطای نصب

پارامترها	مقدارصحیح (درجه)	مقدار به‌دست‌آمده (درجه)
$(\theta \quad \phi \quad \psi)^T$	(۱,۲,۱)	(۱/۰۸,۲/۰۹,۱/۰۸)

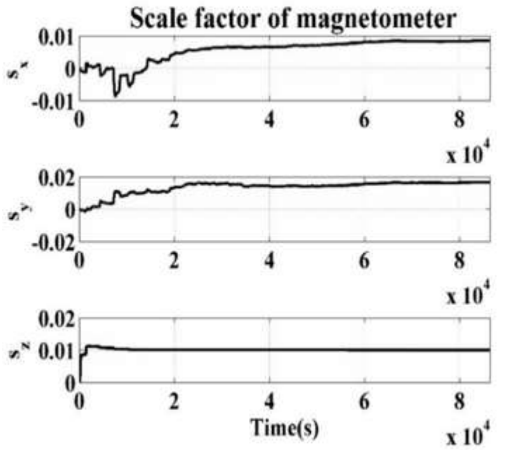
۷-۲- روش بر خط فیلتر کالمن دو مرحله‌ای

۷-۲-۱-الگوریتم فیلتر کالمن توسعه‌یافته

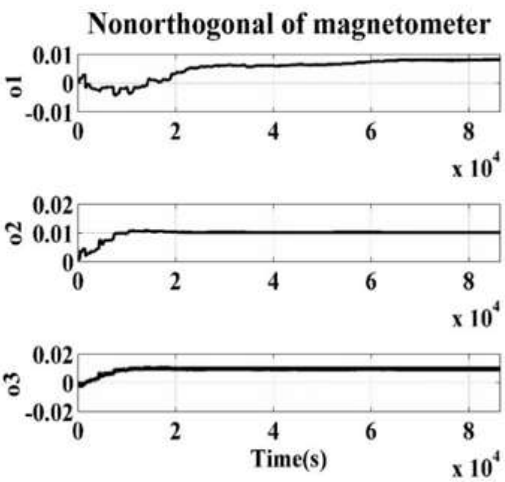
با زمان نمونه‌برداری ۱۰ ثانیه و ده مرتبه اجرای الگوریتم فیلتر کالمن توسعه‌یافته و میانگین گرفتن از نمودارهای حاصله، شکل (۸) تا شکل (۱۰) به‌دست می‌آید. همان‌طور که از شکل‌ها در می‌یابیم تمامی پارامترها بعد از مدت زمان ۸۰۰۰۰ ثانیه همگرا می‌شوند. مقدار پارامترها بعد از همگرایی به صورت جدول (۵) است. بر اساس این جدول، میانگین خطای بایاس برابر ۱۸/۳ nT و میانگین خطای ماتریس D برابر ۰/۰۰۱۱است.



شکل ۸: تخمین بایاس با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن توسعه یافته



شکل ۹: تخمین ضریب مقیاس با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن توسعه‌یافته

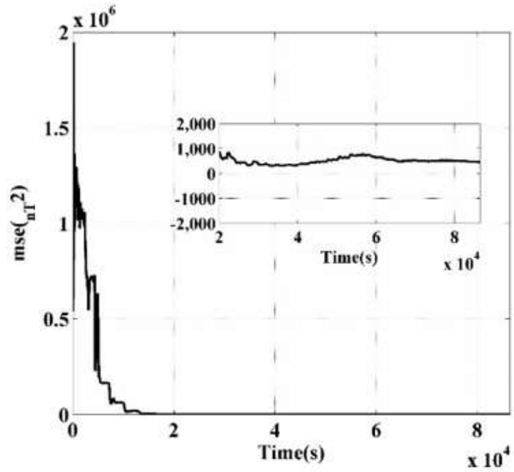


شکل ۱۰: تخمین عدم تعامد با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن توسعه‌یافته

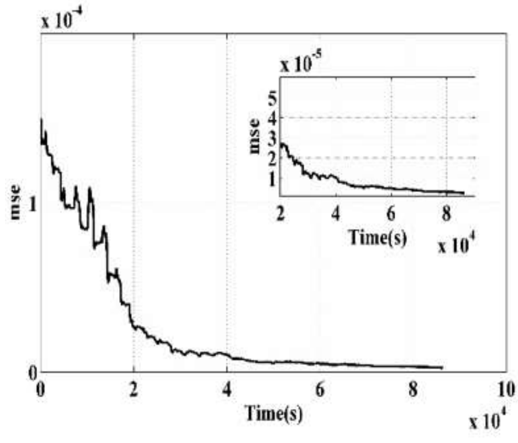
جدول ۵: نتایج الگوریتم فیلتر کالمن توسعه‌یافته

پارامترها	مقدارصحیح (نانوتسلا)	مقداربه‌دست آمده (نانوتسلا)
$(b_1 \quad b_2 \quad b_3)^T$	(۱۰۰۰,۸۰۰,۹۰۰)	(۱۰۱۳/۷,۷۶۶/۶,۹۰۷/۸)
$(D_{11} \quad D_{22} \quad D_{33})^T$	(۰/۰۱,۰/۰۲,۰/۰۱)	(۰/۰۰۸۶,۰/۰۱۶۸,۰/۰۱۰۱)
$(D_{12} \quad D_{13} \quad D_{23})^T$	(۰/۰۱,۰/۰۱,۰/۰۱)	(۰/۰۰۸۲,۰/۰۱۰۲,۰/۰۰۹۷)

شکل‌های (۱۱) و (۱۲) میانگین مربعات خطای بایاس و ماتریس D حسگر مغناطیسی را نشان می‌دهد. با توجه به نمودارهای به دست آمده، میانگین مربعات خطای بایاس پس از ۲۰۰۰۰ ثانیه به مقدار کمتر از nT^2 ۱۰۰۰ و پس از ۸۰۰۰۰ ثانیه به مقدار ۴۵۴/۶ می‌رسد. همچنین میانگین مربعات خطای ماتریس D پس از ۴۰۰۰۰ به مقدار کمتر از ۰/۰۰۰۰۱ و پس از ۸۰۰۰۰ ثانیه به مقدار $۲/۵ \times ۱۰^{-۶}$ می‌رسد.



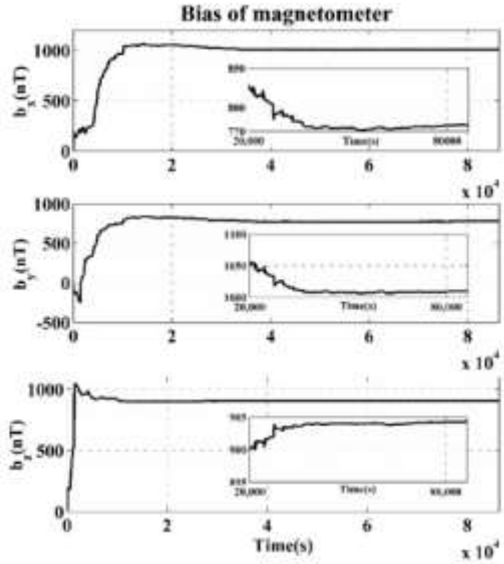
شکل ۱۱: میانگین مربعات خطای بایاس حسگر مغناطیسی



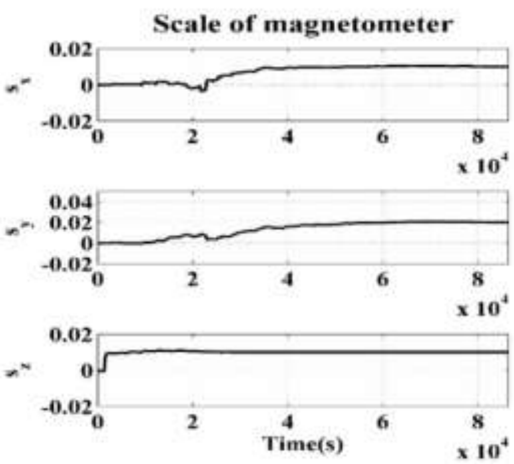
شکل ۱۲: میانگین مربعات خطای ماتریس D حسگر مغناطیسی

۷-۲-۲- الگوریتم فیلتر کالمن خنثی

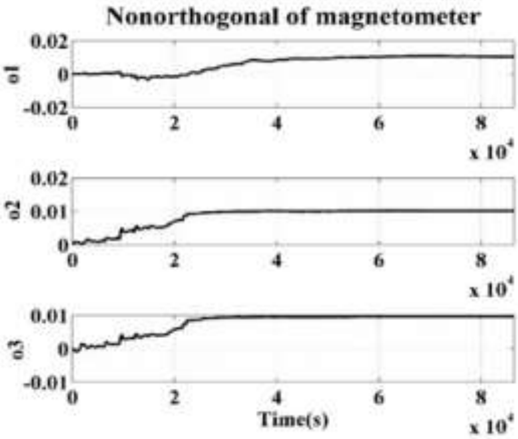
با زمان نمونه‌برداری و اجرای ده مرتبه الگوریتم فیلتر کالمن خنثی و میانگین گرفتن از نمودارهای حاصله، شکل (۱۳) تا شکل (۱۵) به‌دست می آید. همان‌طور که از شکل‌ها در می‌یابیم تمامی پارامترها بعد از مدت زمان ۸۰۰۰۰ ثانیه همگرا می‌شوند. مقدار پارامترها بعد از همگرایی به صورت جدول (۶) است. بر اساس این جدول، میانگین خطای بایاس برابر nT ۱۲/۲ و میانگین خطای ماتریس D برابر۰/۰۰۰۱۵ است. شکل (۱۶) و (۱۷) میانگین مربعات خطای بایاس حسگر مغناطیسی را نشان می‌دهد. با توجه به نمودار به‌دست آمده میانگین مربعات خطا پس از ۲۰۰۰۰ ثانیه به مقدار کمتر از ۱۰۰۰ nT^2 و پس از ۸۰۰۰۰ ثانیه به مقدار ۲۰۸/۶ می‌رسد. همچنین میانگین مربعات خطای ماتریس D پس از ۴۰۰۰۰ ثانیه به مقدار کمتر از 10^{-7} و پس از ۸۰۰۰۰ ثانیه به مقدار $4/5 \times 10^{-8}$ می‌رسد.



شکل ۱۳: تخمین بایاس با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن خنثی



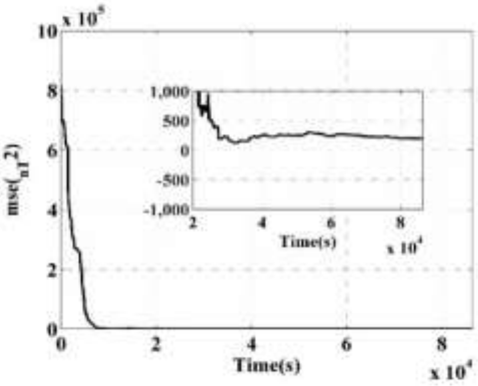
شکل ۱۴: تخمین ضریب مقیاس با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن خنثی



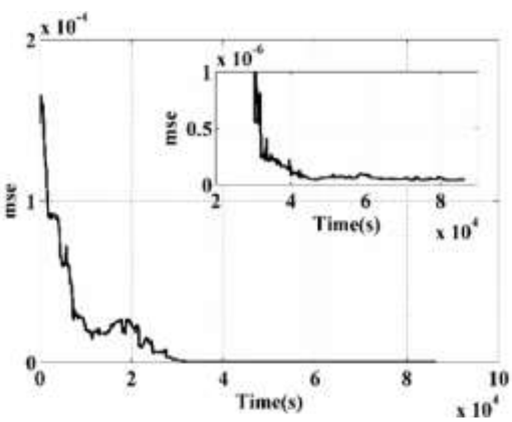
شکل ۱۵: تخمین عدم تعامد با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن خنثی

جدول ۶: نتایج الگوریتم فیلتر کالمن خنثی

پارامترها	مقدارصحیح (نانو تسلا)	مقداربه‌دست آمده (نانو تسلا)
$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}^T$	(۱۰۰۰,۸۰۰,۹۰۰)	(۱۰۰۹/۶,۷۷۷/۳,۹۰۴/۳)
$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{22} & D_{33} \end{pmatrix}^T$	(۰/۰۱,۰/۰۲,۰/۰۱)	(۰/۰۱۰۱,۰/۰۲۰۰,۰/۰۱۰۰)
$\begin{pmatrix} D_{12} & D_{13} & D_{23} \end{pmatrix}^T$	(۰/۰۱,۰/۰۱,۰/۰۱)	(۰/۰۱۰۴,۰/۰۱۰۱,۰/۰۰۹۷)



شکل ۱۶: میانگین مربعات خطای بایاس حسگر مغناطیسی



شکل ۱۷: میانگین مربعات خطای ماتریس D حسگر مغناطیسی

۷-۲-۳- الگوریتم فیلتر کالمن خطی

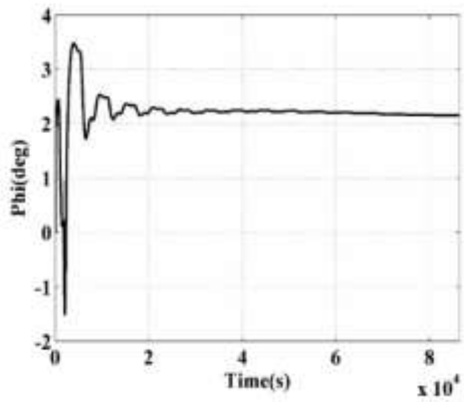
با انتخاب الگوریتم فیلتر کالمن خنثی و ده مرتبه اجرای همزمان آن با فیلتر کالمن خطی جهت به‌دست آوردن خطای نصب و میانگین گرفتن از نمودارهای حاصله، شکل (۱۸) تا شکل (۲۰) به‌دست می‌آید. همان-طور که از شکل‌ها در می‌یابیم تمامی پارامترها بعد از مدت زمان ۸۰۰۰۰ ثانیه همگرا می‌شوند. مقدار پارامترها بعد از همگرایی به صورت جدول (۷) است.

جدول۷: زوایای ماتریس خطای نصب

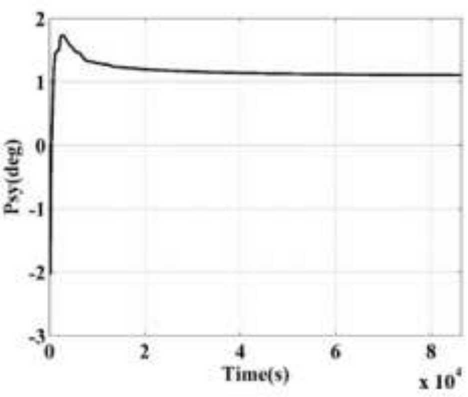
پارامترها	مقدارصحیح	مقداربه‌دست آمده
$(\theta \quad \phi \quad \psi)^T$	(۱,۲,۱)	(۱/۰۳,۲/۱۵,۱/۱۰)

بنابراین میانگین خطا برابر ۰/۰۹ درجه است که دقت قابل قبولی است. همچنین ماتریس خطای نصب متناظر با این زوایا به صورت زیر است:

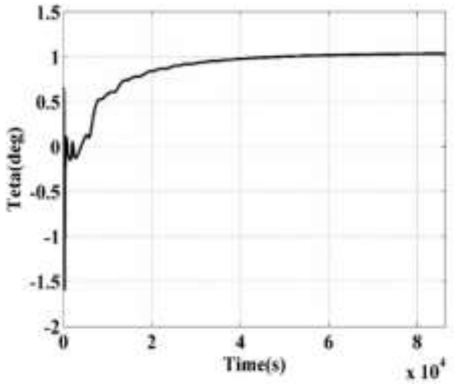
$$R_{body}^{sensor} = \begin{pmatrix} 0.9992 & 0.0375 & -0.0181 \\ -0.0356 & 0.9991 & 0.0193 \\ 0.0203 & -0.0195 & 0.9997 \end{pmatrix} \qquad (۷۵)$$



شکل ۱۸: تخمین زاویه رول با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن خطی



شکل ۱۹: تخمین زاویه پیچ با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن خطی



شکل ۲۰: تخمین زاویه یاو با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن خطی

جدول ۸: نتایج شبیه‌سازی الگوریتم‌های کالیبراسیون روی برد حسگر مغناطیسی

نام روش	دقت (MSE) (بایاس)	زمان همگرایی/زمان جمع‌آوری داده	حجم داده	زمان محاسبات
پاسخ متمرکز	۱۹۴/۱ nT^2	۱۲ ساعت	۵۰/۶۲۵ کیلو بایت	۱/۵ ثانیه
پاسخ متمرکز لونبرگ مارکاد	nT^2 ۱۱۹/۹	۱۲ ساعت	۵۰/۶۲۵ کیلو بایت	۶۰ ثانیه
فیلترکالمن توسعه یافته	nT^2 ۴۵۴/۶	۲۴ ساعت	۱۲ بایت	۷/۳ ثانیه
فیلترکالمن خنثی	nT^2 ۲۰۸/۶	۲۴ ساعت	۱۲ بایت	۱۴/۹ ثانیه

خلاصه نتایج شبیه‌سازی روش‌ها در جدول (۸) آورده شده است. همان-طور که دیده می‌شود از بین روش‌های خارج از خط، روش پاسخ متمرکز -لونبرگ مارکاد دارای دقت بالاتری است ولی حجم محاسبات آن زیاد است. همچنین از بین روش‌های برخط، روش فیلتر کالمن خنثی دارای بیش‌ترین دقت و کمترین زمان همگرایی است. در کاربردهای عملی معمولا روش‌های برخط به دلیل نیاز به حافظه ذخیره‌سازی کم و زمان واقعی بودن به روش‌های خارج از خط ترجیح داده می‌شوند. در مجموع با توجه به نوع مأموریت، میزان حافظه ذخیره‌سازی، قدرت پردازنده و سایر موارد، هر یک از این روش‌ها می‌تواند گزینه منتخب باشد.

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک مدل از حسگر مغناطیسی مورد بررسی قرار گرفت که بر خلاف مدل‌های گذشته شامل اثر غیرخطی، اثر هیسترزیس، اثر کوانتیزه کردن داده، اثر نفوذ پذیری و خطای نصب است. در ادامه دو روش حداقل مربعات دو مرحله‌ای و فیلتر کالمن دو مرحله‌ای جهت کالیبراسیون روی

برد ارائه شد. در روش حداقل مربعات دو مرحله‌ای در مرحله اول با به‌کارگیری الگوریتم پاسخ متمرکز- لونبرگ مارکاد، بایاس، ضریب مقیاس و عدم تعامد به‌دست آورده شده‌اند و در مرحله دوم با استفاده از الگوریتم حداقل مربعات خطی، پارامترهای ماتریس خطای نصب را استخراج می‌گردند. در روش فیلتر کالمن دو مرحله‌ای در مرحله اول با بهره‌گیری از فیلتر کالمن توسعه‌یافته یا فیلتر کالمن خنثی، بایاس، ضریب مقیاس و عدم تعامد تخمین زده شدند و در مرحله دوم با استفاده از الگوریتم فیلتر کالمن خطی، پارامترهای ماتریس خطای نصب را محاسبه گردیدند. نتایج شبیه‌سازی روی یک ماهواره نزدیک به زمین نشان داد که این دو روش پارامترهای حسگر را با دقت بالایی استخراج می‌کنند و همچنین خطای نصب را به میزان قابل توجهی کاهش می‌دهند. به هر حال روش برخط به دلیل محاسبه لحظه‌ای پارامترها و نیاز کمتر به حافظه ذخیره‌سازی بر روش دیگر ارجحیت دارد. از میان روش‌های برخط، ترکیب فیلتر کالمن خنثی و فیلتر کالمن خطی دارای دقت بالاتر و سرعت همگرایی بیشتری است ولی زمان محاسبات آن طولانی‌تر وپیاده‌سازی آن دشوارتر است.

مراجع

[1] Jin J, Baoyin HX, Li JF, “Attitude scheme for satellite with defective inertia characteristic”, Aircr Eng Aerosp Technol, pp. 422–31, 2013.

[2] Ran DC, Sheng T, Cao L, Chen XQ, Zhao Y, ”Attitude control system design and on-orbit performance analysis of nano-satellite”, Chin J Aeronaut, pp. 593–601, 2013.

[3] Han K, Wang H, Tu BJ, Jin ZH, “Pico-satellite autonomous navigation with magnetometer and sun sensor data”, Chin J Aeronaut, pp. 46–54, 2011.

[۴] ح. بلندی، ب. قربانی واقعی، م .اسماعیل زاده، دینامیک و کنترل وضعیت ماهواره، انتشارات دانشگاه علم و صنعت، ۱۳۹۲.

[5] D. Gebre-Egziabher, G. Elkaim, J. Powell, B. Parkinson, “Calibration of strapdown magnetometers in magnetic field domain”, J. Aerospace Eng, 19 (2), pp. 87–102, 2006.

[6] T. Pylvanainen, “Automatic and adaptive calibration of 3D field sensors”, Applied Mathematical Modelling 32, pp. 575–587, 2007.

[7] H. Pang, D. Chen, M. Pan, S. Luo, Q. Zang, J. Li, C. Wan, J. Wang, F. Luo and W. Wang, ”Calibration of three-axis magnetometer with differential evolution algorithm,” Journal of Magnetism and Magnetic Materials, vol 346, pp. 5-10, 2013.

[8] H. Pang, D. Chen, M. Pan, S. Luo, Q. Zang, J. Li and F. Luo,” A New Calibration Method of Three Axis Magnetometer with Nonlinearity Suppression,”IEEE TRANSACTION ON MAGNET, vol. 49, no. 9, 2013.

[9] S.A.H Tabatabaei, A. Gluhak and R. Tafazoli,”A Fast Calibration Method for Triaxial Magnetometers,” IEEE Transaction on Instrument and Measurement, vol. 62, no. 11, pp. 2929-2937, 2013.

[10] Yang, D., You, Z., Li, B., Duan, W., & Yuan, B., “Complete Tri-Axis Magnetometer Calibration with a Gyro Auxiliary”, Sensors, 17(6), 2017.

[11] Jung H, Psiaki ML, “Tests of magnetometer/sun-sensor orbit determination using flight data”, J Guide, Control Dyn, pp. 582–90, 2002.

[12] Takahashi F, Shimizu H, Matsushima M, Shibuya H, Matsuoka S, Nakazawa S, et al, “In-orbit calibration of the lunar magnetometer onboard SELENE (KAGUYA)”, Earth Planets Space, pp. 1269–74, 2009.

[13] Li W, Wang JL, “Magnetic sensors for navigation applications: an overview”, J Navig, pp.263–75, 2014.

[14] F.L. Markley, J.L. Crassidis, “Fundamental of spacecraft Attitude Determination and Control”, Springer, 2014.

[15] Alonso R, Shuster MD, “Attitude-independent magnetometer-bias determination: a survey”, J Astronaut Sci, pp. 453–75, 2002.

[16] Alonso R, Shuster MD, “TWOSTEP: a fast robust algorithm for attitude-independent magnetometer-bias determination”, J Astronaut Sci, pp. 433–51, 2002.

[17] Alonso R, Shuster MD, “Complete linear attitude-Independent magnetometer calibration”, J Astronaut Sci, pp. 477–90,2002.

[18] Crassidis JL, Lai KL, Harman RR, “Real-time attitude-independent three-axis magnetometer calibration”, J Guid Control Dyn pp. 115–20, 2005.

[19] Soken HE, Hajiyev C, “UKF based in-flight calibration of magnetometers and rate gyros for pico satellite attitude determination”, Asian J Control, pp. 707–15, 2012.

[20] Soken HE, Hajiyev C, “UKF-based reconfigurable attitude parameters estimation and magnetometer calibration”, IEEE Trans Aerosp Electron Syst, pp. 2614–27, 2012.

[21] Juang JC, Tsai YF, Tsai CT, “Design and verification of a magnetometer-based orbit determination and sensor calibration algorithm”, Aerosp Sci Technol, pp. 47–54, 2012.

[22] Z. Zhen, X. Jianping, J. Jin, “On-orbit real time magnetometer bias determination for micro-satellite without attitude information”, Chinese Journal of Aeronautics, pp. 1503-1509, 2015.

[23] F. Landis Markley, John L. Crassidis, “Fundamental of spacecraft attitude determination and control”, Springer, 2014.

[24] Abdelrahman, M., Chang, I., & Park, S. Y.,”Magnetic torque attitude control of a satellite using the state-dependent Riccati equation technique”, International Journal of Non-Linear Mechanics, 46(5), pp. 758-771, 2011.

[25] E. Thébault., C.C. Finlay, C.D. Beggan, P. Alken, J. Aubert, O. Barrois, F. Bertrand, T. Bondar, A. Boness, L. Brocco, E. Canet, “International geomagnetic reference field: the 12th generation. Earth”, Planets and Space, vol. 67, no. 1, pp.1-19, 2015.

مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۲، شماره ۱، بهار ۱۳۹۷، صفحه ۵۲-۳۹

طراحی کنترل‌گر فازی با قابلیت تنظیم برخط برای کنترل بینامبنای بازوی ربات

فاطمه السادات آبادیان زاده[۱]، ولی درهمی[۲]، مهدی رضاییان[۳]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد، پردیس فنی و مهندسی، گروه مهندسی کامپیوتر، دانشگاه یزد، abadian.fatemeh@stu.yazd.ac.ir

[۲] دانشیار، پردیس فنی و مهندسی، گروه مهندسی کامپیوتر، دانشگاه یزد، vderhami@yazd.ac.ir

[۳] استادیار، پردیس فنی و مهندسی، گروه مهندسی کامپیوتر، دانشگاه یزد، mrezaeian@yazd.ac.ir۱

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۶/۴/۱۵، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۶/۷/۱۸)

چکیده: درکنترل بینامبنا ربات از اطلاعات استخراج شده از حسگر بصری برای کنترل حرکت ربات استفاده می‌شود. در روش‌های سنتی کنترل بینامبنا، مدل ربات و مدل دوربین مورد نیاز است. به دست آوردن این مدل‌ها زمان‌بر و گاهی اوقات غیرممکن است. بنابراین در تحقیقات اخیر از روش‌های هوشمند برای مقابله با این چالش استفاده می‌شود. در این پژوهش ابتدا از یک کنترل‌گر فازی ترکیبی برای کنترل بازوی ربات استفاده شده است. ورودی‌های بصری کنترل‌گر از طریق کینکت حاصل می‌شود و خروجی کنترل‌گر میزان چرخش زاویه موتورهای مفاصل ربات از موقعیت فعلی آن‌ها است. کنترل‌گر ترکیبی شامل دو کنترل‌گر می‌باشد. کنترل‌گر اول بر پایه مدل فازی معکوس است که تقریبی از مدل واقعی معکوس سیستم، با استفاده از داده‌های جمع‌آوری شده است. به منظور افزایش دقت، یک کنترل‌گر خبره فازی برای وقتی که موقعیت مجری نهایی نزدیک هدف است، طراحی شده است. از آنجا که تعیین دقیق پارامترهای کنترل‌گر خبره فازی ممکن نیست، همچنین به منظور تطبیق‌پذیری کنترل‌گر در برابر تغییرات جزیی در محیط کار، از معماری عملگر- نقاد که از جمله روش‌های یادگیری تقویتی است برای تنظیم پارامترهای آن استفاده شده است. کنترل‌گر ارائه شده بر روی بازوی ربات ARM_6AX18 پیاده سازی شده است. نتایج آزمایش‌های عملی نشان می‌دهد که با استفاده از روش ارائه شده، مجری نهایی به موقعیت هدف از پیش تعیین شده با دقت خوبی می‌رسد.

کلمات کلیدی: کنترل بینامبنا، سیستم فازی، مدل معکوس فازی، بازوی ربات، یادگیری تقویتی، عملگر-نقاد

Designing a Fuzzy Controller for Visual Servoing of a Robot Manipulator with Online Adjustment Capability

Fatemeh Abadianzadeh, Vali Derhami, Mehdi Rezaeian

Abstract: Vision-based robot control is a method to motion control of a robot using information extracted from visual sensors. In traditional approaches, a model of robot and camera are needed. Obtaining these models are time consuming and sometimes impossible. Recently, intelligent methods are used to cope the above challenges. In this paper, a hybrid fuzzy controller is proposed to control a robot manipulator. Visual inputs of the controller are provided by Kinect and outputs are the rotation of joints motors. The hybrid controller contains two controllers. The first controller in based on fuzzy inverse model which approximates real inverse model of robot using gathered data. In order to increase accuracy, a fuzzy expert controller is designed and it is used when the end-effector is in the predefined near-goal area. Since determining exact value of the fuzzy expert controller parameters is impossible, in addition to make system adaptive with small changes in the environment, actor-critic architecture is used. This architecture is a well known continuous reinforcement learning methods. The proposed method is applied to control a real robot manipulator (ARM_6AX18). Experimental results show that using the proposed method in practice, the end-effector reaches from any random start position to the goal position with a good accuracy in robot workspace.

Keywords: Visual servoing, Fuzzy systems, Fuzzy inverse model, Robot manipulator, Reinforcment learning, Actor-critic.

۱- مقدمه

کنترل بینامبنا[۱] عبارت است از استفاده از اطلاعات حسگرهای بصری برای کنترل ربات. این اطلاعات می‌تواند شامل نقاطی ازتصویر، خط‌ها و یا ناحیه خاصی از تصویر باشند [۱]. از جمله حسگرهایی که در این زمینه از آن استفاده می‌شود دوربین است که علاوه بر اینکه اطلاعات زیادی در اختیار کنترل‌گر قرار می‌دهد، از نظر اقتصادی نیز مقرون به صرفه است [۲]. دوربین می‌تواند بر روی بازوی ربات[۲] یا به صورت مستقل[۳] قرار گیرد [۱]. کنترل بینامبنا به سه گروه تقسیم‌بندی می‌شوند [۱]:

- روش‌های مبتنی بر موقعیت[۴]
- روشهای مبتنی بر تصویر[۵]
- روش‌های ترکیبی[۶]

در روش‌های مبتنی بر موقعیت، از تصویر به دست آمده برای تخمین مختصات سه‌بعدی هدف موردنظر نسبت به دوربین یا یک صفحه مختصات جهانی استفاده می‌شود. بنابراین نیاز به مدل محیط و اطلاعات دقیق از دینامیک ربات و همچنین مشخصات دوربین است. در روش‌های مبتنی بر تصویر، تلاش بر این است که خطای بین تصویر فعلی و تصویر مطلوب به حداقل برسد. در سیستم‌هایی که از روش ترکیبی استفاده شده است، از ترکیبی از دو روش قبل استفاده شده است. در این روش برخلاف روش‌های مبتنی بر موقعیت نیازی به مدل محیط نیست و همگرایی را برخلاف روش‌های مبتنی بر تصویر ضمانت می‌کند.

در این مقاله تمرکز بر روی کنترل با استفاده از روش‌های مبتنی بر تصویر است. در روش‌های سنتی کنترل مبتنی بر تصویر نیاز به دانستن مدل ربات-دوربین، رابطه بین ویژگی‌های تصویر و سینماتیک ربات، است. با استفاده از این اطلاعات در هر مرحله از فرآیند کنترل ماتریس ژاکوبین و معکوس آن برای صدور فرمان کنترلی محاسبه شود [۳]. یکی از چالش‌های پیش‌رو در این روش معکوس‌پذیر نبودن ماتریس ژاکوبین است. علاوه بر آن برای محاسبه ماتریس ژاکوبین نیاز به دانستن پارامترهای دوربین نیز است. در [۲] از وبکم ساده برای تصویر برداری و استخراج ویژگی‌ها استفاده شده است. همچنین از شبکه‌های عصبی برای تخمین معکوس ماتریس ژاکوبین استفاده شده است. در واقع برای تخمین هر یک از سطرهای ماتریس ژاکوبین که بیان‌گر نسبت تغییرات یکی از ویژگی‌های تصویر به تغییرات یکی از مفاصل‌های ربات است، یک شبکه عصبی در نظر گرفته شده است. استفاده از این روش دو مشکل ذکر شده در استفاده از ماتریس ژاکوبین را حل می‌کند. البته این روش به کنترل ربات در فضای دو بعدی می‌پردازد. علاوه بر آن روش ارائه شده توانایی تطبیق‌پذیری با تغییرات را ندارد. در [۳] ازتکنیک‌های فازی برای تخمین مدل ربات-دوربین استفاده شده است. در این مقاله ازکنترل‌گر فازی معکوس به منظور تخمین مدل معکوس ربات-دوربین برای محاسبه سرعت مفصل‌های ربات استفاده شده است. در مقاله مذکور با استفاده از یک دوربین که مستقل از ربات نصب شده است، بازوی ربات را در یک فضای دو بعدی در مسیر حلزونی شکل حرکت داده موقعیت مجری‌نهایی در هر گام حرکتی ثبت می‌شود. با استفاده از این ویژگی‌ها و مقادیر مفاصل ربات مدل فازی معکوس آموزش داده شده و مورد استفاده قرار گرفته است. دقت ناکافی و نبود معکوس برای همه نقاط کار فرآیند ضعف این دسته از روش‌ها است.

