



مجله کنترل

ISSN 2008-8345



قطب علمی کنترل صنعتی

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

نشریه علمی - پژوهشی

انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران - قطب علمی کنترل صنعتی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
جلد ۱۰، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۵

فهرست مقالات

- ۱ جبران عیب حسگرهای موتور سنکرون آهنربای دائم با استفاده از کنترل کننده مد لغزشی
تحمل پذیر عیب
سیدموسی آیتی، حمیدرضا نیکبخت
- ۱۳ طراحی جبران ساز ریدوم در حلقه هدایت با رویکرد شکل دهی پاسخ فرکانسی
مهدی خسروی سامانی، سید محمدجواد معافی مدنی، مهدی نیکوسخن، ایمان محمدزمان
- ۲۵ طراحی قانون کنترلی مقاوم جهت پایداری سیستم های سیگولار دارای تأخیر
متغیر با زمان با در نظر گرفتن عدم قطعیت در مدل و قید دامنه ورودی
مریم السادات اسدی نیا، طاهره بینازاده
- ۳۹ کنترل کننده پیش بین بر پایه حالت ماندگار سیگنال کنترلی، تنظیم تحلیلی و تحلیل
سیستم حلقه بسته
پیمان باقری
- ۵۳ تخمین ناحیه جذب سیستم های چند جمله ای مرتبه دو با بکار بردن تابع لیاپانوف کسری
فرهاد اسماعیلی، علی وحیدیان کامیاد، محمد رضا جاهد مطلق، ناصر پریرز
- ۶۱ کنترل مقاوم یک دسته خودرو با لحاظ تاخیر زمانی و ساختار ارتباطی زمان متغیر
حسین چهاردولی، محمدرضا همایی نژاد



نشریه علمی - پژوهشی، انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران - قطب کنترل صنعتی دانشگاه صنعتی
خواجه نصیرالدین طوسی، جلد ۱۰، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۵

پست الکترونیک: control@isice.ir

صاحب امتیاز: انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران

مدیر مسئول: پروفسور ایرج گودرزیا

سردبیر: پروفسور علی خاکی صدیق - تلفن: ۸۴۰۶۲۳۱۷ - پست الکترونیک: sedigh@kntu.ac.ir

آدرس محل کار: خیابان دکتر شریعتی، پل سیدخندان، دانشکده مهندسی برق دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
شورای سردبیری: پروفسور علی خاکی صدیق، پروفسور حمید خالوزاده، دکتر علیرضا فاتحی، دکتر مهدی علیاری شوره دلی.
دبیر اجرایی: دکتر مهدی علیاری شوره دلی - تلفن ۸۶۰۶۲۴۰۳ - پست الکترونیک aliyari@kntu.ac.ir

هیأت تحریریه:

پروفسور علی خاکی صدیق (استاد) - پروفسور ایرج گودرزیا (استاد) - پروفسور حمید خالوزاده (استاد) - پروفسور پرویز جبه دار مارالانی (استاد) - پروفسور
علی غفاری (استاد) - دکتر حمیدرضا مومنی (دانشیار) - پروفسور سید کمال الدین نیکروش (استاد) - پروفسور مسعود شفیعی (استاد) - پروفسور بهزاد مشیری
(استاد)

هیأت مشاوران:

دکتر حمیدرضا مومنی، پروفسور بهزاد مشیری، پروفسور مسعود شفیعی، پروفسور علی خاکی صدیق، پروفسور پرویز جبه دار
مارالانی، پروفسور علی غفاری، پروفسور حمید خالوزاده، پروفسور حمیدرضا تقی راد، دکتر کیوان مسروری، دکتر محمدتقی
بطحایی، دکتر محمدتقی بهشتی، دکتر فرزاد جعفر کاظمی، دکتر رویا امجدی فرد، پروفسور سید علی اکبر موسویان، پروفسور
محمد تشنه لب، پروفسور محمد حایری، پروفسور سید علی اکبر صفوی، پروفسور حسین سیفی، دکتر علیرضا فاتحی، دکتر
محمد رضا اکبرزاده توتونچی، دکتر مسعود علی اکبر گلکار، دکتر ناصر پریز، دکتر مهرداد جوادی، دکتر جعفر حیرانی نوبری،
پروفسور فرامرز حسین بابایی، دکتر بیژن معاونی، دکتر مهدی علیاری شوره دلی، دکتر محمد عاروان، پروفسور محمد توکلی
بینا، دکتر فائزه فریور، دکتر موسی آیتی، دکتر محمد منثوری، دکتر رمضان هاونگی، دکتر امین رضائی، دکتر عبدالرسول
قاسمی، پروفسور محمد فرخی، دکتر یزدان باتمانی.

مدیر سایت: مهندس نسیمه فراهانی

صفحه آرا: کیان خالوزاده

فهرست مقالات

- ۱ جبران عیب حسگرهای موتور سنکرون آهنربای دائم با استفاده از کنترل کننده مد لغزشی
تحمل پذیر عیب
سیدموسی آیتی، حمیدرضا نیکبخت
- ۱۳ طراحی جبران ساز ریدوم در حلقه هدایت با رویکرد شکل دهی پاسخ فرکانسی
مهدی خسروی سامانی، سید محمدجواد معافی مدنی، مهدی نیکوسخن، ایمان محمدزمان
- ۲۵ طراحی قانون کنترلی مقاوم جهت پایداری سازی سیستم های سینگولار دارای تأخیر متغیر با زمان با
در نظر گرفتن عدم قطعیت در مدل و قید دامنه ورودی
مریم السادات اسدی نیا، طاهره بینازاده
- ۳۹ کنترل کننده پیش بین بر پایه حالت ماندگار سیگنال کنترلی، تنظیم تحلیلی و تحلیل سیستم
حلقه بسته
پیمان باقری
- ۵۳ تخمین ناحیه جذب سیستم های چند جمله ای مرتبه دو با بکار بردن تابع لیاپانوف کسری
فرهاد اسماعیلی، علی وحیدیان کامیاد، محمد رضا جاهد مطلق، ناصر پریر
- ۶۱ کنترل مقاوم یک دسته خودرو با لحاظ تاخیر زمانی و ساختار ارتباطی زمان متغیر
حسین چهاردولی، محمدرضا همایی نژاد

مجله کنترل، مجله‌ای علمی - پژوهشی است که دربرگیرنده تازه‌ترین نتایج تحقیقات نظری و کاربردی در علوم مختلف مرتبط با مهندسی کنترل و ابزار دقیق می‌باشد. مقالات ارسالی به مجله کنترل می‌بایست به زبان فارسی و دارای چکیده انگلیسی باشند. از میان مباحث مورد نظر این مجله می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

- (۱) مدلسازی، شناسایی، شبیه‌سازی، پیش‌بینی، بهینه‌سازی و پایش عملکرد سیستم‌ها.
- (۲) تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل پیشرفته از قبیل سیستم‌های کنترل خطی و غیرخطی، سیستم‌های کنترل تطبیقی، کنترل مقاوم و کنترل بهینه، سیستم‌های کنترل هوشمند، سیستم‌های کنترل تصادفی، سیستم‌های کنترل گسسته پیشامد و ترکیبی، سیستم‌های ابعاد وسیع، سیستم‌های کنترل چندمتغیره.
- (۳) مکاترونیک و رباتیک.
- (۴) ابزار دقیق و سیستم‌های ترکیب داده و اطلاعات سنسوری.
- (۵) اتوماسیون صنعتی از قبیل سیستم‌های کنترل گسترده، رابط انسان - ماشین، سیستم‌های ایمنی و تشخیص عیب، تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل کسری، شناسایی، تشخیص و جبران عیب در سیستم‌ها، سیستم‌های کنترل پیچیده، سیستم‌های زمان حقیقی و سیستم‌های کنترل تحت نظارت، کنترل مدل چندگانه.

کاربردهای مورد علاقه مجله "کنترل"، وسیع بوده و می‌تواند در برگیرنده موارد زیر باشد:

- (۱) سیستم‌های هدایت و ناوبری.
- (۲) فرآیندهای صنعتی شامل فرآیندهای شیمیایی و بیوتکنولوژی.
- (۳) تولید و توزیع نیروی برق.
- (۴) انرژی‌های تجدیدپذیر.
- (۵) مهندسی محیط زیست و هواشناسی.
- (۶) سیستم‌های اقتصادی و مالی.
- (۷) سیستم‌های اطلاعاتی، مخابراتی و شبکه‌های صنعتی.
- (۸) مهندسی پزشکی، مهندسی زیستی و سامانه‌های زیستی.
- (۹) نانو کنترل.
- (۱۰) پردازش داده.
- (۱۱) مهندسی خودرو.
- (۱۲) سیستم‌های حمل و نقل.

از کلیه پژوهشگران و کارشناسان فعال در زمینه‌های مرتبط با مهندسی کنترل و ابزار دقیق دعوت بعمل می‌آید تا مقالات و نتایج آخرین دستاوردهای علمی و پژوهشی خود را به این مجله ارسال نمایند. خواهشمند است مقالات خود را به صورت الکترونیکی از طریق سایت مجله www.joc-isice.ir ارسال فرمایید. برای کسب اطلاعات بیشتر و دریافت نحوه تهیه و ارسال مقالات می‌توانید به سایت مجله مراجعه نمایید.

شیوه تدوین

متن مقالات شامل چکیده، بدنه مقاله، مراجع و زیرنویس‌ها باید با فونت ۱۲ B Zar و با فاصله double میان خطوط، در صفحات A4 یک ستونی و تحت نرم‌افزار Word تهیه گردد.

آدرس نویسندگان

آدرس پستی کامل همه نویسندگان همراه با شماره تلفن و دورنگار (فکس) و نشانی پست الکترونیک (email) نویسنده عهده‌دار مکاتبات در برگه مستقلى چاپ و به همراه مقاله ارسال گردد.

چکیده

هر مقاله باید شامل، عنوان (فارسی و انگلیسی)، چکیده (فارسی و انگلیسی) مقاله در حداکثر ۲۰۰ واژه، کلیدواژه (فارسی و انگلیسی) در حداکثر ۵ واژه باشد.

تصاویر و عکس‌ها

در هنگام ارسال مقاله جهت داوری نیازی به ارسال اصل تصاویر و عکس‌ها نمی‌باشد، ولی رونوشت ارسالی باید واضح باشد. پس از تایید مقاله، ارسال اصل تصاویر و عکس‌ها جهت چاپ مقاله ضروری می‌باشد.

مراجع

به کلیه مراجع باید در متن ارجاع داده شده باشد. مراجع باید با شماره مشخص گردند و جزئیات آنها به شرح زیر در پایان مقاله به ترتیب حروف الفبای نویسندگان ظاهر گردد:

مقالات

[شماره مرجع] نام خانوادگی و علامت اختصاری اول نام، سال انتشار یا تاریخ برگزاری، "عنوان مقاله"، نام کامل نشریه یا کنفرانس، شماره مجله یا شماره جلد، شماره صفحات.

کتابها

[شماره مرجع] نام خانوادگی و نام کامل همه نویسندگان، عنوان کتاب، نام مترجم (در صورت وجود)، نام کامل ناشر، سال انتشار.

واحدها

کلیه مقالات باید از واحد استاندارد SI (متریک) در تمام بخشهای مقاله استفاده نمایند. در کنار واحد SI می‌توان از واحد انگلیسی در داخل پرانتز نیز استفاده نمود.

طول مقالات

حداکثر تعداد صفحات مقاله ۱۵ صفحه است که معادل حدود ۷۵۰۰ واژه است. برای چاپ صفحات بیشتر و یا رنگی لازم است هزینه‌ای معادل ۲۵۰،۰۰۰ ریال (۲۵ دلار آمریکا) برای هر صفحه پرداخت گردد.

فرآیند ارسال مقاله

مقالات قابل چاپ در مجله شامل مقالات کامل پژوهشی، مقالات کوتاه و یادداشتهای پژوهشی است. مقالات ارسالی نباید در هیچ مجله داخلی و یا خارجی چاپ شده باشد و یا در حال داوری باشد.

- برای ارسال مقاله خود به سایت مجله به آدرس www.joc-isice.ir مراجعه نموده و طبق دستورالعمل مندرج در سایت عمل نمایید.
- مقالات جهت داوری به داوران متخصص ارسال می‌گردد. در پایان تایید یا رد هر مقاله توسط هیئت تحریریه مجله انجام خواهد پذیرفت. سردبیر مجله نتیجه داوری را برای نویسنده عهده دار مکاتبات ارسال خواهد نمود.
- در صورتی که نیاز به تصحیح مقاله باشد، تصحیحات باید تنها محدود به موارد ذکر شده باشد. در سایر موارد نویسنده لازم است سردبیر را در جریان هرگونه تغییر و یا تصحیح دیگری قرار دهد. در هر صورت مسئولیت صحت و سقم مطالب بر عهده نویسنده خواهد بود.