گروهی از پژوهش‌های صورت گرفته در زمینه کنترل بازوی ربات، از یادگیری تقویتی استفاده کرده‌اند. از آنجا که محیط کاری ربات گسترده است، نمی‌توان حالات و عمل‌ها را به صورت مجزا مشخص کرد. در پژوهش‌های [۴، ۵، ۶، ۷] برای رفع این مشکل به گسسته‌سازی فضای حالت و عمل پرداخته است. حالات سیستم تقسیم‌بندی‌های فضای کاری در قاب دوربین و عمل‌ها، یک سری عمل از پیش تعیین شده برای مفاصل ربات است. گسسته‌سازی همواره با مشکلاتی همراه است که از جمله این مشکلات می‌توان به تنگنای ابعاد و عدم تضمین عملکرد بهینه اشاره کرد. در پژوهش [۸] گسسته‌سازی در فضای حالت و عمل صورت نگرفته و از شبکه عصبی برای تخمین تابع ارزش حالت عمل استفاده شده است. در اینجا یادگیری تقویتی در تنظیم درست پارامترهای شبکه عصبی

۱ Visual Servoing
۲ Eye-in-Hand
۳ Eye-to-Hand
۴ Position-Based Visual Servoing
۵ Image-Based Visual Servoing
۶ 2 ½ D Visual Servoing

نقش موثری دارد. هرچند یادگیری تقویتی دو قابلیت یادگیری تنها با یک معیار عددی راندمان و آموزش برخط را داراست، اما سرعت یادگیری آن پایین است و نیاز به تکرارهای زیاد آزمایش دارد.

در این مقاله یک کنترلگر فازی ترکیبی ارائه می‌شود. در این کنترلگر از کنترل‌گر فازی معکوس برای رساندن مجری نهایی ربات پیرامون هدف استفاده می شود و یک کنترل‌گر خبره فازی برای رساندن دقیق مجری نهای به هدف بکار گرفته شده است. سپس پارامترهای این کنترل‌گر خبره فازی به منظور بهبود کارایی و تطبیق‌پذیری با تغییرات جزئی با روش یادگیری تقویتی تنظیم می‌شوند.

در اینجا از کینکت[۱] [۹] بعنوان حسگر بصری برای استخراج ویژگی‌های سه‌بعدی و اطلاعات عمق بهره برده می‌شود. مزیت استفاده از کینکت این است که علاوه بر اطلاعات تصویر RGB، اطلاعات عمق را نیز در اختیار قرار می‌دهد و نیازی به استفاده از چند دوربین برای استخراج اطلاعات عمق، که خود نیاز به دانستن پارامترهای داخلی و خارجی دوربین‌ها است، نمی‌باشد. روش ارائه شده بر روی بازوی ربات ARM-6AX18 [۱۰]، به‌کار گرفته شده است. همچنین برای گرفتن اطلاعات تصویر کینکت XBOX-360[۱۱] مورد استفاده قرار گرفته است. دوربین جدا از ربات و به صورت مستقل نصب شده است.

به طور کلی سهم علمی این تحقیق شامل موارد زیر است:

- ارائه ساختار کنترل‌گر ترکیبی فازی برای حل مسئله کنترل بازوی ربات به صورت ترکیبی از کنترل‌گر معکوس فازی و کنترل‌گر خبره فازی.
- ارائه راهکاری برای تنظیم برخط کنترل‌گر خبره فازی با استفاده از یادگیری تقویتی
- حل چالش‌های به کارگیری روش‌های فوق در یک مسئله عملی و به کارگیری آن‌ها بر روی بازوی ربات واقعی

ساختار مقاله به شرح زیر است که در بخش دوم مفاهیم پایه می‌آید. در بخش سوم روش پیشنهادی شرح داده می‌شود. در بخش چهارم نتایج آزمایشات بر روی بازوی ربات ذکر شده است. در نهایت در بخش پنجم نتیجه گیری و کارهای آینده بیان شده است.

۲- مفاهیم پایه

در این بخش ابتدا به معرفی مدل سازی فازی، مدل معکوس فازی و مفاهیم مرتبط با آن پرداخته می‌شود. سپس به بیان مفاهیم پایه یادگیری تقویتی و انواع آن می‌پردازیم. در ادامه معماری عملگر–نقاد و یادگیری تقویتی در فضای پیوسته بیان می‌شود.

۲-۱ مدلسازی فازی

مدلسازی فازی روشی برای نمایش دانش خبره به صورت زبانی و با استفاده از مجموعه ای از قواعد اگر–آنگاه است که این قوانین ساختار مدل را ایجاد می‌کنند. یک مدل فازی می‌تواند از ابتدا و با استفاده از داده طراحی شود. به عبارت دیگر مدل فازی نقش یک تقریب زننده جامع را برای سیستم ایفا می‌کند. قضیه تقریب زنندگی جامع سیستم فازی بیان می‌کند که برای یک سیستم ناشناخته $y = F(x)$ وقتی تابع مذکور پیوسته باشد، می‌توان با جمع‌آوری داده‌ها یک سیستم فازی شامل قواعد اگر–آنگاهی طراحی کرد که با دقت دلخواه تقریبی از تابع F(x) باشد[۳].

دو مدل مشهور فازی عبارتند از[۱۲]:

- مدل فازی ممدانی[۲]
- مدل فازی سوگنو[۳]

در این مقاله از مدل فازی سوگنو مرتبه صفر استفاده شده است. در این مدل فازی، ساختار قواعد به صورت زیر است[۳]. مرتبه این مدل فازی معادل سیستم فازی استاندارد است که حالت خاصی از سیستم‌های ممدانی است.

$$R_i = If\ x_1\ is\ A_{i1}\ and\ \dots\ x_n\ is\ A_{in}\ then\ y_i = b_i \quad i = 1,2,\dots,k \qquad (۱)$$

در اینجا R_i بیانگر قاعده i ام، $[x_1,\dots,x_n]$ ورودی‌های سیستم فازی، $[A_{i1},\dots,A_{in}]$ مجموعه‌های فازی در نظر گفته شده برای مقادیر ورودی، و y_i خروجی هر قاعده است. خروجی سیستم فازی از رابطه (۲) محاسبه می‌شود.

$$\hat{y} = \frac{\sum_{i=1}^{K} \beta_i y_i}{\sum_{i=1}^{K} \beta_i} \qquad (۲)$$

که در اینجا β_i شدت آتش هر قاعده است که:

$$\beta_i = \prod_{j=1}^{n} \mu_{A_{ij}}(x_i) \quad i = 1,2,\dots,k \qquad (۳)$$

که $\mu_{A_{ij}}(x_j): R \to [0,1]$ درجه تعلق ورودی jام به مجموعه فازی A_{ij} در مقدم قاعده R_i است.

[۱] Kinect

[۲] Mamdani Fuzzy Model

[۳] Takagi–Sugeno Fuzzy Model

قواعد فازی را می‌توان با استفاده از داده‌ها استخراج کرد. به عبارت دیگر اگر بردار X ورودی سیستم در هر مرحله و Y خروجی سیستم ناشناخته باشد، یعنی:

$$X^T = [x_1, \dots, x_p], \quad y^T = [y_1, \dots, y_n] \tag{۴}$$

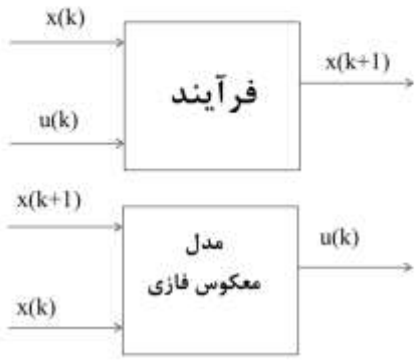
همانطور که در مقالات مختلف از جمله [۱۳] بیان شده است خوشه بندی یکی از راه‌های شناخته شده در تولید قواعد فازی با استفاده از داده‌های ورودی خروجی است. این روش داده‌ها را به گروه‌های همگن تقسیم بندی می‌کند و این کار باعث می‌شود که داده‌های مشابه که رفتار مشابهی در سیستم دارند در یک گروه قرار گرفته و کل خوشه حاصل، نماینده آن داده‌ها باشد. سپس برای این گروه از داده‌ها قاعده ای در نظر گرفته خواهد شد. دراین مقاله برای ساخت مدل فازی از جعبه ابزار فازی متلب و دستور genfis3 استفاده شده است. این دستور از فازی c-means برای خوشه‌بندی داده‌ها و تولید قواعد فازی استفاده می‌شود.

۲-۲ مدل معکوس

برای به دست آوردن مدل معکوس و تخمین تابع f^{-1} می‌توان از مدل فازی معکوس یا شبکه‌های عصبی استفاده کرد. در اینجا از مدل فازی معکوس استفاده شده است که با استفاده از داده جمع شده ساخته می‌شود. به این صورت که اگر تمام حالات فرآیند مشخص باشد، داریم[۷] :

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \tag{۵}$$

که $x(k+1)$ حالت فرآیند در زمان $k+1$، $x(k)$ حالت فرآیند در زمان k و $u(k)$ فرمان کنترلی در زمان k است. بنابراین



شکل ۱: فرآیند و مدل فازی معکوس آن

معادله دینامیکی معکوس این فرآیند به صورت (۶) است:

$$U = G(x(k), x(k+1)) \tag{۶}$$

به این معنی که عمل یکتایی مثل U وجود دارد که حالت سیستم را از $x(k)$ به $x(k+1)$ می‌برد. برای به دست آوردن این مدل معکوس، $x(k)$ و $x(k+1)$ ورودی سیستم، و U به عنوان خروجی سیستم در نظر گرفته می‌شود. سیستم فازی نهایی در نهایت معکوس فرآیند را تخمین می‌زند.

۲-۳ یادگیری تقویتی

یادگیری تقویتی یک روش یادگیری بر خط می‌باشد که بصورت تعاملی و با استفاده از پاداش و جریمه، عملکرد مطلوب به عامل آموزش داده می‌شود. این پاداش یا جریمه را سیگنال تقویتی می‌نامند. به بیان دیگر یادگیری از طریق حداکثر کردن سیگنال تقویتی که مقداری عددی[۱] است، صورت می‌گیرد[۱۴، ۱۵]. روش‌های یادگیری تقویتی بر اساس نحوه تخمین تابع ارزش شکل گرفته‌اند. متداول‌ترین آنها روش‌هایی هستند که از خطای تفاضل موقتی[۲] استفاده می‌نمایند.

۲-۴ یادگیری تفاضل موقتی

ساده‌ترین روش تفاضل موقتی[۳] که آن را $TD(0)$ می‌نامند، برای تخمین تابع ارزش حالت بصورت زیر بکارمی رود[۱۵، ۱۶] :

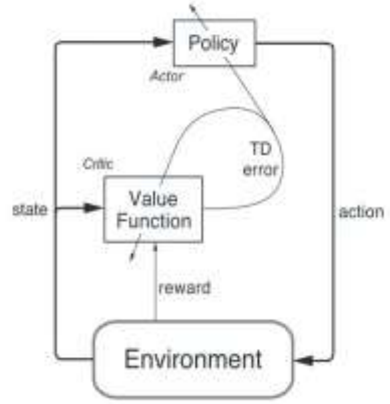
$$V(s_t) \leftarrow V(s_t) + \alpha_t[r_{t+1} + \gamma V(s_{t+1}) - V(s_t)] \tag{۷}$$

در این رابطه $0 < \alpha_t < 1$ نرخ یادگیری[۴] و $0 < \gamma < 1$ ضریب نزول[۵] و r مقدار پاداش آنی هستند. s_t و s_{t+1} به ترتیب بیان‌کننده حالت سیستم در زمان t و $t+1$ و V مشخص‌کننده ارزش حالت است. در این رابطه، عبارت داخل کروشه را خطای تفاضل موقتی می نامند. دو معماری معروف استفاده شده برای کاربرد یادگیری تقویتی در فضای پیوسته عملگر- نقاد[۶] و نقاد-تنها[۷] هستند. در ادامه روش عملگر- نقاد که در این مقاله از آن استفاده شده است، شرح داده می‌شود.

[۱] Scalar
[۲] TD-Error
[۳] Temporal Difference
[۴] Learning Rate
[۵] Discount Factor
[۶] Actor-Critic
[۷] Critic-Only

۲-۵ روش عملگر-نقاد

روش عملگر-نقاد از جمله روش های یادگیری تفاضل موقتی است که ساختاری مستقل از تابع ارزش برای بیان سیاست گذاری دارد. این ساختار سیاست گذاری را به دلیل انتخاب عمل، عملگر می نامند. تخمین زننده تابع ارزش که نقش نقدکننده عمل صورت گرفته را بر عهده دارد را، نقاد می گویند. یادگیری در این روش به صورت برسیاست[۱] است. نقاد در حال یادگیری و انتقاد از سیاستی است که عملگر درحال اجرای آن است. انتقاد به فرم خطای تفاضل موقت[۲] برای یادگیری عملگر و نقاد استفاده می‌شود. شکل ۲ این فرآیند را نشان می‌دهد[۱۵].

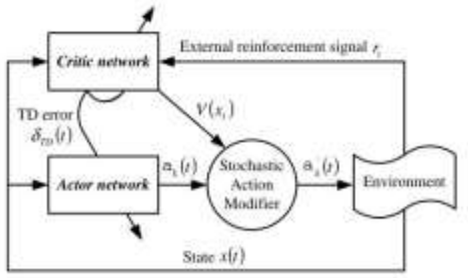


شکل ۳:معماری عملگر-نقاد[۱۳]

۲-٦ شبکه یادگیری عملگر-نقاد فازی

در [۱۷] ثابت شده است که سیستم استنتاج فازی در واقع یک تقریب زننده است که می تواند هر مجموعه داد ورودی-خروجی را تقریب زند. یک سیستم فازی دانش بشر را به گونه ای قابل فهم کد می کند ولی در یادگیری و تطبیق پذیری خوب عمل نمی کند. از طرف دیگر شبکه های عصبی توانایی یادگیری و تحمل خطا را دارند ولی برای نمایش دانش مناسب نیستند. بنابراین می توان از خصوصیات هر دو این تقریب زننده ها استفاده کرد.

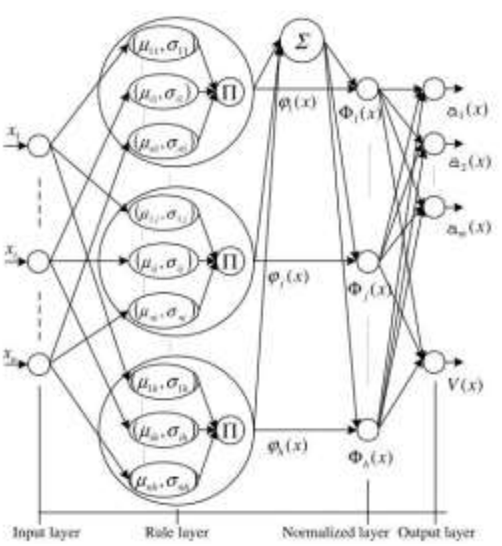
با توجه به مطالب ذکر شده، شبکه های یادگیری عملگر-نقاد فازی را که از این به بعد به اختصار آنها را FACRLN[۳] می نامیم، معرفی می‌شود. معماری این شبکه در شکل ۳ نشان داده شده است. دو بخش مهم این معماری شبکه نقاد و عملگر هستند. شبکه عملگر، نگاشت بین حالت-عمل را یاد می گیرد و شبکه نقاد، تابع ارزش سیاست دنبال شده، با توجه به ورودی سیستم را آموزش می بیند[۱۷]. شبکه عملگر، عمل



شکل ۲:معماری یک سیستم کنترلی FACRLN [۱۷]

پیشنهادی را ارائه می‌دهد. سپس اصلاح کننده عمل تصادفی[۴]، مقداری تصادفی با توجه به میزان ارزش آن $V(x_t)$ و عمل انتخابی $a_k(x_t)$ تولید کرده و با اضافه کردن آن به عمل انتخابی، عمل واقعی را تولید می‌کند. شبکه نقاد سیگنال تقویتی را دریافت کرده و خطای تفاضل موقت $(\delta_{TD}(t))$ را تولید می کند و به شبکه عملگر می‌فرستد.

شکل ٤ این شبکه را نمایش می دهد. از آنجایی که دو شبکه نقاد و عملگر ورودی یکسانی دارند و فقط در خروجی دارای تفاوت هستند، لایه های یک تا سه برای آنها مشترک است. در ادامه به توضیح هر کدام از این لایه ها می پردازیم. لایه اول همان لایه ورودی است که بردار ورودی را دریافت می‌کند و به لایه بعد ارسال می‌کند. لایه دوم لایه قواعد است که هر واحد آن قسمت مقدم یکی از قواعد را با n تابع عضویت گوسی شکل نشان می‌دهد. خروجی این لایه شدت آتش هر قاعده است که از رابطه (۸) به دست می‌آید.



شکل ۴: یک شبکه FACRLN [۱۷]

[۱] On Policy
[۲] TD-Error
[۳] Fuzzy Actor-Critic Reinforcement Learning Network
[۴] Stochastic Action Modifier

$$\varphi_j(x_t) = exp(-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_{it}-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2}) \quad (۸)$$

که μ و σ میانگین و انحراف معیار هر کدام از توابع عضویت هستند و x_{it} برابر با iامین متغییر ورودی بردار x_t است. لایه سوم خروجی لایه دوم را نرمال‌سازی می‌کند و لایه چهارم خروجی شبکه عملگر و نقاد است. خروجی نقاد حاصل تخمینی از ارزش حالت است. به عبارت دیگر نگاشتی از یک حالت سیستم به یک ارزش نقاد است. عملگر نقش یک انتخاب کننده عمل را اجرا می‌کند که نگاشتی از آنچه سیستم از فضای n بعدی درک می‌کند به فضای m بعدی عمل‌ها است. خروجی عملگر و نقاد $V(x_t)$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$a_i(x_t) = \sum_{j=1}^{h} w_{ij}\Phi_j(x_t) \quad i = 1,\dots,m \quad (۹)$$

$$V(x_t) = \sum_{j=1}^{h} v_j\Phi_j(x_t) \quad (۱۰)$$

در (۹)، $\Phi_j(x_t)$ شدت آتش نرمال شده قاعده jام، و w_{ij} وزن‌های بین خروجی نرمال شده قاعده jام و خروجی عملگر iام می‌باشد. در (۱۰)، v_j وزن بین خروجی نرمال شده قاعده jام و بخش نقاد است. به منظور داشتن کاوش در محیط عمل محاسبه شده به طور مستقیم در محیط اعمال نشده و نویز گوسی n_k به آن اضافه می‌شود که پهنای گوسی رابطه عکس با ارزش حالت فعلی ربات دارد. $a_i(x_t)$ عمل محاسبه شده بعد از اضافه کردن نویز به عمل محاسبه شده است.

$$a'_i(x_t) = a_i(x_t) + n(0, \sigma_v(t)) \quad (۱۱)$$

$$\sigma_v(t) = \frac{1}{1 + exp(2V(x_t))} \quad (۱۲)$$

$n(0, \sigma_v(t))$ یک مقدار متغیر تصادفی با توزیع گوسی با میانگین صفر و انحراف معیار $\sigma_v(t)$ تولید می‌کند که به عمل محاسبه شده اضافه می‌شود. اگر مقدار $V(x_t)$، یعنی ارزش حالت کوچک باشد مقدار کاوش زیاد است و بالعکس.

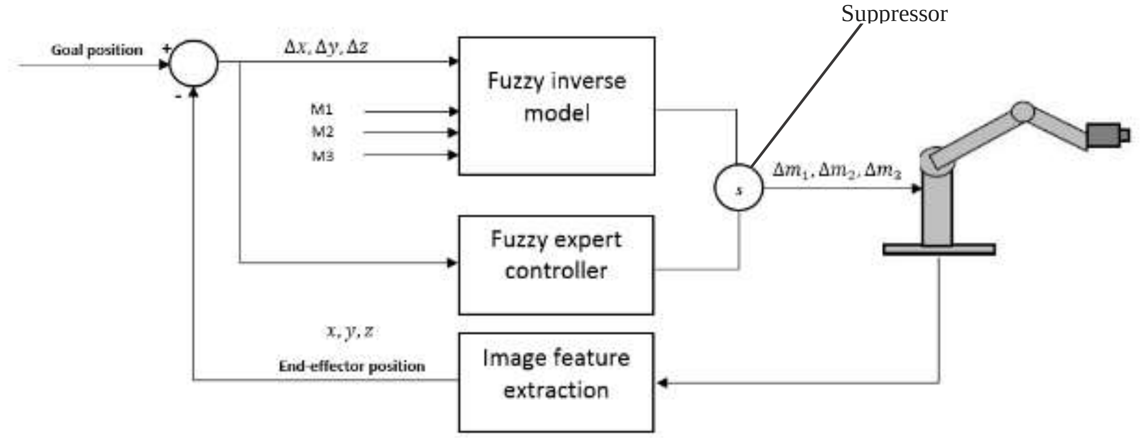
۳- روش ارائه شده

در این فصل، به معرفی روش ارائه شده برای کنترل بازوی ربات با سه درجه آزادی می‌پردازیم. این ربات دارای سه مفصل پایه، شانه و آرنج است که به غیر از مفصل شانه که توسط دو موتور به حرکت در می‌آید، حرکت مفاصل دیگر از طریق یک موتور صورت می‌گیرد. نحوه صدور فرمان به موتورهای این ربات از طریق تعیین زاویه چرخش آن‌ها است. همچنین این امکان فراهم شده است که در صورت لزوم بتوان زوایای هر یک از موتورها را از طریق بازخوردی که مورتوها به ما می‌دهند، به دست آورد. هدف از طراحی این کنترل‌گر، رساندن مجری نهایی بازوی ربات، از هر نقطه شروع اولیه‌ای به نقطه هدف تعیین شده در محدوده کاری ربات است. به منظور کنترل بازو از یک کنترل‌گر ترکیبی فازی استفاده شده است که شامل کنترل‌گر معکوس فازی و کنترل‌گر خبره فازی است. کنترل‌گر ترکیبی در حالتی که محیط بدون تغییر باشد، یعنی ربات و دوربین جای ثابتی داشته باشند، کارایی دارد. در صورت ایجاد تغییر در محیط دیگر این کنترل‌گر دقت لازم را ندارد. علاوه بر آن تعیین دقیق پارامترهای کنترل‌گر خبره فازی امکان پذیر نیست و ضعف هایی دارد. لذا از یادگیری تقویتی به منظور یادگیری تغییرات به صورت برخط و برطرف کردن ضعف‌های کنترل‌گر خبره فازی استفاده شده است.

۳-۱ کنترل‌گر فازی ترکیبی

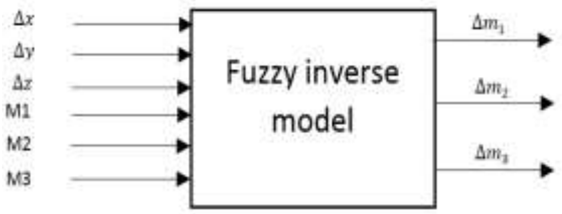
برای طراحی کنترل‌گر ترکیبی فازی از دو کنترل‌گر استفاده شده است. کنترل‌گر اول نقش رساندن مجری نهایی به محدوده نزدیک هدف را به عهده دارد و یک کنترل‌گر معکوس فازی است. کنترل‌گر دوم، کنترل‌گر خبره فازی است که با استفاده از دانش خبره طراحی شده است. این کنترل‌گر در ناحیه نزدیک هدف، کنترل ربات را به دست می‌گیرد. دیاگرام کنترلی کنترل‌گر ترکیبی در شکل ۵ نمایش داده شده است. همانطور که در شکل مشاهده می کنید، برای فرآیند کنترل، هر دو کنترل‌گر مختصات مجری نهایی در تصویر احتیاج دارند. با توجه به اینکه در اینجا هدف کنترل بازو در فضای سه بعدی است، علاوه بر مختصات مجری نهایی در تصویر، به اطلاعات عمق باید دسترسی داشت. با توجه به این خاصیت کینکت که هر دو تصویر RGB و عمق را در فراهم می‌کند، این اطلاعات در اختیار کنترل‌گر قرار گرفته می‌شود. در نهایت مختصات مجری نهایی با سه پارامتر x، y و z مشخص می شود و به کنترل‌گر داده می شود. x، y مختصات مجری نهایی در تصویر RBG گرفته شده توسط دوربین و z مقدار متناظر با نقطه x و y مشخص شده در قسمت قبل، در تصویر عمق گرفته شده از کینکت است. علاوه بر این کنترل‌گر فازی معکوس سه ورودی دیگر دارد که همان مقادیر زاویه موتورها هستند. مقادیر موتورها در واقع مشخص کننده حالت فعلی سیستم هستند.

۳-۱-۱ کنترل‌گر معکوس فازی



شکل ۵: کنترل گر ترکیبی فازی

کنترل‌گر معکوس فازی نهایی یک سیستم فازی سوگنو مرتبه صفر است که دارای شش ورودی و سه خروجی است (-شکل ۶).سه ورودی $[\nabla x, \nabla y, \nabla z]$ فاصله مجری نهایی از هدف در تصاویر RGB و عمق است. سه ورودی دیگر یعنی $[m1, m2, m3]$ مقادیر سه موتور مفاصل ربات هستند که بیان‌کننده وضعیت فعلی ربات است. همانطور که قبل‌تر به آن اشاره شد، یکی از راه‌های طراحی یک سیستم فازی، بکارگیری داده‌های از پیش جمع آوری شده است. به این صورت که ورودی و خروجی های یک فرآیند را مشاهده، و ذخیره کرده و از آنها در تخمین تابعی که تقریبی از معکوس فرآیند اصلی باشد، استفاده کنیم[۳].



-شکل ۶:مدل فازی معکوس

رای جمع آوری اطلاعات در این مورد خاص ربات را در موقعیت متفاوت نسبت به مبدأ آن قرار می‌دهیم و مختصات مجری نهایی و مقادیر موتورها را ذخیره می‌کنیم. موقعیت‌های قرارگیری مجری نهایی باید به گونه‌ای باشند که تمام فضای کاری ربات را پوشش دهد. به عنوان مثال در اینجا زوایای یکی از سه موتور ربات را در هر مرحله از جمع‌آوری اطلاعات ده درجه تغییر داد. بعد از جمع‌آوری اطلاعات نوبت به تولید سیستم فازی متناسب با این داده‌های ورودی-خروجی است. روش‌های مختلفی برای تولید سیستم فازی از روی این داده‌ها وجود دارد. بر اساس [۱۹،۱۸] دو روش رایج برای این کار جدول مراجعه[۱] و خوشه‌بندی است. در اینجا برای تولید سیستم فازی از روش خوشه‌بندی که در بخش قبل به آن اشاره شد استفاده شده است. از آنجا که حجم داده‌های جمع‌آوری شده از محیط زیاد بود، امکان تولید قواعد به صورت دستی و استفاده از تقسیم بندی مشبک و روش‌های دیگر نبود. براساس آنچه در [۲۰] آمده است خوشه‌بندی یکی از روش‌های مرسوم در کاهش حجم داده‌ها است. در نتیجه داده‌ها را خوشه‌بندی کرده و برای هر خوشه یک قاعده فازی در نظر گرفته شده است. آزمایشات اولیه نشان داد، زمانی که تنها از کنترل‌گر معکوس فازی استفاده می‌شود دقت لازم را ندارد. نتایج آزمایش‌های صورت گرفته در بخش ۰ و جدول ۴ آورده شده است. این عدم دقت به دلیل معکوس‌پذیر نبودن سیستم در برخی نقاط و همچنین نویز موجود در داده‌های جمع‌آوری شده می‌باشد. علاوه بر این در طراحی کنترلگر معکوس، در حین ساخت آن هدف حداقل کردن خطای خروجی کنترلگر تخمین زده شده $u^{\wedge}$، و مدل معکوس واقعی یعنی u است. در حالی که در عمل و استفاده از این مدل، هدف حداقل کردن فاصله مجری نهایی $y^{\wedge}$ و هدف y است. با توجه به آنچه گفته شد و به دلیل حساسیت ۱۰۰٪ کنترل‌کننده معکوس به خطای مدل سازی، این کنترل‌کننده به تنهایی برای کنترل دقیق بازوی ربات کارایی ندارد. به همین دلیل در کنار آن از یک کنترل‌کننده دیگر که توسط خبره طراحی شده، استفاده شده است. وجود کنترل‌کننده معکوس فازی باعث می‌شود که فضای عملکرد کنترل‌کننده خبره تنها محدود به نقاط اطراف نقطه کار شده و درنتیجه ساختار و طراحی آن توسط خبره با مشاهده عملکرد واقعی سیستم ساده‌تر گردد. لذا به منظور کنترل نهایی، کنترل‌گر

[۱] Table Look-Up

معکوس، مجری نهایی را به نواحی اطراف هدف رسانده و در نواحی نزدیک هدف از کنترل‌گر فازی خبره، استفاده شده است.

۳-۱-۲ کنترل‌گر خبره فازی

کنترل‌گر خبره فازی توسط خبره و با توجه به مشاهدات صورت گرفته در نحوه عملکرد ربات در محیط طراحی شده است. این کنترل‌گر هم از نوع سوگنو مرتبه صفر است و همانند کنترل‌گر معکوس فازی، دارای سه ورودی است. ورودی ها به ترتیب بیان‌کننده فاصله مجری نهایی تا هدف تعیین شده در بعد x، y و z هستند. در اینجا چون کنترل‌گر در فضای محدودی مورد استفاده قرار می‌گیرد، بدون نیاز به حالت سیستم و مقادیر موتورها هم عملکرد سیستم قابل قبول است. لذا به منظور کاهش پیچیدگی از آن‌ها استفاده نشده است. خروجی نیز مانند کنترل‌گر معکوس فازی میزان تغییر در زوایای موتورهای هریک از مفاصل است. این کنترل‌گر زمانی که مجری نهایی در محدوده نزدیک هدف قرار می‌گیرد، خروجی کنترل‌گر معکوس فازی را غیرفعال کرده و خود، کنترل ربات را بر عهده می‌گیرد. محدوده نزدیک عبارت است از ناحیه ای اطراف هدف، که از قبل تعیین شده است.

۳-۲ تنظیم بر خط کنترل‌گر فازی ترکیبی

اگر در محیط تغییری ایجاد شود، مثلا ربات نسبت به دوربین جابجا شود، و یا زاویه دوربین تغییر کند، دیگر کنترل‌گر ترکیبی دقت مناسب را ندارد. علاوه بر آن به دلیل طراحی کنترل‌گر خبره فازی توسط دانش خبره، و تنظیم نبودن دقیق پارامترهای آن، این کنترل‌گر دارای ضعف‌هایی از جمله حرکات نوسانی اطراف هدف می‌باشد. روش‌های مختلفی همچون مجموع مربعات خطا تکرارشونده[۱] و یادگیری تقویتی برای تنظیم پارامترهای کنترل‌گر وجود دارد. در این پژوهش، از معماری عملگر-نقاد برای تنظیم پارامترهای کنترل‌گر خبره فازی که یکی از روش‌های یادگیری تقویتی فازی است، استفاده شده است.

نکته قابل توجه دیگر آن این است که هرچند محیط عملکرد کوچک باشد، با این حال با توجه به اینکه یادگیری تقویتی از اطلاعات کمی استفاده می‌کند و تنها معیار یادگیری یک مقدار عددی است، زمان آموزش طولانی دارد. مورد دیگر اینکه زمانی که فرآیند آموزش طولانی باشد در عمل باعث داغ شدن موتورهای ربات شده و آزمایشات عملی را با مشکلاتی همراه خواهد کرد. لذا در این پژوهش به منظور افزایش سرعت یادگیری، دانش اولیه به سیستم تزریق می‌کنیم. بدین صورت که سیستم فازی که به عنوان کنترل‌گر خبره فازی در بخش۳-۱-۲ معرفی کردیم را به صورت دانش اولیه در نظر می‌گیریم. در شکل ۴ هر کدام از واحدهای لایه قواعد یکی از قواعد کنترل‌گر خبره فازی را نمایش می‌دهند. همچنین وزن‌هایی که از لایه سوم خارج شده و وارد بخش عملگر لایه چهارم می‌شود، به همان خروجی های کنترل‌گر خبره فازی مقداردهی شده است. آنچه در حین فرآیند آموزش تغییر می‌کند، وزن‌های خارج شده از لایه سوم شبکه به لایه چهارم برای هر دو بخش نقاد و عملگر است. این نکته قابل توجه است که این شبکه جایگزین کنترل‌گر خبره فازی می‌شود و فقط در نواحی نزدیک هدف مورد استفاده قرار می‌گیرد.

فرآیند آموزش در این روش به این صورت است که ابتدا موقعیت مجری نهایی و فاصله آن با هدف را توسط دوربین کینکت به دست آورده و فرمان کنترلی صادر می‌شود. اگر فرمان صادر شده مناسب بود، یعنی فاصله مجری نهایی تا هدف کم شده باشد، سیستم پاداش می گیرد و در غیر این صورت جریمه می شود. بعد از محاسبه عمل و مقدار ارزش حالت طبق رابطه (۱۴) و (۱۵) برای آموزش سیستم لازم است وزن‌های بخش نقاد و عملگر بروزرسانی شود. به منظور محاسبه میزان بروزرسانی وزن ها ابتدا باید خطای تفاضل موقتی[۲] محاسبه شود [۱۴].

$$\delta_{TD}(t) = r_t + \gamma V(x_{t+1}) - V(x_t) \qquad (۱۳)$$

x_t و x_{t+1} مشخص کننده حالت سیستم در زمان‌های t و t+1 است. r_t سیگنال تقویتی و γ ضریب کاهش[۳] و V در اینجا مشخص کننده ارزش هر حالت است. خطای تفاضل موقتی اگر مثبت باشد نشان‌دهنده این است که حالت فعلی با توجه به عمل انجام شده بهتر از حالت قبلی بوده و اگر منفی باشد بالعکس. از این خطای تفاضل موقت برای به روز رسانی وزن‌های بخش عملگر و نقاد استفاده می‌شود. وزن‌های بخش عملگر به صورت زیر بروزرسانی می‌شوند:

$$\begin{aligned} w_{ij}&(t+1) \\ &= w_{ij}(t)\alpha_A\delta_{TD}(t)\frac{a'_i(x_t)-a_i(x_t)}{\sigma_v(t)}\Phi_j(x_t) \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

نحوه بروزرسانی وزن‌های بخش نقاد نیز به صورت زیر است:

$$v_i(t+1) = v_i(t)\alpha_c\delta_{TD}(t)\Phi_j(x_t) \qquad (۱۵)$$

[۱] Recursive Least Square Error

[۲] Temporal Diffrence

[۳] Discount Factor

در روابط (14) و (15) $\Phi_j(x_t)$، α_A و α_C به ترتیب شدت آتش نرمال‌شده، نرخ آموزش پارامترهای عملگر و نرخ آموزش پارامترهای نقاد می‌باشند. در هر بار اجرای عملی در محیط، مقادیر وزن‌های عملگر و نقاد بروزرسانی می شوند. در یادگیری تقویتی هدف حداکثر کردن پاداش در بلند مدت است و با توجه به آنچه گفته شد، در تکرارهای متوالی سیستم به سمتی پیش می رود که به حداکثر پاداش که همان رسیدن به هدف با کمترین زمان است، برسد.

٤- آزمایش‌ها

در این پژوهش از بازوی ربات ARM-6AX18 [۵] (شکل ۷) با سه درجه آزادی استفاده شده است. این ربات دارای سه مفصل پایه، شانه و آرنج است که در شکل ۸ نمایش داده شده است. در جدول ۱ مشخصات موتورهای بازوی ربات نشان داده شده است. موتورهای شماره دو و سه دو طرف شانه ربات قرار گرفته و حرکت عکس یکدیگر را دارند. فرمان کنترلی میزان تغییرات زوایای هر یک از موتورها است که توسط کنترل‌گر صادر شده و به آن اعمال می‌شود.

شکل ۷: بازوی ربات ARM-6AX18

شکل ۸: مفاصل ربات

در ادامه به توضیح نحوه جمع‌آوری اطلاعات برای ساخت کنترل‌گر معکوس فازی خواهیم پرداخت. کینکتی که برای تعیین مختصات مجری هایی در آزمایشات استفاده شده است، XBOX-360[۱۵] است. محل قرارگیری کینکت در پشت سر ربات و در جایی ثابت در محیط است(شکل ۹).

شکل ۹: نحوه قرارگیری کینکت نسبت به ربات

جدول ۱:مشخصات موتورهای ربات

نوع موتور	مفصل	تعداد موتور	راستای حرکت	زاویه چرخش	شماره موتور	دقت موتور
پایه	AX-18	۱	افقی	۳۰۰	۱	۰،۲۹
شانه	AX-18	۲	عمودی	۱۸۰	۲،۳	۰،۲۹
آرنج	MX-28	۱	عمودی	۳۰۰	۴	۰،۰۸۸

٤-1 جمع آوری داده برای کنترل‌گر معکوس فازی و طراحی آن

به منظور جمع‌آوری اطلاعات باید ربات را در موقعیت های مختلف در محیط کاری آن قرار داد و اطلاعات مربوطه موقعیت مجری نهایی و مقادیر موتورها را جمع‌آوری کرد. در این مقاله موقعیت مجری نهایی و مقادیر موتورها با تغییر پنج درجه در مقادیر موتورها در هر مرحله از جمع‌آوری اطلاعات ذخیره شده است. این فرآیند تا زمانی که کل ناحیه در دسترس ربات پیموده شود ادامه داده می‌شود. برای مشخص کردن مجری نهایی در تصویر و به دست آوردن مختصات آن، یکی از گیره های مجری نهایی را به رنگ قرمز درآورده شده است. در هر بار گرفتن

تصویر توسط کینکت نقاط قرمز رنگ را در تصویر RGB پیدا کرده و مرکز آنها را به عنوان مختصات فعلی مجری نهایی در نظر گرفته می‌شود. سپس نقطه متناظر با این نقطه را، در تصویر عمق را به عنوان عمق مجری نهایی در نظر گرفته می‌شود.

پس از جمع‌آوری اطلاعات نوبت به طراحی مدل فازی معکوس می‌رسد. ورودی–خروجی های مدل همان چیزی است که در –شکل ۶ نشان داده شده است. از آنجایی که مقادیر موتورهای شانه مکمل هم هستند، تنها یکی از آن‌ها در طراحی مدل استفاده شده است. برای مقدار m3 هم زاویه موتور آرنج در نظر گرفته شده است. برای ساخت مدل فازی از جعبه ابزار فازی متلب استفاده شده است. دستور genfis3 مجموعه داده های ورودی و خروجی را به صورت جداگانه دریافت می کند. علاوه بر آن نوع سیستم فازی که در اینجا "Sugeno" است را دریافت می کند. خروجی این تابع یک سیستم فازی سوگنو مرتبه صفر است که همان مدل فازی معکوس است که با استفاده از خوشه‌بندی داده‌ها به وجود آمده است. شکل ۱۰ توابع عضویت سه ورودی کنترل‌گر فازی معکوس که مربوط به مقادیر مجری نهایی در سه بعد، بعد از خوشه بندی را نشان می‌دهد. همچنین جدول ۲ برخی قواعد فازی تولید شده توسط دستور genfis3 را نشان می‌دهد.

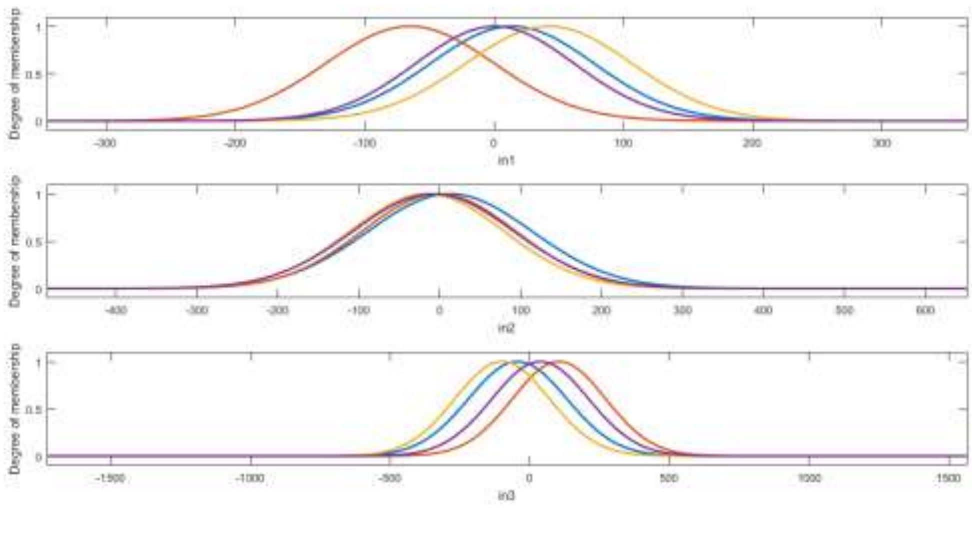
گفته شد که در آزمایش‌های عملی کنترل‌گر معکوس به تنهایی دقت لازم را ندارد و در ناحیه نزدیک هدف از کنترلگر خبره فازی استفاده شده است. در اینجا ناحیه نزدیک هدف به موقعیتی گفته می‌شود که مجری نهایی در محدوده $-100 < \nabla x < 100$، $-100 < \nabla y < 100$ و $-300 < \nabla z < 300$ از هدف قرار گفته شده باشد.

٤-٢ طراحی کنترل‌گر خبره فازی

کنترل‌گر با استفاده از مشاهداتی که از عملکرد سیستم در عمل به دست آمده، طراحی شده است. این کنترل‌گر یک سیستم فازی سوگنو مرتبه صفر است. در طراحی این کنترل‌گر فرض شده که موتور پایه برای رساندن مجری نهایی در بعد، x موتورهای شانه در بعد y و موتور آرنج برای بعد z به طور مستقل عمل می‌کنند. توابع عضویت ورودی کنترل‌گر خبره فازی طراحی شده در شکل ۱۱ نمایش داده شده است.
برای هر سه ورودی سه تابع عضویت گوسی شکل به نام های Zero، Neg و Pos در نظر گرفته شده است. سیستم فازی مذکور سه خروجی دارد که هر کدام مشخص کننده تغییرات در زوایای هر کدام از مفصل‌های ربات است. خروجی های این سیستم برای موتور پایه دارای مقادیر [۱۵–; ۰; ۱۵]، موتور شانه [۲۰–; ۰; ۲۰] و موتور آرنج [۶۰–; ۰; ۶۰] هستند. برای این سیستم ۲۷ قاعده نوشته شده است. برخی قواعد کنترل‌گر خبره فازی در جدول ۳ نشان داده شده است.

٤–١ نتایج آزمایش کنترل‌گر ترکیبی فازی

زمانی که از کنترل‌گر ترکیبی استفاده می‌شود، مجری نهایی با دقت قابل قبولی به هدف تعیین شده می‌رسد. برای آزمایش چندین نقطه هدف در محیط کاری ربات در نظر گرفته شده است. با استفاده از کنترل‌گر معکوس فازی، و کنترل‌گر ترکیبی سعی شده تا مجری نهایی به هدف تعیین شده برسد.



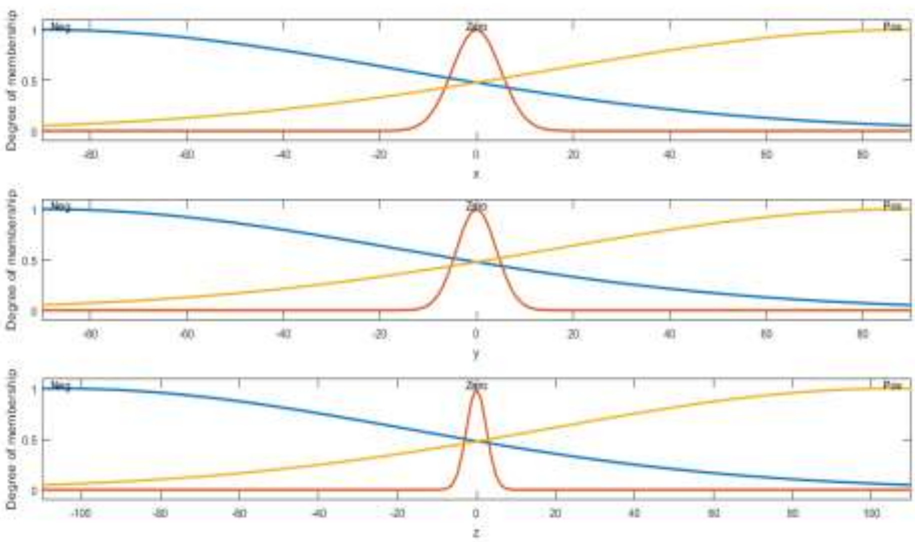
شکل ۱۰: توابع عضویت سه ورودی کنترل‌گر معکوس

جدول ۲: برخی قواعد کنترل‌گر معکوس فازی

شماره قاعده	قاعده
۱	If (in1 is in1c1) and (in2 is in2c1) and (in3 is in3c1) and (in4 is in4c1) and (in5 is in5c1) and (in6 is in6c1) then (out1 is out1c1)(out2 is out2c1)(out3 is out3c1)
۲	If (in1 is in1c2) and (in2 is in2c2) and (in3 is in3c2) and (in4 is in4c2) and (in5 is in5c2) and (in6 is in6c2) then (out1 is out1c2)(out2 is out2c2)(out3 is out3c2)
۳	If (in1 is in1c3) and (in2 is in2c3) and (in3 is in3c3) and (in4 is in4c3) and (in5 is in5c3) and (in6 is in6c3) then (out1 is out1c3)(out2 is out2c3)(out3 is out3c3)

جدول ۳: برخی قواعد کنترل‌گر خبره فازی

شماره قاعده	قاعده
۱	If (x is Neg) and (y is Neg) and (z is Neg) then ($\Delta m1$ equals -15)($\Delta m2$ equals -20)($\Delta m3$ equals 60)
۲	If (x is Neg) and (y is Neg) and (z is Zero) then ($\Delta m1$ equals -15)($\Delta m2$ equals -20)($\Delta m3$ equals 0)
۳	If (x is Neg) and (y is Neg) and (z is Pos) then ($\Delta m1$ equals -15)($\Delta m2$ equals -20)($\Delta m3$ equals -60)
۴	If (x is Neg) and (y is Zero) and (z is Neg) then ($\Delta m1$ equals -15)($\Delta m2$ equals 0)($\Delta m3$ equals 60)
۵	If (x is Neg) and (y is Zero) and (z is Zero) then ($\Delta m1$ equals -15)($\Delta m2$ equals 0)($\Delta m3$ equals 0)



شکل ۱۱:توابع عضویت ورودی کنترل گر خبره فازی

جدول ۴ خطای سیستم در زمان استفاده از کنترل‌گر معکوس فازی به تنهایی و کنترل‌گر ترکیبی فازی در پنج نقطه مختلف هدف، را با هم مقایسه می کند. برای تشخیص رسیدن مجری نهایی به هدف ناحیه محدودی اطراف هدف در نظر گرفته شده است که اگر مجری نهایی در آن محدوده قرار گیرد هدف در دسترس آن قرار دارد. در آزمایش های انجام شده این محدوده به صورت [-30,0] ، [-30,30] و [-10,30] در ابعاد x ،y و z تعریف شده است.

همانطور که در جدول ۴ نمایش داده شده، کنترل‌گر ترکیبی خطا را کاهش داده و به هدف می‌رساند. منظور از خطا فاصله مجری هایی تا محدوده هدف است. شکل ۱۲ موقعیت مجری نهایی را در زمانی که به هدف رسیده و خطا صفر شده را نشان می‌دهد.

شکل۱۲ : موقعیت مجری نهایی در زمان رسیدن به هدف

جدول ۴: مقایسه دقت دو کنترل گر معکوس و ترکیبی

شماره آزمایش	کنترل‌گر	خطای بعد x(px)	خطای بعد y(px)	خطای بعد z (mm)
۱	معکوس	-۲۰	-۲۳	۰
	ترکیبی	reach		
۲	معکوس	۰	۳۴	۰
	ترکیبی	reach		
۳	معکوس	۰	۶۳	۱۰۲
	ترکیبی	reach		
٤	معکوس	۵۶	۴۹	-۲۵
	ترکیبی	reach		
۵	معکوس	-۳	۸۲	۱۲۵
	ترکیبی	reach		

٤-٢ تنظیم بر خط کنترل‌گرخبره فازی

در بخش ۳-۲ مطرح شد که از یادگیری تقویتی و روش عملگر- نقاد برای آموزش برخط تغییرات به سیستم و همچنین بهبود عملکرد کنترل‌گر خبره فازی استفاده شده است. به منظور یادگیری تغییرات و برای انجام آزمایش ها در این زمینه، ابتدا نیاز است که تغییراتی در سیستم و محیط کاری ربات ایجاد شود. لذا در اینجا تغییری که در محیط ایجاد شده، تغییر ده سانتی متر در موقعیت میزی است که ربات در آن قرار دارد. میز به اندازه ده سانتی متر از دیوار فاصله گرفته و جلوتر قرار گرفته است. بدیهی است که همانطور که گفته شد، کنترل‌گر ترکیبی دیگر دقت لازم را ندارد.

بعد از اعمال تغییرات در محیط حال نوبت به آموزش سیستم می‌رسد. آموزش سیستم مانند آنچه است که در بخش ۳-۲ آورده باشد. عمل پیشنهادی و نحوه به روزرسانی وزن‌ها بر اساس روابط (۱۱)، (14) و (15) صورت می گیرد.

مورد دیگری اینکه سیگنال تقویتی برای محاسبه خطای تفاضل موقت مورد نیاز است. در آزمایشات صورت گرفته سیگنال تقویتی در نظر گرفته شده به صورت رابطه (16) است.

$$\begin{cases} 1 & reach\ goal \\ -1 & lose\ goal \\ 0.1 & dis_{pre} > dis_{cur} \\ -0.1 & dis_{pre} < dis_{cur} \\ -0.01 & dis_{pre} = dis_{cur} \end{cases} \qquad (۱۶)$$

منظور از dis_{pre} و dis_{cur} به ترتیب فاصله اقلیدسی مجری نهایی از هدف در گام قبلی و فعلی است.

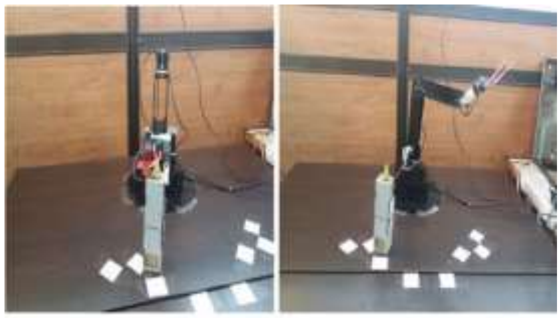
در روابط بروزرسانی وزن های عملگر و نقاد دو پارامتر نرخ آموزش $0 < \sigma_A < 1$ و $0 < \sigma_c < 1$ مطرح شد. در آزمایش های انجام شده این پارامترها به صورت $\sigma_A = 0.08$ و $\sigma_c = 0.01$ در نظر گرفته شده است. این مقادیر اگر خیلی کوچک باشد، فرآیند آموزش کند می شود و در مقابل اگر مقدار بزرگی انتخاب شود، ممکن است منجر به نوسان پیرامون جواب بهینه شود.

فرض شده است، زمانی که سیستم در طی فرآیند آموزش به جایی رسید که در ۲۰ مرحله[۱] پی در پی به هدف رسید، فرآیند آموزش متوقف شد. با توجه به این فرض، سیستم را ۴۶۷ مرحله، آموزش طول کشیده شده است. از این تعداد ۳۰۲ مرحله موفق، و ۱۶۵مرحله با شکست مواجه شد.

[۱] Episode

۴-۳ تست کنترل‌گر آموزش دیده به صورت برخط

زمانی که به نظر رسید که سیستم به اندازه کافی آموزش دیده است، فرآیند آموزش متوقف و برای شش نقطه از پیش تعیین شده برای تست، سیستم مورد ارزیابی قرار گرفت. جدول ۵ نتایج حاصله از این تست را قبل و بعد از آموزش نشان می دهد. اگر مجری نهایی به محدوده تعریف شده برای هدف رسیده باشد، خطا صفر در نظر گرفته شده و عبارت reach به جای خطا نوشته شده است. شکل ۱۳ تصویر نقطه شروع حرکت و توقف مجری نهایی در یکی از آزمایش‌ها ذکر شده در جدول ۵ را نمایش می‌دهد.

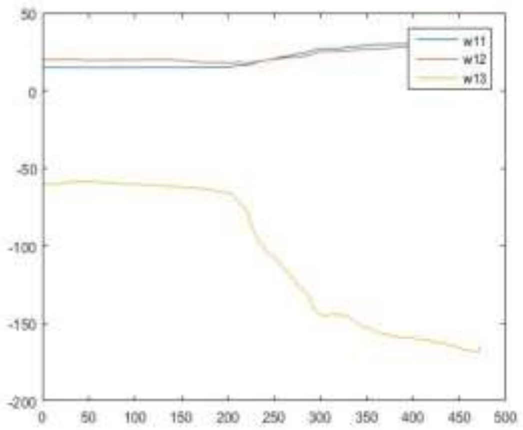


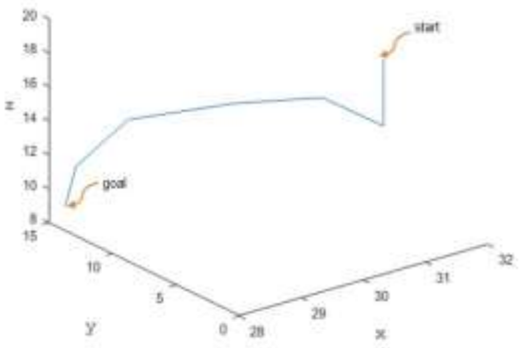
شکل ۱۳:موقعیت اولیه و پایانی مجری نهایی

جدول ۵: مقایسه عملکرد کنترل‌گر قبل و بعد از آموزش

شماره آزمایش	خطای کنترل‌گر قبل از آموزش	خطای کنترل‌گر آموزش داده شده
۱	[-6,22,14]	reach
۲	[0,29,13]	reach
۳	[-9,19,18]	reach
۴	[-4,-22,14]	reach
۵	[-19,-27,21]	reach
۶	[5,-3,26]	reach

همانطور که گفته شد، وزن های عملگر ابتدا به خروجی سیستم مقداردهی می شود و در طی فرآیند آموزش تغییر می کنند. با استفاده از مقادیر جدید وزن ها پس از آموزش، سیستم خود را با تغییرات اعمال شده به محیط مطابقت دهد. شکل ۱۴ نموادر تغییرات وزن‌های مربوط به قاعده اول را نشان می دهد. در شکل مذکور ابتدا قاعده نشان داده شده، کمتر تحریک شده، در نتیجه تغییرات آن کم است. در ادامه روند آموزش این قاعده بیشتر قاعده غالب بوده و در نتیجه تغییرات وزن‌های آن بیشتر شده است. در [۲۲،۲۱]فیلم نتیجه آزمایشات صورت گرفته برای کنترل‌گر ترکیبی و تطبیق‌پذیر قرار داده شده است. شکل ۱۵ موقعیت مجری نهایی در هر گام حرکت در یک نمونه آزمایش، از حالت اولیه تا رسیدن به هدف را نشان می‌دهد.





شکل ۱۵:موقعیت مجری نهایی در یکی از آزمایشات

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک کنترل‌گر ترکیبی فازی برای رساندن مجری نهایی بازوی ربات به هدف ارائه شد. این کنترل‌گر شامل یک کنترل‌گر معکوس فازی و یک کنترل‌گر خبره فازی است. کنترل‌گر معکوس فازی برای رساندن مجری نهایی به اطرف هدف استفاده شد. آزمایش‌ها نشان داد که این کنترل‌گر به دلیل معکوس‌پذیر نبودن برخی نقاط کاری ربات و خطای موجود در جمع آوری اطلاعات، به تنهایی دقت کافی را دارا نیست. لذا برای رفع این مشکل از کنترل‌گر خبره فازی در نواحی نزدیک هدف استفاده شد. در ادامه از معماری عملگر-نقادِ یادگیری تقویتی برای تنظیم بر خط کنترل‌گر جهت تنظیم بهتر پارامترهای کنترل‌گر خبره فازی و نیز قابلیت تطبیق‌پذیری سیستم استفاده شد.

نتایج آزمایش‌های صورت گرفته نشان داد روش مذکور عملکرد مناسبی دارد و ترکیب معماری عملگر-نقاد و کنترلگر معکوس فازی می‌تواند منجر به این شود که این دو ساختار ضعف‌های یکدیگر را بپوشانند. از یک طرف با استفاده از کنترل‌گر معکوس فازی توانستیم

فضای آموزش و محدوده جستجو را در یادگیری تقویتی کاهش داده و لذا سرعت یادگیری را افزایش دهیم. لازم به ذکر است یک ضعف روشهای یادگیری تقویتی نیاز به تکراز زیاد تجربیات است. رفع این مشکل بخصوص در هنگام انجام آزمایش با یک ربات واقعی (نه مدل شبیه سازی شده) که انجام آزمایشات زمانبر و پرهزینه است یک مزیت مهم به حساب می آید. از طرف دیگر استفاده از یادگیری تقویتی امکان تنظیم برخط پارامترهای کنترل‌گر فازی و تطبیق‌پذیری آن را فراهم می‌کند.

از آنجایی که برای گرفتن اطلاعات بصری از کینکت استفاده شده، و دوربین کینکت در فضای باز قابل استفاده نیست، لذا برای مسیر آینده این پژوهش مناسب است که از دوربین معمولی و به صورت استریو، برای گرفتن اطلاعات از محیط استفاده شود تا بتوان از این سیستم در فضای باز نیز استفاده کرد.

۶- مراجع

[1] D. Kragic, and H. Christensen, ”Survey on Visual Servoing for Manipulation,” *Computational Vision and Active Perception Laboratory,* Fiskartorpsv 15 ,2002.

[2] F. Nadi, “Visual Servoing Control of Robot Manipulator with Jacobian Matrix Estimation, ” (in Persian) M.S. Thesis, Faculty of Electrical and Computer Engineering, Yazd University 2014.

[3] P. Goncalves, L. Mendonca, J. Sousaand, and J. Pinto, ”Uncalibrated Eye-to-Hand Visual Servoing Using Inverse Fuzzy Models,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems,* pp. 341–353, 2008.

[4] C. Distante, A. Anglani, and F. Taurisano, ”Target Reaching by Using Visual Information and Q-learning Controllers,” *Autonomous Robots,* vol. 9, pp. 41–50, 2000.

[5] A. Anglani, F. Taurisano, R. De Giuseppe, C. Distante, and L. Lecce, ”Learning to Grasp by Using Visual Information Robot System and Controller Architecture,” *Autonomous Robots,* vol. 9, pp. 41–50, 2000.

[6] M. Sadeghzadeh, ”Self-Learning Visual Servoing of Robot Manipulator Using Explanation-Based Fuzzy Neural Networks and Q-Learning,” Ph.D. Dissertation, University of Guelph, 2014.

[7] K. Shibata, M. Sugisaka, and K. Ito, ”Hand Reaching Movement Acquired Through Reinforcement Learning,” *in Proceedings of 2000 KACC (Korea Automatic Control Conference)* ,2000.

[8] Z. Miljkovic, M. Mitic, M. Lazarevic, and B. Babic, ”Neural Network Reinforcement Learning for Visual Control of Robot Manipulators,” *Expert Systems with Applications,* vol. 40, pp. 1721–1736, 2013.

[9] M. Deisenroth, C. Rasmussen, and D. Fox, “Learning to Control a Low-Cost Manipulator Using Data-Efficient Reinforcement Learning,” International Conference on Robotics: Science & Systems, pp. 57–64, 2011.

[10] Robotic Arms. (n.d.). Pishrorobot. [Online]. Available:http://www.pishrobot.com/en/products/robotic_arms.htm. Accessed 19 Aug 2016.

[11] Kinect | Xbox 360. Xbox.com. (n.d.). [Online]. Available: http://www.xbox.com/en-US/xbox-360/accessories/kinect. Accessed 19 Aug 2016.

[12] J. Jang, C. Sun, and E. Mizutani, *Neuro-fuzzy and Soft Computing.* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.

[13] S. Guillaume. "Designing Fuzzy Inference Systems from Data: An Interpretability-Oriented Review." IEEE Transactions on fuzzy systems, pp. 426-443, 2001.

[14] R. S. Sutton and A. G. Barto, ”Introduction to Reinforcement Learning,” IEEE Transactions on Robotics and Automation, MIT Press, 1998.

[15] L. P. Kaelbling, M. L. Littman, and A. W. Moore, ”Reinforcement Learning: A survey,” Journal of Artificial Intelligence Research, vol. 1, no. 1, pp. 237–285, 1996.

[16] R. Sutton, and A. G. Barto, "Reinforcement learning," Journal of Cognitive Neuroscience, vol. 11, no. 1, pp. 126-134, 1999 .

[17] X. S. Wang, Y. H. Cheng, and J. Q. Yi ”A Fuzzy Actor–Critic Reinforcement Learning Network,” Journal of Information Sciences, vol. 177, pp. 3764– 3781, 2007.

[18] L. X. Wang, (1997): *A course in fuzzy systems and control.* 1. Aufl. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall PTR.

[19] R. Babuska, *Fuzzy Modeling for Control*. Boston, MA: Kluwer Academic, 1998.

[20] FJ. Chang, and YT. Chang. "Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System for Prediction of Water Level in Reservoir." Advances in Water Resources. pp. 1-10, 2006.

[21] Fuzzy hybrid control of robot with camera, aparat, 2016. [Online]. Available: http://www.aparat.com/v/5UWeh. Accessed: 08 Jul 2016.

[22] Fuzzy adaptive control of robot with camera, aparat, 2016. [Online]. Available: http://www.aparat.com/v/blqN0. Accessed: 17 Oct 2016.

مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۲، شماره ۱، بهار ۱۳۹۷، صفحه ۶۷-۵۳

کنترل تطبیقی ردیاب دینامیک ربات سیار غیرهولونومیک برپایه رهیافت تقریب توابع متعامد

ابولفتح نیک‌رنجبر[۱]، نیما ولدبیگی[۲]

[۱] استادیار مهندسی مکانیک ، گروه طراحی کاربردی ، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج ، a.nikranjbar@kiau.ac.ir
[۲] کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک ، گروه طراحی کاربردی ، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج ، nimavb22@hotmail.com

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۶/۴/۲۲، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۶/۷/۱۶)

چکیده: رویکرد کنترل مبتنی بر رگرسور، از رویکردهای رایج حوزه کنترل سیستم‌های غیرخطی است که به حوزه کنترل ربات‌های سیار نیز توسعه یافته است. بازنویسی مدل فرآیند در قالب ماتریس رگرسور با نایقینی‌ها جهت برپایی قاعده کنترل در این رویکرد، نیازمند آگاهی از ساختار دینامیکی سیستم است. بدیهی است پارامتری سازی فرآیند از مشکلات اصلی این رویکرد کنترلی محسوب می‌شود که موجب توسعه راهبردهای فاقد رگرسور شده است. اصول طراحی کنترل کننده در رویکرد تقریب توابع، بر پایه تخمین مناسب دینامیک ناشناخته فرآیند با استفاده از تقریب فوریه توابع متعامد استوار است. در این پژوهش کنترل ردیاب دینامیک ربات سیار غیرهولونومیک بر اساس رهیافت فاقد رگرسور بصورت روشمند ارائه شده است. دینامیک ربات با استفاده از تقریب سری فوریه و بهره‌گیری از مجموعه متنوعی از توابع متعامد نمونه از جمله بسل، لگوئر، چبیشف و لژاندر به عنوان توابع پایه، تخمین زده شده است. دینامیک سیستم تقریبی با رعایت الزامات پایداری، بطور مستقیم در طراحی کنترل‌کننده تطبیقی ردیاب مسیر ربات سیار مورد استفاده قرار گرفته است. نتایج حاصل، با سه رویکرد کنترل دینامیک معکوس، کنترل تطبیقی دینامیک معکوس و کنترل تطبیقی غیرفعال مقایسه و کیفیت عملکرد مطلوب و قابل توجه آن ارائه شده است.

کلمات کلیدی: کنترل تطبیقی، کنترل تقریب توابع، ربات سیار غیرهولونومیک، فاقد رگرسور.

Adaptive Trajectory Tracking Control of Dynamics of Nonholonomic Mobile Robot based on Orthogonal Function Approximation Technique

Abolfath Nikranjbar, Nima Valadbeyghi

Abstract: Control methods based on regressor matrix and vector of uncertain variables, are the common approaches in control of nonlinear systems that are successfully extended to mobile robot control applications. To establish the controller in regressor based approaches, rewriting the process model in the parameterized form of regressor with uncertainties is essential. Evidently, this main drawback became a motivation for development of the regressor free control strategies. Controller design principle of the regressor free approaches are based on good estimation of the unknown dynamics by function approximation techniques (FAT). In this study, the systematic trajectory-tracking dynamic control design of nonholonomic mobile robot using (FAT) approach is illustrated. The robot dynamics is estimated using Fourier series approximation using variety of orthogonal basis functions such as Bessel, Laguerre, Chebyshev, and Legendre orthogonal basis functions. The function approximated dynamic of the system compliance with stability requirements is directly used in trajectory tracking control design of nonholonomic mobile robot. The results of the proposed method is compared with the inverse dynamic control method, two main regressor based adaptive inverse dynamics, and passivity based adaptive control approaches. The impressive quality of the performance of FAT based control algorithm is presented.

Keywords: Adaptive control, Function approximation control, Nonholonomic mobile robot, Regressor-free.