حق کپی

در صورت تایید مقاله، نویسندگان لازم است فرم انتقال حق انتشار آن به "انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران" را تکمیل و به همراه اصل مقاله ارسال نمایند. نویسندگان لازم است موافقت کتبی دارندگان حق کپی بخشهایی از مقاله که از مراجع و منابع دیگر نسخه‌برداری شده است را دریافت و به دفتر مجله ارسال نمایند.

جبران عیب حسگرهای موتور سنکرون آهنربای دائم با استفاده از کنترل کننده مد لغزشی تحمل پذیر عیب

سید موسی آیتی^۱، حمیدرضا نیکبخت^۲

^۱ استادیار، آزمایشگاه ابزار دقیق پیشرفته، دانشکده مهندسی مکانیک، پردیس فنی دانشگاه تهران، m.ayati@ut.ac.ir

^۲ فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی برق، پردیس فنی دانشگاه تهران، nikhamidreza@gmail.com

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۳/۳۱، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۵/۷/۱۹)

چکیده: مسئله کنترل کننده‌های تحمل پذیر عیب (FTC)^۱ یک موضوع مهم در نظریه سیستم و مهندسی کنترل بوده و دارای کاربردهای عملی و صنعتی بسیاری است. در این مقاله یک FTC جدید برای تشخیص و اصلاح عیب حسگرهای درایو موتور سنکرون آهنربای دائم (PMSM)^۲ طراحی شده است. برای رسیدن به این هدف، از یک کنترل کننده مد لغزشی (SMC)^۳ بر اساس کنترل برداری PMSM استفاده شده است. بمنظور اینکه کنترل کننده بتواند درحالی که حسگرهای معیوب هستند PMSM را کنترل کند از دو رویتگر مد لغزشی (SMO)^۴ برای تخمین سرعت و جریان‌های موتور استفاده شده است. این رویتگرها حسگرهای مجازی را برای پاسخور ایجاد می کنند. حال زمانی که هر یک از حسگرها با عیب مواجه شوند، FTC عیب را تشخیص داده و بلافاصله از حسگرهای مجازی برای کنترل موتور استفاده می کند. پایداری سیستم حلقه بسته با استفاده از نظریه پایداری لیاپانوف بررسی شده است. نتایج شبیه سازی عملکرد مناسب FTC پیشنهادی را برای PMSM نشان می دهند.

کلمات کلیدی: موتور سنکرون آهنربای دائم، کنترل کننده مد لغزشی، رویتگر مد لغزشی، کنترل کننده تحمل پذیر عیب، کنترل بدون حسگر.

Permanent Magnet Synchronous Motor Sensor Fault Compensation via Fault Tolerant Sliding Mode Controller

Seyed Moosa Ayati, Hamidreza Nikbakht

Abstract: The fault tolerant controller (FTC) issue is one of the most important subjects in the system theory and control engineering which has many practical and industrial applications. In This paper, a new FTC has been designed in order to detect and compensate the sensors faults of permanent magnet synchronous motor (PMSM). To achieve this goal, sliding mode controller (SMC) and PMSM vector control have been used. In the faulty conditions, in order to achieve control purposes, two sliding mode observers (SMO) estimate the speed and currents of motor. The observers create virtual sensors for the feedback control. If sensors face with a condition that cause any fault, the FTC detects the fault and the virtual sensors are immediately used for sensorless control of motor. The stability of the closed-loop system has been investigated by the Lyapunov stability theory. Simulation results confirm good performance of the proposed FTC for PMSM.

Keywords: Permanent magnet synchronous motor, Sliding mode controller, Sliding mode observer, Fault tolerant controller, Sensorless control.

¹ Fault tolerant controller

² Permanent magnet synchronous motor

³ Sliding mode controller

⁴ Sliding mode observer

۱- مقدمه

کنترل کننده‌های تحمل پذیر عیب (FTC)، در سال‌های اخیر به دلیل بالابردن قابلیت اطمینان، نگهداری و دوام فرآیندهای حساسی همچون صنایع پتروشیمی، نیروگاه‌های هسته‌ای، ماهواره‌ها و خودروهای الکتریکی از توجه فراوانی برخوردار شده‌اند. در این فرآیندها از PMSM به دلیل ویژگی‌های چون راندمان بالا، گشتاور، سرعت، نسبت وزن به گشتاور کم و نیاز محدود به تعمیر و نگهداری [۲]، استفاده می‌شود. به منظور ارتقا و افزایش اعتماد و اطمینان، لازم است تا سیستم‌های کنترل این موتور قابلیت تشخیص عیب و تحمل پذیری در برابر عیب را داشته باشند.

پیرامون پژوهش‌های انجام شده، دو روش فعال^۱ و غیرفعال^۲، برای FTC یک سیستم وجود دارد [۴]. در روش غیرفعال، یک کنترل کننده بر اساس نظریه‌های کنترل مقاوم^۳ در شرایط عادی و معیوب و برای عیب‌های خاصی از سیستم طراحی می‌شود. اما در روش‌های فعال، FTC ترکیبی از یک کنترل کننده و یک رویکرد است که کنترل کننده وظیفه کنترل و رویکرد هدف تخمین حالت‌های سیستم را بر عهده دارد. هنگامی که عیب رخ می‌دهد، عملکرد عادی و مطلوب سیستم به سمت ناپایداری منحرف می‌شود. در این صورت FTC با استفاده از یک الگوریتم تشخیص عیب، قانون‌های کنترل جدیدی را ایجاد و با اعمال این قانون‌ها به سیستم حفظ شرایط کنترلی پایدار و مطلوبی را برای سیستم تضمین می‌کند.

در سال‌های اخیر کنترل برداری^۴ به یکی از محبوب‌ترین روش‌های کنترل حلقه بسته موتورهای الکتریکی تبدیل شده است. درایو PMSM برای ایجاد این روش کنترلی حداقل نیاز به دو حسگر اندازه‌گیری جریان و یک حسگر دقیق اندازه‌گیری سرعت دارد تا بتواند حلقه‌های کنترل شار و گشتاور را به شکل مجزا کنترل کند. وجود هرگونه عیب برای این حسگرها، هدف کنترل برداری را به کلی مختل می‌کند. چرا که سیستم ایمنی درایو در صورت دریافت سیگنال‌های ناقص از حسگرها، فرمان ایست را برای درایو صادر و در نتیجه خاموشی سیستم را در پی خواهد داشت. بنابراین، وجود یک FTC فعال با قابلیت تشخیص و اصلاح عیب‌های حسگری برای PMSM امری مهم و ضروری است [۴، ۵]. براساس مطالعه‌های انجام شده در مقاله [۴]، رویکردها و کنترل کننده‌های مد لغزشی از توانایی بالایی برای کنترل و تخمین حالت‌های سیستم در حضور اغتشاش و عدم قطعیت‌های سیستم برخوردار هستند. با این حال، مدهای لغزشی با پدیده چترینگ^۵ در حین ردیابی سیگنال‌های مرجع خود مواجه می‌شوند. خوشبختانه می‌توان با استفاده از سطوح لغزش اننگرالی، الگوریتم‌های پیچشی، و یا استفاده از

توابع خطی اثر این پدیده را کاهش داد [۶] و یک FTC با راندمان بالای را ایجاد نمود.

نتایج مربوط به تحقیق‌های انجام شده پیرامون عیب‌های حسگری PMSM در [۵، ۷، ۸] گزارش شده است. لیکن اکثر این مقالات فقط به تشخیص عیب‌های حسگری اشاره دارند. همچنین، در [۹] یک FTC مقاوم در برابر عیب حسگر سرعت PMSM، برای کروز کنترل یک خودروی هایبریدی ارائه شده است. در [۵] از رویکرد فیلتر کالمن برای تخمین سرعت PMSM و از رویکرد تطبیقی مدل مرجع^۶ (MRAS) برای تخمین جریان‌های استاتور PMSM استفاده شده است. در [۱۰] نیز از رویکرد پسگام تطبیقی^۷ برای اصلاح عیب حسگرهای جریان IPMSM طراحی شده است. به طور مشترک در این مراجع از روش کنترل بدون حسگر PMSM برای شرایط معیوب حسگرها استفاده شده است.

در این مقاله قصد بر آن است که یک FTC فعال مقاوم در برابر عیب حسگرهای درایو PMSM طراحی شود. برای رسیدن به این هدف، یک SMC در کنترل برداری موتور به کار رفته است. دو SMO به شکلی طراحی شده‌اند تا تمامی حسگرهای PMSM را به صورت مجازی تولید کنند. همچنین، یک الگوریتم تشخیص عیب با محاسبه مانده از اختلاف سیگنال‌های اندازه‌گیری شده از حسگرهای واقعی و حسگرهای مجازی و مقایسه مانده با یک سطح آستانه، عیب ایجاد شده برای هر یک از حسگرها را تشخیص داده و بلافاصله حسگرهای مجازی را جایگزین حسگرهای معیوب می‌نماید. در این صورت، PMSM حتی در حالت بروز عیب برای همه‌ی حسگرها نیز می‌تواند به کار عادی خود ادامه دهد. پایداری سیستم حلقه بسته کلی با استفاده از نظریه پایداری لیاپانوف بررسی و به منظور تأیید عملکرد صحیح و کارایی FTC، طراحی‌های انجام شده با استفاده از نرم افزار متلب شبیه‌سازی شده‌اند.

این مقاله به صورت زیر مرتب شده است. در ادامه و در بخش دوم مدل فضای حالت PMSM ارائه شده است. در بخش ۳ الگوریتم FTC پیشنهادی معرفی می‌شود. بخش ۴ به طراحی کنترل کننده در شرایط عادی بدون عیب و در بخش ۵ به طراحی کنترل کننده‌های مربوط به شرایط معیوب حسگرهای پرداخته شده است. نتیجه شبیه‌سازی‌ها در بخش ۶ و نتیجه‌گیری در بخش ۷ آورده شده است.

۲- مدل فضای حالت PMSM

روش‌های طراحی کنترل کننده در مختصات dq کنترل کننده‌های برداری^۸ نامیده می‌شوند که شامل کنترل کننده‌های سرعت و جریان‌های استاتور هستند. مختصات dq از اعمال تبدیل پارک بر روی جریان‌های سه فاز استاتور ($i_{\alpha\beta\gamma}$) حاصل می‌شود که جزئیات انجام این تبدیل در

¹ Active approach

² Passive approach

³ Robust control

⁴ Vector control

⁵ Chattering

⁶ Model reference adaptive system

⁷ Adaptive back-stepping observer

⁸ Vector controller

$$\sup \|r_d + i_q + \omega\| \geq r_0$$

که r_0 حد آستانه تشخیص عیب است و با در نظر گرفتن بیشترین تغییرات سرعت، گشتاور، و شرایط کاری مختلف موتور، و برای هریک از حسگرها توسط طراح انتخاب می شود. همچنین، (λ) یک متغیر شناور^۱ و به عنوان شاخص تشخیص عیب است. مقدار (0) را در شرایط عادی و مقدار (1) را در شرایط معیوب هر یک از حسگرها به خود می گیرد. در صورت تشخیص عیب، FTC براساس رابطه (۲) حسگرهای مجازی را جایگزین حسگرهای واقعی می کند [۹]:

$$s = (1 - \lambda)V_h + \lambda V_f \quad (2)$$

که در آن V_h قانون کنترل طراحی شده برای شرایط عادی و V_f قانون کنترل طراحی شده برای شرایط معیوب حسگرهای پسخور (یا روش کنترل بدون حسگر PMSM) است. در ادامه به طراحی این قانون های کنترلی پرداخته خواهد شد.