۱- مقدمه

راهبردهای رایج کنترلی مبتنی بر در اختیار داشتن مقادیر و محدوده قابل اتکای تغییرات نایقینی‌های دینامیک ربات نظیر جرم و ممان اینرسی است. وجود نایقینی‌ها و دینامیک مدل نشده فرآیند نیز ضرورت انتخاب راهبرد مناسب در کنترل ربات‌های سیار به عنوان سیستم‌های غیرخطی چندمتغیره مقید در ردیابی دقیق مسیر را اجتناب ناپذیر می‌کند. از جمله رویکردهای متداول در کنترل سیستم‌های غیرخطی همراه با نایقینی، تجمیع این مقادیر در بردار نایقینی‌ها و پارامتری‌سازی معادله دینامیکی حاکم بر ربات در قالب ماتریس رگرسور ضربدر بردار نایقینی‌ها است. گفتنی است روش مذکور به عنوان روشی شناخته شده و موفق به کنترل ربات‌های متحرک نیز توسعه یافته است. نکته حائز اهمیت در استفاده از رویکرد برپایی قاعده کنترل بر اساس ماتریس رگرسور، نیاز به آگاهی از ساختار دینامیکی سیستم و تنظیم آن در قالب مورد نظر است. بدیهی است تنظیم قالب مذکور از مشکلات اصلی این رویکرد کنترلی محسوب می‌شود که اجتناب از آن موجب توسعه راهبردهای فاقد رگرسور[۱] شده است. مطالعات میدانی نشان از گرایش محققین به رویکرد فاقد رگرسور در دهه اخیر است. در راستا به عنوان نمونه اولیه‌ای از پژوهش های منتشر شده با رویکرد فاقد رگرسور می توان به مرجه اشاره نمود. در پژوهش مذکور، کنترل کننده مد لغزش مرتبه دوم مقاوم پیوسته عاری از نوسانات[۲] بی نیاز از مدل[۳] با ساختار شبه تناسبی- مشتق‌گیر - انتگرال‌گیر برای کنترل بازوی ماهر با رویکرد فاقد رگرسور پیشنهاد شده است [۱]. مطابق روش پیشنهادی، تنظیم دقیق بهره پسخور کنترل کننده مد لغزش مرتبه دو، بدون نیاز به آگاهی از دینامیک سامانه با هدف همگرایی موضعی نمایی خطای موقعیت و نیرو صورت گرفت. نکته قابل توجه در این رویکرد، ساختار ساده کنترلی در مقایسه با کنترل کننده بر پایه رگرسور است.

شیوه «تقریب توابع» به عنوان روشی کارآمد در رهیافت فاقد رگرسور مطرح گردیده است. در این راستا بخش قابل ملاحظه از پژوهش‌های منتشر شده مبتنی بر تقریب دینامیک ناشناخته سیستم از «روش تقریب توابع متعامد»[۴] است. از جمله کاربردهای این روش جهت کنترل بازوی ماهر چند رابطه با مفاصل انعطاف‌پذیر در [۲] ارائه شده است. دست یابی به اهداف کنترلی بی‌نیاز از محاسبه ماتریس رگرسور و پسخور شتاب از ویژگی‌های شاخص این روش است. در پژوهش دیگری از شیوه مذکور در کنترل آمپدانس ربات با رویکرد تقریب توابع فاقد ماتریس رگرسور در [۳] منتشر شده است. از ویژگی‌های قابل توجه در این رویکرد بی‌نیازی کنترل‌کننده از مشتق زمانی نیروی تماسی و پسخور شتاب مفاصل است. در [۴] به عنوان یکی از منابع پایه، مدل سازی بازوی ماهر در قالب مجموعه معادلات مرتبه دو غیرخطی و قابلیت استفاده از شیوه تقریب تابع تشریح شده است. در ادامه نتایج حاصل از رویکرد مورد اشاره با استفاده از یازده جمله سری فوریه در دست یابی به اهداف ردیابی مسیر با کیفیت مطلوب و بی نیاز از ماتریس رگرسور و دینامیک ربات گزارش شده است. در ادامه ترکیبی از مولفین مرجع [۴] و همکاران، نتیجه تئوری تقریب توابع در مسئله کنترل ردیاب بازوی ماهر دو رابطه را در قالب مراجع [۵] منتشر نمودند. در مرجع [۵] نویسندگان حاصل نتایج طراحی کنترل‌کننده‌ی تطبیقی فاقد رگرسور برای ربات خودتنظیم بر اساس شیوه تقریب توابع با هدف بهبود عملکرد سیستم با بازخورد دیداری را ارائه نمودند. مرجع [۶] را می‌توان به عنوان نخستین پژوهش مبتنی بر رهیافت فاقد رگرسور با تمرکز بر کنترل امپدانس تطبیقی ربات با در نظر گرفتن انعطاف پذیری مفاصل و دینامیک سیستم محسوب نمود. مرجع [۷] نیز به نوعی توسعه پژوهش [۵] است که در آن مولفین رویکرد کنترل ردیاب دینامیک بازوی ماهر همراه با نایقینی‌های زمانی از روش تقریب توابع دینامیک سیستم را منتشر کرده‌اند. در مرجع [۸] نیز نتایج حاصل از رهیافت تقریب توابع در کنترل ردیاب بازوی ماهر با مفاصل انعطاف پذیر ارائه شه است. در ادامه مولفین مراجع اشاره شده، حاصل پژوهش‌های منتشر شده خود در مجلات پژوهشی را در قالب کتاب حاوی تئوری رویکرد فاقد رگرسور با رویکرد تقریب تابع ارائه نمودند [۹]. توسعه روش تقریب توابع به کنترل بازوی ماهر با مفاصل انعطاف پذیر همراه با عملگرهای الکتریکی توسط پژوهشگران قبل، در [۱۰] ارائه شده است که این رویکرد توسط مولفین با انتشار مقالات [۱۱] و [۱۲] با کلیدواژه مقایسه عملکرد رویکرد تقریب توابع با روش «اسلاتین و لی»[۵] یا کنترل تطبیقی «مد لغزش»[۶] یا «غیرفعال»[۷] تا سال ۲۰۱۵ میلادی ادامه یافته است. بعد از این ایام عرصه کنترل تطبیقی فاقد رگرسور با استفاده از توابع متعامد، شاهد حضور پر رنگ سایر محققین است. مرجع [۱۳] به عنوان نمونه مناسبی با زمینه پژوهشی کنترل ردیاب بازوی ماهر همراه با نایقینی از روش تقریب توابع مبتنی بر سطح لغزش، قابل ذکر است. مراجع [۱۴, ۱۵] نیز به ترتیب نمونه‌هایی از مقالات منتشر شده در این حوزه با هدف کنترل بازوی ماهر ۶ درجه آزادی پوما[۸]ی ۵۶۰ می باشند که نشان از روزآمدی و کارآمدی رویکرد تقریب توابع بوده و مورد اقبال محققین این عرصه قرار گرفته است.

پیشینه پژوهش بیانگر اقبال محققین به رویکرد فاقد رگرسور مبتنی بر تقریب توابع متعامد بی نیاز از دینامیک سیستم در طراحی کنترل کننده کارآمد می‌باشد. این روش با پیشنهاد ساختار ساده و موثر کنترل کننده، قابلیت استفاده در کنترل سیستم‌های غیرخطی چند ورودی – چند خروجی با دینامیک نامعلوم، به عنوان رویکرد مناسبی در کاربردهای متنوع مطرح شده است. علیرغم توسعه نسبتا گسترده این روش در کاربردهای کنترل بازوی ماهر با رابطه‌های صلب و انعطاف پذیر، مطابق مطالعات میدانی نمونه‌ای از کاربردهای آن در کنترل ربات سیار مشاهده نگردید. با

[۱] Regressor-free
[۲] Chatter free
[۳] Model free
[۴] Function Approximation Technique (FAT)
[۵] Slotin – Li
[۶] Sliding mode
[۷] Passive
[۸] PUMA manipulator

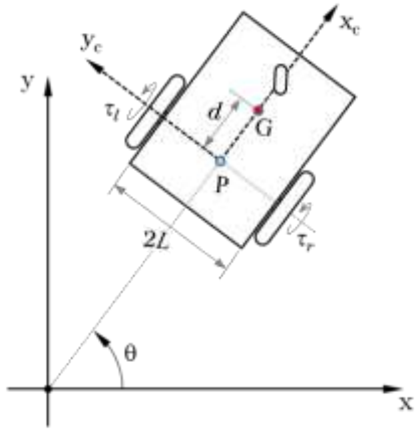
عنایت به پیچیدگی کنترل ردیابی ربات سیار با ساختار غیرخطی چندمتغیره همراه با قیود غیرهولونومیک[1] که موجب افزایش پیچیدگی طراحی کنترل کننده ردیاب می‌شود، در این پژوهش هدف توسعه رهیافت طراحی کنترل کننده دینامیک فاقد رگرسور با تقریب فوریه توابع متعامد در کنترل ردیاب دینامیک ربات سیار غیرهولونومیک و مقایسه عملکرد آن علاوه بر رویکرد دینامیک معکوس فرآیند، با دو رویکرد متداول تطبیقی مبتنی بر رگرسور است. در رویکرد فاقد رگرسور، تقریب دینامیک نامعلوم سیستم با استفاده از توابع متعامد چبیشف به عنوان توابع پایه، بطور مستقیم در طراحی کنترل کننده تطبیقی ردیاب مسیر ربات سیار غیرهولونومیک با رعایت الزامات پایداری مورد استفاده قرار گرفته است. نتایج حاصل از روش با رویکرد کنترل تطبیقی همراه رگرسور مقایسه و کیفیت عملکرد مطلوب و قابل توجه آن در مقایسه با رویکردهای رگرسور محور ارائه شده است.

۲- دینامیک ربات سیار

معادله عمومی دینامیک ربات با n متغیر تعمیم یافته $q \in R^{n\times1}$ و m قید مطابق (۱) تعریف می شود [۱۶]

$$\bar{M}(q)\ddot{q} + \bar{C}(q,\dot{q})\dot{q} + \bar{F}(\dot{q}) + \bar{G}(q) + \bar{\tau}_d = \bar{B}(q)\bar{\tau} + A^T(q)\lambda \qquad (۱)$$

که در آن $\bar{M}(q) \in R^{n\times n}$ ماتریس جرم یا اینرسی مثبت معین متقارن، $\bar{C}(q,\dot{q}) \in R^{n\times n}$ ماتریس جانب مرکز و کوریولیس، $\bar{F}(\dot{q}) \in R^{n\times1}$ بردار اصطکاک سطح، $\bar{G}(q) \in R^{n\times1}$ بردار نیروی جاذبه، $\tau_d \in R^{n\times1}$ اختلالات ناشناخته محدود شده شامل دینامیک مدل نشده ، $\bar{B}(q) \in R^{n\times r}$ ماتریس تبدیل ورودی، $\bar{\tau} \in R^{r\times1}$ بردار ورودی، $A(q) \in R^{m\times n}$ ماتریس وابسته به قیود و $\lambda \in R^{m\times1}$ بردار نیروهای قید است.



شکل ۱: ربات سه چرخ با مشخصات هندسی و مختصات ثابت و بدنی

در کاربرد رابطه (۱) برای ربات سیار، مطابق شکل (۱) ربات سیار بصورت ربات سه چرخ با دو چرخ با ورودی مستقل و یک چرخ تمام جهت برای حفظ تعادل، مورد نظر است. دو چرخ محرک با فرض عدم لغزش جانبی محدودیت سینماتیکی در قالب قید غیرهولونومیک ایجاد می کنند.

مطابق شکل (۱)، وضعیت ربات با توصیف موقعیت و جهت گیری مختصات الصاق شده بر آن یعنی Px_cy_c نسبت به مختصات اینرسی Oxy صورت می‌گیرد. بردار موقعیت و جهت گیری ربات در مختصات اینرسی با بردار $q = [x \quad y \quad \theta]^T$ بیان می‌شود که در آن زوج متغیر (x,y) و θ به ترتیب بیانگر موقعیت مبدأ و جهت گیری ربات نسبت به مختصات اینرسی هستند. حرکت ربات سیار مورد نظر مقید با قید عدم لغزش جانبی فرض می‌شود. مطابق این فرض، ربات محدود به حرکت در جهت عمود بر محور چرخ‌های عقب خواهد بود. بیان ریاضی قید فوق در قالب قید غیرهولونومیک مطابق رابطه (۲) است:

$$\dot{y}\cos(\theta) - \dot{x}\sin(\theta) = 0 \qquad (۲)$$

از طرفی رابطه ژاکوبین در توصیف رابطه سرعت ربات در دو مختصات مورد نظر بصورت رابطه (۳) می‌باشد

$$\dot{q} = \begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\ \omega\end{bmatrix} = S(q)v(t) \qquad (۲)$$

که در آن $S(q)$ ماتریس ژاکوبین، $v(=[v \quad \omega]^T)$ بردار سرعت ربات شامل سرعت خطی v و سرعت زاویه‌ای $\omega(=\dot{\theta})$ در مختصات متحرک و $\dot{q}$ بردار سرعت در مختصات مرجع است.

در توسعه رابطه (۱) برای ربات مورد نظر این پژوهش، ضرائب معادله برای ربات سیار مطابق رویکرد دینامیک تحلیلی، بصورت (۴) حاصل می‌شوند [۱۶]:

$$\bar{M}(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & md\sin(\theta)\\ 0 & m & -md\cos(\theta)\\ md\sin(\theta) & -md\cos(\theta) & I_G + md^2\end{bmatrix} \qquad (۴)$$

$$\bar{C}(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix}0 & 0 & md\omega\cos(\theta)\\ 0 & 0 & md\omega\sin(\theta)\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A(q) = [-\sin(\theta) \quad \cos(\theta) \quad -d]$$

$$\bar{B}(q) = \frac{1}{r}\begin{bmatrix}\cos(\theta) & \cos(\theta)\\ \sin(\theta) & \sin(\theta)\\ -L & L\end{bmatrix}$$

$$\bar{\tau} = \begin{bmatrix}\bar{\tau}_r\\ \bar{\tau}_l\end{bmatrix}$$

$$\lambda = -m[\dot{x}\cos(\theta) + \dot{y}\sin(\theta)]\dot{\theta}$$

در ضرائب فوق عبارت‌های $\bar{\tau}_r$ و $\bar{\tau}_l$ به ترتیب بیانگر گشتاور وارد بر چرخ‌های راست و چپ بوده و همچنین برای کاربرد مورد نظر این پژوهش عبارت‌های $\bar{F}(\dot{q})$ و $\bar{G}(q)$ برابر صفر فرض می‌شوند. وجود نیروهای

[1] Nonholonomic

قیدی در قالب عبارت $A^T(q)\lambda$ با بردار نامعلوم نیروهای قید λ، موجب پیچیدگی مدل دینامیکی می‌شود. رویکرد غالب در مواجه با این مشکل حذف عبارت فوق با انتقال رابطه به فضای مناسب است که این امر در مورد ربات سیار با انتقال مدل دینامیکی به چارچوب متحرک با استفاده از ماتریس ژاکوبین صورت می‌گیرد. بنابراین با ضرب طرفین رابطه (۱) در $S^T(q)$ و جایگذاری از رابطه (۳)، معادله حرکت کامل سطحی ربات سیار غیرهولونومیک مطابق رابطه (۵) حاصل می‌شود [۱۶]:

$$S^T\bar{M}S\dot{v} + S^T(\bar{M}\dot{S} + \bar{C}S)v = S^T\bar{B}\tau \qquad (۵)$$

با انتخاب $M(= S^T\bar{M}S)$ ، $C[= S^T(\bar{M}\dot{S} + \bar{C}S)]$ و $\tau(= S^T\bar{B}\bar{\tau})$ برای ساده‌سازی، رابطه (۵) بر حسب بردار سرعت $v(= [v \quad \omega]^T)$ با مولفه های سرعت خطی v و سرعت زاویه ای ω، مطابق رابطه (۶) بازنویسی می‌شود:

$$M\dot{v} + Cv = \tau \qquad (۶)$$

که در آن:

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_G + md^2 \end{bmatrix} \qquad (۷)$$
$$C = \begin{bmatrix} 0 & md\omega \\ -md\omega & 0 \end{bmatrix}$$
$$B = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -L & L \end{bmatrix}$$
$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix}$$

۳- کنترل ربات سیار

مسئله کنترل دینامیک ردیاب ربات سیار غیرهولونومیک عبارت از محاسبه گشتاورهای تعمیم یافته τ در رابطه (۶) با ضرائب (۷) برای ردیابی مسیر مرجع یا ورودی $v_d(= [v_d \quad \omega_d]^T)$ است. همانگونه که مشاهده می‌شود مسئله کنترل منجر به ردیابی بردار سرعت ورودی شده و در صورت نیاز به تعیین سرعت و موقعیت در مختصات اینرسی، می‌توان از رابطه (۳) استفاده کرد.

در این پژوهش با هدف تبیین عملکرد روش کنترل تطبیقی فاقد رگرسور، رویکرد مقایسه‌ای با دو روش شناخته شده تطبیقی دیگر دنبال شده است. در ابتدا روش کنترل متداول خطی‌سازی پسخور در پایدارسازی دینامیک سیستم ارائه شده و متعاقباً به دو روش پیشرفته کنترل تطبیقی «دینامیک معکوس» و «غیر فعال» ربات متحرک اشاره شده است. روش کنترل تطبیقی «فاقد رگرسور مبتنی بر توابع متعامد» نیز با ذکر جزئیات و بطور روشمند ارائه شده است. لازم به ذکر است که به علت کاهش درجه مشتق در رابطه عمومی دینامیک ربات سیار (۶)، در انتخاب عبارت‌های متناظر خطا در کنترل‌کننده‌ها، رعایت یک درجه کاهش در مرتبه مشتق برای دست‌یابی به ساختار کنترل‌کننده‌های قابل پیاده‌سازی توصیه می‌شود.

۳- ۱- کنترل‌کننده خطی سازی پسخور [۱]

درصورت در دسترس بودن کلیه متغیرها، با انتخاب کنترل‌کننده تناسبی- انتگرال‌گیر مطابق (۸)

$$\tau = M\left[\dot{v}_d - K_p\tilde{v} - K_i\int \tilde{v}dt\right] + Cv \qquad (۸)$$

که در آن v_d بردار سرعت انتقالی و سرعت زاویه‌ای مطلوب، $\tilde{v}(= v - v_d)$ بردار خطا و $K_p \in R^{2\times2}$ و $K_i \in R^{2\times2}$ ماتریس‌های بهره کنترل مناسب هستند.

با جایگذاری از (۸) در (۶) و مرتب کردن رابطه، مطابق ضمیمه ۱ می‌توان نشان داد که دینامیک خطای سیستم مدار بسته مطابق (۹)

$$\dot{\tilde{v}} + K_p\tilde{v} + K_i\int \tilde{v}dt = 0 \qquad (۹)$$

و یا

$$\ddot{\tilde{v}} + K_p\dot{\tilde{v}} + K_i\tilde{v} = 0 \qquad (۱۰)$$

حاصل شده و بنابراین سیستم بصورت مجانبی پایدار خواهد شد.
برپایی کنترل‌کننده (۸) نیازمند اطلاعات دقیق از دینامیک فرآیند با ضرائب قطعی است که از معایب روش محسوب می‌شود.

۳-۲- کنترل تطبیقی ردیاب دینامیک ربات سیار

عملکرد کنترل تطبیقی تقریب توابع دینامیک نامعلوم ربات سیار، با دو رویکرد کنترل تطبیقی دینامیک معکوس و کنترل تطبیقی غیرفعال مورد مقایسه قرار گرفته است. در ادامه رویکردهای مذکور با کاربرد در کنترل سیستم‌های غیرخطی عمومی، برای کنترل دینامیک ربات سیار در ردیابی سرعت مرجع بطور اجمال مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

۳-۲-۱- کنترل دینامیک معکوس تطبیقی ربات سیار

در صورت معلوم نبودن کلیه متغیرهای فرآیند، پارامتری‌سازی سمت چپ رابطه (۶) در قالب ماتریس رگرسور معلوم ضرب در بردار متغیر مجهول p و استفاده از رویکرد کنترل تطبیقی در تنظیم درایه‌های p از رویکردهای متداول است. در این رویکرد برای برپایی کنترل کننده، مدل فرآیند مطابق رابطه (۶)، بصورت ضرب ماتریس رگرسور در بردار نایقینی‌ها، پارامتری‌سازی می‌شود:

$$M\dot{v} + Cv = Y(v,\dot{v})p \qquad (۱۱)$$

که در آن ماتریس رگرسور Y و بردار نایقینی‌های p مطابق (۱۲) تعریف می‌شوند:

$$Y(v,\dot{v}) = \begin{bmatrix} \dot{v} & -\omega^2 & 0 \\ 0 & v\omega & \dot{\omega} \end{bmatrix} \qquad (۱۲)$$
$$p = [m \quad md \quad I_G + md^2]^T$$

کنترل‌کننده مستقیمی بر اساس (۶) بصورت (۱۳) پیشنهاد می‌شود [۹]

$$\tau = \hat{M}\left[\dot{v}_d - K_p\tilde{v} - K_i\int \tilde{v}dt\right] + \hat{C}v \qquad (۱۳)$$

[۱] Feedback Linearization

که در آن $\widehat{M}$ و $\hat{C}$ مقادیر تخمینی ضرائب M و C هستند.
مطابق ضمیمه می‌توان نشان داد که سیستم مدار بسته حاصل از کاربرد کنترل‌کننده (۱۳) در (۶)، مطابق (۱۴) است:

$$\dot{\tilde{v}} + K_p\tilde{v} + K_i\int edt = -\widehat{M}^{-1}\big(\widetilde{M}\dot{v} + \tilde{C}v\big) \qquad (۱۴)$$

که در آن $\widetilde{M} = M - \widehat{M}$ و $\tilde{C} = C - \hat{C}$ خطای تخمین پارامترهای فرآیند هستند. با تعریف متغیر $\tilde{p}(= p - \hat{p})$ که در آن $\hat{p} \in R^3$ تخمین p بوده و با فرض معکوس‌پذیری $\widehat{M}$ در $t \geq 0$، سمت راست رابطه (۱۴) را می‌توان به صورت (۱۵) پارامتری‌سازی نمود.

$$\dot{\tilde{v}} + K_p\tilde{v} + K_i\int \tilde{v}dt = -\widehat{M}^{-1}Y(v,\dot{v})\tilde{p} \qquad (۱۵)$$

مطابق دینامیک خطای سیستم مدار بسته (۱۵) چنانچه بتوان قاعده‌ی تنظیمی برای $\hat{p}$ فراهم نمود که همگرایی مناسب $\hat{p} \to p$ در صورت $t \to \infty$ تحقق یابد، در اینصورت همگرایی سمت چپ (۱۵) به شکل معادله (۹) فراهم شده و پایداری مطلوب مجانبی سیستم مدار بسته حاصل می‌شود.

در برپایی قاعده تطبیق پارامترهای نایقینی، مطابق ضمیمه با تعریف بردار $x\{= [(\int \tilde{v}dt)^T \quad \tilde{v}^T\ ]^T\} \in R^4$، می‌توان معادله (۱۵) را به شکل فضای حالت (۱۶) بازنویسی نمود:

$$\dot{x} = Ax - B\widehat{M}^{-1}Y(v,\dot{v})\tilde{p} \qquad (۱۶)$$

که در آن ماتریس‌های ضرائب $A \in R^{4\times4}$، $B \in R^{4\times2}$ مطابق ذیل تعریف و $I_2 \in R^{2\times2}$ ماتریس همانی است.

$$A = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ -K_i & -K_p \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

جهت طراحی قاعده تطبیقی بروزرسانی بردار نایقینی‌ها یعنی $\hat{p}$ ضمن رعایت الزامات پایداری سیستم مدار بسته، از روش لیاپانف استفاده می‌شود. بدین منظور تابع لیاپانف به شکل زیر انتخاب می‌شود [۱۱]

$$V(x,\tilde{p}) = \tfrac{1}{2}x^TPx + \tfrac{1}{2}\tilde{p}^T\Gamma\tilde{p} \qquad (۱۷)$$

که در آن $\Gamma = \Gamma^T \in R^{3\times3}$ ماتریس وزن مثبت معین و $P = P^T \in R^{4\times4}$ ماتریس مثبت معین پاسخ معادله لیاپانف است.

$$A^TP + PA = -Q \qquad (۱۸)$$

با توجه به اینکه ماتریس A هورویتز است، مطابق (۱۸) برای ماتریس مثبت معین معلوم $Q = Q^T \in R^{4\times4}$، ماتریس مثبت معین متقارن $P = P^T \in R^{4\times4}$ می‌توان یافت که شرط پایداری لیاپانف را اجابت نماید. بنابراین مطابق ضمیمه ۲، با محاسبه مشتق زمانی V در امتداد مسیر (۱۶):

$$\dot{V} = -\tfrac{1}{2}x^TQx - \tilde{p}^T\left[\big(B\widehat{M}^{-1}Y\big)^TPx + \Gamma\dot{\hat{p}}\right] \qquad (۱۹)$$

و انتخاب قاعده به روز رسانی $\hat{p}$ بصورت:

$$\dot{\hat{p}} = -\Gamma^{-1}[B\widehat{M}^{-1}Y(v,\dot{v})]^TPx \qquad (۲۰)$$

معادله (۱۹) به شکل (۲۱) حاصل می‌گردد [۱۱].

$$\dot{V} = -\tfrac{1}{2}x^TQx \leq 0 \qquad (۲۱)$$

باید توجه نمود که پیاده‌سازی کنترل کننده (۱۳) با استفاده از (۲۰) مستلزم استفاده از فیدبک شتاب $\dot{v}$ است که از معایب این رویکرد محسوب می‌شود.

۳-۲-۲- کنترل تطبیقی غیرفعال ربات سیار

برای اجتناب از پسخور شتاب، رویکرد استفاده از بردار سطح لغزش پیشنهاد شده است [۹, ۱۱]. در این رویکرد با تعریف بردار سطح لغزش خطا بصورت

$$s = \tilde{v} + \Lambda\int \tilde{v}dt \qquad (۲۲)$$

که درآن $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ با $\lambda_i > 0$ برای $i = 1, \ldots, n$ است. بدیهی است همگرایی s، همگرایی خطای خروجی e را در پی دارد.

با جایگذاری از (۲۲) در (۶) و بازنویسی رابطه، مدل مدار بسته ربات مطابق ذیل خواهد شد:

$$M\dot{s} + Cs + M\dot{v}_r + Cv_r = \tau \qquad (۲۳)$$

که در آن $v_r(= v_d - \Lambda\int \tilde{v}dt)$ است.
با انتخاب کنترل‌کننده (۲۴)

$$\tau = M\dot{v}_r + Cv_r - K_ds \qquad (۲۴)$$

که در آن K_d ماتریس مثبت معین است و جایگذاری (۲۴) در (۶) با فرض معلوم بودن ساختار ربات مطابق ضمیمه ۳ می‌توان نشان داد:

$$M\dot{s} + Cs + K_ds = 0 \qquad (۲۵)$$

که پایداری مجانبی سیستم مدار بسته حاصل می‌شود.
در اثبات پایداری (۶) توسط کنترل کننده (۲۴)، تابع لیاپانف (۲۶) پیشنهاد شده است [۹, ۱۱]:

$$V = \tfrac{1}{2}s^TMs \qquad (۲۶)$$

که مشتق زمانی آن در طول مسیر مطابق ذیل خواهد بود:

$$\dot{V} = s^TM\dot{s} + \tfrac{1}{2}s^T\dot{M}s \qquad (۲۷)$$

با محاسبه $\dot{s}$ از (۲۵) و جایگذاری آن در (۲۷) و مرتب کردن رابطه، رابطه (۲۸) حاصل می‌شود.

$$\dot{V} = -s^TK_ds - \tfrac{1}{2}s^T\big(\dot{M} - 2C\big)s \qquad (۲۸)$$

از آنجا که می‌توان ثابت کرد $\dot{M} - 2C$ پاد متقارن است، رابطه فوق به شکل رابطه (۲۹) ساده می‌شود:

$$\dot{V} = -s^TK_ds \leq 0 \qquad (۲۹)$$

به سادگی می‌توان ثابت کرد که s به صورت یکپارچه محدود بوده وقابل انتگرال‌گیری است و $\dot{s}$ نیز محدود است. از آنجایی که با $t \to \infty$، $s \to 0$ می‌توان همگرایی مجانبی خطای ردیابی را نتیجه گرفت. خاطرنشان می‌سازد که طراحی بالا در صورت معلوم بودن تمام متغیرهای ربات، معتبر است. چنانچه مقادیر نامی M و C در (۶) در دسترس نباشند، کنترل‌کننده (۲۴) تحقق‌پذیر نیست. دراین صورت کنترل‌کننده‌ی (۳۰) با مقادیر تخمینی $\widehat{M}$ و $\hat{C}$ تعریف می‌شود:

$$\tau = \widehat{M}\dot{v}_r + \hat{C}v_r - K_ds \qquad (۳۰)$$

طبق جزئیات ارائه شده در ضمیمه ۴، با جایگذاری از (۳۰) در (۶)، رابطه سیستم مدار بسته مطابق ذیل خواهد شد:

$$M\dot{s}+Cs+K_d s=\widetilde{M}\dot{v}_r+\tilde{C}v_r \qquad (۳۱)$$

جهت برپایی قاعده تطبیق، سمت راست رابطه (۳۱) با پارامتری‌سازی به صورت خطی (۳۲) بازنویسی می‌شود:

$$M\dot{s}+Cs+K_d s=Y(v_r,\dot{v}_r)\tilde{p} \qquad (۳۲)$$

که در آن ماتریس رگرسور $Y(v_r,\dot{v}_r)$ مطابق (۳۳) تعریف می‌شود:

$$Y(v_r,\dot{v}_r)=\begin{bmatrix}\dot{v}_d-\lambda_v(v-v_d) & -\omega[\omega_d-\lambda_\omega\int(\omega-\omega_d)dt] & 0\\ 0 & \omega[v_d-\lambda_v\int(v-v_d)dt] & \dot{\omega}_d-\lambda_\omega(\omega-\omega_d)\end{bmatrix} \qquad (۳۳)$$

شایان ذکر است که بر خلاف ماتریس رگرسور $Y(v,\dot{v})$، ماتریس رگرسور $Y(v_r,\dot{v}_r)$ در (۳۳) مستقل از شتاب ربات سیار است. بدیهی است در صورت طراحی قاعده به روزرسانی مناسب $\tilde{p}$ به نحوی که $\tilde{p}\to 0$ با $t\to\infty$، معادله (۳۲) به صورت مجانبی به معادله (۲۵) همگرا شده و پایداری سیستم مدار بسته تضمین می‌شود. برای تعیین قاعده به روزرسانی بردار خطای نایقینی های $\tilde{p}$، تابع لیاپانف به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$V(s,\tilde{p})=\tfrac{1}{2}s^T Ms+\tfrac{1}{2}\tilde{p}^T\Gamma\tilde{p} \qquad (۳۴)$$

که مشتق زمانی آن در طول مسیر عبارتست از:

$$\dot{V}=-s^T K_d s-\tilde{p}^T(\Gamma\dot{\hat{p}}+Y^T s) \qquad (۳۵)$$

بنابراین قاعده تطبیق به صورت (۳۶) انتخاب:

$$\dot{\hat{p}}=-\Gamma^{-1}Y^T(v_r,\dot{v}_r)s \qquad (۳۶)$$

و معادله (۳۵) مطابق (۳۷) خواهد شد:

$$\dot{V}=-s^T K_d s\le 0 \qquad (۳۷)$$

که پایداری فرآیند همراه با ردیابی ورودی توسط کنترل کننده (۲۴) تضمین می شود.

۳-۲-۳- کنترل تطبیقی ربات سیار برپایه تقریب توابع

رویکردهای کنترل تطبیقی بیان شده در ۳-۲-۱ و ۳-۲-۲، رویکردهای مرسوم کنترل تطبیقی در مواجه مستقیم با سیستم‌های غیرخطی همراه با عدم قطعیت پارامتری است. مطابق تئوری بیان شده، هر دو روش برپایه پارامتری‌سازی (یا خطی‌سازی) رگرسور – نایقینی‌ها، استوارند.

اگر چه در رویکرد کنترل تطبیقی غیرفعال، وابستگی کنترل کننده به شتاب حذف شده است که مزیت روش محسوب می‌شود، ولی کماکان استفاده از رویکرد مذکور نیازمند استخراج ماتریس رگرسور با دشواری‌های مربوطه همراه است. به بیانی، کنترل‌کننده‌های تطبیقی رایج در ارائه قواعد به روزرسانی مناسب برای همگرایی $\widehat{M}\to M$ و $\hat{C}\to C$ با $t\to\infty$ جز در مواردی که امکان پارامتری‌سازی مدل فرآیند به صورت خطی وجود داشته باشد، قابل کاربرد نیستند. در این بخش شیوه استفاده از رویکرد تقریب توابع نامعلوم با استفاده از ترکیب خطی محدودی از توابع متعامد پایه با ضرائب وزن نامعلوم برای تقریب دینامیک نامعلوم فرآیند، همراه با قواعد تطبیق وزن ها و طراحی کنترل‌کننده ارائه می‌شود.

با استفاده از شیوه تقریب توابع مطابق ضمیمه ۵، نایقینی‌های دینامیک ربات مطابق روابط ذیل بیان می‌شوند [۹, ۱۱]:

$$M=W_M^T Z_M+\varepsilon_M \qquad (۳۸)$$
$$C=W_C^T Z_C+\varepsilon_C$$

در روابط فوق W_M و W_C ماتریس‌های وزن، Z_M و Z_C ماتریس‌های توابع پایه و ε_M و ε_C خطای تخمین ماتریس‌های M و C هستند. با فرض استفاده از توابع پایه یکسان برای تقریب دینامیک ناشناخته، تقریب نایقینی-های فرآیند به صورت زیر بیان می‌شود :

$$\widehat{M}=\widehat{W}_M^T Z_M \qquad (۳۹)$$
$$\hat{C}=\widehat{W}_C^T Z_C$$

همچنین کنترل‌کننده با ساختار مشابه (۳۰) و بصورت ذیل انتخاب می‌شود [۹, ۱۱]:

$$\tau=\widehat{W}_M^T Z_M\dot{v}_r+\widehat{W}_C^T Z_C v_r-K_d s \qquad (۴۰)$$

خطای دینامیک سیستم مدار بسته از جایگذاری (۴۰) در (۶) و مرتب کردن رابطه حاصل در تشابه با (۳۱) مطابق (۴۱) می گردد:

$$M\dot{s}+Cs+K_d s=-\widetilde{W}_M^T Z_M\dot{v}_r-\widetilde{W}_C^T Z_C v_r+\varepsilon \qquad (۴۱)$$

که در آن $\widetilde{W}_{(\cdot)}=W_{(\cdot)}-\widehat{W}_{(\cdot)}$ ماتریس خطای وزن و $\varepsilon[=\varepsilon(\varepsilon_M,\varepsilon_M,s,\dot{v}_d)]$ «بردار خطای تقریب یکپارچه»[1] است.

برای تعیین قواعد تطبیق، تابع لیاپانف بصورت ذیل تعریف می‌شود [۹, ۱۱]:

$$V(s,\widetilde{W}_M,\widetilde{W}_C)=\tfrac{1}{2}s^T Ms+\tfrac{1}{2}Tr\left(\widetilde{W}_M^T Q_M\widetilde{W}_M+\widetilde{W}_C^T Q_C\widetilde{W}_C\right) \qquad (۴۲)$$

که Q_M و Q_C ماتریس‌های وزنی مثبت معین هستند.

با مشتق‌گیری زمانی از (۴۲) در امتداد (۴۱):

$$\dot{V}=s^T\left[-Cs-K_d s-\widetilde{W}_M^T Z_M\dot{v}_r-\widetilde{W}_C^T Z_C v_r\right]+\tfrac{1}{2}s^T\dot{D}s-Tr\left(\widetilde{W}_M^T Q_M\dot{\widehat{W}}_M+\widetilde{W}_C^T Q_C\dot{\widehat{W}}_C\right)+s^T\varepsilon \qquad (۴۳)$$

و استفاده از ویژگی پادمتقارن ماتریس $\dot{M}-2C$ ، عبارت (۴۳) بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

[1] Lumped approximation error vector

$$\dot{V} = -s^T K_d s - s^T\left[\widetilde{W}_M^T Z_M \dot{v}_r + \widetilde{W}_C^T Z_C v_r\right] - Tr\left(\widetilde{W}_M^T Q_M \dot{\widehat{W}}_M + \widetilde{W}_C^T Q_C \dot{\widehat{W}}_C\right) + s^T \varepsilon \qquad (۴۴)$$

با مرتب کردن رابطه فوق بصورت:

$$\dot{V} = -s^T K_d s - Tr\left[\widetilde{W}_M^T\left(Z_M \dot{v}_r s^T + Q_M \dot{\widehat{W}}_M\right)\right] - Tr\left[\widetilde{W}_C^T\left(Z_C v_r s^T + Q_C \dot{\widehat{W}}_C\right)\right] + s^T \varepsilon \qquad (۴۵)$$

و انتخاب قواعد به روزرسانی با اصلاح σ[1] مطابق ضمیمه ۶ بصورت رابطه زیر:

$$\dot{\widehat{W}}_M = -Q_M^{-1}\left(Z_M \dot{v}_r s^T + \sigma_M \widehat{W}_M\right) \qquad (۴۶)$$

$$\dot{\widehat{W}}_C = -Q_C^{-1}\left(Z_C v_r s^T + \sigma_C \widehat{W}_C\right)$$

و جایگذاری آن در (۴۵):

$$\dot{V} = -s^T K_d s - \sigma_M Tr\left(\widetilde{W}_M^T \widehat{W}_M\right) - \sigma_C Tr\left(\widetilde{W}_C^T \widehat{W}_C\right) + s^T \varepsilon \qquad (۴۷)$$

بدیهی است در صورت تقریب مناسب نایقینی‌های فرآیند با انتخاب تعداد مناسبی از توابع پایه، خطای تقریب ε قابل اغماض بوده و در رابطه (۴۷) نیازی به استفاده از اصلاح σ نیست و رابطه (۴۷) به رابطه (۲۹) همگرا می‌گردد. در صورتی که خطای تقریب قابل اغماض نباشد، عدد $\delta > 0$ می‌توان یافت به نحوی که $\|\varepsilon\| \leq \delta$، در اینصورت قاعده کنترلی (۴۰) با افزودن عبارت مقاوم τ_{robust} بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau = \widehat{W}_M^T Z_M \dot{v}_r + \widehat{W}_C^T Z_C v_r - K_d s + \tau_{robust} \qquad (۴۸)$$

به این ترتیب، در مطالعه پایداری سیستم مدار بسته، مجدداً با شروع از رابطه (۴۲) برای تابع لیاپانف و استفاده از قواعد تطبیق (۴۶) با اصلاح σ و با مشتق گیری زمانی از (۴۲) در امتداد (۴۸)، می توان نشان داد [۹, ۱۱]:

$$\dot{V} = -s^T K_d s + \delta\|s\| + s^T \tau_{robust} \qquad (۴۹)$$

با انتخاب τ_{robust} بصورت:

$$\tau_{robust} = -\delta\left[sgn(s_1) \quad sgn(s_2) \quad \cdots \quad sgn(s_n)\right]^T \qquad (۵۰)$$

که در آن $s_i, i = 1, \cdots, n$ ، مولفه‌های بردار لغزش s می‌باشند، رابطه (۴۹) به رابطه (۲۹) همگرا شده و شرط پایداری لیاپانف محقق می‌گردد.

۳-۴- توابع متعامد مورد استفاده در رویکرد فاقد رگرسور

به منظور نمایش اثربخشی رویکرد مورد استفاده در مسئله چالش‌برانگیز کنترل دینامیک ربات سیار هولونومیک، در برنامه شبیه‌سازی، امکان تولید رشته توابع متعامد با طول دلخواه با استفاده از روابط بازگشتی فراهم شده است. در جدول ۱ فهرست برخی از توابع متعامد با روابط بازگشتی ارائه شده است.

جدول ۱ : برخی از توابع متعامد با روابط بازگشتی [۹]

سری	بازه تعامد	رابطه بازگشتی
بسل	$[0, b]$	$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m!\,(n+m)!}$ $xJ_n(x) = 2nJ_{n-1}(x) - xJ_{n-2}(x)$
چبیشف نوع اول	$[-1,1]$	$T_0(x) = 1$ $T_1(x) = x$ $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$
لگوئر	$[0, \infty]$	$L_0(x) = 1$ $L_1(x) = 1 - x$ $(n+1)L_n(x) = (2n+1-x)L_{n-1}(x) - nL_{n-2}(x)$
لژاندر	$[-1,1]$	$L_0(x) = 1$ $L_1(x) = x$ $(n+1)L_n(x) = (2n+1)xL_{n-1}(x) - nL_{n-2}(x)$

همچنین قابلیت استفاده از توابع داخلی نرم افزار متلب در تولید رشته توابع متعامد نیز در برنامه پیش‌بینی شده است که از هر دو رویکرد، نتایج یکسانی حاصل می‌شوند.

٤- شبیه سازی

در این قسمت، اثر بخشی راهبرد پیشنهادی با استفاده از شبیه‌سازی رایانه‌ای ارائه شده است. داده‌های فیزیکی ربات سیار شامل مقادیر نامی جرم m، ممان اینرسی حول مرکز جرم I_G، فاصله مرکزثقل d ، فاصله عرضی L و شعاع چرخ‌ها r مطابق جدول زیر در نظر گرفته شده‌اند:

جدول ۲: مقادیر پارامترهای نامی ربات سیار

$m\ (kg)$	$I_G\ (kg-m^2)$	$d\ (m)$	$L\ (m)$	$r\ (m)$
۲	۲/۵	۰/۱	۰/۱۵	۰/۰۳

با توجه به طراحی ردیابی دینامیک سرعت ربات سیار، مسیر مرجع انتخابی در مختصات بدنی بصورت $[v \quad \omega]^T = [sin\,\pi t \quad sin\,\pi t]^T$ انتخاب و شروع حرکت ربات متحرک از شرایط اولیه نمونه $[v_0 \quad \omega_0]^T = [0.5(m/s) \quad 0.2(rad/s)]^T$ به منظور یکسان‌سازی مقایسه عملکرد رویکردهای مختلف فرض شده است. به علاوه در انتخاب چندجمله‌ای‌های درایه ماتریس Z، یعنی $z_{ij} \in R^{\beta\times1}$ از تعداد $\beta = 5$ جمله اول چندجمله‌ای‌ها استفاده شده است. نتایج آزمون نشان دهنده کسب نتایج مناسب قابل مقایسه با روش کنترل تطبیقی غیرغعال بوده و لذا از افزایش جملات پرهیز شده است. همچنین جهت مطابقت با شرایط واقعی، گشتاور چرخ‌های محرک در محدوده $-5 \leq T_{l,r} \leq 5-$

[1] Sigma modification

$5\ [N.m]$ محدود شده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی در قالب دو آزمون و مجموعه منحنی‌ها ارائه شده است. همچنین به منظور نمایش میزان مقاومت کنترل کننده‌ها، ربات سیار در هر دو آزمون در معرض نایقینی‌های پارامتری بصورت فرض شده‌اند

$$m' = \begin{cases} m\ (kg), & 1 \le t \le 2\ (sec) \\ 2m(kg), & 2 \le t \le 3\ (sec) \end{cases} \qquad (۵۱)$$

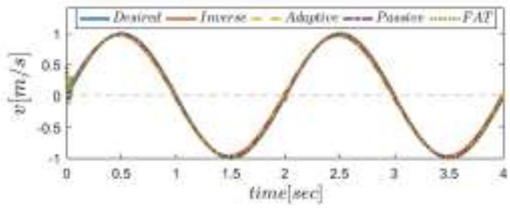
$$I'_G = \begin{cases} I_G\ (kg-m^2), & 1 \le t \le 2\ (kg-m^2) \\ 3I_G\ (kg-m^2), & 2 \le t \le 3\ (kg-m^2) \end{cases}$$

که m' و I'_G پارامترهای جرم و ممان اینرسی نایقینی بوده و نیز ورودی گشتاور مزاحم $T_{l,r}^{load} = -1\ [N.m]$ در بازه زمانی $2 \le t \le 4\ (sec)]$ قرار گرفته است. در منحنی‌های حاصل از آزمون شبیه‌سازی‌ها، به منظور تفکیک نتایج، از عبارت‌های $(Desired)$ به عنوان ورودی مرجع یا مطلوب، $(Inverse)$ دینامیک معکوس، $(Adaptive)$ کنترل تطبیقی، $(Passive)$ روش کنترل تطبیقی غیرفعال و (FAT) روش تقریب توابع استفاده شده است. همچنین از میان مجموعه متنوع توابع متعامد، توابع چبیشف نوع اول به عنوان توابع نمونه در رویکرد مبتنی بر تقریب توابع یا (FAT) استفاده شده است.

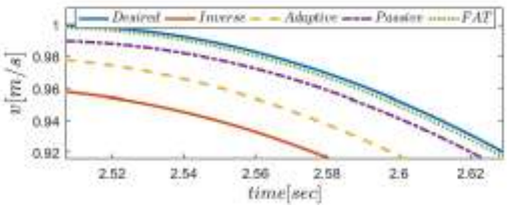
۴-۱- آزمون اول: مقایسه عملکرد روش کنترل غیرفعال تقریب توابع با روش‌های کنترل دینامیک معکوس، دینامیک معکوس تطبیقی و کنترل تطبیقی غیرفعال

در این آزمون عملکرد رویکرد تقریب توابع متعامد در مقایسه با سه روش اشاره شده، در منحنی‌های (۲) تا (۵) ترسیم شده است.

کیفیت ردیابی مسیر مطلوب سرعت خطی از کلیه روش‌ها در شکل (۲الف) ترسیم شده است. مطابق نتایج حاصل، رویکرد کنترلی (FAT) با دقت قابل ملاحظه، ورودی مرجع را ردیابی می کند که این امر در منحنی بزرگنمایی شده شکل (۲ب) در فاصله زمانی نمونه $2.5 \le t \le 2.65\ [sec]$ نیز بوضوح مشهود است. مطابق شکل، رویکرد $(Passive)$ نتیجه بسیار نزدیکی با روش (FAT) داشته و دو روش دیگر با دقت قابل قبول ورودی مرجع را ردیابی می‌نمایند. لازم به ذکر است که حداکثر تلاش ممکن در تنظیم پارامترهای در دسترس کنترل کننده‌ها برای دست‌یابی به دقت حداکثری به عمل آمده است. قابل توجه آنکه مجموعه توابع متعامد چهارگانه، در این آزمون نتایج کاملا یکسانی نشان می‌دهند که از گزینه توابع چبیشف نوع اول استفاده شده است.



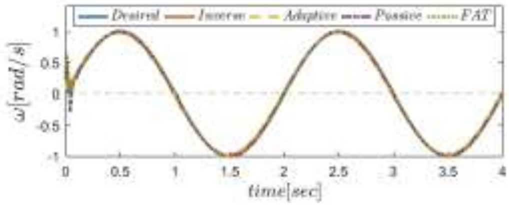
(الف)



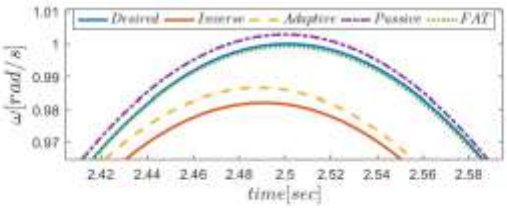
(ب)

شکل ۲: ردیابی سرعت خطی مرجع با رویکردهای سه گانه در مقایسه با روش فاقد رگرسور با استفاده از توابع متعامد چبیشف

کیفیت ردیابی مسیر مطلوب سرعت زاویه‌ای با استفاده از کلیه روش‌ها در شکل (الف۳) ارائه شده است.



(الف)

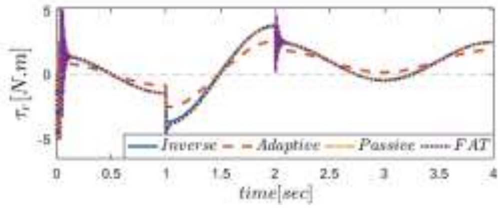


(ب)

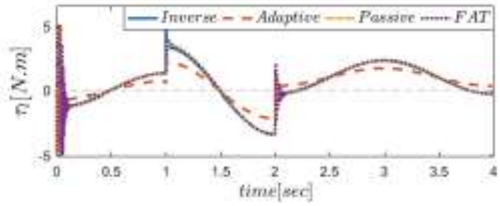
شکل ۳: ردیابی سرعت زاویه‌ای مرجع با رویکردهای سه گانه در مقایسه با روش فاقد رگرسور با استفاده از توابع متعامد چبیشف

بطور مشابه، رویکرد کنترلی (FAT) با غلبه بر نایقینی‌ها و اثرات گشتاور مزاحم، با دقت بسیار مناسب ورودی مرجع را ردیابی نموده و رویکرد کنترل $(Passive)$ در درجه دوم دقت، پس از آن قرار دارد. تصدیق این امر از منحنی بزرگنمایی (۳ب) واضح است. گفتنی است این دقت در فاصله زمانی شبیه‌سازی کاملا مشاهده شده و مختص یک محدوده زمانی کوچک نیست.

گشتاور مورد نیاز در چرخ‌های ربات برای اجابت خواسته کنترلی در ردیابی سرعت‌های مرجع از کلیه روش‌ها در شکل‌های (۴) و (۵) ترسیم شده‌اند. به استثنای رویکرد $(Adaptive)$ که در اجابت خواسته‌ی کنترلی، سطح کنترل کمتر از سایر روش‌ها است، در هر سه روش، تلاش کنترلی یکسانی پیش‌بینی می‌شود. کاهش سطح تقاضای تلاش کنترلی در روش $(Adaptive)$ البته در کیفیت ردیابی ورودی مرجع مطابق شکل‌های (۲) و (۳) مشاهده می‌شود که نسبت به سایر روش های کنترل تطبیقی، از کیفیت نازلتری برخوردار است. لازم به ذکر است که محدوده تغییرات گشتاورهای ورودی در محدوده تنظیم شده در کلیه رویکردها حفظ شده است. در مواضع بروز اثرات نایقینی در ثانیه یکم و یا ورودی مزاحم در ثانیه دوم، تغییرات شدیدتر در گشتاورهای ورودی با استفاده از رویکرد دینامیک معکوس مشاهده می‌شود.



شکل ۴: گشتاور ورودی چرخ راست ربات با رویکردهای سه گانه در مقایسه با روش فاقد رگرسور با استفاده از توابع متعامد چبیشف

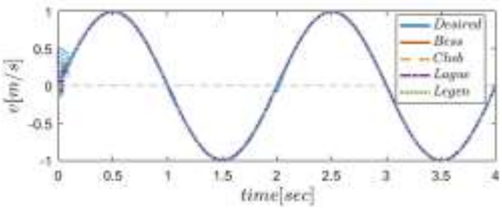


شکل ۵: گشتاور ورودی چرخ چپ ربات با رویکردهای سه گانه در مقایسه با روش فاقد رگرسور با استفاده از توابع متعامد بسل

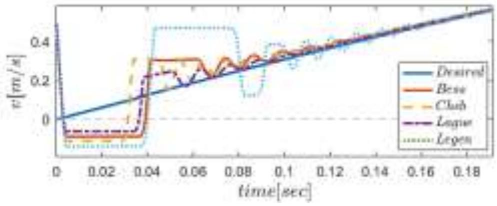
۴-۲- آزمون دوم: مقایسه عملکرد روش کنترل غیرفعال تقریب توابع با بهره‌گیری از مجموعه توابع متفاوت

در این آزمون کیفیت عملکرد رویکرد تقریب توابع متعامد (FAT) با استفاده از چهار دسته توابع متعامد بسل نوع اول $(Bess)$، چبیشف نوع اول $(Cheb)$، لگوئر $(Lague)$ و لژاندر $(Legen)$ در ردیابی ورودی مرجع $(Desired)$ در منحنی‌های (۶) تا (۱۱) ترسیم شده است.

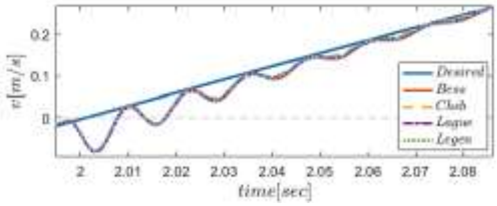
کیفیت ردیابی مسیر مطلوب سرعت خطی توسط کلیه روش‌های تقریب توابع در شکل (۶الف) ترسیم شده است. گفتنی است به منظور یکسان‌سازی شرایط مقایسه، مقادیر اولیه بردار سرعت خطی و زاویه‌ای برای کلیه روش‌ها یکسان بوده و مقادیر اولیه یکسانی برای بردارهای وزن $W_m^{ij}, i,j = 1,2$ و $W_c^{ij}, i,j = 1,2$ در شروع شبیه‌سازی منظور شده است. مطابق نتایج حاصل، کلیه مجموعه توابع متعامد نتایج کاملا یکسانی نشان می‌دهند. اگر چه مطابق منحنی‌های بزرگنمایی شده شکل (۶ب و ج) در زمان‌های بروز تغییرات پارامترها و یا ورودی مزاحم خارجی، قدری تفاوت در عملکرد رویکردها مشاهده می‌شود. بیشترین تفاوت در لحظه شروع حرکت بوده و بهترین عملکرد، مربوط به مجموعه توابع متعامد لگوئر است.



(الف)



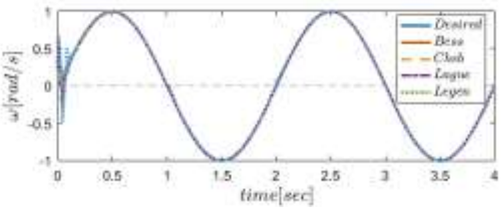
(ب)



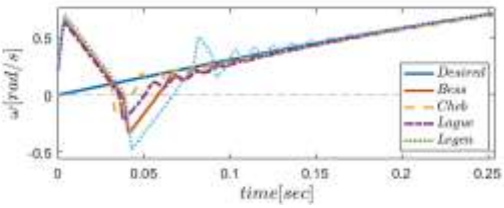
(ج)

شکل ۶: الف) ردیابی سرعت خطی رهیافت تقریب توابع با مجموعه توابع متعامد بسل، چبیشف، لگوئر و لژاندر، ب) بزرگنمایی رفتار گذرا در لحظه ابتدایی، ج) رفتار گذرا در ثانیه دوم

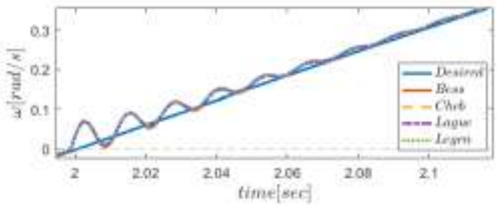
کیفیت ردیابی مسیر مطلوب سرعت زاویه‌ای با استفاده از چهار مجموعه توابع متعامد در شکل (۷الف) ارائه شده است. بطور مشابه، کلیه روش‌ها با کیفیت مطلوب ورودی مرجع را ردیابی می‌کنند. اگر چه اثرات گذرا در ابتدای حرکت و زمان‌های تغییر پارامترها و یا ورودی مزاحم خارجی در عملکرد هر چهار مجموعه مطابق شکل‌های بزرگنمایی شده (۷ب و ج) مشهود است که بهترین عملکرد در شروع متعلق به توابع چبیشف است.



(الف)



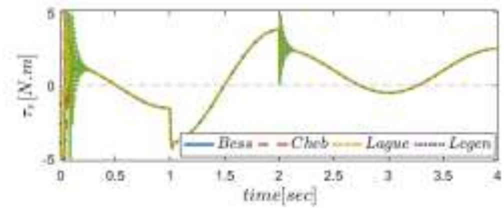
(ب)



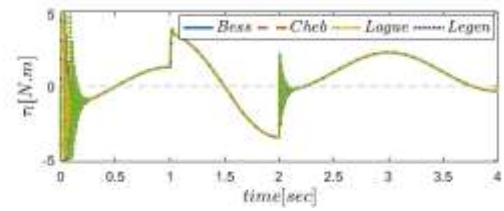
(ج)

شکل ۷: الف) ردیابی سرعت زاویه‌ای رهیافت تقریب توابع با مجموعه توابع متعامد بسل، چبیشف، لگوئر و لژاندر، ب) بزرگنمایی رفتار گذرا در لحظه ابتدایی، ج) رفتار گذرا در ثانیه دوم

گشتاور مورد نیاز در چرخ‌های ربات برای ردیابی سرعت‌های خطی و زاویه‌ای مرجع با استفاده از توابع متعامد چهارگانه در شکل‌های (۸) و (۹) ترسیم شده‌اند. مطابق این شکل‌ها کلیه نتایج به جز در شروع حرکت، کاملا شبیه یکدیگر بوده و اختلاف مشهودی در شروع حرکت بین عملکرد توابع لژاندر با سایر توابع مشاهده می‌شود.



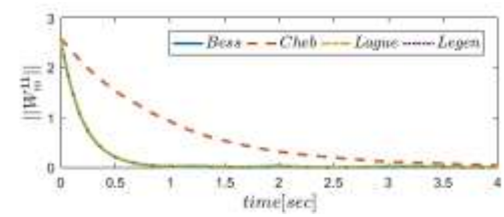
شکل ۸: گشتاور ورودی چرخ راست ربات از رهیافت تقریب توابع با مجموعه توابع متعامد بسل، چبیشف، لگوئر و لژاندر



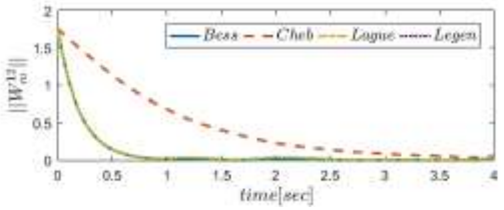
شکل ۹: گشتاور ورودی چرخ چپ ربات از رهیافت تقریب توابع با مجموعه توابع متعامد بسل، چبیشف، لگوئر و لژاندر

به منظور نمایش کیفیت همگرایی روش کنترل تطبیقی تقریب توابع یا فاقد رگرسور، تاریخچه تغییرات زمانی اندازه بردارهای وزن $W_c^{ij}, i,j = 1,2$ و $W_m^{ij}, i,j = 1,2$ برای هر چهار مجموعه توابع متعامد بسل، چبیشف، لگوئر و لژاندر در شکل های (۱۰ الف، ب، ج و د) و (۱۱ الف، ب، ج و د) ترسیم شده‌اند. لازم به ذکر است که مقادیر متغیرهای قابل تنظیم کنترل کننده اثر قابل توجهی در نرخ همگرایی منحنی‌ها دارند. برای آزمون حاضر، مقادیر این متغیرها مطابق روابط (۲۳)، (۴۷) و (۴۹) برابر $\Lambda = diag([20; 20])$ ، $\sigma_M = \sigma_C = 5$، $K_d = diag([60; 60])$ و $Q_M = Q_C = I_{5\times5}$ انتخاب شده‌اند.

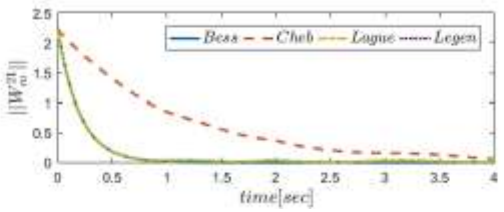
مطابق شکل روند کاهشی اندازه بردارهای مذکور که معیاری از همگرایی رویکرد فاقد رگرسور می‌باشد، در کلیه شکل‌ها مشاهده می‌شود. با یکسان‌سازی مقدار اولیه شروع بردارهای وزن مذکور، کلیه منحنی‌های مرتبط در شکل‌ها از یک نقطه آغاز شده‌اند که امر مقایسه را ساده‌تر می‌کند. نکته حائز اهمیت آنکه رویکرد فاقد رگرسور در استفاده از توابع متعامد به جز مجموعه توابع چبیشف، عملکرد کاملا یکسانی داشته و تغییر محسوسی در نتیجه عملکرد کنترل‌کننده با تغییر مجموعه توابع متعامد حاصل نمی‌شود.



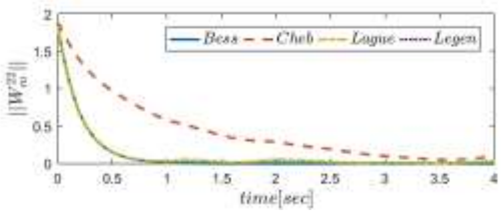
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۱۰: ردیابی سرعت خطی رهیافت تقریب توابع با مجموعه توابع متعامد بسل، چبیشف، لگوئر و لژاندر

۵- جمع بندی

در این پژوهش طراحی روشمند کنترل‌کننده‌ی تطبیقی بر اساس رهیافت فاقد رگرسور برای کنترل ردیاب سرعت ربات سیار ارائه گردید. این کنترل کننده بی‌نیاز از ماتریس‌های دینامیک ربات بوده و بطور همزمان ضمن برخورداری از مزیت و قابلیت‌های رویکرد کنترل تطبیقی غیرفعال، فارغ از پیچیدگی‌های مرسوم پارامتری‌سازی یا برپایی مدل رگرسور فرآیند است. در این رویکرد، ماتریس‌های دینامیک فرآیند با تکیه بر تئوری تقریب توابع متعامد و در طی فرآیند محاسباتی تطبیقی، بازسازی و در کنترل‌کننده مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این رویکرد، با توجه به امکان استفاده از تعداد دلخواه توابع متعامد در تقریب هر یک از درایه‌های ماتریس‌های دینامیک فرآیند، امکان بازتولید دقیق فرآیند ضمن حفظ پایداری سیستم مدار بسته با تکیه بر تئوری پایداری لیاپانف فراهم می‌شود. به منظور نمایش کیفیت عملکرد کنترل کننده پیشنهادی، نتایج حاصل از شبیه سازی کنترل ردیابی سرعت ربات سیار غیرهولونومیک با روش کنترل دینامیک معکوس و دو روش کنترل تطبیقی دینامیک معکوس و کنترل تطبیقی غیرفعال، مقایسه گردید. مطابق نتایج حاصل، عملکرد قابل توجه روش فاقد رگرسور در دستیابی به دقت مناسب ضمن حفظ پایداری در شرایط محدودیت‌های تلاش کنترلی، نشان از قابلیت توسعه روش برای کاربردهای کنترلی پیچیده‌تر را دارد. بعلاوه به منظور آزمون مجموعه توابع متعامد در کیفیت کنترل کننده پیشنهادی، شبیه‌سازی مقایسه‌ای برای چهار مجموعه توابع متعامد معمول گردید که نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان دهنده عملکرد کاملا یکسان رویکرد در استفاده از مجموعه توابع متعامد دارد که از جمله دست آوردهای پژوهش محسوب می‌شود.

مراجع

[1] Parra-Vega, V., A. Castillo-Tapia, and M. Arteaga-Prez. Regressor-free second order sliding mode control for exponential tracking of constrained robot manipulators. in Robot Motion and Control, 2002. RoMoCo'02. Proceedings of the Third International Workshop on. 2002. IEEE.

[2] Chien, M. C. and A. C. Huang. FAT-based adaptive control for flexible-joint robots without computation of the regressor matrix. in Systems, Man and Cybernetics, 2006. SMC'06. IEEE International Conference on. 2006. IEEE.

[3] Chien, M. C. and A. C. Huang. Regressor-free adaptive impedance control of flexible-joint robots using FAT. in American Control Conference, 2006. 2006. IEEE.

[4] Huang, A.mC., S. C. Wu, and W. F. Ting, A FAT-based adaptive controller for robot manipulators without regressor matrix: theory and experiments. Robotica, 2006. 24(02): p. 205-210.

[5] Chien, M. C. and A. C. Huang. FAT-based Adaptive Visual Servoing for Robots with Varying Uncertainties. in Robotics and Automation. 2009.

[6] Huang, A. C. and M. C. Chien. Design of a regressor-free adaptive impedance controller for flexible-joint electrically-driven robots. in Industrial Electronics and Applications, 2009. ICIEA 2009. 4th IEEE Conference on. 2009. IEEE.

[7] Chien, M.-C. and A. C. Huang, Design of a fat-based adaptive visual servoing for robots with time varying uncertainties. International Journal of Optomechatronics, 2010. 4(2): p. 93-114.

[8] Chien, M.-C. and A. C. Huang, A regressor-free adaptive control for flexible-joint robots based on function approximation technique. 2010: INTECH Open Access Publisher.

[9] Huang, A. C. and M. C. Chien, Adaptive control of robot manipulators: a unified regressor-free approach. 2010: World Scientific.

[10] Chien, M. C. and A. C. Huang, Adaptive impedance controller design for flexible-joint electrically-driven robots without computation of the regressor matrix. Robotica, 2012. 30(01): p. 133-144.

[11] Kai, C. Y. and A. C. Huang, A regressor-free adaptive controller for robot manipulators without Slotine and Li's modification. Robotica, 2013. 31(07): p. 1051-1058.

[12] Kai, C. Y. and A.-C. Huang, A regressor-free adaptive impedance controller for robot manipulators without Slotine and Li's modification: theory and experiments. Robotica, 2015. 33(03): p. 638-648.

[13] Shanta, M. N. T. and N. Z. Azlan, Function approximation technique based sliding mode controller adaptive control of robotic arm with time-varying uncertainties. Procedia Computer Science, 2015. 76: p. 87-94.

[14] Ebeigbe, D., T. Nguyen, H. Richter, and D. Simon, Stable Passivity-Based Regressor-Free Adaptive Robot Control. 2017.

[15] Izadbakhsh, A., FAT-based robust adaptive control of electrically driven robots without velocity measurements. Nonlinear Dynamics, 2017: p. 1-16.

[16] Fierro, R. and F.L. Lewis. Control of a nonholonomic mobile robot: backstepping kinematics into dynamics. in Decision and Control, 1995., Proceedings of the 34th IEEE Conference on. 1995. IEEE.

ضمائم

ضمیمه ۱: تحلیل پایداری کنترل دینامیک معکوس ربات سیار

با جایگذاری رابطه (۹) در (۷)

$$M\dot{v} + Cv = M\left[\dot{v}_d - K_p\tilde{v} - K_i\int \tilde{v}dt\right] + Cv \qquad \text{(ض۱-۱)}$$

و مرتب نمودن آن:

$$M\dot{v} + Cv - M\dot{v}_d + M\left[K_p\tilde{v} + K_i\int \tilde{v}dt\right] - Cv = 0 \qquad \text{(ض۱-۲)}$$

یا

$$\dot{\tilde{v}} + K_p\tilde{v} + K_i\int \tilde{v}dt = 0 \qquad \text{(ض۱-۳)}$$

با مشتق گیری مجدد:

$$\ddot{\tilde{v}} + K_p\dot{\tilde{v}} + K_i\tilde{v} = 0 \qquad \text{(ض۱-۴)}$$

با توجه به اینکه $K_p > 0$ و $K_i > 0$ ، پایداری مجانبی نمایی حاصل می‌شود.