۴- طراحی کنترل کننده در شرایط عادی حسگرها

برای PMSM هدف کنترل برداری دو فرضیه دارد. اول اینکه سرعت موتور باید مقدار مرجع خود را ردیابی کند. دوم اینکه گشتاور الکترومغناطیسی غیرخطی برای جلوگیری از اثرات رلوکتانسی و ریل گشتاور، باید خطی سازی شود. این قید برابر است با اینکه جریان i_d استاتور مقدار مرجع صفر را ردیابی کند [۱۰]. در این بخش به طراحی SMC بر اساس کنترل برداری PMSM پرداخته می شود. در حالت کلی، برای طراحی SMC با سطوح لغزش انتگرالی، در ابتدا سطوح لغزش و سپس قانون های کنترل طراحی می شوند [۵، ۱۱]. سطوح لغزش انتگرالی دارای دو قسمت سطح لغزش هستند که قسمت اول شامل خطایی است که باید برای ایجاد کنترل صفر شود. بخش دوم انتگرال خطای بخش اول را شامل می شود که به طور کلی می توان سطوح لغزش انتگرالی را با یک کنترل کننده کلاسیک PI مقایسه کرد. طراحی این کنترل کننده در دو مرحله زیر انجام می شود:

مرحله ۱: SMC سرعت PMSM

هدف از کنترل سرعت، صفر کردن خطای زیر است و در این صورت، سرعت خروجی PMSM سرعت مرجع را دنبال خواهد کرد.

$$e_\omega = \omega - \omega_r^* \quad (3)$$

که ω_r^* سرعت مرجع موتور است. برای صفر کردن خطای بالا، از سطح لغزش انتگرالی زیر استفاده می شود [۲]:

$$S_\omega = e_\omega - m_\omega \int e_\omega dt \quad (4)$$

مرجع [۱۷] به طور کامل شرح داده شده است. بطور کلی در این تبدیل هر کدام از متغیرهای دو محور d و q از روی متغیرهای متناظر در حالت سه محوری ($i_{\alpha\beta\gamma}$) و از طریق ماتریس انتقال تبدیل پارک (پیوست ۱) قابل محاسبه هستند. تبدیل پارک باعث می شود تا بردارهای سه فاز جریانهای استاتور به دو بردار تبدیل شود که ماحصل این تبدیل طراحی کنترل کننده را ساده می کند. همچنین، لازم به ذکر است که در روش کنترل برداری، پس از خطی سازی متغیرهای حالت سیستم، می تواند بکار گرفته شود که به طور خاص، گشتاور و دینامیک شار رتور PMSM در مختصات dq ، خطی است و بنابراین، حلقه کنترل شار و گشتاور هریک می توانند به صورت مجزا اجرا شوند [۱۱]. مدل ریاضی PMSM در مختصات dq به صورت زیر مفروض شده است [۲] و [۳]:

$$\begin{aligned} \frac{di_d}{dt} &= \frac{1}{L_d} (-Ri_d + L_q P \omega i_q + u_d) \\ \frac{di_q}{dt} &= \frac{1}{L_q} (-Ri_q + L_d P \omega i_d - P \omega \phi + u_q) \\ \frac{d\omega}{dt} &= a(\phi + (L_d - L_q)i_q) - dT_l - dB\omega \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \end{aligned} \quad (1)$$

که L_d و L_q اندوکتانس های محورهای dq استاتور، R مقاومت استاتور، i_d و i_q جریان های محور dq استاتور، u_d و u_q ولتاژهای محور dq استاتور، θ موقعیت زاویه ای، ω سرعت زاویه ای رتور، ϕ شار آهنربای دائم رتور، j ممان اینرسی رتور، B ضریب میرایی چسبندگی، و T_l گشتاور بار، p تعداد زوج قطب هستند. همچنین، پارامترهای d و a بصورت زیر تعیین می شوند،

$$a = \frac{P}{j} \quad d = \frac{1}{j}$$

۳- الگوریتم FTC پیشنهادی

هدف اصلی طراح FTC پیشنهادی این مقاله، تشخیص عیب حسگرهای جریان و حسگر سرعت و حفظ کنترل مطلوب در شرایط حسگرهای معیوب در PMSM است. برای ایجاد این هدف، ابتدا FTC مانده های زیر را تولید می کند:

$$r_\omega = \omega - \hat{\omega}$$

$$r_{i_d} = i_d - \hat{i}_d$$

$$r_{i_q} = i_q - \hat{i}_q$$

که ω ، i_d و i_q به ترتیب سیگنال های اندازه گیری شده از حسگر سرعت و حسگرهای جریان محورهای d و q هستند. همچنین، $\hat{\omega}$ ، $\hat{i}_d$ و $\hat{i}_q$ مقادیر تخمین زده شده توسط رویکردهای مد لغزشی یا عبارتی حسگرهای مجازی سرعت و جریان های استاتور می باشند. حال هنگامی که هر یک از این مانده ها شرط زیر را برقرار سازند، حسگر معیوب تشخیص داده خواهد شد:

¹ Boolean

$$-\frac{R}{L_d}i_d + \frac{L_q}{L_d}P\omega i_q + \frac{u_d}{L_d} + m_d e_d = 0 \quad (12)$$

$$\Rightarrow u_{ded} = Ri_d - L_q P\omega i_q - L_d m_d e_d$$

$$-\frac{R}{L_q}i_q - \frac{L_d P\omega}{L_q}i_d - \frac{P\omega\phi}{L_q} + \frac{u_q}{L_q} - \dot{i}_{sq}^* + m_q e_q = 0$$

$$\Rightarrow u_{qeq} = Ri_q + L_d P\omega i_d + P\omega\phi + L_q \dot{i}_{sq}^* - L_q m_q e_q$$

برای اطمینان از هدف ردیابی، قانونهای کنترل زیر در نظر گرفته

می شوند:

$$u_{dn} = -\lambda_d \text{sign}(s_d) \quad (13)$$

$$u_{qn} = -\lambda_q \text{sign}(s_q)$$

که $\lambda_d \in R^+$ و $\lambda_q \in R^+$ است. در نهایت قانونهای کنترل-

تولید شده توسط SMC، با توجه به معادله های (۱۲) و (۱۳) به صورت

زیر خواهند بود:

$$V_{sd} = u_{ded} + u_{dn} \quad (14)$$

$$V_{sq} = u_{qeq} + u_{qn}$$

به طوری که:

$$[V_{sd} \quad V_{sq}]^T = [u_d \quad u_q]^T \quad (15)$$

۱-۴ اثبات پایداری

در این بخش با استفاده از تئوری پایداری لیاپانوف، پایداری SMC طراحی شده در بخش قبل، در حالت حلقه بسته بررسی شده است. براساس این اثبات جریانهای i_d ، $\dot{i}_d$ و سرعت PMSM مقادیر مرجع خود را دنبال خواهند کرد. برای این منظور خطاهای مفروض شده برای کنترل کننده های سرعت و جریان به صورت زیر در نظر گرفته می شوند:

$$\begin{aligned} \dot{e}_d &= \dot{i}_d - \dot{i}_d^* \\ &= -\frac{R}{L_d}i_d + \frac{L_q}{L_d}P\omega i_q + \frac{1}{L_d}V_{sd} - 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_q &= \dot{i}_q - \dot{i}_{sq}^* \\ &= -\frac{R}{L_d}i_q - \frac{P}{L_q}L_d\omega i_d - \frac{P}{L_q}\omega\phi + \frac{1}{L_d}V_{sd} - \dot{i}_{sq}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_\omega &= \dot{\omega} - \dot{\omega}^* \\ &= a(\phi + (L_d - L_q)i_d)\dot{i}_{sq}^* - d(T_l + B\omega) - \dot{\omega}^* \end{aligned}$$

حال با تعریف:

$$\lambda_\omega = \frac{\lambda_{\omega 1}}{a(\phi + (L_d - L_q)i_d)}, \quad \lambda_{\omega 1} > 0 \quad (17)$$

معادله (۸) به صورت معادله (۱۸) بازنویسی می شود:

که در آن m_ω یک بهره مثبت است. سطح لغزش انتگرالی اثرات چترینگ در خروجی کنترل کننده را کاهش می دهد. برای ایجاد هدف ردیابی سرعت، مشتق معادله (۴) برابر صفر قرار داده می شود:

$$S_\omega = 0 \Rightarrow \quad (5)$$

$$\dot{S}_\omega = \dot{\omega} - \dot{\omega}_r^* + m_\omega(\omega - \omega_r^*) = 0 \Rightarrow$$

$$a\phi i_q + a(L_d - L_q)\dot{i}_d - dT_l - dB\omega - \dot{\omega}_r^* + m_\omega e_\omega = 0$$

از آنجایی که خروجی کنترل کننده سرعت به عنوان ورودی مرجع کنترل کننده جریان i_q قرار می گیرد، بنابراین:

$$a(\phi + (L_d - L_q)\dot{i}_d) = dT_l + dB\omega + \dot{\omega}_r^* - m_\omega e_\omega \Rightarrow \quad (6)$$

$$\dot{i}_{qeq}^* = \frac{1}{a(\phi + (L_d - L_q)\dot{i}_d)}[d(T_l + B\omega) + \dot{\omega}_r^* - m_\omega e_\omega]$$

برای اطمینان از برآورده شدن هدف ردیابی کنترل کننده سرعت،

قانون کنترل زیر در نظر گرفته می شود [۲]:

$$\dot{i}_{sqn}^* = -\lambda_\omega \text{sign}(S_\omega) \quad (7)$$

که $\lambda_\omega \in R^+$ است. در نهایت سیگنال مرجع کنترل کننده جریان

محور (q) با توجه به معادله های (۶) و (۷) به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{i}_{sq}^* = \dot{i}_{qeq}^* + \dot{i}_{sqn}^* \quad (8)$$

مرحله دوم: کنترل کننده های جریان

هدف از کنترل کننده های جریان محورهای d و q صفر شدن

خطاهای مفروض زیر است:

$$e_d = i_d - i_d^* \quad (9)$$

$$e_q = i_q - i_{sq}^*$$

سطوح لغزش انتگرالی زیر برای صفر کردن خطاهای بالا در نظر گرفته می شوند:

$$S_d = e_d + m_d \int e_d dt \quad (10)$$

$$S_q = e_q + m_q \int e_q dt$$

حال با برابر صفر قراردادن مشتق معادله های (۱۰) داریم

$$\dot{S}_d = (\dot{i}_d - \dot{i}_d^*) + m_d(i_d - i_d^*) = 0 \quad (11)$$

$$\dot{S}_q = (\dot{i}_q - \dot{i}_{sq}^*) + m_q(i_q - i_{sq}^*) = 0$$

که در معادله های (۱۰) و (۱۱)، i_d^* سیگنال مرجع کنترل کننده

i_d ، m_d و m_q بهره های مثبت طراحی کنترل کننده هستند. حال با

بازنویسی معادله (۱۱)، انرژی های کنترلی لازم برای کنترل کننده های

جریان به صورت معادله (۱۲) خواهند بود:

عیب است و در صورت مواجه شدن حسگرهای پسخور با عیب، ناپایدار می شود. برای جلوگیری از این امر در شرایط معیوب کنترل کننده های بخش بعد طراحی شده اند.

۵- طراحی کنترل کننده در شرایط معیوب حسگرها

در این بخش روش کنترلی برای شرایطی که حسگرهای پسخور (حسگرهای سرعت و جریان) با عیب مواجه می شوند، ارائه شده است. برای این کار دو ریتگر مد لغزشی به شکلی طراحی شده اند تا بدون نیاز به وجود حسگرهای پسخور بتوانند سیگنال های اندازه گیری شده در شرایط عادی این حسگرها را تخمین بزنند و یا به عبارتی این حسگرها را به صورت مجازی در اختیار درایو PMSM قرار دهند. بنابراین، FTC پیشنهادی این مقاله برای شرایط معیوب حسگرهای پسخور از روش کنترل بدون حسگر PMSM استفاده می کند.

۱-۵ تولید حسگر سرعت به صورت مجازی

این بخش روش کنترل بدون حسگر PMSM برای شرایطی که حسگر سرعت دچار عیب می شود ارائه شده است. در این شرایط فرض می شود که جریان های استاتور قابل اندازه گیری هستند و به عنوان خروجی سیستم محسوب می شوند. سرعت PMSM پس از مواجه شدن حسگر سرعت با عیب، غیر قابل اندازه گیری است. بنابراین، به تخمین سرعت موتور نیاز است. به منظور تخمین سرعت PMSM، از ریتگر مد لغزشی زیر استفاده شده است. این ریتگر با استفاده از قانون های کنترل V_{sd} ، V_{sq} و جریان های قابل اندازه گیری i_d ، i_q ، حسگر مجازی سرعت را تولید می کند. بر اساس معادله (۲) ساختار SMO به صورت زیر در نظر گرفته شده است [۱۲].