ضمیمه ۲: تحلیل پایداری کنترل تطبیقی پارامتریک دینامیک ربات سیار

با جایگذاری از رابطه (۱۴) در (۷):

$$M\dot{v} + Cv = \widehat{M}\left[\dot{v}_d - K_p\tilde{v} - K_i\int \tilde{v}dt\right] + \hat{C} \qquad \text{(ض۲-۱)}$$

با افزایش و کاهش $\widehat{M}\dot{v}$ به سمت چپ رابطه (ض۲-۱) و مرتب نمودن آن:

$$\widehat{M}(\dot{v} - \dot{v}_d) + \widehat{M}\left[K_p\tilde{v} + K_i\int \tilde{v}dt\right] = -\left(M - \widehat{M}\right)\dot{v} - \left(C - \hat{C}\right)v \qquad \text{(ض۲-۲)}$$

و تعریف متغیرهای خطاهای نایقینی $\widetilde{M}\left(= M - \widehat{M}\right)$ و $\tilde{C}\left(= C - \hat{C}\right)$

$$\dot{\tilde{v}} + K_p\tilde{v} + K_i\int \tilde{v}dt = -\widehat{M}^{-1}\left(\widetilde{M}\dot{v} + \tilde{C}v\right) \qquad \text{(ض۲-۳)}$$

با بررسی عبارت $\widetilde{M}\dot{v} + \tilde{C}v$ در سمت راست (ض۲-۲) واضح است که این عبارت برابر اختلاف دینامیک نامی (رابطه ۷) و دینامیک تقریب ربات سیار بر اساس مقادیر تخمینی نایقینی های مدل است. با توجه به انتخاب بردار نایقینی‌ها و تعریف ماتریس رگرسور مطابق رابطه (۱۳) و جایگذاری در رابطه (ض۲-۳)، رابطه (ض۲-۴) حاصل می‌شود.

$$\dot{\tilde{v}} + K_p\tilde{v} + K_i\int \tilde{v}dt = -\widehat{M}^{-1}Y(v,\dot{v})\tilde{p} \qquad \text{(ض۲-۴)}$$

در اثبات برپایی قاعده تطبیق پارامترهای نایقینی، بردار حالت x بصورت $x\{= [(\int \tilde{v}dt)^T \quad \tilde{v}^T]^T\} \epsilon R^4$ تعریف می‌شود. در

اینصورت رابطه (ض۲–۴) به شکل فضای حالت (ض۲–۵) بازنویسی نمود:

(ض۲–۵)
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -K_i x_1 - K_p x_2 - \widehat{M}^{-1} Y(v,\dot{v})\tilde{p}$$

که مدل فضای حالت آن مطابق ذیل خواهد بود:

(ض۲–۶)
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0_2 & I_2\\ -K_i & -K_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0_2\\ I_2\end{bmatrix}\widehat{M}^{-1}Y(v,\dot{v})\tilde{p}$$

یا

(ض۲–۷)
$$\dot{x} = Ax - B\widehat{M}^{-1}Y(v,\dot{v})\tilde{p}$$

که:

$$A = \begin{bmatrix}0_2 & I_2\\ -K_i & -K_p\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}0_2\\ I_2\end{bmatrix}$$

با تعریف دینامیک خطای سیستم مدار بسته، در تحلیل پایداری سیستم مدار بسته و دست‌یابی به قواعد تطبیق پارامترهای نایقینی، تابع لیاپانف مطابق رابطه (ض۲–۸) تعریف می‌شود:

(ض۲–۸)
$$V(x,\tilde{p}) = \tfrac{1}{2}x^T P x + \tfrac{1}{2}\tilde{p}^T \Gamma \tilde{p}$$

با مشتق‌گیری زمانی از (ض۲–۸):

(ض۲–۹)
$$\dot{V}(x,\tilde{p}) = \tfrac{1}{2}\dot{x}^T P x + \tfrac{1}{2}x^T P\dot{x} + \tfrac{1}{2}\dot{\tilde{p}}^T\Gamma\tilde{p} + \tfrac{1}{2}\tilde{p}^T\Gamma\dot{\tilde{p}}$$

و جایگذاری از (ض۲–۷):

(ض۲–۱۰)
$$\begin{aligned}\dot{V}(x,\tilde{p}) &= \tfrac{1}{2}\Big\{\big[Ax - B\widehat{M}^{-1}Y\tilde{p}\big]^T Px + x^T P\big[Ax - B\widehat{M}^{-1}Y\tilde{p}\big]\Big\} + \tilde{p}^T\Gamma\dot{\tilde{p}}\\ &= \tfrac{1}{2}\Big\{\Big[x^T A^T - \tilde{p}^T\big(B\widehat{M}^{-1}Y\big)^T\Big]Px + x^T P\big[Ax - B\widehat{M}^{-1}Y\tilde{p}\big]\Big\} + \tilde{p}^T\Gamma\dot{\tilde{p}}\\ &= \tfrac{1}{2}\Big[x^T A^T P x + x^T P A x - \tilde{p}^T\big(B\widehat{M}^{-1}Y\big)^T Px - x^T P B\widehat{M}^{-1}Y\tilde{p}\Big] + \tilde{p}^T\Gamma\dot{\tilde{p}}\end{aligned}$$

با توجه به مثبت متقارن بودن P و استفاده از خاصیت ترانهاده، (ض۲–۱۰) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

(ض۲–۱۱)
$$\begin{aligned}\dot{V}(x,\tilde{p}) &= \tfrac{1}{2}\Big[x^T(A^T P x + PA)x - 2\tilde{p}^T\big(B\widehat{M}^{-1}Y\big)^T Px\Big] + \tilde{p}^T\Gamma\dot{\tilde{p}}\\ &= -\tfrac{1}{2}x^T Q x - \tilde{p}^T\Big[\big(B\widehat{M}^{-1}Y\big)^T Px + \Gamma\dot{\tilde{p}}\Big]\end{aligned}$$

با انتخاب قاعده تطبیق:

(ض۲–۱۲)
$$\dot{\tilde{p}} = \Gamma^{-1}\big(B\widehat{M}^{-1}Y\big)^T Px$$

و با توجه به اینکه $\tilde{p}(= p - \hat{p})$ که p بردار پارامترهای نامی فرآیند و مقدار ثابتی است، رابطه تطبیق (ض۲–۱۲) به شکل (ض۲–۱۳) بازنویسی شده

(ض۲–۱۳)
$$\dot{\hat{p}} = -\Gamma^{-1}\big(B\widehat{M}^{-1}Y\big)^T Px$$

و با استفاده آن در رابطه (ض۲–۱۱)،

(ض۲–۱۴)
$$\dot{V}(x,\tilde{p}) = -\tfrac{1}{2}x^T Q x \le 0$$

که با توجه به اینکه $Q > 0$ است، شرط پایداری لیاپانف حاصل می شود.

ضمیمه ۳: تحلیل پایداری کنترل غیرفعال دینامیک ربات سیار

با جایگذاری از رابطه

(ض۳–۱)
$$\dot{s} = -M^{-1}(C + K_d)s$$

در رابطه (۲۸)

(ض۳–۲)
$$\begin{aligned}\dot{V} &= s^T M[-M^{-1}(C + K_d)s] + \tfrac{1}{2}s^T\dot{M}s\\ &= -s^T(C + K_d)s + \tfrac{1}{2}s^T\dot{M}s\\ &= -s^T K_d s + \tfrac{1}{2}s^T(\dot{M} - 2C)s\end{aligned}$$

و استفاده از خاصیت پادمتقارن بودن $\dot{M} - 2C$ و مثبت متقارن بودن K_d:

(ض۳–۳)
$$\dot{V} = -s^T K_d s \le 0$$

ضمیمه ۴: تحلیل پایداری کنترل تطبیقی غیرفعال دینامیک ربات سیار

با جایگذاری از رابطه (۳۱) در (۷):

(ض۴–۱)
$$M\dot{v} + Cv = \widehat{M}\dot{v}_r + \hat{C}v_r - K_d s$$

با استفاد از روابط

(ض۴–۲)
$$s = v - v_r$$
$$\dot{s} = \dot{v} - \dot{v}_r$$

که $v_r(= v_d - \Lambda\int\tilde{v}dt)$ و جایگذاری در رابطه (ض۴–۱) و مرتب کردن آن:

(ض۴–۳)
$$\begin{aligned}M(\dot{s} + \dot{v}_r) + C(s + v_r) &= \widehat{M}\dot{v}_r + \hat{C}v_r - K_d s\\ M\dot{s} + Cs + K_d s &= -(M - \widehat{M})\dot{v}_r - (C - \hat{C})v_r\\ M\dot{s} + Cs + K_d s &= -(\widetilde{M}\dot{v}_r + \tilde{C}v_r)\end{aligned}$$

سمت راست رابطه آخر (ض۴–۳) را می‌توان بصورت رگرسور بازنویسی نمود. با توجه به تعریف:

(ض۴–۴)
$$v_r = v_d - \Lambda\int\tilde{v}dt$$

(ض۴–۵)
$$\dot{v}_r = v_d - \Lambda\tilde{v}$$

و توجه به اینکه $v(= [v \quad \omega]^T)$ بردار حالت سرعت و $v_d(= [v_d \quad \omega_d]^T)$ بردار حالت مرجع ربات سیار هستند،

(ض۴–۶)
$$v_r = \begin{bmatrix} v_d - \lambda_v\int(v - v_d)dt\\ \omega_d - \lambda_\omega\int(\omega - \omega_d)dt\end{bmatrix}$$

(ض۴–۷)
$$\dot{v}_r = \begin{bmatrix}\dot{v}_d - \lambda_v(v - v_d)\\ \dot{\omega}_d - \lambda_\omega(\omega - \omega_d)\end{bmatrix}$$

از طرفی مطابق تعریف $(\widetilde{\ }) = (\ ) - (\widehat{\ })$، برای ماتریس $\widetilde{M}$ می‌توان نوشت:

(ض۴–۸)
$$\begin{aligned}\widetilde{M} &= M - \widehat{M}\\ &= \begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & I_G + md^2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\hat{m} & 0\\ 0 & \widehat{I_G + md^2}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{m} & 0 \\ 0 & \widetilde{I_G + md^2} \end{bmatrix}$$

بطور مشابه

$$\tilde{C} = C - \hat{C} \quad \text{(ض۴-۹)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -md\omega \\ md\omega & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\widehat{md}\omega \\ \widehat{md}\omega & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\widetilde{md}\omega \\ \widetilde{md}\omega & 0 \end{bmatrix}$$

با جایگذاری از روابط (ض۴-۴ و ۵) و (ض۴-۸و ۹) در سمت راست عبارت رابطه (ض۴-۳) و مرتب کردن آن

$$M\dot{s} + Cs + K_d s = -(\tilde{M}\dot{v}_r + \tilde{C}v_r) \quad \text{(ض۴-۱۰)}$$

$$Y(v_r, \dot{v}_r) = \begin{bmatrix} \dot{v}_d - \lambda_v(v - v_d) & -\omega[\omega_d - \lambda_\omega \int(\omega - \omega_d)dt] \\ 0 & \omega[v_d - \lambda_v \int(v - v_d)dt] \\ 0 & 0 \\ & \dot{\omega}_d - \lambda_\omega(\omega - \omega_d) \end{bmatrix}$$

$$= -Y(v_r, \dot{v}_r)\tilde{p}$$

در صورت برقراری شرط تخمین پایدار نایقینی‌ها، $\tilde{p} \to 0$ ، سمت راست رابطه (ض۴-۱۰) به سمت صفر میل نموده و پایداری مجانبی سیستم مدار بسته برقرار می‌گردد. برای دست یابی به تخمین پایدار بردار نایقینی‌ها، تابع لیاپانف به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V(s, \tilde{p}) = \tfrac{1}{2}s^T M s + \tfrac{1}{2}\tilde{p}^T \Gamma \tilde{p} \quad \text{(ض۴-۱۱)}$$

با مشتق‌گیری زمانی از (ض۴-۱۱):

$$\dot{V} = \tfrac{1}{2}[\dot{s}^T M s + s^T M \dot{s} + s^T \dot{M} s] + \tfrac{1}{2}[\dot{\tilde{p}}^T \Gamma \tilde{p} + \tilde{p}^T \Gamma \dot{\tilde{p}}] \quad \text{(ض۴-۱۲)}$$

$$= s^T M \dot{s} + \tfrac{1}{2}s^T \dot{M} s + \tilde{p}^T \Gamma \dot{\tilde{p}}$$

با محاسبه $\dot{s}$ از رابطه (ض۴-۱۰)

$$\dot{s} = -M^{-1}[(C + K_d)s - Y(v_r, \dot{v}_r)\tilde{p}] \quad \text{(ض۴-۱۳)}$$

و جایگذاری در (ض۴-۱۲):

$$\dot{V} = -s^T M M^{-1}[(C + K_d)s - Y(v_r, \dot{v}_r)\tilde{p}] + \tfrac{1}{2}s^T \dot{M} s + \tilde{p}^T \Gamma \dot{\tilde{p}} \quad \text{(ض۴-۱۴)}$$

$$= -s^T K_d s + \tfrac{1}{2}s^T(\dot{M} - 2C)s - s^T Y(v_r, \dot{v}_r)\tilde{p} + \tilde{p}^T \Gamma \dot{\tilde{p}}$$

با توجه به خاصیت پادمتقارن $\dot{M} - 2C$ و استفاده از خاصیت ترانهاده، رابطه (ض۴-۱۴) مطابق ذیل بازنویسی می‌شود:

$$\dot{V} = -s^T K_d s + \tilde{p}^T[-Y^T(v_r, \dot{v}_r)s + \Gamma \dot{\tilde{p}}] \quad \text{(ض۴-۱۵)}$$

با انتخاب قاعده تطبیق به صورت

$$\dot{\tilde{p}} = \Gamma^T Y^T(v_r, \dot{v}_r)s \quad \text{(ض۴-۱۶)}$$

و با توجه به تعریف $\tilde{p}(= p - \hat{p})$ که بردار p پارامترهای نامی فرآیند و مقدار ثابتی است، رابطه تطبیق (ض۴-۱۶) به شکل (ض۴-۱۷) حاصل

$$\dot{\hat{p}} = -\Gamma^T Y^T(v_r, \dot{v}_r)s \quad \text{(ض۴-۱۷)}$$

و رابطه (ض۴-۱۵) نیز بصورت ذیل ساده شده

$$\dot{V} = -s^T K_d s \le 0 \quad \text{(ض۴-۱۸)}$$

و شرط پایداری لیاپانف محقق می‌شود.

ضمیمه ۵: تقریب توابع

مجموعه توابع حقیقی $\{z_i(x)\}$ تعریف شده بر روی بازه‌ی $[a, b]$ متعامد است هرگاه [۹]

$$\int_a^b z_i(x) z_j(x) dx = \begin{cases} = 0 \; for \; i \ne j \\ \ne 0 \; for \; i = j \end{cases} \quad \text{(ض۵-۱)}$$

مجموعه‌ی متعامد $\{z_i(x)\}$ با شرط برقراری خاصیت زیر برای کلیه i ها در بازه $[a, b]$، یکا متعامد[۱] نامیده می‌شود.

$$\int_a^b z_i(x)^2 dx = 1 \quad \text{(ض۵-۲)}$$

همچنین مجموعه‌ی توابع حقیقی $\{z_i(x)\}$ در بازه $[a, b]$ نسبت به تابع وزن $p(x)$ متعامد است اگر

$$\int_a^b p(x) z_i(x) z_j(x) dx = \begin{cases} = 0 \; for \; i \ne j \\ \ne 0 \; for \; i = j \end{cases} \quad \text{(ض۵-۳)}$$

تابع دلخواه $f(x)$ را می‌توان بر حسب هر مجموعه توابع یکا متعامد $\{z_i(x)\}$ بر روی بازه $[a, b]$ به صورت چند جمله‌ای زیر بیان کرد:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i z_i(x) \quad \text{(ض۵-۴)}$$

که به نام چند جمله‌ای تعمیم یافته‌ی فوریه تابع $f(x)$ نامیده می‌شود. ضرایب وزن w_i با استفاده از اصل تعامد توابع $\{z_i(x)\}$ در بازه‌ی $[a, b]$ مطابق رابطه ذیل محاسبه می‌شوند:

$$w_i = \frac{\int_a^b f(x) p(x) z_i(x) dx}{\int_a^b p(x) z_i^2 dx} \quad \text{(ض۵-۵)}$$

شایان ذکر است که اگرچه خاصیت تعامد برای استخراج تمامی ضرایب قابل استفاده است، ولی برای هم‌گرایی سری کافی نیست. به منظور تضمین هم‌گرایی، کامل بودن سری‌های تخمینی یکا متعامد لازم است. مجموعه‌ی توابع یکا متعامد $\{z_i(x)\}$ بر روی بازه‌ی $[a, b]$ مشروط به آنکه $g(x)$ مقادیر غیر صفر داشته باشد، کامل است چنانچه برای کلیه مقادیر i:

$$\int_a^b p(x) g(x) z_i(x) dx = 0 \quad \text{(ض۵-۶)}$$

تابع $g(x)$ با خاصیت فوق، تابع پوچ بر روی بازه ی $[a, b]$ نامیده می‌شود که در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$\int_a^b p(x) g^2(x) dx = 0 \quad \text{(ض۵-۷)}$$

با تعریف نماد $< >$ به عنوان ضرب داخلی در فضای توابع بصورت $< f, g >= \int_a^b f(x) g(x) dx$ و نرم $\|f\| = \sqrt{< f, f >}$، چنانچه $\|f\|$ موجود و معین باشد، فضای توابع مورد نظر هیلبرت[۲] نامیده می‌شود.

[۱] Orthonormal
[۲] Hilbert space

اگر $\{z_i(x)\}$ پایه‌ی یکا متعامد و $f(x)$ با $\|f\|$ معین باشد، چندجمله‌ای (ض۵-۴) همگراست به طوریکه:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \left|f(x)-\sum_{i=1}^{\infty} w_i z_i(x)\right|^2 dx = 0 \quad (\text{ض}۵\text{-}۸)$$

این به معنی امکان تقریب هر تابع $f(x)$ با دقت قابل ملاحظه توسط ترکیب خطی تعداد محدودی از توابع یکا متعامد $z_i(x)$ به شکل زیر است:

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{k} w_i z_i(x) \quad (\text{ض}۵\text{-}۹)$$

ویژگی فوق‌العاده این خاصیت، پارامتری سازی خطی تابع $f(x)$ بر حسب توابع پایه $\{z_i(x)\}$ با بردار ضرایب وزن $w=[w_1 \dots w_k]^T$ است.

$$f(x) \approx w^T z(x) \quad (\text{ض}۵\text{-}۱۰)$$

با کمی تغییر می‌توان نوشت:

$$f(t) = w^T z(x) \quad (\text{ض}۵\text{-}۱۱)$$

مشروط بر استفاده از تعداد کافی از توابع پایه، مسئله‌ی تخمین تابع $f(x)$ به تخمین بردار مجهول w تقلیل پیدا می کند.

در توسعه روش به تقریب ماتریس‌ها، با فرض آنکه کلیه آرایه‌های ماتریس با تعداد β تابع مشابه متعامد تقریب زده شوند، آنگاه ماتریس $M \in N^{p\times q}$ را می‌توان به شکل متداول زیر بیان کرد:

$$M = W^T Z \quad (\text{ض}۵\text{-}۱۲)$$

که در آن $M, Z \in N^{pq\beta\times p}$ مطابق روابط ذیل می‌باشند:

$$W^T = \begin{bmatrix} \begin{matrix} w_{11}^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_{21}^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_{p1}^T \end{matrix} & \Bigg| & \begin{matrix} \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{matrix} & \Bigg| & \begin{matrix} w_{1q}^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_{2q}^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_{pq}^T \end{matrix} \end{bmatrix} \quad (\text{ض}۵\text{-}۱۳)$$

$$Z^T = \begin{bmatrix} \begin{matrix} z_{11}^T & z_{21}^T & \cdots & z_{p1}^T \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \Bigg| & \begin{matrix} \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{matrix} & \Bigg| & \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{1q}^T & z_{2q}^T & \cdots & z_{pq}^T \end{matrix} \end{bmatrix} \quad (\text{ض}۵\text{-}۱۴)$$

آرایه‌های ماتریس، w_{ij} و z_{ij}، بردارهایی با ابعاد $\beta \times 1$ هستند. به سادگی می‌توان نشان داد:

$$M = W^T Z = \begin{bmatrix} w_{11}^T z_{11} & w_{12}^T z_{12} & \dots & w_{1q}^T z_{1q} \\ w_{21}^T z_{21} & w_{22}^T z_{22} & \dots & w_{2q}^T z_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{p1}^T z_{p1} & w_{p2}^T z_{p2} & \dots & w_{pq}^T z_{pq} \end{bmatrix} \quad (\text{ض}۵\text{-}۱۵)$$

ضمیمه ۶: اصلاح σ

در سیستم‌های کنترل واقعی، فرآیندها همواره در معرض پارامترهای نایقینی متغیر با زمان یا نایقینی‌های غیرپارامتری هستند. مطابق نتایج مطالعات منتشر شده، در صورت وجود نویز اندازه‌گیری و/یا دینامیک مدل نشده فرکانس بالا، در سیستم‌های کنترل تطبیقی، قابلیت افزایش تدریجی پارامترهای تطبیق افزایش ناگهانی خروجی سیستم در یک بازه محدود و واگرایی شدید، وجود دارد [۹]. در مقابله با این مشکل، برخی رویکردهای مبتنی بر تغییر قواعد تطبیق توسعه یافته‌اند. رویکرد «ناحیه مرده»[۱] که به نام روش اصلاح σ شناخته می‌شود، از جمله روش‌های شناخته شده است. این رویکرد بر مبنای غیرفعال‌سازی قاعده بروزرسانی پارامترها در ناحیه افزایش بی‌قاعده تابع لیاپانف استوار است. اگر چه در این روش همگرایی مجانبی خطا حتی پس از حذف خطای تقریب نیز حاصل نمی‌گردد، ولی عدم نیاز به اطلاعات محدوده خطا از مزایای برجسته این روش است. این رویکرد بر اساس اصلاح قاعده تطبیق بصورت کاهش مضربی از متغیر نایقینی از عبارت به روزرسانی است. تبیین روش از مدل غیرخطی عمومی آغاز می‌شود [۹]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= f(x,t) + g(x,t)u \end{aligned} \quad (\text{ض}۶\text{-}۱)$$

که $x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T \in \Omega$ که Ω مجموعه بسته‌ای بر روی R^n است. تابع $f(x,t)$ تابع نامعلوم با محدوده تغییرات نامعین و تابع $g(x,t)$ تابع نایقین با محدوده معلوم $0 < g_{min}(x,t) \le g(x,t) \le g_{max}(x,t)$ که g_{min} و g_{max} توابع معلوم در $x \in \Omega$ طی $t \in [t_0,\infty)$ فرض می‌شوند. با فرض $g_m = \sqrt{g_{min} g_{max}}$ به عنوان تابع نامی، می‌توان تابع g را بصورت $g = g_m(x,t)\Delta g(x,t)$، نشان داد که Δg نایقینی ضربی با خاصیت ذیل است:

$$0 < \delta_{min} \equiv \frac{g_{min}}{g_m} \le \Delta g \le \frac{g_{max}}{g_m} \equiv \delta_{max} \quad (\text{ض}۶\text{-}۲)$$

هدف طراحی کنترل کننده برای ردیابی مسیر مطلوب x_d توسط متغیرهای حالت سیستم یعنی x است. بردار خطای ردیابی بصورت $e = x - x_d = [x_1 - x_{1d}, x_2 - x_{2d}, \cdots, x_n - x_{nd}]^T$ تعریف و ورودی کنترل مطابق ذیل انتخاب می شود:

$$u = \frac{1}{g_m}\left(-\hat{f} + \nu - u_r\right) \quad (\text{ض}۶\text{-}۳)$$

که $\hat{f}$ مقدار تخمینی f و u_r عبارت مقاوم جهت مواجه با نایقینی g است. همچنین $\nu = \dot{x}_{nd} - \sum_{i=0}^{n-1} k_i e_{i+1}$ برای دست یابی به دینامیک مدار بسته مطلوب است. ضرایب k_i به گونه ای انتخاب می‌شوند که ماتریس A در (ض۶-۴) اکیدا هورویتز گردد.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -k_0 & -k_1 & \dots & -k_{n-1} \end{bmatrix} \in R^{n\times n} \quad (\text{ض}۶\text{-}۴)$$

با اعمال (ض۶-۳) در آخرین عبارت (ض۶-۱):

[۱] dead-zone

$$\dot{x}_n = f + \frac{g}{g_m}\left(-\hat{f} + \nu - u_r\right) = \left(f - \hat{f}\right) + (1 - \Delta g)\left(\hat{f} - \nu\right) + \nu - \Delta g u_r \quad \text{(ض۶-۵)}$$

و جایگذاری $\nu = \dot{x}_{nd} - \sum_{i=0}^{n-1} k_i e_{i+1}$:

$$\dot{e}_n - \sum_{i=0}^{n-1} k_i e_{i+1} = \left(f - \hat{f}\right) + (1 - \Delta g)\left(\hat{f} - \nu\right) - \Delta g u_r \quad \text{(ض۶-۶)}$$

و بازنویسی رابطه حاصل به صورت فضای حالت:

$$\dot{e} = Ae + b\left[\left(f - \hat{f}\right) + (1 - \Delta g)\left(\hat{f} - \nu\right) - \Delta g u_r\right] \quad \text{(ض۶-۷)}$$

که $b = [0,0,\cdots,1]^T \in R^n$ است.

با توجه به اینکه f نایقینی کلی است، می توان از روش های مرسوم کنترل تطبیقی نسبت به پایدارسازی حلقه بسته اقدام نمود. با استفاده از رویکرد تقریب توابع متعامد، برای تقریب f می‌توان نوشت:

$$f = w^T z + \varepsilon \quad \text{(ض۶-۸)}$$

$$\hat{f} = \hat{w}^T z$$

با جایگذاری در رابطه (ض۶-۷) :

$$\dot{e} = Ae + b\left[\tilde{w}^T z + \varepsilon + (1 - \Delta g)\left(\hat{f} - \nu\right) - \Delta g u_r\right] \quad \text{(ض۶-۹)}$$

که $\tilde{w} = w - \hat{w}$. برای تعیین قاعده تطبیق تابع لیاپانف بصورت زیر انتخاب می‌شود:

$$V = e^T P e + \tilde{w}^T \Gamma \tilde{w} \quad \text{(ض۶-۱۰)}$$

که در آن P و Γ ماتریس‌های مثبت معین بوده و P شرط پایداری لیاپانف یعنی $A^T P + PA = -Q$ که Q ماتریس مثبت معین است را اجابت می‌نماید.

با مشتق گیری از (ض۶-۱۰) در امتداد (ض۶-۹):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T\left(A^T P + PA\right)e + 2\left[(1 - \Delta g)\left(\hat{f} - \nu\right) - \Delta g u_r\right]b^T P e + 2\varepsilon b^T P e + 2\tilde{w}^T\left(z b^T P e - \Gamma \dot{\hat{w}}\right) \\ &\le -e^T Q e + 2(1 - \delta_{max})\left|\hat{f} - \nu\right|\left|b^T P e\right| - 2\delta_{min} u_r b^T P e + 2\varepsilon b^T P e + 2\tilde{w}^T\left(z b^T P e - \Gamma \dot{\hat{w}}\right) \end{aligned} \quad \text{(ض۶-۱۱)}$$

با انتخاب عبارت مقاوم‌ساز:

$$u_r = \frac{1 + \delta_{max}}{\delta_{min}}\left|\hat{f} - \nu\right| sgn\left(b^T P e\right) \quad \text{(ض۶-۱۲)}$$

و قاعده تطبیق با رویکرد اصلاح σ بصورت:

$$\dot{\hat{w}} = \Gamma^{-1}\left(z b^T P e - \sigma \hat{w}\right), \quad \sigma > 0 \quad \text{(ض۶-۱۳)}$$

و جایگذاری (ض۶-۱۲ و ۱۳) در (ض۶-۱۱):

$$\begin{aligned} \dot{V} &\le -e^T Q e + 2\varepsilon b^T P e + 2\sigma \tilde{w}^T \hat{w} \\ &= -e^T Q e + 2\varepsilon b^T P e + 2\sigma \tilde{w}^T (w - \tilde{w}) \\ &\le \underbrace{-\lambda_{min}(Q)\|e\|^2 + 2\lambda_{max}(P)|\varepsilon|\|e\|}_{(a)} + \underbrace{2\sigma\left[\left(\tilde{w}^T w - \|\tilde{w}\|^2\right)\right]}_{(b)} \end{aligned} \quad \text{(ض۶-۱۴)}$$

با بازنویسی عبارت (a) در رابطه (ض۶-۱۴) بصورت:

$$\begin{aligned} &-\lambda_{min}(Q)\|e\|^2 + 2\lambda_{max}(P)|\varepsilon|\|e\| \\ &= -\frac{1}{2}\left(\sqrt{\lambda_{min}(Q)}\|e\| - \frac{2\lambda_{max}(P)|\varepsilon|}{\sqrt{\lambda_{min}(Q)}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\lambda_{min}(Q)\|e\|^2 - \frac{4\lambda_{max}^2(P)}{\lambda_{min}(Q)}\varepsilon^2\right) \\ &\le -\frac{1}{2}\lambda_{min}(Q)\|e\|^2 + \frac{2\lambda_{max}^2(P)}{\lambda_{min}(Q)}\varepsilon^2 \end{aligned}$$

و بازنویسی عبارت (b) در رابطه (ض۶-۱۳) بصورت:

$$\begin{aligned} &\tilde{w}^T w - \|\tilde{w}\|^2 \\ &= -\frac{1}{2}\left(\|\tilde{w}\| - \|w\|\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\|\tilde{w}\|^2 - \|w\|^2\right) \\ &\le -\frac{1}{2}\left(\|\tilde{w}\|^2 - \|w\|^2\right) \end{aligned}$$

و جایگذاری در رابطه (ض۶-۱۳) و مرتب نمودن آن:

$$\dot{V} \le \underbrace{-\frac{1}{2}\lambda_{min}(Q)\|e\|^2 - \sigma\|\tilde{w}\|^2}_{(c)} + \sigma\|w\|^2 + \frac{2\lambda_{max}^2(P)}{\lambda_{min}(Q)}\varepsilon^2 \quad \text{(ض۶-۱۵)}$$

با هدف ارتباط عبارت (c) با رابطه لیاپانف بصورت:

$$V = e^T P e + \tilde{w}^T \Gamma \tilde{w} \quad \text{(ض۶-۱۶)}$$

$$\le \lambda_{max}(P)\|e\|^2 + \lambda_{max}(\Gamma)\|\tilde{w}\|^2$$

رابطه (ض۶-۱۵) را بصورت زیر بازنویسی می شود:

$$\dot{V} \le -\alpha V + \left[\alpha\lambda_{max}(P) - \tfrac{1}{2}\lambda_{min}(Q)\right]\|e\|^2 + \left[\alpha\lambda_{max}(\Gamma) - \sigma\right]\|\tilde{w}\|^2 + \sigma\|w\|^2 + \frac{2\lambda_{max}^2(P)}{\lambda_{min}(Q)}\varepsilon^2 \quad \text{(ض۶-۱۷)}$$

با انتخاب α با مطابق

$$\alpha \le min\left[\frac{\lambda_{min}(Q)}{2\lambda_{max}(P)}, \frac{\sigma}{\lambda_{max}(\Gamma)}\right] \quad \text{(ض۶-۱۸)}$$

و جایگذاری در (ض۶-۱۷):

$$\dot{V} \le -\alpha V + \sigma\|\tilde{w}\|^2 + \sigma\|w\|^2 + \frac{2\lambda_{max}^2(P)}{\lambda_{min}(Q)}\varepsilon^2 \quad \text{(ض۶-۱۹)}$$

که $\dot{V} < 0$ مادامیکه:

$$\begin{aligned} &(e, \widehat{W}) \in E \\ &\equiv \left\{(e, \widehat{W}) \middle| V > \frac{1}{\alpha}\left[\sigma\|\tilde{w}\|^2 + \frac{2\lambda_{max}^2(P)}{\lambda_{min}(Q)} \sup_{\tau \ge t_0} \varepsilon^2(\tau)\right]\right\} \end{aligned} \quad \text{(ض۶-۲۰)}$$

بدین ترتیب، تقریب نایقینی‌ها با استفاده از توابع متعامد، منجر به کراندار شدن نهایی همزمان زوج بردار $(e, \widehat{W})$ فارغ از خطای تقریب ε و دست‌یابی به شرط پایداری لیاپانف می گردد. قابل ذکر است که اندازه مجموعه E با انتخاب مقادیر مناسب α، σ ، P و Q قابل تنظیم بوده و ردیابی دقیق ورودی با شرط عدم اشباع کنترل کننده، قابل دست‌یابی است.

مجله کنترل
ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752
جلد ۱۲، شماره ۱، بهار ۱۳۹۷، صفحه ۸۰-۶۹

پایدارسازی وسیله ابرحفره‌ساز در مود عمق با استفاده از روش تنظیم‌کننده خطی مجذوری (LQR) و تخمینگرهای EKF و UKF

طاهره جهانپور [۱]، سید محمد بزرگ [۲]

[۱] فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک ، دانشگاه یزد ، talisky1369@yahoo.com.
۲ دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک ، دانشگاه یزد ، bozorg@yazd.ac.ir.

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۶/۵/۲۳، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۶/۶/۱۴)

چکیده: این مقاله به دو موضوع پایدارسازی وسایل ابر حفره ساز در مود عمق و تخمین متغیرهای حالت برای اجرای کنترل کننده طراحی شده می‌پردازد. ابتدا با بهره گیری از تئوری خطی سازی با پسخور، مدل غیرخطی، خطی سازی و سپس برای پایدار کردن مدل کنترل کننده‌ایی بر مبنای روش LQR طراحی شده است. این روش نیاز به پسخور همه متغیرهای حالت دارد، در حالی که در عمل، اندازه گیری همه متغیرهای حالت ممکن نیست و لازمست داده های حسگرهای موجود با خروجی های مدل سیستم ترکیب کرد تا به تخمینی قابل قبول از مقدار متغیرهای حالت سیستم دست یافت. در این مقاله با ترکیب خروجی‌های مدل و داده های حسگرها با استفاده از فیلترهای EKF و UKF به تخمین متغیرهای حالت وسیله و استفاده از آنها در کنترل بهینه حرکت وسیله در مود عمق پرداخته شده است. در شبیه سازی های انجام شده با مدل غیرخطی سیستم نشان داده شده است که دو فیلتر توانایی تخمین مناسب متغیرهای حالت به منظور پایدارسازی سیستم و رد اغتشاشات را دارد و هر یک از فیلترها در تخمین برخی از متغیرها بهتر عمل می‌کنند. در شبیه سازی عملکرد کنترل کننده های طراحی شده، نکات عملی مانند اشباع شدن عمل کننده ها و نحوه جبران آنها در نظر گرفته شده وتوانایی کنترل کننده در پایدارسازی وسیله نشان داده شده است.

کلمات کلیدی: روش تنظیم‌کننده خطی مجذوری، وسایل ابرحفره ساز، UKF، EKF.

Stabilization of a Supercavitating Vehicle in Depth Mode using Linear Quadratic Regulator Method and EKF and UKF Estimators

Mohammad Bozorg, Tahere Jahanpour

Abstract: In this paper, two main subjects are dealt with: stabilization of supercavitating vehicles in depth mode and estimating the state variables of the vehicle in order to control the vehicle in this mode. Using the feedback linearization method, the model of the system is linearized and a linear quadratic regulator is designed for the system to stabilize it. This method needs to feedback all states of the system, while measuring all the states is practically infeasible. Then, it is needed to estimate some of the states using the model of the system and the sensor measurements. This is performed here using two well-known filters of EKF and UKF. Through simulations, it is shown that both filters can estimate the states of the system in the depth mode, stabilize the vehicle in this mode and reject the disturbances. It is observed that each filter can estimate some of the states more accurately. In simulations, the performances of the designed controllers are examined, practical issues like actuator saturation are taken into account and the ability of the controllers to stabilize the vehicle is demonstrated.

Keywords: Linear Quadratic Regulator, Supercavitating Vehicle, EKF, UKF.

۱- مقدمه

وقتی وسیله زیرآبی داخل آب حرکت می‌کند لایه‌ای از آب پیرامون بدنه به آن می‌چسبد و با لزجت خود نیروی اصطکاکی را ایجاد می‌کند که عامل کاهش سرعت در وسایل زیرآبی محسوب می‌شود. ابرحفره‌سازها[۱] با ایجاد حفره‌ی گازی توسط حفره‌ساز[۲] در پیرامون بدنه با کاهش نیروی اصطکاکی سرعت را می‌توانند تا m/s ۸۰ ارتقا دهند. در این وسایل تماس بیشتر قسمت‌های بدنه بجز حفره ساز در دماغه و بخشی از قسمت‌های خارجی بالک‌ها با محیط آبی قطع می‌شود و این دلیل کاهش نیروی اصطکاکی است. زمانی که قسمت انتهایی این وسایل از ناحیه حفره خارج می‌شود از طرف آب نیروی بزرگ بازگرداننده‌ای تحت عنوان نیروی صفحه‌ای[۳] به آن وارد می‌شود. این وسایل نسبت به وسایل زیرآبی معمولی به علت ماهیت غیرخطی نیروهای حفره‌ساز، بالک‌ها و صفحه‌ای چالش‌های بیشتری را در دینامیک و کنترل مطرح می‌کنند. بسته به شکل حفره‌ساز، ابعاد و میزان غوطه‌وری بالک‌ها، بدنه می‌تواند به صورت ذاتی پایدار یا ناپایدار باشد. حتی اگر بدنه پایدار باشد زمانی که بدنه در تماس با آب است به علت وجود نیروی صفحه‌ای هیچگونه ضمانتی برای پایداری وسیله وجود ندارد. مدل دینامیکی این وسایل در [۱]، [۲]، [۳] و [۴] مطالعه شده است. در [۳] داده های تجربی گسترده ای برای توصیف نیروهای هیدرودینامیکی مرتبط با اشکال مختلف وسایل ابر حفره‌ساز ارائه شده است که ضرایب لیفت و درگ بصورت مقادیری در جدول فراهم شده‌اند. مدل های دیگر لیفت و درگ در [۱] وجود دارند. استخراج روابط حاکم بر حرکت در مود عمق[۴] در [۵] صورت گرفته است. همچنین کنترل کننده‌ی پسخوری با بهره گیری از حفره ساز و بالک ها به عنوان ورودی‌های کنترلی طراحی و مدل پایدار شده است. در [۶] برای هدایت و کنترل وسیله از روش برنامه‌ی پویا[۵] برای طرح ریزی مسیر استفاده شده است. در [۷] و [۸] قانون کلید زدن[۶] بین کنترل‌کننده‌های پسخور خطی‌ساز برای مدل‌های با نیروی صفحه‌ای و بدون این نیرو طراحی و مدل پایدار شده است. تحلیل دو تابعی با ضابطه‌ی عدد حفره در [۹]، [۱۰] و [۱۱] بررسی شده‌اند. در [۱۲] کنترل کننده های برگشت به عقب[۷] و دو کنترل کننده که پایداری مطلق[۸] را با در نظر گرفتن نیروی صفحه‌ای به عنوان قطاع محدود شده‌ی نامعینی‌ها فراهم می‌کنند طراحی شده است. در [۱۳] کنترل کننده مقاوم با درنظر گرفتن تأخیر زمانی در مدل، طراحی و کنترل کننده در برابر نامعینی های پارامترهای مدل مقاوم شده است. در [۱۴] کنترل‌کننده‌های LQR[۹] و برگشت به عقب پیشنهاد شده با فیلترهای انتگرالی طراحی و مقاوم بودن این دو کنترل‌کننده در برابر نامعینی پارامترها مقایسه شده است. در [۱۵] ضریب کارایی بالک ها نسبت به حفره ساز ثابت در نظر گرفته نشده است و یک قانون تطبیقی[۱۰] برای تخمین این پارامتر طراحی شده است. در [۱۶] از روش برگشت به عقب برای پایدارسازی یک وسیله ابرحفره ساز استفاده شده است. در [۱۷] سیستم به دو حلقه‌ی داخلی سریع و خارجی کند در زمینه‌ی پاسخ تقسیم بندی شده است و سپس از پسخور کنترلی در هریک از حلقه های مجزا شده برای پایدارسازی مدهای فرکانسی بالا و پایین استفاده شده است.

در [۱۸] کنترل‌کننده های مود لغزشی[۱۱] و LPV-H_∞ با هدف مقاوم بودن کنترل‌کننده، طراحی شده است. همچنین با توجه به اینکه سرعت جانبی به صورت مستقیم قابل مشاهده نیست از مشاهده‌گری تحت عنوان بهره سریع[۱۲] برای تخمین آن استفاده شده است که در طراحی آن سایر متغیرهای اندازه‌گیری شده دقیق فرض شده اند.

در پژوهش هایی که در بالا به آنها اشاره شده است، فرض شده است که تمامی متغیرهای حالت بصورت دقیق در دسترس هستند و یا اینکه برخی از آنها بصورت دقیق قابل اندازه گیری هستند و از مشاهده گرهایی با مدلی ساده شده برای تخمین سایر متغیرها استفاده شده است. این کار باعث عدم مقاوم بودن تخمینگر در برابر نامعینی های مدل دینامیکی و نویز انداه گیری شده و عدم کارایی کنترل کننده برای اجرا روی سیستم واقعی را به همراه دارد.

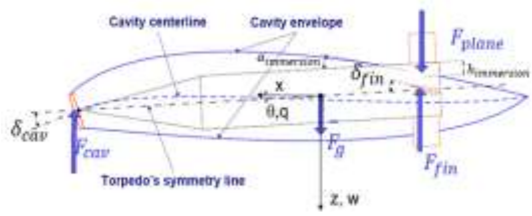
در این مقاله، ابتدا مدل غیرخطی با روش خطی‌سازی با پسخور، خطی و سپس از کنترل‌کننده LQR برای پایدارسازی حرکت وسیله در مود عمق استفاده شده است. برای تولید ورودی های کنترلی(زاویه چرخش حفره ساز و بالک ها) به منظور پایدارسازی حرکت وسیله در مود عمق، نیاز به پسخور همه متغیرهای حالت حرکتی وسیله شامل عمق، زاویه‌ی چرخش، سرعت جانبی و سرعت زاویه‌ای است، در حالی که همیشه اندازه‌گیری همه متغیرهای حالت ممکن نیست. از طرفی، با توجه به اغتشاشات و نامعینی‌ها در دینامیک وسیله نمی‌توان به معادلات دینامیکی استخراج شده بسنده کرد و متغیرهای حالت را با حل عددی معادلات دیفرانسیل در زمان جلو برد، زیرا این کار باعث انباشتگی خطاهای متغیرها می‌شود. از طرفی، در مود حرکتی عمق، در عمل اندازه‌گیری عمق، زاویه چرخش و سرعت زاویه ای ممکن است و اندازه‌گیری سرعت خطی جانبی وسیله، به دلیل

[۱] Super cavitating
[۲] Cavitator
[۳] Planning force
[۴] Depth mode
[۵] Dynamic Planning
[۶] Switching
[۷] Back stepping
[۸] Absolute stability
[۹] Linear Quadratic Regulator
[۱۰] Adaptive law
[۱۱] Sliding mode
[۱۲] High gain observer

هزینه های این حسگرها و نیز لزوم استفاده از سونار که مستلزم ارسال سیگنال صوتی و آشکارشدن است، در بسیاری از کاربردها ممکن نیست. از این رو، لازمست داده های حسگرهای موجود را با خروجی های مدل سیستم ترکیب کرد تا به تخمینی قابل قبول از مقدار متغیرهای حالت سیستم دست یافت. از طرفی اندازه‌گیری های حسگرها نیز خود دارای نویز هستند. از این رو، در این مقاله با ترکیب خروجی‌های مدل و داده های حسگرها با استفاده از فیلترهای EKF[۱۳] و UKF[۱۴] به تخمین متغیرهای حالت وسیله و استفاده از آنها در کنترل بهینه حرکت وسیله در مود عمق پرداخته شده است. نکات عملی مانند اشباع شدن عمل کننده ها و نحوه جبران آنها در نظر گرفته شده است و عملکرد سیستم طراحی شده روی مدل غیرخطی وسیله مورد بررسی قرار گرفته و توانایی کنترل کننده در پایدارسازی و نیز رد اغتشاشات بررسی شده است. در این مقاله، پس از این مقدمه، در بخش ۲ به بیان معادلات دینامیکی و سینماتیکی حاکم بر حرکت پرداخته شده است. در بخش ۳، طراحی کنترل کننده‌ی LQR با استفاده از خطی‌سازی با پسخور و در نظرگرفتن جبران کننده برای کاهش اثر محدودیت عملگرهای ورودی ها انجام شده است. در بخش۴، فیلترهای مورد استفاده و ملاک مقایسه کارایی فیلترها معرفی شده‌اند. در بخش ۵، کارایی فیلترها و کنترل کننده طراحی شده در پایدارسازی سیستم واقعی، بررسی شده است.

۲- معادلات حاکم بر حرکت وسیله در مود عمق

معادلات دینامیکی وسیله ابر حفره ساز در مود عمق دردستگاهی که مرکز آن در مرکز فشار حفره‌ساز قرارگرفته است، بیان شده است. به گونه ای که محور x در راستای محور تقارن وسیله و محور z به سمت کف دریاست. نیروهای وارد در راستای z، ورودی های کنترلی و و متغیرهای حالت θ ،z ،w و q است. بدنه از دو قسمت مخروطی و استوانه ای که طول قسمت استوانه‌ای آن دو برابر بخش مخروطی است تشکیل شده است. معادلات حاکم بر حرکت یک وسیله نمونه از [۵] استفاده شده‌اند.



شکل (۱): نیروها، ورودی های کنترلی و متغیرهای حالت وسیله‌ی مدل شده [۸]

با فرض ثابت بودن سرعت رو به جلوی وسیله(V) و جرم آن، معادلات دینامیکی وسیله در صفحه‌ی طولی بصورت زیر هستند:

$$F_{bz} = m_v(\dot{w} - x_g\dot{q} - qV) \qquad (۱)$$

$$I_{yy}\dot{q} = M + m_v x_g(\dot{w} - qV) \qquad (۲)$$

که در معادله نیرو (۱)، عبارت و در معادله گشتاور(۲)، عبارت ناشی از قرار گرفتن مبدأ دستگاه x-z درمرکز فشار حفره‌ساز است. روابط (۱) و (۲) را می‌توان بصورت ماتریسی زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{bmatrix} m_v & -m_v x_g \\ -m_v x_g & I_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = qV \begin{bmatrix} m_v \\ -m_v x_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{bz} \\ M \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

معادلات حرکت با استفاده از معادلات سینماتیکی زیر برای عمق(z) و زاویه چرخش (θ) تکمیل میشوند:

$$\dot{z} = w\ \cos\theta - V\sin\theta \qquad (۴)$$

$$\dot{\theta} = q \qquad (۵)$$

در رابطه (۳) جرم بدنه (m_v)، ممان اینرسی بدنه (I_{yy}) و فاصله مرکز جرم بدنه تا حفره ساز(x_g)، بصورت زیر هستند:

$$m_v = \frac{7}{9}(m\rho_w\pi)R^2L \qquad (۶)$$

$$I_{yy} = I_{yy}(con) + I_{yy}(cy) \qquad (۷)$$

$$= \frac{11}{60}(m\rho_w\pi)R^4L + \frac{133}{405}\ (m\rho_w\pi)R^2L^3$$

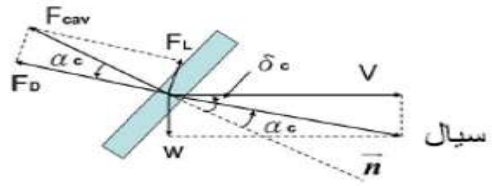
$$x_g = \frac{-17}{28}L \qquad (۸)$$

که در آن چگالی آب، m نسبت چگالی بدنه به آب، R شعاع و L طول بدنه می‌باشند.

۲-۱ نیرو و گشتاور حفره‌ساز

حفره‌ساز به صورت دیسکی با ضریب درگ در نظر گرفته می‌شود که در آن، ضریب درگ حفره ساز در زاویه حمله صفر و σ عدد حفره[۱۵] است. شکل (۲) نشان دهنده‌ی نیروهای لیفت ودرگ وارد بر حفره ساز است که بصورت زیر هستند:

[۱۳] Extended Kalman Filter
[۱۴] Unscented Kalman Filter
[۱۵] Cavity number



شکل (۲): حفره ساز و نیروهای وارد برآن [۱۸]

$$F_l = \frac{1}{2}\rho V^2 C_x \pi {R_n}^2 \cos\alpha_c \sin\alpha_c \qquad (۹)$$

$$F_D = \frac{1}{2}\rho V^2 C_x \pi {R_n}^2 \cos\alpha_c \cos\alpha_c \qquad (۱۰)$$

که در آن، زاویه حمله است و مؤلفه این نیرو در راستای z بصورت

$$\begin{aligned} {F_{cav}}^z &= F_l\cos(\alpha_c-\delta_c) - F_D \sin(\alpha_c-\delta_c) \\ &= \frac{1}{2}\rho V^2 C_x \pi {R_n}^2 \cos\alpha_c \sin\delta_c \\ &\approx C_{cav}\,\delta_c \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

و $C_{cav} = \frac{1}{2}\rho_w V^2 C_x \pi {R_n}^2$ و R_n شعاع حفره ساز است. با توجه به قرار گیری دستگاه در مرکز فشار حفره ساز $M_{cav} = 0$ صفر است.

۲-۲ نیرو وگشتاور وزن

نیروی وزن و گشتاور آن حول مرکز مختصات بصورت زیر مدل شده است:

$${F_{gra}}^z = m_v g\ \cos\theta \qquad (۱۲)$$

$$M_{gra} = m_v g\ \cos\theta\,(-x_g) \qquad (۱۳)$$

۳-۲ نیرو و گشتاور بالک‌ها:

برای نیروی بالک ها نیز مدل خطی بصورت زیر مدل شده است:

$${F_{fin}}^z = -n\, C_{cav}\, \alpha_f \qquad (۱۴)$$

که در آن n، ضریب کارایی بالک ها نسبت به حفره ساز و α_f زاویه حمله بالک ها به صورت زیر است:

$$\alpha_f = \tan^{-1}\left(\frac{w}{V} + \frac{qL}{V}\right) + \delta_f \qquad (۱۵)$$

که در آن w سرعت جانبی بدنه است. گشتاور متناسب با این نیرو بصورت زیر است:

$$M_{fin} = {F_{fin}}^z L \qquad (۱۶)$$

۴-۲ نیروهای صفحه ساز

علت ایجاد این نیرو بزرگتر بودن ابعاد بدنه از ناحیه ایجاد شده توسط حفره‌ساز است، که باعث تماس و عکس‌العمل بین بخش انتهای بدنه و سیال می‌شود. برای این نیرو از مدل [۱۹] بصورت زیر استفاده شده است:

$$\begin{aligned} &{F_{plane}}^z \\ &= -\pi\,\rho\,{R_c}^2\,V^2\ \sin\alpha_{imm}\ \cos\alpha_{imm} \\ &\left(\frac{1+h_{imm}}{1+2h_{imm}}\right)\left[1-\left(\frac{R'}{R'+h_{imm}}\right)^2\right] \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

که در (۱۷)، R_c شعاع حفره و $\dot{R}_c$ نرخ کاهش شعاع حفره نسبت به فاصله از حفره‌ساز در محل نیروی صفحه‌ای است که با روابط زیر بدست می‌آیند:

$$R_c = R_n\,\left[0.82\,\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)\right]^{1/2} k_2 \qquad (۱۸)$$

$$\begin{aligned} &\dot{R}_c \\ &= \frac{\frac{-20}{17}\,\left(0.82\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)^{1/2} V\,\left(1-\frac{4.5\sigma}{1+\sigma}\right){k_1}^{23/17}}{k_2\left(\frac{1.92}{\sigma}-3\right)} \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

که در روابط (۱۹) و (۲۰)، و (۲) بصورت زیر هستند:

$$k_1 = \frac{L}{R_n}\left(\frac{1.92}{\sigma}-3\right)^{-1} - 1 \qquad (۲۰)$$

$$k_2 = \left[1-\left(1-\frac{4.5\sigma}{1+\sigma}\right){k_1}^{40/17}\right]^{1/2} \qquad (۲۱)$$

همچنین در رابطه (۱۷)، فرورفتگی نرمال شده که مربوط به عمق نفوذ بدنه در آب است و زاویه حمله که مربوط به زاویه‌ای است که سطح بدنه با دیواره حفره می‌سازد (شکل (۱)) واز روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} &h_{imm} \\ &= \begin{cases} 0, & R' > \left(\frac{L}{R}\right)\left|\frac{w}{V}\right| \\ \left(\frac{L}{R}\right)\left|\frac{w}{V}\right| - R', & \text{در این غیر صورت} \end{cases} \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

$$\begin{aligned} &\alpha_{imm} \\ &= \begin{cases} \tan^{-1}\frac{w}{V} - \tan^{-1}\frac{\dot{R}_c}{V} & ,\frac{w}{V} > 0 \\ \tan^{-1}\frac{w}{V} \pm \tan^{-1}\frac{\dot{R}_c}{V}, & \text{غیر اینصورت} \end{cases} \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

در رابطه (۲۲)، $R' = \frac{R_c - R}{R}$ اختلاف نرمال شده بین شعاع بدنه و شعاع حفره در محل نیروی صفحه‌ای است. با معلوم بودن این نیرو گشتاور متناسب با آن بصورت زیر است:

$$M_{plane} = {F_{plane}}^z\,L \qquad (۲۴)$$

بعد از جایگزاری نیروها و گشتاورها در رابطه (۳) و با فرض زوایای کوچک برای توابع مثلثاتی و کوچک بودن نسبت w به V، شکل نهایی معادلات حرکت به صورت زیر است:

$$\dot z = w - V\theta$$

$$\dot\theta = q$$

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{9} & \frac{17}{36}L \\ \frac{17}{36}L & \frac{11}{60}R^2 + \frac{133}{405}L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot w \\ \dot q\end{bmatrix} = CV\begin{bmatrix} -\frac{n}{mL} & -\frac{n}{m} \\ -\frac{n}{m} & -\frac{nL}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w \\ q\end{bmatrix} + V\begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{9} \\ 0 & \frac{17}{36}L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w \\ q\end{bmatrix} + CV^2\begin{bmatrix} -\frac{n}{mL} & \frac{1}{mL} \\ \frac{-n}{m} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_f \\ \delta_c\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{7}{9} \\ \frac{17}{36}\end{bmatrix} g + \hat F_{plane} \tag{۲۵}$$

که در رابطه (۲۵)، $C = 0.5C_{X0}(1+\sigma)(\frac{R_n}{R})^2$ و $\hat F_{plane} = \frac{F_{plane}{}^z}{\pi\rho_w m L R^2}$ نرمال شده نیروی صفحه‌ای نسبت به جرم بدنه و δ_f ، δ_c به ترتیب زاویه بالک‌ها و زاویه حفره‌ساز به عنوان ورودی‌های سیستم هستند.

۳- خطی ساز با پسخور خطی ساز[۱۶]

معادلات (۲۶) را می‌توان بصورت $\dot x = f(x) + Bu$ باز نویسی کرد که توابع $f(x)$ بصورت زیر هستند:

$$f_1 = x_3 - Vx_4$$

$$f_2 = x_4$$

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = E_I{}^{-1}\left\{\left(CV\begin{bmatrix} -\frac{n}{mL} & -\frac{n}{m} \\ -\frac{n}{m} & -\frac{nL}{m}\end{bmatrix} + V\begin{bmatrix} 0 & 7/9 \\ 0 & 17L/36\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_3 \\ x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/9 \\ 17/36\end{bmatrix} g + F_{plane}{}^{\wedge}\begin{bmatrix}1 \\ L\end{bmatrix}\right\} \tag{۲۶}$$

در رابطه (۲۶)، $[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T = [z\ \theta\ w\ q]^T$ و E_I و B به صورت زیر هستند:

$$E_I = \begin{bmatrix} \frac{7}{9} & \frac{17}{36}L \\ \frac{17}{36}L & \frac{11}{60}R^2 + \frac{133}{405}L^2 \end{bmatrix} \tag{۲۷}$$

$$B_I = E_I{}^{-1}CV^2\begin{bmatrix} -\frac{n}{mL} & \frac{1}{mL} \\ \frac{-n}{m} & 0\end{bmatrix} \tag{۲۸}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{B_I}\end{bmatrix} \tag{۲۹}$$

عمق (z) و زاویه چرخش (θ) متغیرهای هستند که باید کنترل شوند پس خطی سازی باید نسبت به آنها صورت گیرد. باید مرتبه ای از مشتقات z و θ را یافت که حد اقل تحت تأثیر یکی از ورودی‌ها است. در مشتقات اول z و θ ضرایب ورودی‌ها صفر است. برای $\ddot z$ با توجه به اینکه $l_f h_1 = [0\quad -V\quad 1\quad 0]$ است ضریب زاویه بالک ها بصورت زیر است:

$$l_{g_1} l_f h_1 = \frac{\partial}{\partial x}(l_f h_1) g_1 = B_I(1,1) \tag{۳۰}$$

و ضریب زاویه حفره‌ساز نیز بصورت زیر است:

$$l_{g_2} l_f h_1 = \frac{\partial}{\partial x}(l_f h_1) g_2 = B_I(1,2) \tag{۳۱}$$

برای $\ddot\theta$ با توجه به اینکه $l_f h_2(x) = x_4$ است ضریب زاویه بالک ها و حفره‌ساز بصورت زیر است:

$$l_{g_1} l_f h_2 = \frac{\partial}{\partial x}(l_f h_2) g_1 = B_I(2,1) \tag{۳۲}$$

$$l_{g_2} l_f h_2 = \frac{\partial}{\partial x}(l_f h_2) g_2 = B_I(2,2) \tag{۳۳}$$

با توجه به غیر صفر بودن درایه های ماتریس B_I و معکوس پذیری آن می-توان ورودی‌های خطی‌ساز را بصورت زیر تعریف کرد:

$$u = -B_I{}^{-1}\begin{bmatrix} f_3 - Vf_2 \\ f_4 \end{bmatrix} + B_I{}^{-1}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2\end{bmatrix} \tag{۳۴}$$

در رابطه (۳۵)، با اعمال این ورودی مدل‌های خطی شده $\ddot z$ و $\ddot\theta$ بصورت زیر هستند:

$$\ddot z = v_1 \tag{۳۵}$$

$$\ddot\theta = v_2 \tag{۳۶}$$

با اعمال این ورودی مودهای جابجای و چرخش از یکدیگر جدا می‌شوند. با تعریف $X_1 = [z\ \dot z]^T$ و $X_2 = [\theta\ \dot\theta]^T$ می‌توان مدل‌های (۳۵) و (۳۶) را بصورت زیر بازنویسی کرد:

[۱۶] Feedback linearization

$$\dot{X}1 = A_1X_1 + B_1v_1 \quad (۳۷)$$

$$\dot{X}_2 = A_2X_2 + B_2v_2 \quad (۳۸)$$

که در آن A_1 و A_2 و B_1 و B_2 بصورت زیر هستند:

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (۳۹)$$

۳-۱ طراحی کنترل‌کننده LQR

برای مدل خطی $\dot{x} = Ax + Bu$، ورودی بهینه‌ی پایدارساز که تابع هزینه $J=\int_0^\infty [x(t)^TQ\,x(t) + u(t)^TR\,u(t)]dt$ را مینیمم می‌کند بصورت $u^* = -R^{-1}\,B^T\,P\,x(t)$ است. با انتخاب Q, R به ترتیب ماتریس وزن دهی های ورودی‌ها و متغیرهای حالت، با حل معادلات ریکاتی زیر، ماتریس P بدست می‌آید:

$$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0 \quad (۴۰)$$

معادلات ریکاتی برای مدل‌های خطی شده (۳۷) و (۳۸) بصورت زیر هستند:

$$A_1{}^TP_1 + P_1A_1 - P_1B_1R_1{}^{-1}B_1{}^TP_1 + Q_1 = 0 \quad (۴۱)$$

$$A_2{}^TP_2 + P_2A_2 - P_2B_2R_2{}^{-1}B_2{}^TP_2 + Q_2 = 0 \quad (۴۲)$$

ورودی های بهینه پایدارساز مدل‌های (۳۸) و (۳۹) نیز بصورت زیر هستند:

$$v_1 = -R_1{}^{-1}B_1{}^TP_1X_1 = K_1X_1(t) \quad (۴۳)$$

$$v_2 = -R_2{}^{-1}B_2{}^TP_2X_2 = K_2X_2(t) \quad (۴۴)$$

۳-۲ جبران کننده‌ی اشباع شدگی عملگرها

با توجه به اینکه در استخراج معادلات حرکت از تقریب کوچک بودن زاویه ها استفاده شده است. رابطه (۲۵) تنها در صورتی که تغییر زوایای بالک ها و حفره ساز بزرگ نباشند، معتبر است. از این رو ورودی های سیستم دارای محدودیت فیزیکی بین ۳۰ ± درجه هستند. با اعمال این قیود به دلیل رخ دادن اشباع شدگی عملگرها برای کاهش اثر اشباع شدگی ورودی‌ها روی دینامیک کنترل‌شده از جبران‌کننده [۱۵] استفاده شده است. با توجه به معادلات حرکت (۲۷)، δ_f و δ_c نقش مشابه‌ای در کنترل w, q دارند. بنابراین، اگر یکی از عملگرها چه δ_f و یا δ_cبه علت محدودیت فیزیکی به حالت اشباع برسد در حالی که دیگری هنوز فضای کافی تا قبل از اشباع دارد، این امکان پذیر است که کنترل را بین ورودی-های δ_c و δ_f بگونه‌ای، که بتوان به عملکرد یکسانی بدون تجاوز از محدودیت های فیزیکی رسید، تقسیم کرد.

فرض کنید، که $\dot{w}_d$ و $\dot{q}_d$ به ترتیب، مقادیر $\dot{w}$ و $\dot{q}$ در حالتی که ورودی ها بدون محدویت های فیزیکی هستند، بدست آمده‌اند باشند. زمانی که یکی از ورودی‌ها یا δ_fو یا ، δ_cبه حالت اشباع برسد، می‌توان ورودی‌ها را براساس مینیمم کردن پارامتر D که به صورت زیر تعریف می‌شود به روزرسانی کرد:

$$D = (\dot{w}_d - \dot{w})^2 + (\dot{q}_d - \dot{q})^2 \quad (۴۵)$$

۴-مشاهده سرعت جانبی و تخمین متغیرهای اندازه‌گیری شده

در کنترل وسیله حفره ساز، عمق وسیله با اندازه‌گیری فشار آب دریا، به صورت مستقیم قابل محاسبه است. برای اندازه گیری زاویای چرخش، از ژیروسکوپ استفاده می‌شود. اما برای اندازه گیری سرعت جانبی، نیاز به حسگر سونار است که علاوه برپرهزینه بودن، مستلزم ارسال امواج صوتی است که در برخی از کاربردها مطلوب نیست، زیرا این امواج قابل ردیابی هستند. از آنجا که برای تولید ورودی ها (۳۴) لازمست همه تمام متغیرهای حالت اندازه گیری یا تخمین زده شوند و نیز با توجه به وجود نویزهای فرآیند و اندازه‌گیری در سیستم های واقعی، از فیلترهای EKF [۲۰] و UKF [۲۱] برای تخمین این متغیرها استفاده شده است. این دو فیلتر با ترکیب مدل ریاضی (۲۵) و مشاهدات حسگرها با هدف کاهش نویز اندازه‌گیری در داده‌های حسگرها و تخمین سرعت جانبی بکار گرفته شده اند. در هر دو فیلتر نویزها گوسی فرض شده‌اند، اما در EKF از خطی‌سازی و در UKF از کمترین مجموعه نقاط تحت عنوان نقاط سیگما برای بدست آوردن متوسط و کواریانس توزیع گوسی، استفاده شده است. برای مقایسه عملکرد فیلترها در تخمین متغیرهای سیستم از پارامتر جذر متوسط مربعات خطا، استفاده شده است:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x - \hat{x})^2}{n}} \quad (۴۶)$$

در این رابطه، x متغیرهای واقعی، ، $\hat{x}$ متغیرهای تخمین زده شده و n تعداد نمونه‌ها می‌باشند.

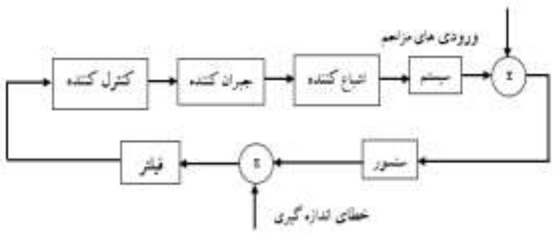
۵-شبیه سازی

در این بخش به دنبال بررسی نحوه‌ی عملکرد فیلترها در تخمین و مزیت حضور آنها در کنترل مدل هستیم. از شبیه سازی کامپیوتری برای ساخت مدل های قطعی و تصادفی و اندازه‌گیری حسگرها استفاده شده است. برای شبیه سازی از پارامترهای سیستم نمونه مرجع [۵] با مقادیر ارائه شده در جدول (۱) استفاده شده است.

جدول(۱): مقادیر عددی پارامترهای یک وسیله ابرحفره ساز نمونه [۵]

پارامتر	توضیح	مقدار و واحد
g	شتاب گرانشی	$9.81\,m/s^2$
m	نسبت چگالی بدنه به چگالی آب	2
n	کارایی بالک نسبت به حفره‌ساز	0.5
R_n	شعاع حفره‌ساز	$0.0191m$
R	شعاع بدنه	$0.0508m$
L	طول کل وسیله	$1.8m$
V	سرعت پیشروندگی وسیله	$75\,m/s$
σ	عدد حفره	0.03
C_{x0}	ضریب درگ حفره‌ساز در زاویه حمله صفر	0.82

در شبیه سازی مدل تصادفی، ورودی‌های اغتشاشی نیرو وگشتاور هستند که باعث تولید اغتشاشاتی بصورت شتاب خطی و شتاب زاویه ای روی مدل می‌شوند. وسایل اندازه گیری نیز دارای خطا هستند و هر ۱۰ میلی ثانیه در دسترس هستند. با استفاده از متغیرهای تخمین زده شده در هر پله زمانی توسط فیلتر و گرفتن پسخور از آن، ورودی های کنترلی براساس رابطه (۳۵) تولید و به سیستم اعمال شده‌است. در هر پله زمانی، ورودی‌ها ثابت فرض می‌شوند و در شبیه‌سازی از جبران‌کننده اشباع عملگر ها (تشریح شده در قسمت ۳-۲) نیز استفاده شده است. شکل (۳) نحوه‌ی مدل کنترل شده را با پسخور از فیلتر نشان می‌دهد.