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{i}}_d \\ \dot{\hat{i}}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_d} & \frac{L_q}{L_d} P\hat{\omega} \\ -\frac{L_d}{L_q} P\hat{\omega} & -\frac{R}{L_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_d \\ \hat{i}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_q} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\phi}{L_q} P\hat{\omega} \end{bmatrix} + \zeta S + \phi \text{sign}(S) \quad (26)$$

که $\hat{i}_d$ ، $\hat{i}_q$ و $\hat{\omega}$ متغیرهای حالت تخمین شده، ζ و ϕ ماتریس های بهره طراحی ریتگر هستند و به صورت زیر در نظر گرفته می شوند:

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_{11} & 0 \\ 0 & \zeta_{22} \end{bmatrix} \quad \phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & 0 \\ 0 & \phi_{22} \end{bmatrix}$$

$$i_{sq}^* = \frac{1}{a(\phi + (L_d - L_q))i_d} (d(T_l + B\omega) + \frac{d\omega}{dt} - m_\omega e_\omega - \lambda_{\omega 1} \text{sign}(S_\omega)) \quad (18)$$

همچنین، بر اساس معادله های (۱۵) قانون های کنترل نهایی به صورت زیر خواهند بود:

$$V_{sd} = Ri_d - L_q P\omega i_q - L_q m_d e_d - \lambda_d \text{sign}(S_d) \quad (19)$$

$$V_{sq} = Ri_q + L_d \omega i_d + P\omega \phi + L_q i_{sq}^* - L_q m_q e_q - \lambda_q \text{sign}(S_q)$$

با جایگذاری معادله های (۱۸) و (۱۹) در (۱۶) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \dot{e}_d = -m_d e_d - \frac{\lambda_d}{L_d} \text{sign}(S_d) \\ \dot{e}_q = -m_q e_q - \frac{\lambda_q}{L_q} \text{sign}(S_q) \\ \dot{e}_\omega = -m_\omega e_\omega - \lambda_{\omega 1} \text{sign}(S_\omega) \end{cases} \quad (20)$$

حال تابع کاندید لیاپانوف مثبت معین زیر در نظر گرفته می شود

$$V = \frac{1}{2} (e_\omega^2 + e_d^2 + e_q^2) \quad (21)$$

مشتق تابع کاندید لیاپانوف بالا عبارت است از:

$$\dot{V} = e_\omega \dot{e}_\omega + e_d \dot{e}_d + e_q \dot{e}_q \quad (22)$$

با جایگذاری معادله های (۲۰) در (۲۲)، مشتق تابع کاندید لیاپانوف به صورت معادله زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e_\omega (-m_\omega e_\omega - \lambda_{\omega 1} \text{sign}(s_\omega)) \\ & + e_d (-m_d e_d - \frac{\lambda_d}{L_d} \text{sign}(s_d)) \\ & + e_q (-m_q e_q - \frac{\lambda_q}{L_q} \text{sign}(s_q)) \end{aligned} \quad (23)$$

بنابراین، با توجه به تئوری پایداری لیاپانوف [۱۱]، برای اطمینان از پایداری کنترل کننده، پارامترهای m_ω ، m_d و m_q به صورت زیر تعیین می شوند:

$$\begin{cases} m_\omega > \left| \frac{\lambda_{\omega 1}}{e_\omega} \text{sign}(S_\omega) \right|_{\max} \\ m_d > \left| \frac{\lambda_d}{L_d e_d} \text{sign}(S_d) \right|_{\max} \\ m_q > \left| \frac{\lambda_q}{L_q e_q} \text{sign}(S_q) \right|_{\max} \end{cases} \quad (24)$$

که در نهایت رابطه زیر را نتیجه می دهد:

$$\dot{V} < 0 \quad (25)$$

همان طور که از (۲۳)، (۲۴) و (۲۵) مشخص است مشتق تابع لیاپانوف انتخابی به طور محلی منفی بوده ($\dot{V} < 0$) و بنابراین اثبات می شود که SMC طراحی شده در حالت حلقه بسته پایدار است و متغیرهای e_ω ، e_d و e_q به یک بازه به دلخواه کوچک حول صفر میل خواهند کرد. کنترل کننده طراحی شده در این بخش برای حالت بدون

$$\frac{L_q}{L_d} P \hat{i}_q S_1 - \frac{L_d}{L_q} P \hat{i}_d S_2 - \frac{\phi}{L_q} P S_2 - \frac{\dot{\omega}_e}{\gamma} = 0 \quad (32)$$

$$S^T \phi \text{sign}(S) > 0 \quad (33)$$

شرط معادله (۳۱) بیان می‌کند که مقادیر ویژه $(A - \zeta)$ باید سمت چپ محور موهومی قرار بگیرند. در نتیجه می‌توان بهره‌های K_{11} و K_{22} در ماتریس K را با استفاده از روش‌های کلاسیک جابجایی قطب تعیین کرد. از معادله (۳۱) می‌توان سرعت (ثابت) تخمینی رتور $(\hat{\omega})$ را به‌صورت زیر حاصل کرد:

$$\dot{\omega} = \gamma \left[-\frac{L_q}{L_d} P \hat{i}_q S_1 + \frac{L_d}{L_q} P \hat{i}_d S_2 + \frac{\phi}{L_q} P S_2 \right] dt \quad (34)$$

در این صورت موقعیت زاویه‌ای رتور نیز به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{\theta} = \int \dot{\omega} dt \quad (35)$$

معادله (۳۴) و (۳۵) در واقع حسگر مجازی سرعت PMSM هستند. که قابلیت ایجاد روش کنترل بدون حسگر سرعت PMSM را دارند.

۲-۵ تعیین بهره‌های ماتریس‌های K و ϕ

رویتگر معادله (۲۶) در مرجع [۱۳] برای ایجاد روش کنترل بدون حسگر IPMSM استفاده شده که در این مقاله این رویتگر برای PMSM باز طراحی و تغییر داده شده است. بنابراین، برای تعیین بهره ماتریس‌های K و ϕ می‌توان به بخش‌های ۳-۳ و ۴-۲ مرجع [۱۳] مراجعه کرد.

۳-۵ تولید حسگرهای جریان به‌صورت مجازی

از آنجایی که روش کنترل برداری PMSM به‌شدت به حسگرهای جریان وابسته است، بنابراین، در صورت بروز عیب برای این حسگرها کنترل برداری به‌کلی مختل می‌شود. از این‌رو برای اینکه طرح FTC این مقاله در برابر عیب‌های حسگر جریان هم مقاوم شود، لازم است تا حسگرهای جریان نیز به‌صورت مجازی در اختیار SMC قرار بگیرند.

بر اساس معادله (۱)، متغیرهای جریان $\hat{i}_q$ و $\hat{i}_d$ به ولتاژهای u_q و u_d و سرعت موتور وابسته هستند. بنابراین، به‌سادگی می‌توان جریان‌های $\hat{i}_q$ و $\hat{i}_d$ را توسط یک SMO بسیار ساده تخمین زد. بر اساس معادله (۱) و با استفاده از ولتاژهای u_q و u_d و با فرض قابل اندازه‌گیری بودن سرعت موتور، جریان‌های $\hat{i}_q$ و $\hat{i}_d$ بر اساس SMO زیر تخمین می‌شوند:

همچنین، S سطح لغزش رویتگر و برابر با خطای تخمین متغیرهای

حالت $(\hat{i}_q$ و $\hat{i}_d)$ بوده و به‌صورت ماتریسی زیر مفروض هستند:

$$S = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_d - \hat{i}_d \\ i_q - \hat{i}_q \end{bmatrix}$$

رویتگر معادله (۲۶) شامل دو ترم خطی و غیرخطی پس‌خور است که این دو ترم، ردیابی متغیرهای جریان استاتور PMSM را سریع‌تر می‌کنند.

هنگامی که حالت لغزشی ایجاد می‌شود، خطای تخمین حالت‌ها روی سطوح لغزش قرار می‌گیرد و در $t \rightarrow \infty$ به سمت صفر میل می‌کند ($S = e = 0$). علاوه‌براین، به دلیل رویتگر مدل‌لغزشی سیستم کلی در برابر اغتشاش‌ها و نامعینی‌های پارامتری موتور مقاوم خواهد شد. حال با توجه به نظریه پایداری لیاپانوف و با در نظر گرفتن تابع مثبت معین زیر [۱۲]:

$$V = \frac{1}{2} (S^T S + \frac{\omega_e^2}{\gamma}) \quad (27)$$

که در آن $\gamma > 0$ و $\omega_e = \omega - \hat{\omega}$ است. با فرض اینکه سرعت رتور ثابت است مشتق معادله (۲۷) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{V} = S^T \dot{S} - \left(\frac{\dot{\omega} - \hat{\omega}}{\gamma} \right) \omega_e \quad (28)$$

با توجه به معادله‌های (۲) و (۲۶)، عبارت است از:

$$\dot{S} = \begin{bmatrix} \dot{i}_d - \hat{\dot{i}}_d \\ \dot{i}_q - \hat{\dot{i}}_q \end{bmatrix} = (A - \zeta) S \quad (29)$$

$$+ P \omega_e \begin{bmatrix} \frac{L_q}{L_d} \hat{i}_q \\ -\frac{L_d}{L_q} \hat{i}_d - \frac{\phi}{L_q} \end{bmatrix} - \phi \text{sign}(S)$$

بطوری که:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_d} & \frac{L_q}{L_d} P \omega \\ -\frac{L_d}{L_q} P \omega & -\frac{R}{L_q} \end{bmatrix}$$

با جایگذاری معادله (۲۹) در (۲۸) بدست می‌آید

$$\begin{aligned} \dot{V} &= S^T (A - \zeta) S \\ &- \omega_e \left[\frac{L_q}{L_d} P \hat{i}_q S_1 - \frac{L_d}{L_q} P \hat{i}_d S_2 - \frac{\phi}{L_q} P S_2 - \frac{\dot{\omega} - \hat{\omega}}{\gamma} \right] \\ &- S^T \phi \text{sign}(S) \end{aligned} \quad (30)$$

حال با توجه به شرایط پایداری لیاپانوف، برای معادله (۳۰) باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$S^T (A - \zeta) S < 0 \quad (31)$$

از آنجایی که $\dot{V} < 0$ و کران دار است بنابراین، می توان گفت، i_{eq} و i_{ed} نیز کران دار هستند. با توجه به لم باربالات^۱، به راحتی می توان مشاهده کرد که i_{eq} و i_{ed} در $t \rightarrow \infty$ به صفر همگرایی دارند [۱۱] در نتیجه هنگامی که لغزش صورت می گیرد، خطای تخمین رویتگر بر روی سطح لغزش قرار می گیرد ($S_{\omega 1} = 0$) و به طور مجانبی برابر صفر می شود. رویتگر نیز در برابر اغتشاش و نامعینی پارامترهای موتور مقاوم و پایدار خواهد شد.

۴-۵ طرح نهایی FTC

شکل ۱ پیکربندی فرآیند FTC حسگرهای درایو PMSM ارایه شده در این مقاله را شرح می دهد. با استفاده از این ساختار پیشنهادی می توان میان عملکرد کنترل کننده عادی و کنترل کننده شرایط معیوب حسگرها، سازگاری ایجاد کرد. در این ساختار $\bar{i}_q$ و $\bar{\omega}$ در واقع سیگنال های پسخور SMC های جریان و سرعت PMSM هستند که بسته به شرایط حسگرها (سالم و یا معیوب) این سیگنال ها با حسگرهای واقعی یا مجازی بر اساس توضیحات بخش ۳ و رابطه (۲) جایگزین می شوند. لازم به ذکر است، بر اساس شبیه سازی انجام شده اگر برای همه ی حسگرهای پسخور عیبی رخ بدهد، طرح FTC به دلیل ساختار تودرتویی که دارد قادر است همه حسگرهای پسخور را به صورت مجازی تولید کند و بر اساس رابطه (۲) در اختیار درایو قرار دهد.

نکته ۱: سرعت و موقعیت رتور PMSM هر دو از یک حسگر مانند اینکدر اندازه گیری می شوند. بنابراین، هنگامی که FTC عیبی را برای این حسگر تشخیص می دهد، موقعیت زاویه ای رتور (θ) را نیز با موقعیت زاویه ای تخمین شده توسط SMO ($\hat{\theta}$) جایگزین می کند.

۶- نتایج شبیه سازی

در این بخش طرح FTC پیشنهادی این مقاله بر اساس شکل ۲، در نرم افزار سیمولینک متلب^۲ پیاده سازی شده است. به منظور نمایش بهتر عملکرد طرح FTC پیشنهادی، سه آزمایش در نظر گرفته و شرح داده شده است. در آزمایش اول با فرض اینکه تمامی حسگرهای پسخور در شرایط عادی خود هستند، رویتگرها و کنترل کننده های مد لغزشی طراحی شده در برابر تغییر ناگهانی سرعت مرجع و گشتاور بار (T_l) بررسی شده اند. در آزمایش دوم با ایجاد عیب برای حسگر سرعت و در آزمایش سوم با ایجاد عیب برای حسگرهای جریان، در ثانیه ۲ شبیه سازی، عملکرد FTC پیشنهادی بررسی شده است. لازم به ذکر است که زمان شبیه سازی ۶ ثانیه و با دوره تناوب نمونه برداری ۰/۰۱ ثانیه در نظر گرفته شده است. همچنین، پارامترهای نامی PMSM مورد آزمایش در جدول ۱ بیان شده است.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{i}}_{d1} &= -\frac{R}{L_d}\hat{i}_{d1} + \frac{L_q}{L_d}P\hat{\omega}\hat{i}_{q1} + \frac{u_d}{L_d} \\ \dot{\hat{i}}_{q1} &= -\frac{R}{L_q}\hat{i}_{q1} + \frac{L_d}{L_q}P\hat{\omega}\hat{i}_{d1} - P\hat{\omega}\phi + \frac{u_q}{L_q} \\ \dot{\hat{\omega}} &= a\phi\hat{i}_{q1} + a(L_d - L_q)\hat{i}_{d1}\hat{i}_{q1} - dT_l \\ &\quad - dB\hat{\omega} + v_1\text{sign}(S_{\omega 1}) \\ \dot{\hat{\theta}} &= \hat{\omega}\end{aligned}\quad (36)$$

که در آن $\hat{i}_{d1}$ و $\hat{i}_{q1}$ جریان های تخمین شده استاتور هستند که بدون وابستگی به حسگرهای جریان تخمین زده می شوند و یا به عبارتی حسگرهای مجازی جریان هستند. v_1 بهره طراحی رویتگر است. حال با توجه به تئوری پایداری لیپانوف و با در نظر گرفتن تابع مثبت معین زیر در مورد پایداری رویتگر معادله (۳۶) بحث می شود:

$$V = \frac{1}{2}S_{\omega 1}^2 \quad (37)$$

که $S_{\omega 1}$ سطح لغزش مد لغزشی و برابر با خطای تخمین رویتگر و به صورت زیر است:

$$S_{\omega 1} = \omega - \hat{\omega} \quad (38)$$

مشتق زمانی معادله (۳۸) به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{V} = S_{\omega 1}\dot{S}_{\omega 1} \quad (39)$$

مشتق سطح لغزش ($S_{\omega 1}$) به صورت:

$$\begin{aligned}\dot{S}_{\omega 1} &= a\phi(i_q - \hat{i}_{q1}) + a(L_d - L_q)\hat{i}_d(i_q - \hat{i}_{q1}) \\ &\quad + a(L_d - L_q)(i_d - \hat{i}_{d1})\hat{i}_{q1} - d(\omega - \hat{\omega}) - v_1\text{sign}(S_{\omega 1}) \\ &= a(L_d - L_q)\left[\left(\frac{\phi}{L_d - L_q} + i_d\right)i_{eq} + i_{ed}\hat{i}_{q1}\right] \\ &\quad - dS_{\omega 1} - v_1\text{sign}(S_{\omega 1})\end{aligned}\quad (40)$$

به طوری که:

$$i_{ed} = i_d - \hat{i}_d \quad i_{eq} = i_q - \hat{i}_q \quad (41)$$

حال با جایگذاری (۴۰) در (۳۹)

$$\begin{aligned}\dot{V} &= S_{\omega 1}a(L_d - L_q)\left[\left(\frac{\phi}{L_d - L_q} + i_d\right)i_{eq} + i_{ed}\hat{i}_{q1}\right] \\ &\quad + S_{\omega 1}^2(-d) - S_{\omega 1}v_1\text{sign}(S_{\omega 1})\end{aligned}\quad (42)$$

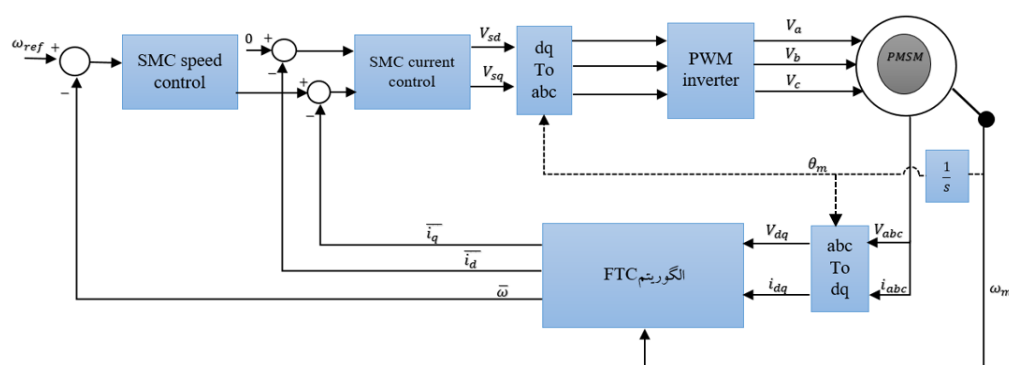
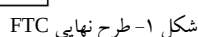
بدست می آید. در نهایت برای برقراری پایداری لیپانوف، بهره v_1

به صورت زیر تعیین می شود:

$$v_1 > \left|a(L_d - L_q)\left[\left(\frac{\phi}{L_d - L_q} + i_d\right)i_{eq} + i_{ed}\hat{i}_{q1}\right]\right|_{\max} \quad (43)$$

¹ Barbalat Lemma

² MATLAB/ SIMULINK



شکل ۲- بلوک دیاگرام کلی طرح FTC پیشنهادی

بهره‌های مدهای لغزشی به صورت زیر هستند:

$$\lambda_d = 3100, \lambda_a = 3050, \lambda_{\omega 1} = 1100, m_{\omega} = 10,$$

$$m_d = 20, m_a = 15, \phi_{11} = \phi_{22} = 1900,$$

$$\zeta_{11} = \zeta_{22} = 100, \gamma = 200$$

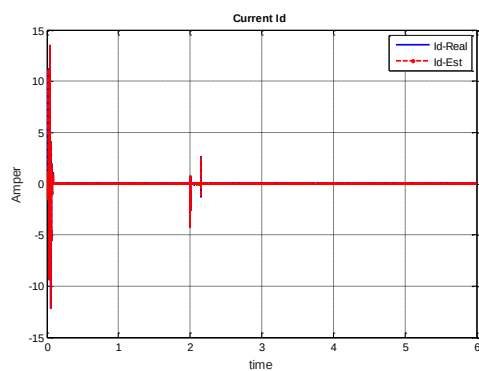
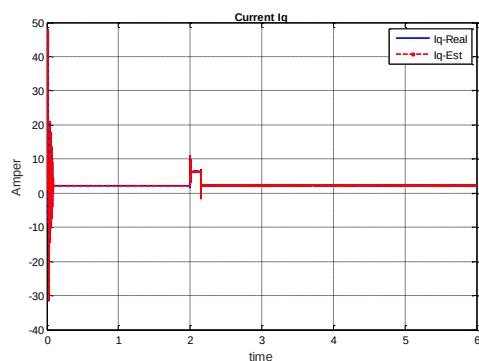
جدول ۱- یارامترهای PMSM

پارامتر	واحد	مقدار
مقاومت استاتور (R)	Ω	۳٫۳
تعداد زوج قطب (P)	جفت قطب	۳
اندوکناس استاتور (L_q)	H	۰٫۰۲۷
اندوکناس استاتور (L_q)	H	۰٫۰۳۳۹
شار آهنربای دائم (φ)	Wb	۳۴۱ ٫۰
اینرسی رتور (J)	$kg.m^2$	۰٫۰۳۷
گشتاور بار (T_l)	$N.m^2$	۲

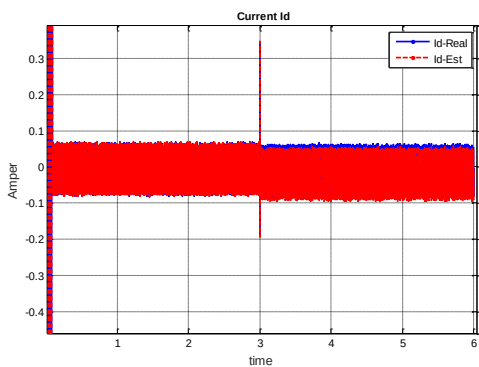
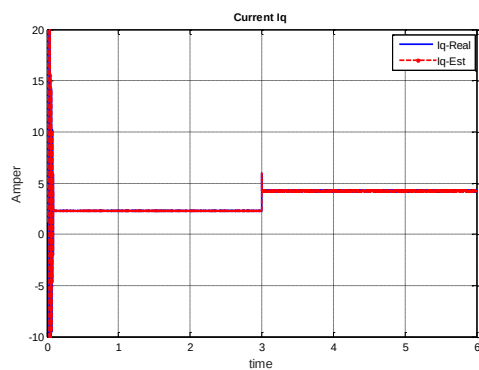
۱-۶ عملکرد FTC در شرایط عادی حسگرها

در این بخش عملکرد SMC و SMOهای سرعت و جریان طراحی شده در دو شرایط کاری متفاوت PMSM آزمایش شده‌اند. برای این

شده و تخمین زده شده PMSM توسط SMC و SMO در شرایط تغییر ناگهانی
گشتاور بار در ثانیه ۲.

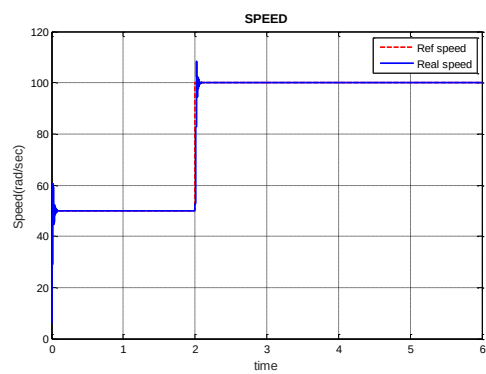


(الف)

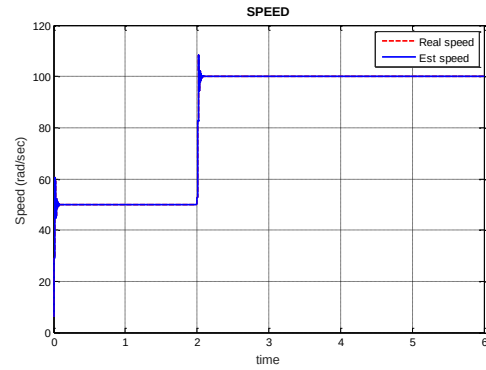


(ب)

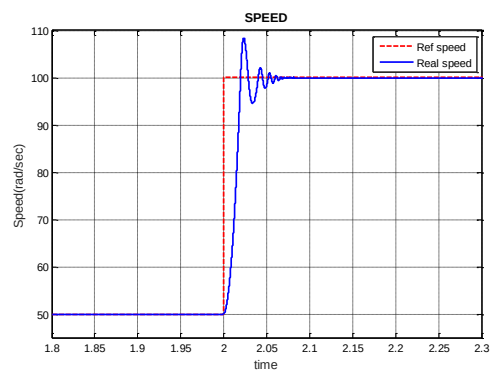
شکل ۴- جریان های استاتور کنترل شده و تخمین زده شده توسط کنترل کننده و
رویتگر مد لغزشی در شرایط الف: تغییر ناگهانی سرعت مرجع و ب: تغییر
ناگهانی گشتاور بار



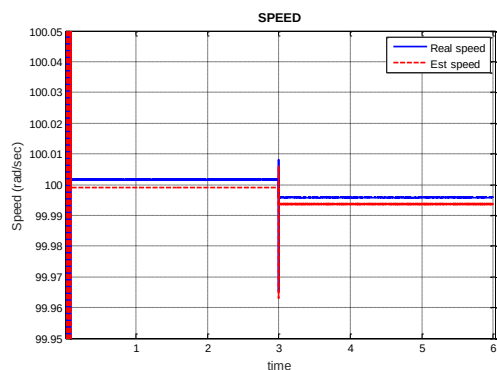
(الف)



(ب)



(ج)

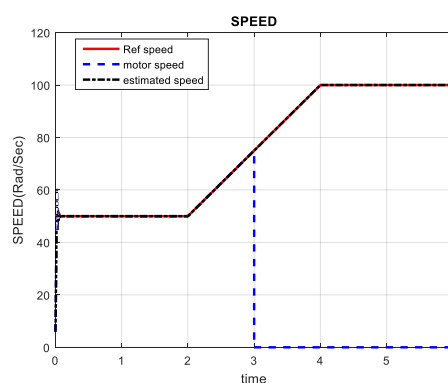


(د)

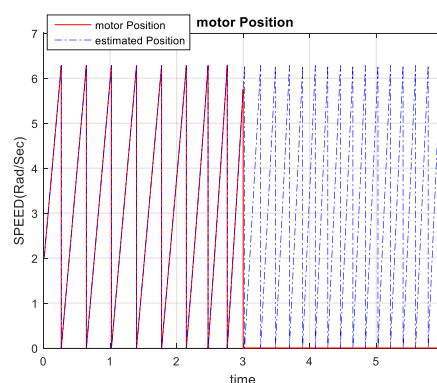
شکل ۳- ردیابی سرعت مرجع توسط مدهای لغزشی (کنترل کننده و رویتگر)
الف: ردیابی سرعت مرجع PMSM توسط SMC ب: تخمین سرعت مرجع
توسط SMO تولید کننده حسگر مجازی سرعت با شرایط تغییر سرعت مرجع
به صورت ناگهانی، ج: تصویر بزرگ نمای شده شکل (الف)، د: سرعت کنترل

۲-۶ عملکرد FTC در شرایط معیوب حسگر سرعت

در این بخش سرعت PMSM در ثانیه ۲ از سرعت ۵۰ با یک شیب ملایم به ۱۰۰ رادیان بر ثانیه تغییر پیدا کرده و در ثانیه ۳، حسگر سرعت در اثر عیب قطع شده است. با توجه به شکل ۵ (الف)، عیب قطع حسگر سرعت هنگامی که سیگنال سرعت مرجع در حال افزایش است بصورت ناگهانی برای حسگر اتفاق افتاده و بلافاصله FTC با تشخیص عیب، روش کنترل بدون حسگر را برای PMSM در نظر گرفته است. در شکل ۵ (ب)، نیز می توان مشاهده کرد که SMO حسگر مجازی سرعت طراحی شده، زاویه رتور را قبل از وقوع عیب قطع حسگر (قبل از زمان ۳) به خوبی ردیابی کرده است. بر اساس شکل ۵ (الف) سرعت تخمینی سرعت PMSM را پس از اعمال عیب به حسگر سرعت با کیفیت بالایی ردیابی کرده است به طوری که نمی توان اختلافی در سرعت PMSM در قبل و بعد از اعمال عیب به حسگر سرعت مشاهده کرد. به دلیل استفاده از SMO طراحی شده در بخش ۵-۱ است سرعت های به خوبی تخمین خورده اند. در مراجع [۱۵ و ۱۶] از فیلتر کالمن که تخمینگری مرسوم برای تخمین سرعت موتورهای الکتریکی است استفاده شده است. در صورت مقایسه روش ارایه شده با نتایج حاصله در این مراجع مشاهده می شود که تخمینگرهای استفاده شده در این مراجع دقت و سرعت همگرایی کمتری به نسبت SMO طراحی شده دارند.