شکل(۳): دیاگرام بلوکی سیستم کنترل شده با LQR و پسخور از فیلتر

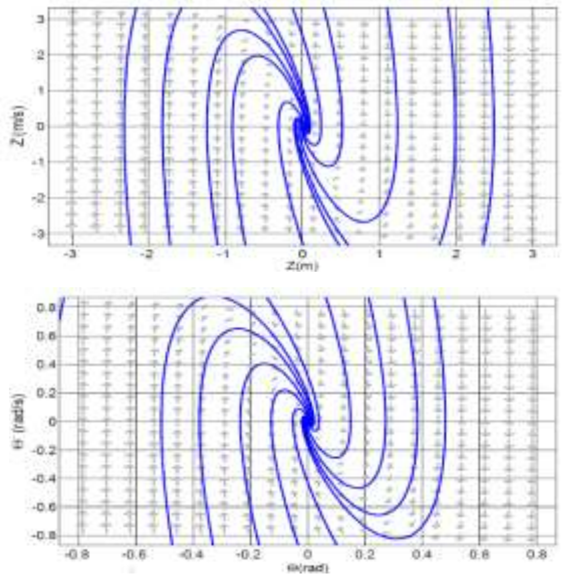
در شبیه‌سازی سیستم تصادفی کنترل شده و اندازه‌گیری آن، نویز اغتشاشات و اندازه‌گیری یکسانی در هر گام زمانی به صورتی ایجاد شده‌اند تا فیلترهای EKF و UKF، تحت شرایط یکسان بکار گرفته شوند. در کلیه شبیه سازی‌ها در لحظه اولیه متغیرهای سیستم واقعی مدل شده بصورت $x_{real} = [0\ \ 0\ \ 3\,m/s\ \ 0.2\,rad/s^2]^T$ و $x_{es)0} = [1\ \ 5deg\ \ 5\,m/s\ \ 0.3\,rad/s^2]^T$ و $P_0 = diag[10\ \ 1\ \ 20\ \ 1]$ برای فیلتر مدل شده است. برای فیلترها ماتریس کواریانس فرآیند و اندازه گیری برای EKF و UKF بصورت زیر در نظر گرفته شده اند:

$$Q = diag(2\times10^{-4}, 32\times10^{-6}, 10^{-4}, 64\times10^{-12}) \quad (۴۷)$$

$$R = diag(0.04, 0.0076, 0.0076) \quad (۴۸)$$

۵-۱ طراحی کنترل کننده LQR با پسخور خطی ساز

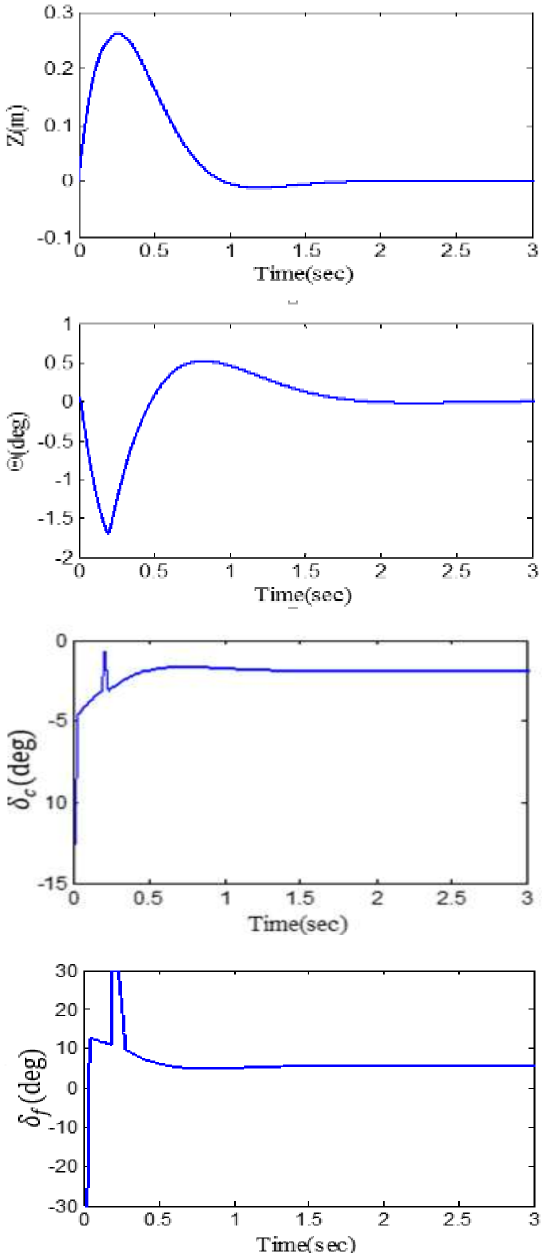
مدل کنترل شده، بسته به انتخاب ضرایب وزن دهی مختلف Q و R می تواند بصورت مجانبی و یا ورودی- محدود، خروجی- محدود پایدار باشد. با انتخاب ضرایب $Q_1 = diag(500,0)$ و $Q_2 = diag(200,0)$ و $R_{1,2} = 1$ در رابطه‌ی (۴۳) و (۴۴) ضرایب بهره‌ی کنترل‌کننده برای ورودی های v_1 و v_2، $k_1 = [-22.3607\ \ -6.6874]$ و $k_2 = [-14.1421\ \ -5.3183]$ بدست می‌آیند. شکل (۴) نمودار صفحه–فاز متغیرهای حالت مدل قطعی سیستم (بدون اضافه کردن نویز فرآیند)، کنترل شده با این ضرایب بهره را نشان می‌دهد. در این شکل پایداری مجانبی سیستم مداربسته مشاهده می‌شود.



شکل(۴): نمودار صفحات فاز حرکت سیستم مدار بسته با کنترل LQR و پسخور همه متغیرهای حالت

نتایج اجرای شبیه سازی برای مدل کنترل‌شده قطعی به همراه جبران-کننده با شرایط اولیه‌ی $z = 0$، $w = 3\,m/s$، $\theta = 0$، $q = 0.2\,rad/s$ بصورت شکل(۵) است. در زمان‌های که بالک‌ها به اشباع

رسیده اند در همان زمان جبران‌کننده حفره ساز را برای کاهش اثر اشباع شدگی بکار گرفته است که سبب جهش‌های در نمودار حفره ساز شده است. بعد از پایدارسازی $\delta_f = 6$ و $\delta_c = -2$ درجه هستند تا وزن وسیله را بالانس کنند.



شکل (۵): مدل قطعی کنترل شده با LQR و پسخورخطی ساز به همراه جبران کننده

۵-۲ کارایی فیلترها

در این بخش، موضوع کارایی فیلترها، شامل بررسی توانایی در تخمین متغیرها و پایداری سیستم، بررسی شده است. مدل تصادفی وسیله نمونه، بر اساس مدل قطعی(۲۶) که به آن نویزهای $v_{\dot{q}}$ و $v_{\dot{w}}$ اضافه شده است، شبیه سازی شده است. خروجی های حسگرها نیز با افزودن نویزهای اندازه‌گیری w_z، w_θ و w_q متغیرهای z ، θ و q حاصل از مدل تصادفی، شبیه سازی شده‌اند. مقادیر عددی متوسط و کواریانس های نویزهای بکار برده شده در شبیه سازی ها بصورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$w_z \sim (0,0.2) \qquad w_\theta \sim (0,10deg) \qquad w_q \sim (0,10deg/s)$$
$$v_{\dot{w}} \sim (0,0.6g) \qquad v_{\dot{q}} \sim (0,6\ deg/s) \qquad (۵۰)$$

۵-۲-۱ توانایی فیلترها در تخمین متغیرها

برای مقایسه‌ی عملکرد فیلترها، در تخمین متغیرها ۵۰ بار اجرا صورت گرفته است و جذر متوسط مربعات خطای تخمین (رابطه (۴۷)) به عنوان ملاک مقایسه در نظر گرفته شده اند. در این اجراها، نویز فرآیند بصورت (۵۰) در نظر گرفته شده است.

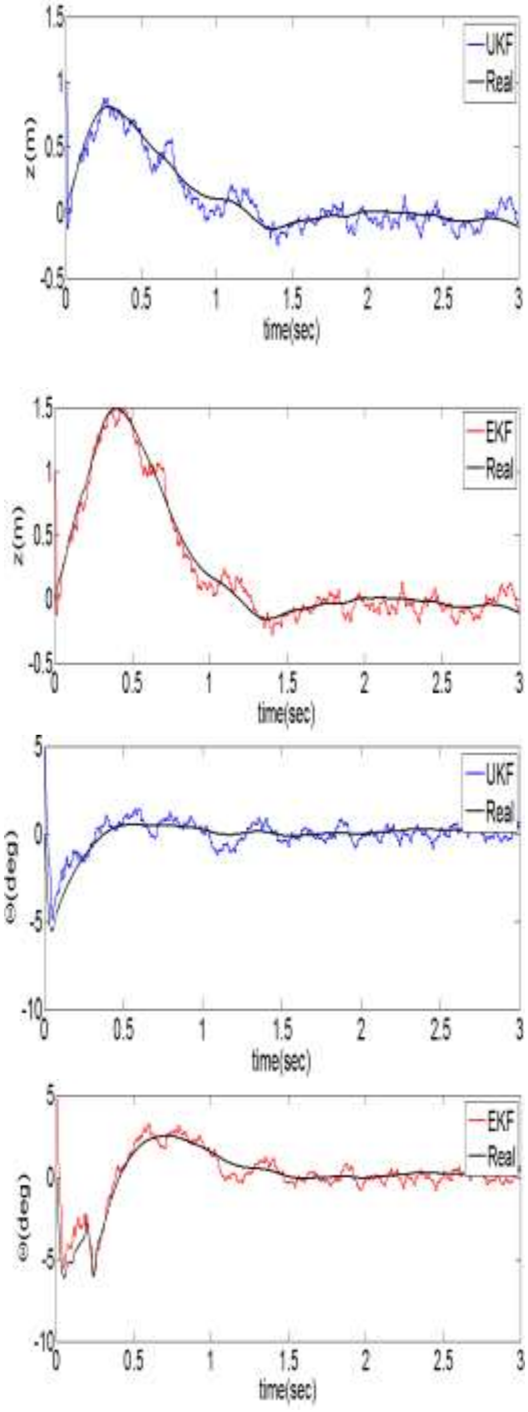
جدول ۲. متوسط RMSE متغیرها در ۵۰ اجرا

	$\overline{RMSE_z}$ $(\boldsymbol{m})$	$\overline{RMSE_\theta}$ $(\boldsymbol{rad})$	$\overline{RMSE_w}$ $(\boldsymbol{m/s})$	$\overline{RMSE_q}$ $(\boldsymbol{rad/s})$
UKF	0.1010	0.0206	0.2288	0.1439
EKF	0.0893	0.0188	0.3067	0.2388

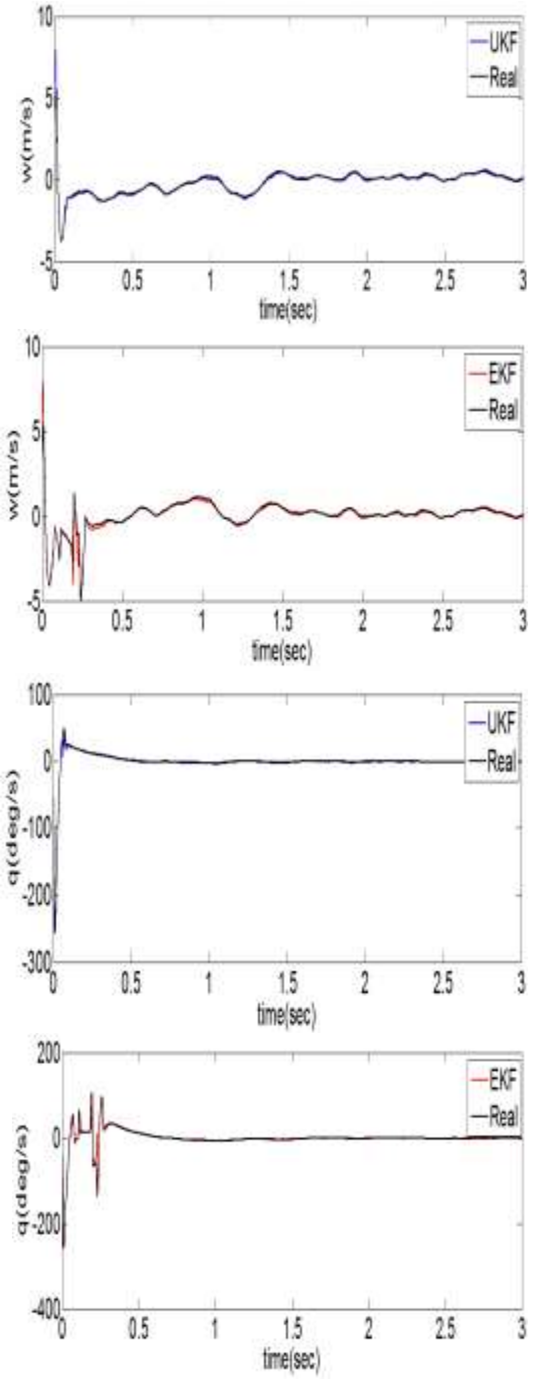
براساس جدول ۲، در مورد zو θ، EKF تخمین بهتر و در مورد w و q، UKF تخمین بهتری را ارائه می کند. همچنین در شکل های(۶) و (۷)، که نشان‌دهنده‌ی نتایج شبیه سازی برای مدل کنترل شده با فیلترهای EKF و UKF برای یکی از اجراها هستند، تخمین‌های EKF پراکندگی کمتری در تخمین zو θ و پراکندگی بیشتری در تخمین wو q، نسبت به تخمین های UKF نشان می‌دهند.

۵-۲-۲ خطاها و پایداری تخمین ها

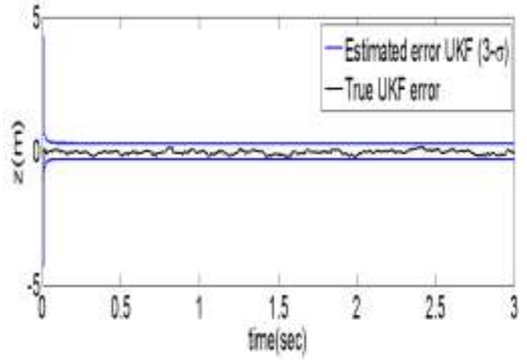
در شکل های (۸) و (۹)، خطای تخمین واقعی و محدوده های سه برابر خطای تخمین زده شده (3σ) توسط فیلترها، به ترتیب برای فیلترهای UKF و EKF نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌شودکه بیش از ٪۹۹ از مجموعه خطای واقعی در هر دو فیلتر داخل این محدوده ها قرار گرفته اند. در باره‌ی w و q با توجه به اینکه EKF از خطی سازی در هر مرحله و UKF از مدل غیرخطی برای تخمین استفاده می کند، این محدوده‌ها در هر دو فیلتر دارای نوسان هستند. در این نمودارها، کوپلینگ w و q از تغییرات مشابه آنها در برخی از محدوده ها مشخص است. واگرا نشدن این محدوده های خطا نشان دهنده‌ی پایداری فیلترها می‌باشد.

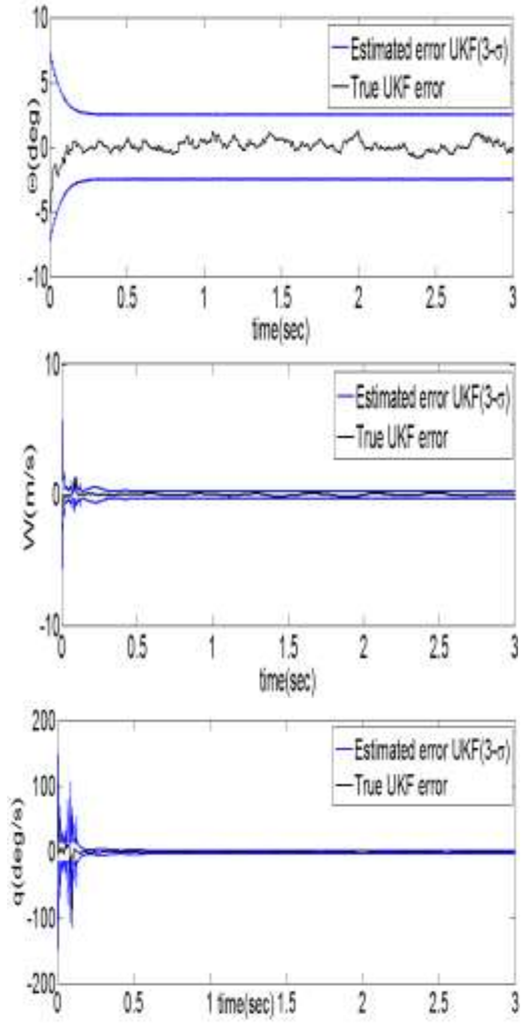


شکل(۶): نتایج شبیه سازی متغیرهای موقعیت در سیستم کنترل با مدل تصادفی با پسخور از تخمین‌های فیلترهای EKF و UKF

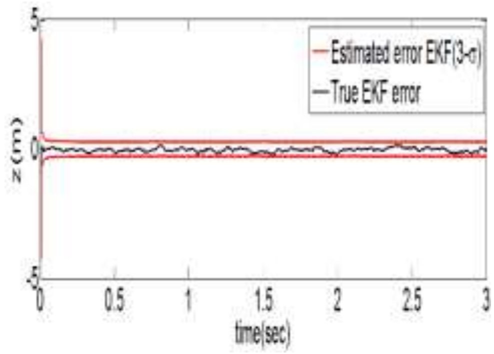


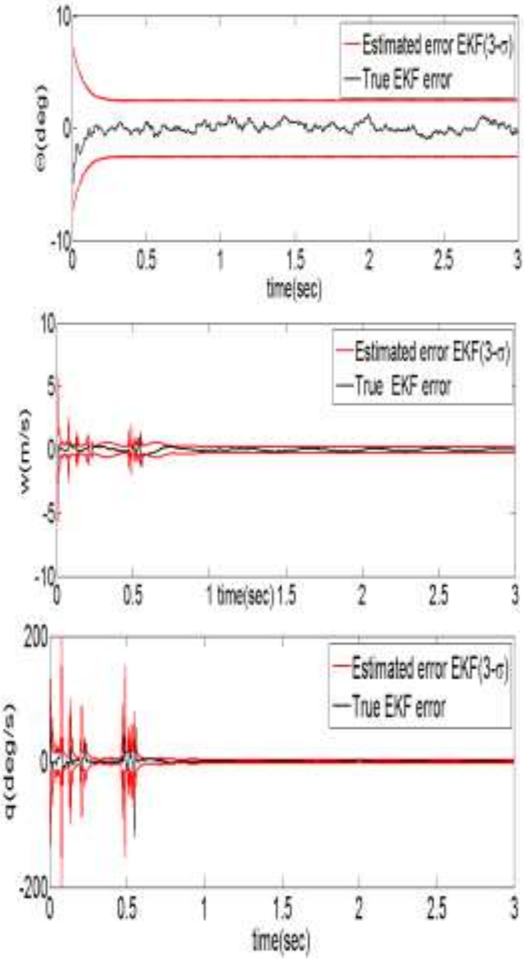
شکل(۷): نتایج شبیه سازی متغیرهای سرعت در سیستم کنترل با مدل تصادفی با پسخور از تخمین‌های فیلترهای EKF و UKF





شکل (۸): خطای تخمین واقعی و محدوده های سه سیگمای فیلتر UKF.





شکل(۹): خطای تخمین واقعی و محدوده های سه سیگمای فیلتر EKF.

۵-۲-۳ عملکرد فیلتر در نویز یکنواخت و گوسی

در این بخش، دو نوع نویز متداول گوسی و یکنواخت برای مدل و حسگرها در نظرگرفته شده‌اند و نتایج به ترتیب در جداول (۳) و (۴) ارائه شده اند. در این جداول نماد ()‾ نشان دهنده مقادیر متوسط خطای تخمین و σ نیز بیانگر پراکندگی مقادیر تخمین زده شده از مقادیر واقعی، در مدت زمان ۳ ثانیه اول شبیه سازی است. نتایج نشان دهنده‌ی این امر است که هرچند فیلتر بر اساس نویز گوسی طراحی شده است اما برای نویز یکنواخت نیز متوسط خطای تخمین و پراکندگی آن کم است و فیلتر پایدار است. در مدل تصادفی مقادیر متوسط و واریانس نویزهای فرآیندو اندازه‌گیری به صورت (۵۰) در نظرگرفته شده اند.

۵-۳ کارایی کنترل کننده در مدل تصادفی کنترل شده با پسخور از فیلترها و مشاهده‌گر

در این قسمت پایداری کنترلی مدل تصادفی با گرفتن پسخور از فیلترهای طراحی شده و مشاهده‌گر بهره‌ی بزرگ [۱۸] بررسی شده است. در طراحی این مشاهده‌گر فرض شده است که θ و q بصورت دقیق مستقیما در دسترس باشند. $\hat{z}$ و $\hat{w}$ با استفاده از دینامیک مدل قطعی و

بهره‌گیری از پسخور اختلاف بین مقدار اندازه‌گیری شده و $\hat{z}$ تخمین زده شده بدست می‌آیند. ضرایب بهره‌ی دینامیک تخمین $\hat{\dot{z}}$ و $\hat{w}$ از این اختلاف، به ترتیب $\frac{2}{\varepsilon}$ و $\frac{1}{\varepsilon^2}$ با مقدار عددی $\varepsilon = 0.002$ در نظر گرفته شده‌اند. نویز فرآیند و حسگرها بصورت (۵۰) فرض شده اند. شکل (۱۰)، نشان دهنده‌ی رفتار مدل تصادفی با بهره‌گیری از فیلترهای EKF و UKF و مشاهده‌گر بهره‌ی بزرگ است. این مشاهده گر نتوانست باعث پایداری سیستم با کنترل کننده طراحی شده در قسمت ۵-۱ شود، در حالی که فیلترهای اشاره شده باعث پایداری سیستم می‌شوند. این موضوع می‌تواند به علت ترکیب مدل و اندازه گیری ها و به حساب آوردن اغتشاشات باشد.

جدول (۳).متوسط خطای تخمین و پراگندگی مقادیر تخمین زده شده از مقادیر واقعی با نویز گوسی.

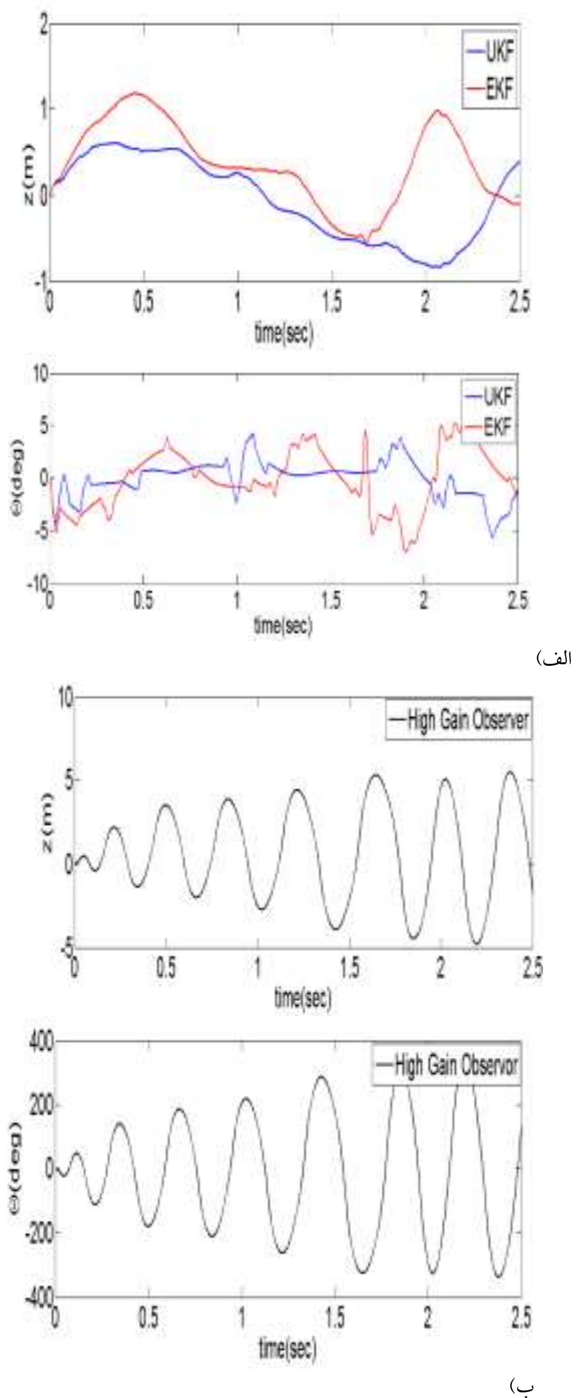
	UKF	EKF
$\bar{z} + \sigma_z(m)$	0.1478 ± 0.1891	0.1411 ± 0.1807
$\bar{\theta} + \sigma_\theta(rad)$	0.0299 ± 0.0372	0.0238 ± 0.0307
$\bar{w} + \sigma_w(m/s)$	0.2805 ± 0.4151	0.5979 ± 1.4905
$\bar{q} + \sigma_q(rad/s)$	0.2071 ± 0.3655	0.3523 ± 0.1017

جدول(۴).متوسط خطای تخمین و پراگندگی مقادیر تخمین زده شده از مقادیر واقعی با نویز یکنواخت.

	UKF	EKF
$\bar{z} + \sigma_z(m)$	0.0597 ± 0.0927	0.0526 ± 0.0866
$\bar{\theta} + \sigma_\theta(rad)$	0.0148 ± 0.0207	0.0111 ± 0.0173
$\bar{w} + \sigma_w(m/s)$	0.1302 ± 0.2488	0.2200 ± 0.1312
$\bar{q} + \sigma_q(rad/s)$	0.0533 ± 0.1609	0.0428 ± 0.1210

٦-نتیجه گیری

در این مقاله کنترل کننده‌ی بر مبنای روش LQR برای پایدارسازی وسایل ابر حفره ساز در مود عمق طراحی شده است. چنانچه سرعت جانبی وسیله در محدوده‌ی $\pm$۲ m/s باشد، به علت صفر بودن نیروی صفحه‌ای، خطی‌سازی حول نقطه تعادل به علت حذف این نیرو نمی‌تواند معرف رفتار غیرخطی مدل باشد. از این رو با استفاده از خطی سازی پسخور با اختصاص‌دادن بخشی از ورودی‌ها، ترم‌های غیرخطی حذف و خطی‌سازی صورت گرفته شده است. نتایج نشان‌دهنده‌ی این است که اینگونه خطی-سازی باعث اشباع شدن عملگرها می‌شود. به همین علت برای جبران دینامیک از دست رفته به علت اشباع شدگی، از جبران کننده استفاده شده است.



الف)

ب)

شکل (۱۰): نتایج شبیه سازی سیستم کنترل با مدل تصادفی و پسخور از تخمین گرهای: الف) فیلترهای EKF و UKF، ب) مشاهده‌گر بهره‌ی بزرگ.

با توجه به نیاز کنترل‌کننده به تمامی متغیرهای حالت برای اجرا، از فیلترهایUKF و EKF برای تخمین سرعت جانبی وسیله که غالباً اندازه گیری برای آن دردسترس نیست بهره‌گرفته شده است. فیلترها توانایی تعدیل اثر اغتشاشات دینامیکی و وسایل اندازه گیری را دارند و خطاهای تخمین آنها پایدار هستند. در مقایسه با مشاهده گر بهره بزرگ که بر اساس دینامیک مدل قطعی طراحی شده است، فیلترهای بکار گرفته شده پایدار هستند و خطای آنها از سیستم تصادفی مدل شده محدود است. اما تخمین

تولید شده توسط مشاهده گر ناپایدار است که می‌تواند باعث ناپایداری سیستم شود. فیلترها در تخمین با یکدیگر مقایسه شده‌اند که EKF در تخمین z و θ، و UKF در تخمین w و q عملکرد بهتری داشته‌اند. نتایج شبیه سازی نشان دهنده‌ی این مطلب است که کنترل‌کننده‌ی طراحی شده با پسخور از هر دو فیلتر قادر است که سیستم واقعی مدل شده را که دارای اغتشاشات دینامیکی است، را پایدار کند در حالی که با پسخور از مشاهده گر بهره بزرگ، پایداری سیستم تأمین نمی‌شود.

مراجع

[1] N. E. Fine and S. A. Kinnas, "A boundary element method for the analysis of the flow around 3-D cavitating hydrofoils," J. Ship Res., vol. 37, no. 1, pp. 213–224, 1993.

[2] S. S. Kulkarni and R. Pratap, "Studies on the dynamics of a supercavitating Projectile," Appl. Math. Model, vol. 24, no. 2, pp. 113–129, 2000.

[3] A. May, "Water entry and cavity-running behavior of missiles," Arlington, Naval Sea Systems Command, 1975.

[4] R. Rand, R. Pratap, D. Ramani, J. Cipolla, and I. Kirschner, "Impact dynamics of a supercavitating underwater projectile," presented at the DETC ASME Des. Eng. Tech. Conf., Sacramento, CA, 1997.

[5] J. Dzielski and A. Kurdila, "A benchmark control problem for supercavitating vehicles and an initial investigation of solutions," Journal of Vibration and Control, vol. 9, no. 7, pp. 791–804, 2003.

[6] R. Kamada, "Trajectory optimization strategies for supercavitating vehicles,"M.S. thesis, Sch. Aerosp. Eng., Georgia Inst. Technol., Atlanta, 2005.

[7] B. Vanek, J. Bokor and G. Balas, "Theoretical aspects of high-speed supercavitation vehicle Control," American Control Conference, Minneapolis, Minnesota, USA, 2006.

[8] B. Vanek, J. Bokor, G. Balas, and R. Arndt, "Longitudinal motion control of a high-speed supercavitation vehicle," Journal of Vibration and Control, vol. 13, no. 2, pp. 159–84, 2007.

[9] G. Lin, B. Balachandran, and E. Abed, "Dynamics and control of supercavitating bodies," presented at the ASME IMECE, Anaheim, CA, 2004.

[10] Lin, B. Balachandran, and E. Abed, "Supercavitating body dynamics, bifurcations and control," American Control Conference, Portland, USA, 2005. s

[11] G. Lin, B. Balachandran, and E. Abed, "Bifurcation behavior of a supercavitating vehicle," ASME IMECE, Chicago, IL, 2006.

[12] G. Lin and B. Balachandran, "Nonlinear dynamics and control of supercavitating bodies," AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Keystone, Colorado, 2006.

[13] X. Mao and Q .Wang, "Delay-dependent Control Design for a Time-delay supercavitating vehicle model." Journal of Vibration and Control, vol. 17, no. 3, pp. 431–448, 2010.

[14] X. Zhang, Y. Wei, Y. Han, T. Bai and K. Ma, "Design and comparison of LQR and a novel robust back stepping controller for supercavitating vehicles", Transactions of the Institute of Measurement and Control, pp. 1-14, 2015.

[15] X. Mao and Q.Wang. "Adaptive control design for a supercavitating vehicle model based on fin force parameter estimation", Journal of Vibration and Control, vol. 21, no. 6, pp. 1220-1233, 2015.

[16] B. Qiang, Y. Sun, Y. Han and T. Bai, "Absolute stability control of supercavitating vehicles based on backstepping," IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, Tianjin, China, pp. 1918-1923, 2014.

[17] A. Pang, H. Zhen and J, Wang, "Double-loop Decoupling Control For a Supercavitating Vehicle", 32nd Youth Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation, pp. 750-754, 2017.

[18] X. Mao and Q.Wang, "Nonlinear control design for a supercavitating vehicle", IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 17, no. 4, pp. 816-832, 2009.

[19] G. V. Logvinovich, "Hydrodynamics of free - boundary flows", translated from Russian, U.S. Department of Commerce, Washington, 1972.

[20] D. Simon, Optimal State Estimation: kalman filter, H-infinity, and Nonlinear Approaches, Wiley, 2006.

[21] E. A. Wan and R. van der Merwe, "The Unscented Kalman Filter for Nonlinear Estimation", Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium, pp. 153-158, 2000.

Journal of Control

ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752

A Joint Publication of the Iranian Society of Instrument and Control Engineers and the Industrial Control Center of Excellence of K.N. Toosi University of Technology, Vol. 12, No. 1, Spring 2018.

Publisher: **I**ranian **S**ociety of **I**nstrumentation and **C**ontrol **E**ngineers

Managing Director: Prof. Iraj Goodarznia

Editor-in-Chief: Prof. Ali Khaki-Sedigh

Tel: 84062317

Email: sedigh@kntu.ac.ir

Assistant Editor: Prof. Hamid Khaloozadeh, Dr. Alireza Fatehi, Dr. Mahdi Aliyari Shoorehdeli

Executive Director: Dr. Mahdi Aliyari Shoorehdeli, Tel: 84062403, Email: aliyari@kntu.ac.ir

Journal of Control

ISSN (print) 2008-8345
ISSN (online) 2538-3752

A Joint Publication of the Iranian Society of Instrument and Control Engineers and the Industrial Control Center of Excellence of K.N. Toosi University of Technology

Vol. 12, No. 1, Spring 2018

Contents