(الف)



(ب)

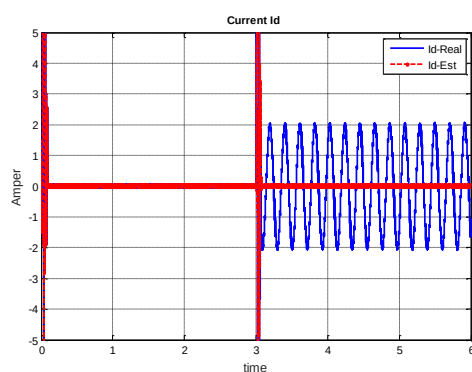
شکل ۵- الف: اعمال عیب قطع حسگر سرعت در ثانیه ۳ و سرعت ردیابی شده PMSM توسط FTC ب: اعمال عیب قطع حسگر سرعت در ثانیه ۳ و موقعیت زاویه ای تخمینی شده رتور توسط FTC

۳-۶ عملکرد FTC در شرایط معیوب حسگرهای

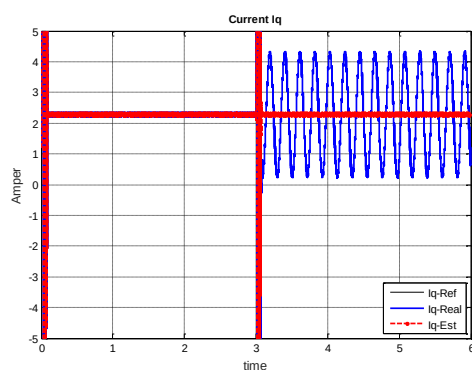
جریان

به منظور نمایش بهتر عملکرد FTC در برابر عیب حسگرهای جریان، به هر دو حسگر اندازه گیری جریان i_d و i_q در ثانیه ۳ شبیه سازی به صورت هم زمان یک سیگنال سینوسی با فرکانس ۳۰ رادیان بر ثانیه و دامنه ۲ به عنوان عیب در حسگر اعمال شده است. نتایج عملکرد FTC در برابر این عیب را می توان در شکل ۶ مشاهده کرد. لازم به ذکر است در این آزمایش سرعت مرجع PMSM برابر ۱۰۰ رادیان بر ثانیه در نظر گرفته شده است.

شکل ۶ (الف) و (ب)، به ترتیب رفتار خروجی حسگرهای جریان و حسگرهای جریان مجازی را نشان می دهند. بر اساس این شکل ها، خروجی حسگرهای جریان واقعی پس از اعمال عیب دچار اغتشاش شده اند و دیگر نمی توانند به عنوان حسگرهای پسخور برای SMC استفاده شوند. در این صورت FTC با تشخیص اینکه حسگرهای جریان دچار عیب شده اند بلافاصله حسگرهای مجازی جریان را به جای حسگرهای واقعی قرار می دهد. همان طور که از این شکل ها مشاهده می شود، حسگرهای مجازی جریان پس از بروز عیب شرایطی یکسانی با حسگرهای واقعی دارند.



(الف)



(ب)

شکل ۶- نتایج شبیه سازی عملکرد FTC پیشنهادی در برابر عیب حسگرهای جریان الف: حسگر واقعی و مجازی جریان i_d ب: حسگر واقعی و مجازی جریان i_q

که در آن θ_e بیان کننده موقعیت زاویه‌ای رتور و برابر با $P\theta_e = P\theta$ ، P نشان دهنده تعداد زوج قطب‌های موتور است. برای توضیحات بیشتر می‌توان به مرجع [۱۷] مراجعه کرد.

۷- نتیجه گیری

در این مقاله یک کنترل کننده مد لغزشی تحمل پذیر عیب برای مقاوم ساختن درایو PMSM در برابر عیب‌های حسگری طراحی شده است. برای رسیدن به این هدف، یک کنترل کننده مد لغزشی (SMC) برای کنترل برداری PMSM استفاده شده است. هنگامی که برای حسگرهای اندازه گیری سرعت رتور و جریان‌های استاتور PMSM عیبی رخ می‌دهد، SMC به سیگنال‌های پسخور دسترسی نداشته و ناپایدار می‌شود. برای حل این مشکل دو رویکرد مد لغزشی با ساختار تو در تو به شکلی طراحی شده‌اند تا بدون دسترسی به حسگرهای پسخور، سرعت و جریان‌های PMSM را تخمین بزنند یا به عبارت دیگر حسگرها را به صورت مجازی ایجاد می‌کنند. همچنین، یک الگوریتم تشخیص عیب به نحوی تنظیم شده است که با تشخیص حسگر معیوب، حسگر مجازی را جایگزین حسگر معیوب می‌کند و در این صورت SMC می‌تواند براساس روش کنترل بدون حسگر پایداری حلقه بسته PMSM را ایجاد کند. پایداری سیستم حلقه بسته کلی با استفاده از نظریه پایداری لیاپانوف بررسی شده و نتایج شبیه سازی عددی عملکرد صحیح FTC را تأیید کرده‌اند.

تقدیر و تشکر

این مقاله مستخرج از طرح " کاهش اثر نامعینی‌ها و کنترل رفتارهای آشوبی در موتور سنکرون مغناطیس دایم بوسیله روشهای کنترل ضربه‌ای (کد طرح ۹۳۰۱۵۷۰۵)" بوده و تحت حمایت صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور می‌باشد.

مراجع

- [1] M. Abedi, and S. Nasrolahi, "Design of an autonomous fault tolerant attitude determination system for a three axis satellite based on derivation of different rotation matrices and computation of variance measures," Journal of Control, vol. 9, no. 3, pp. 14-30, 2015.
- [2] Y. Huangfu, W. Liu, and R. Ma, "Permanent magnet synchronous motor fault detection and isolation using second order sliding mode observer," Industrial Electronics and Applications, ICIEA , 3rd IEEE Conference, pp. 639-644, 2008.
- [3] H. Ebadiyani and M. Ayati, "Design and implementation of PID controller for permanent magnet synchronous motor," 9th Symposium on Advances in Science & Technology (9thSASTech), Commission on Electrical and Communication Engineering, Mashhad, Iran, January 29, 2015.

نتایج شکل ۶ بیانگر این است که SMO طراحی شده در بخش ۵-۲ نیز همانند SMO طراحی شده در بخش ۵-۱ نیز از دقت و سرعت مناسبی برخوردار است. همچنین، به دلیل استفاده از سطح لغزش انتگرالی پدیده چترینگ در تخمین سیگنال‌ها کاهش یافته است. بر اساس تحقیقاتی انجام شده، تعداد اندکی مقاله برای جبران عیب حسگرهای جریان PMSM وجود دارد که در آنها از SMO استفاده نشده است و این در حالی است که استفاده از SMO به عملکرد بهتری منجر می‌شود.

نکته ۲: برای تشخیص وقوع عیب در هر لحظه مانده‌های تعریف شده در بخش ۳ محاسبه و با یک سطح آستانه r_0 مقایسه می‌شوند. در صورتی که یکی از مانده‌ها از سطح آستانه بزرگتر باشد الگوریتم از وقوع عیب آگاه می‌شود. در این حالت حسگرهای مجازی و الگوریتم، FTC طراحی شده با توجه به فرمول (۲) ورودی مناسب را به موتور اعمال می‌کنند. سپس، با ایجاد یک آلارم، کاربر را از عیب اتفاق افتاده برای سیستم آگاه می‌سازد.

نکته ۳: با توجه به نتایج شبیه سازی، مشاهده می‌شود که سیگنال‌های کنترلی و رویت شده در مدت زمان کوتاهی به مقادیر مرجع خود همگرا شده‌اند و به این معنی است که خطاهای ردیابی در مدت زمان کوتاهی حول نقطه تعادل صفر قرار گرفته‌اند. بنابراین، می‌توان گفت با توجه به اثبات‌های انجام شده در بخش‌های ۴-۱، ۵-۲، ۵-۳ و نتایج شبیه سازی، سیستم حلقه بسته با کنترل کننده و رویکردهای مد لغزشی طراحی شده پایدار بوده و سیگنال‌های کنترلی و تخمین شده به صورت مطلوبی سیگنال‌های مرجع خود را ردیابی کرده‌اند.

نکته ۴: برای کاهش اثرات چترینگ از سطح لغزش انتگرالی استفاده شده است. با این حال، با وجود استفاده از تابع علامت ($sign$) در قانون‌های کنترل مد لغزشی نمی‌توان اثرات چترینگ را در ردیابی سیگنال‌های مرجع (ردیابی جریان‌ها و سرعت PMSM و همچنین تخمین متغیرهای حالت PMSM) را به کلی از بین ببرد. بنابراین، از تابع sat (اشباع^۱) به همراه بهره‌های مناسب (تنظیم حدود تابع اشباع) به جای تمامی تابع‌های علامت در شبیه سازی استفاده شده است. با توجه به نتایج شبیه سازی، سیگنال‌های ردیابی شده توسط مدهای لغزشی از کیفیت بسیار خوبی برخوردار هستند.

پیوست ۱: تبدیل پارک

T_p ، ماتریس تبدیل پارک است

$$i_{dq0} = T_p i_{\alpha\beta\gamma} \Rightarrow \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_e) & \sin(\theta_e) & 0 \\ -\sin(\theta_e) & \cos(\theta_e) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_\gamma \end{bmatrix}$$

^۱ Saturation

- [11] M. L. Corradini, G. Ippoliti, S. Longhi, and G. Orlando, "A quasi-sliding mode approach for robust control and speed estimation of PM synchronous motors," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 59, pp. 1096-1104, 2012.
- [12] H. K. Khalil and J. Grizzle, *Nonlinear Systems*, vol. 3: Prentice hall New Jersey, 1996.
- [13] J.-J. Ren, Y.-C. Liu, N. Wang, and S.-Y. Liu, "Sensorless control of ship propulsion interior permanent magnet synchronous motor based on a new sliding mode observer," *ISA transactions*, vol. 54, pp. 15-26, 2015.
- [14] S. Diao, Z. Makni, J.-F. Bisson, "Sensor fault diagnosis for improving the availability of electrical drives," *IECON Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, pp. 3108-3113, 2013.
- [15] G. H. B. Foo, X. Zhang, and D. M. Vilathgamuwa, "A sensor fault detection and isolation method in interior permanent-magnet synchronous motor drives based on an extended Kalman filter," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 60, no. 8, pp. 3485-3495, 2013.
- [16] C. Choi, K. Lee, and W. Lee, "Observer-based phase-shift fault detection using adaptive threshold for rotor position sensor of permanent-magnet synchronous machine drives in electromechanical brake," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 62, no. 3, pp. 1964-1974, 2015.
- [17] L. Zhu, *Adaptive control of sinusoidal brushless DC motor actuators*, Michigan Technological University, ProQuest, 2008.
- [4] H. Mekki, O. Benzineb, D. Boukhetala, M. Tadjine, and M. Benbouzid, "Sliding mode based fault detection, reconstruction and fault tolerant control scheme for motor systems," *ISA transactions*, doi: 10.1016/j.isatra, 2015.
- [5] A. Akrad, M. Hilairer, and D. Diallo, "Design of a fault-tolerant controller based on observers for a PMSM drive," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 58, pp. 1416-1427, 2011.
- [6] A. Isidor, *Nonlinear Control Systems*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [7] G. H. B. Foo, X. Zhang, and D. M. Vilathgamuwa, "A sensor fault detection and isolation method in interior permanent-magnet synchronous motor drives based on an extended Kalman filter," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 60, pp. 3485-3495, 2013.
- [8] F. Grouz, L. Sbita, and M. Boussak, "Current sensors gain faults detection and isolation based on an adaptive observer for PMSM drives," *10th International Multi-Conference Systems, Signals & Devices (SSD)*, pp. 1-6, 2013.
- [9] S. K. Kommuri, J. J. Rath, K. C. Veluvolu, and M. Defoort, "Robust fault-tolerant cruise control of electric vehicles based on second-order sliding mode observer," *14th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS) 2014*, pp. 698-703, 2014.
- [10] H. Nademi, F. Tahami, and M. Rezaei, "Fault tolerant IPMS motor drive based on adaptive backstepping observer with unknown stator resistance," *ICIEA 3rd IEEE Conference Industrial Electronics and Applications*, pp. 1785-1790, 2008.

طراحی جبران‌ساز ریدوم در حلقه هدایت با رویکرد شکل‌دهی پاسخ فرکانسی

مهدی خسروی سامانی^۱، سید محمدجواد معافی مدنی^۲، مهدی نیکوسخن^۳، ایمان محمدزمان^۴

^۱ دانشجوی دکتری هوافضا- دینامیک پرواز و کنترل، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر، mahdi.kh65@yahoo.com

^۲ فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، مجتمع برق و الکترونیک، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، javadmadany@yahoo.com

^۳ دانشجوی دکتری هوافضا- دینامیک پرواز و کنترل، دانشگاه صنعتی شریف، nikusokhan@ae.sharif.edu

^۴ استادیار، مجتمع برق و الکترونیک، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، mohammadzaman@mut.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۴/۱۲، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۵/۸/۵)

چکیده: ریدوم منجر به انحراف امواج راداری در رهگیرهای هدایت‌شونده راداری شده و در نتیجه باعث ناپایداری حلقه هدایت به‌خصوص در ارتفاع‌های بالایی می‌شود. بنابراین به یک جبران‌ساز که حلقه هدایت را پایدار کرده و در حضور خطای ریدوم منجر به کمترین خطای برخورد به هدف شود، نیاز است. از دیدگاه کنترل، ریدوم منجر به ایجاد یک پس‌خور ناخواسته شده که مشابه حلقه‌های پس‌خور مرسوم که در آن خروجی باید سیگنال کنترلی مطلوب را تعقیب کند، نمی‌باشد. در این مقاله ابتدا پاسخ حلقه‌بسته مطلوب هدایت مشخص شده و با رویکردی جدید پاسخ فرکانسی مسیر پیش‌رو به گونه‌ای شکل‌دهی می‌شود که نیازمندی‌های پایداری و عملکردی ارضا شود. شکل‌دهی پاسخ فرکانسی با استفاده از ابزار نامساوی ماتریسی خطی (LMI) انجام شده و به‌منظور انتخاب بهترین پاسخ فرکانسی از ابزار شکاف متریک وی (v-gap metric) استفاده شده‌است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که جبران‌ساز طراحی شده علاوه بر تأمین پایداری حلقه هدایت، خطای برخورد به هدف را هم به میزان چشمگیری کاهش می‌دهد.

کلمات کلیدی: خطای ریدوم، پایداری حلقه هدایت، شکل‌دهی حلقه، نامساوی ماتریسی خطی، شکاف متریک وی.

Design of Radome Compensator in Guidance Loop Using Frequency Response Shaping

Mahdi Khosravi Samani, Mohammad Javad Moafi Madani, Mahdi Nikusokhan, Iman Mohammadzaman

Abstract: Radome causes refraction of the incoming radar wave in radar-guided interceptors, thus having a destabilizing effect on the guidance loop, especially at high altitudes. Therefore, a compensator is required to maintain the stability of the guidance loop and causes minimum miss distance in the presence of radome error. From the control perspective, Radome causes an unwanted feedback that is not similar to the conventional feedback loops, in which output must follow a desired control signal. In this paper, the desired closed-loop response is determined first, then a novel approach is proposed to shape the frequency response of the feedforward path so that the stability and performance requirements are satisfied. Frequency response is shaped by linear matrix inequality (LMI) tools and v-gap metric is used to select the best frequency response. Simulation results show that the designed compensator drastically decreases the miss distance, while the stability is guaranteed.

Keywords: Radome error, guidance loop stability, loop shaping, linear matrix inequality, v-gap metric

فهرست علائم

 ε : زاویه خطای محور جستجوگر λ : زاویه خط دید

D: زاویه آنتن جستجوگر

 r : زاویه انحراف θ : زاویه پیچ رهگیر θ_H : زاویه طوقه (گیمبال)

R: شیب ریدوم

 K_{SI} : بهره پایدارساز جستجوگر T_1 : ثابت زمانی حلقه ردیابی جستجوگر V_M : سرعت رهگیر V_C : سرعت نزدیک‌شوندگی n_C : شتاب فرمان n_L : شتاب جانبی رهگیر n_T : شتاب هدف R_{TM} : فاصله نسبی رهگیر تا هدف

۱- مقدمه

بسیاری از رهگیرهای آشیانه‌یاب مجهز به جستجوگر راداری هستند. جستجوگر راداری، که وظیفه آن تخمین نرخ چرخش خط دید می‌باشد، در داخل پوششی به نام ریدوم قرار دارد. ریدوم، جستجوگر را در مقابل فشار هوا و دمای محیط محافظت می‌کند. اما از طرف دیگر، وجود ریدوم سبب می‌شود سیگنال دریافتی توسط جستجوگر قبل از رسیدن به آنتن منحرف و در نهایت باعث آشکارسازی همراه با خطا توسط جستجوگر شود. به عبارت دیگر پوشش ریدوم منجر به شکست پرتو بازتاب‌شده از هدف و در نتیجه جابجایی زاویه‌ای بردار هدف و ایجاد هدف ظاهری به جای هدف واقعی می‌شود.

همچنین اثر ریدوم از طریق طوقه^۱ جستجوگر باعث تزویج زاویه خط دید رهگیر با دینامیک بدنه می‌شود. به این معنا که زاویه خط دید اندازه‌گیری شده نه تنها به سینماتیک واقعی درگیری بلکه به زاویه طوقه جستجوگر نیز بستگی دارد. این پدیده باعث می‌شود با عبور سیگنال از پوشش ریدوم، تخمین نرخ چرخش خط دید با خطا انجام شود و موجب کاهش حاشیه پایداری و در برخی موارد، ناپایداری سیستم هدایت رهگیر می‌شود و افزایش چشمگیر خطای برخورد^۲ را به همراه خواهد داشت [۱]. بنابراین برای افزایش کارایی سیستم هدایت و کاهش خطای برخورد از روش‌های کالیبراسیون و جبران‌سازی اثر ریدوم استفاده می‌شود [۲].

مراجعی که به تحلیل و طراحی جبران‌ساز ریدوم پرداخته‌اند را به سه دسته کلی می‌توان تقسیم کرد. قدیمی‌ترین راهکار برای جبران‌سازی خطای ریدوم، افزایش ثابت زمانی سیستم هدایت رهگیر از طریق افزایش ثابت زمانی فیلتر نویز است. گرچه تحلیل و پیاده‌سازی این روش ساده می‌باشد، اما باعث افزایش خطای برخورد در مقابل مانور هدف می‌شود [۳] - [۵].

راهکار دوم جبران‌سازی خطای ریدوم، ذخیره کردن جداول پارامترهای جبران‌ساز در رایانه پرواز رهگیر است. در این روش، مقادیر خطای ریدوم در آزمایشگاه اندازه‌گیری می‌شود. کارایی این روش منوط به در اختیار داشتن امکانات آزمایشگاهی مناسب و ایجاد شرایط پرواز واقعی در آن است [۶] و [۸].

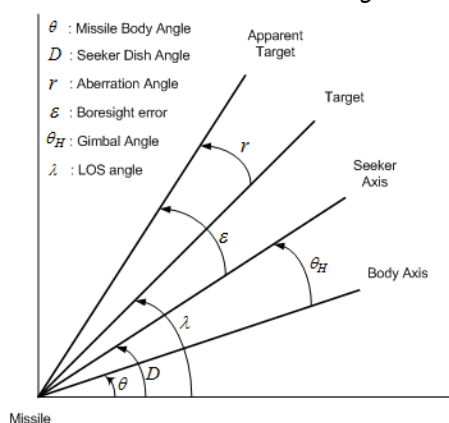
سومین راهکار برای کاهش اثر مخرب ریدوم شناسایی برخط و تخمین خطای ریدوم در حین پرواز می‌باشد. در [۹] حل تحلیلی خطای برخورد در روش هدایت ناوبری تناسبی با بازخورد سرعت زاویه بدنه، شتاب جانبی و نرخ آن در حضور اثر ریدوم (و تخمین شیب آن)، با استفاده از روش الحاقی استخراج شده‌است. در این مقاله تابع تبدیل از دستور شتاب به شتاب جانبی به صورت مرتبه اول و جستجوگر با یک مشتق‌گیر خالص مدل شده‌است. در مرجع [۷] تکنیکی ارائه شده‌است که شیب ریدوم را با استفاده از یک سیگنال دیتر^۳ غیرمخرب بر روی فرمان شتاب جانبی تخمین می‌زند. در مرجع [۳] و [۶] شیب ریدوم به صورت یک مجموعه‌ای از مقادیر گسسته مدل‌شده که برای هر مقدار شیب ریدوم یک فیلتر کالمن طراحی شده‌است. خروجی‌های فیلترهای کالمن با وزن‌های مشخصی با یکدیگر جمع شده و یک تخمین از شیب ریدوم به دست می‌آید. در مرجع [۱۰] اشاره شده‌است که یکی از مشکلات خطای ریدوم، مشاهده‌پذیری ضعیف و غیر قابل پیش‌بینی بودن آن است. در این مرجع ادعا شده که اگر هدف مانور نداشته باشد، می‌توان برای حل مشکلات ریدوم، از تخمین‌گر تطبیقی چند مدلی^۴ استفاده کرد و برای حالتی که مانور هدف وجود دارد، اطلاعات هدف از روی رادار زمینی به رهگیر ارسال می‌شود تا مشکلات مشاهده‌پذیری ضعیف سیستم حل شود. در مرجع [۱۱] برای تخمین خطای ریدوم از یک تخمین‌گر دو مرحله‌ای استفاده کرده‌است تا خطای ریدوم را از حالت‌های نامی رهگیر مستقل سازد. در مرجع [۱۲] توسط یک فیلتر ذرات تطبیقی نرخ چرخش خط دید با وجود خطای ریدوم تخمین زده شده‌است. این روش علاوه بر محاسبات سنگین نیاز به تخمین شتاب هدف نیز دارد. مرجع [۱۳] با ارائه یک الگوریتم فازی-تطبیقی و براساس فیلتر کالمن تعمیم‌یافته شیب ریدوم را تخمین می‌زند. این الگوریتم دارای دو سطح استنتاج فازی می‌باشد. در مرجع [۱۴] قانون هدایت فاز نهایی به صورت فازی و با ساختار PID طراحی شده‌است و نشان داده با در نظر گرفتن اثر ریدوم در مقایسه با قانون ناوبری تناسبی خطای برخورد کمتری حاصل می‌شود. مرجع

³ Dither⁴ Multiple adaptive estimator¹ Gimbal² Miss Distance

می شود. سپس نحوه تبدیل جبران سازی خطای ریدوم به یک مسئله کنترلی تعریف و جبران ساز مناسب به گونه ای طراحی می شود که علاوه بر افزایش پایداری حلقه هدایت در برابر عدم قطعیت ریدوم، عملکرد را نیز بطور محسوسی بهبود دهد. در نهایت از طریق شبیه سازی حلقه آشنایاب رهگیر، عملکرد جبران ساز ارزیابی می شود.

۲- بررسی اثر مخرب ریدوم بر حلقه هدایت

پوشش ریدوم منجر به شکست پرتو برگشتی از هدف و جابجایی زاویه ای بردار هدف می شود. تفاوت بین بردار هدف ظاهری (که در اثر شکست پرتوی بازگشتی می باشد) و بردار هدف واقعی را انحراف ریدوم می نامند. انحراف ریدوم پدیده ای با رفتار خطی در زاویه های کوچک و رفتار غیرخطی در زاویه های بزرگ می باشد [۱۷]. هندسه درگیری رهگیر و هدف در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. هندسه درگیری رهگیر و هدف [۴]

طبق شکل ۱ روابط زیر برقرار است.

$$\varepsilon = \lambda - D - r \quad (1)$$

$$D = \theta + \theta_H \quad (2)$$

همچنین بر اساس مرجع [۱۹] زاویه انحراف ریدوم با زاویه طوقه جستجوگر بصورت خطی متناسب است.

$$r = R \theta_H \quad (3)$$

که R را شیب ریدوم می نامند. در واقعیت شیب ریدوم مقدار ثابتی در طول پرواز ندارد و در یک بازه مشخص تغییر می کند لذا باید آن را به عنوان یک نوع عدم قطعیت در نظر گرفت.

در حالت کلی اثر ریدوم باید از دو جنبه پایداری و عملکرد بررسی شود. از نظر پایداری، اثر ریدوم کاهش پایداری و در مواقعی ناپایداری حلقه هدایت می باشد و از دیدگاه عملکرد، ریدوم باعث افت عملکرد تخمین نرخ چرخش خط دید می شود [۱۸]. دیگرام بلوکی حلقه هدایت رهگیر که در شکل ۲ نشان داده شده است را در نظر بگیرید.

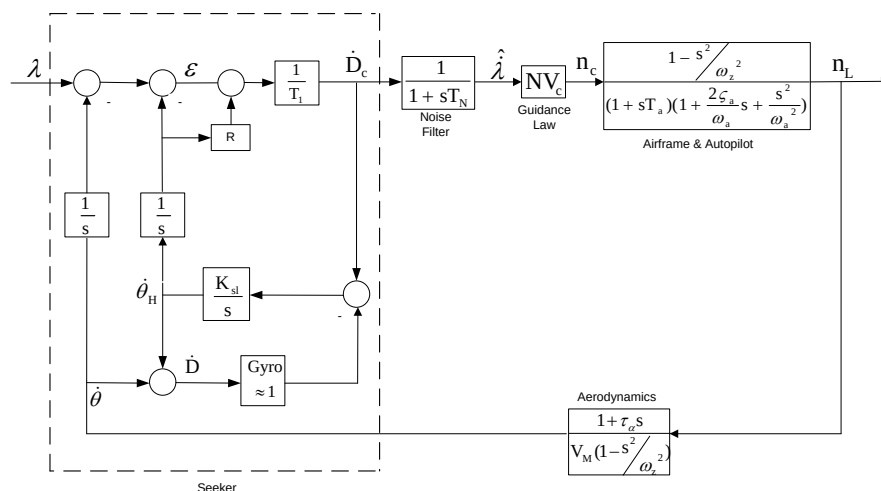
[۱۵] با اصلاح الگوریتم فیلتر کالمن چندگانه، شیب ریدوم را تخمین می زند. علی رغم تحقیقات گسترده در خصوص استفاده از تخمین گرهای جبران سازی اثر ریدوم، این روش به علت حجم محاسبات بالا، وابستگی شدید فیلتر کالمن به مدل و پیچیدگی آن دارای کاربرد عملیاتی نبوده اند. در صورتیکه بتوان مشابه رویکرد اول، با ارائه یک کنترل کننده مناسب در فضای فرکانس، پایداری و عملکرد مطلوب حلقه هدایت را در حضور عدم قطعیت ریدوم تضمین کرد، ارزش پیاده سازی و کاربردی بالایی دارد.

در این مقاله سعی می شود با کاربرد تئوری های کنترلی و استفاده از رویکردی جدید، جبران سازی اثر ریدوم در حضور عدم قطعیت انجام شود. مزیت استفاده از این روش در این است که می توان معیارهای کارایی را در قالب یک مسئله کنترلی تعریف نمود و با طراحی کنترل کننده مقاوم تمامی این معیارها را ارضا کرد. برای تبدیل این مسئله به یک مسئله کنترلی یک چالش مهم وجود دارد و آن این است که جبران سازی ریدوم شبیه مسائل رایج کنترلی نمی باشد. این امر به خاطر آن است که در این جا، حلقه پس خور از جنس پارازیتی بوده و پس خور کنترلی نمی باشد. یعنی برخلاف مسائل رایج کنترلی، هدف از طراحی جبران ساز، صفر کردن اختلاف ورودی و خروجی نمی باشد بلکه هدف جبران اثر مخرب ریدوم بر عملکرد حلقه هدایت می باشد که به تفصیل در متن بیان خواهد شد. این چالش کنترلی از آن جهت مهم است که دیگر نمی توان از معیارهای رایج کنترلی برای طراحی سیستم کنترل استفاده کرد. ابتدا برای حل این مسئله در روشی جدید برخلاف روش های مرسوم کنترل که پاسخ فرکانسی حلقه باز یا بسته سیستم شکل دهی می شود، پاسخ فرکانسی مسیر پیش رو شکل دهی خواهد شد. همچنین به منظور تعیین پاسخ مطلوب از ابزار شکاف متریکی وی استفاده شده است. سپس شکل دهی پاسخ فرکانسی که در حالت کلی، مساله پیچیده و زمان بری می باشد، تبدیل به یک مسئله نامساوی ماتریسی خطی می شود [۱۶] و نشان داده می شود با وجود اینکه شکل دهی پاسخ، نیاز به سعی و خطای فراوان و تجربه طراح دارد، با استفاده از نامساوی ماتریسی خطی به یک مسئله سیستماتیک تبدیل شده و به سادگی قابل انجام است. در نهایت با این رویکرد می توان به معیارهای مطلوب کنترلی دست یافت. از مزایای این روش می توان به درجه پایین جبران ساز و سادگی پیاده سازی اشاره کرد. از طرف دیگر می توان پاسخ سیستم حلقه بسته را به سادگی به شکل پاسخ مطلوب نزدیک کرد.

در این مقاله مدل سازی هندسه درگیری تنها در صفحه فراز انجام گرفته و از قانون هدایت ناوبری تناسبی حقیقی^۱ جهت تولید فرامین شتاب جانبی استفاده شده است. همچنین دینامیک بدنه هوایی و خلبان خودکار بوسیله یک تابع تبدیل مرسوم درجه سه بیان شده است.

سازماندهی مقاله بدین صورت است که در ابتدا اثر نامطلوب ریدوم بر پایداری و عملکرد حلقه هدایت رهگیرهای آشنایاب بررسی

¹ True Proportional Navigation



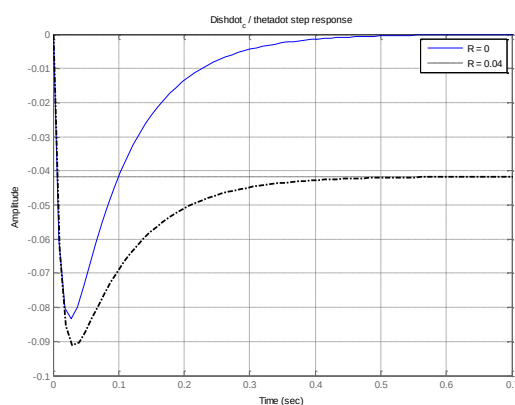
شکل ۲. دیاگرام بلوکی حلقه هدایت [۱]

$$G = \frac{1}{1+sT_N} \times NV_c \times \frac{1+\tau_a s}{V_M(1+sT_a)(1+\frac{2\zeta_a}{\omega_a}s+\frac{s^2}{\omega_a^2})} \quad (V)$$

با مقداردهی روابط فوق با استفاده از مقادیر جدول ۱، نمودار پاسخ پله آن به ازای $R = [0, 0.04]$ در شکل ۳ و شکل ۴ آورده شده است.

جدول ۱. مشخصات سیستم

symbol	value
N	3
τ_a	2 sec
$[T_1, T_N]$	$[0.1, 0.15]$ s
$[\omega_z, \omega_a]$	$[30, 20]$ rad/s
ζ_a	0.7
K_{sl}	100



شکل ۳. پاسخ پله $\frac{\dot{D}_c}{\dot{\theta}}$ به ازای شیب های ریدوم مختلف

با توجه به دیاگرام بلوکی فوق تابع تبدیل حلقه باز هدایت به صورت زیر می باشد.

$$OpenLoop = \frac{\dot{D}_c}{\dot{\theta}} \times \frac{1}{1+sT_N} \times NV_c \times \frac{1-s^2/\omega_z^2}{(1+sT_a)(1+\frac{2\zeta_a}{\omega_a}s+\frac{s^2}{\omega_a^2})} \times \frac{1+\tau_a s}{V_M(1-s^2/\omega_z^2)} \quad (4)$$

از آنجا که $\dot{D}_c / \dot{\theta}$ تابعی از شیب ریدوم است، تغییرات شیب ریدوم باعث تغییر حاشیه پایداری (حاشیه بهره و حاشیه فاز) خواهد شد. با رسم دیاگرام بود حلقه باز هدایت مشخص می شود که با افزایش شیب ریدوم از مقدار ایده آل (یا همان صفر)، حاشیه بهره و حاشیه فاز کاهش می یابد و از یک مقدار به بعد سیستم ناپایدار خواهد شد. در ادامه به بررسی اثر مخرب ریدوم بر عملکرد حلقه هدایت پرداخته شده است.

وظیفه اصلی جستجوگر تخمین نرخ چرخش خط دید ($\dot{\lambda}$) می باشد. در این مقاله (با توجه به شکل ۲) $\dot{D}_c$ تخمینی از نرخ چرخش خط دید در نظر گرفته شده است. ریدوم باعث ایجاد تزویج بین دینامیک جستجوگر و نرخ پیچش رهگیر می شود. از این تزویج به عنوان پس خور پارازیتی نام برده می شود [۱۹]. در واقع $\dot{\theta}$ را می توان یک عامل اغتشاشی بر دینامیک جستجوگر تلقی کرد. با توجه به دیاگرام بلوکی کلی حلقه هدایت توابع تبدیل زیر قابل استخراج می باشد.

$$\frac{\dot{D}_c}{\dot{\theta}} = \frac{-(\frac{s}{K_{sl}} + R)}{\frac{T_1}{K_{sl}}s^2 + T_1s + (1-R)} \quad (5)$$

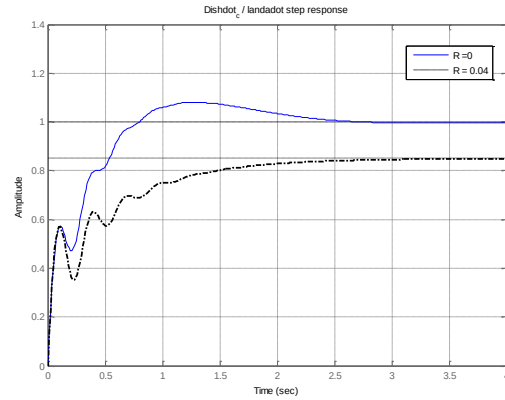
$$\frac{\dot{D}_c}{\dot{\lambda}} = \frac{-(\frac{s}{K_{sl}} + 1)}{(\frac{s}{K_{sl}} + 1)(T_1s + G) + (1-R)(1-G)} \quad (6)$$

که

ثانیاً با توجه به شکل ۲ ورودی حلقه هدایت زاویه خط دید (λ) و خروجی آن شتاب لحظه‌ای ($\ddot{n}_L$) رهگیر می‌باشد بنابراین ذاتاً این حلقه یک حلقه ردیابی نمی‌باشد. در نتیجه باید معیار عملکردی به صورت تحلیلی تعریف شود که با ارضای آن رفتار حلقه هدایت بهبود و در نتیجه خطای برخورد کاهش یابد.

در این قسمت با استفاده از یک نگرش جدید جبران‌سازی طراحی می‌شود که همزمان باعث بهبود پایداری و عملکرد حلقه هدایت شود. در این روش برخلاف روش‌های مرسوم کنترل که پاسخ فرکانسی حلقه باز یا بسته سیستم شکل‌دهی می‌شود، پاسخ فرکانسی مسیر پیش‌رو شکل‌دهی خواهد شد.

اگر حلقه پایدار ساز جستجوگر ایده‌آل فرض شود ($K_{sl} = \infty$) دیگرام بلوکی حلقه هدایت (شکل ۲) در حضور جبران‌ساز به صورت شکل ۶ خواهد شد. چون این حلقه از نوع ردیابی نمی‌باشد بنابراین براساس روش‌های متداول شکل‌دهی حلقه‌باز یا بسته که هدف تعقیب ورودی یا حذف اغتشاش و نویز می‌باشد، نمی‌توان این مسئله را حل کرد. به عنوان مثال در مسائل متداول ردیابی رابطه مستقیمی بین پاسخ فرکانسی حلقه‌باز سیستم با رفتار سیستم حلقه‌بسته وجود دارد. به عنوان مثال می‌توان با افزایش بهره در فرکانس‌های پایین و کاهش بهره در فرکانس‌های بالای سیستم حلقه‌باز، هم به ردیابی خوبی رسید و هم اغتشاشات و نویزها را به خوبی حذف کرد. اما در این‌جا چون حلقه از نوع ردیابی متداول نمی‌باشد، هیچ رابطه مشخصی بین پاسخ فرکانسی حلقه‌باز سیستم با بهبود خطای برخورد در سیستم حلقه‌بسته وجود ندارد. به عنوان مثال افزایش بهره در فرکانس‌های پایین و یا کاهش بهره در فرکانس‌های بالا لزوماً به معنی عملکرد بهتر سیستم در کاهش خطای برخورد نمی‌باشد. در نتیجه هیچ معیار مشخصی برای طراحی جبران‌ساز با روش‌های متداول وجود ندارد. این مشکل از آن جهت حائز اهمیت است که در صورت نداشتن معیار مشخصی برای طراحی جبران‌ساز، از هیچ کدام از روش‌های موجود در حوزه فرکانس (روش‌های کلاسیک و یا روش‌های مدرن از قبیل روش‌های مقاوم H_∞) نمی‌توان برای طراحی کنترل‌کننده بهره جست. جهت حل مشکل ذکر شده در این مقاله ایده‌ای ارائه می‌شود که در ادامه توضیح داده می‌شود. فرض کنید که تابع تبدیل حلقه‌بسته ایده‌آل $\ddot{n}_L / \lambda$ بر اساس تحلیل‌های هدایتی و با معیار خطای برخورد $\ddot{n}_L / \lambda$ داده شده است. این تابع تبدیل با توجه به ثابت زمانی کل حلقه هدایت با یک تابع تبدیل مرتبه اول با ثابت زمانی مشخص تقریب زده شده است. در ایده ارائه شده در این مقاله ابتدا با توجه به تابع تبدیل حلقه‌بسته ایده‌آل $\ddot{n}_L / \lambda$ مسیر پیش‌روی مطلوب حلقه هدایت بدست می‌آید. در گام بعد با تکنیک شکل‌دهی پاسخ فرکانسی، جبران‌سازی طراحی می‌شود که با حفظ پایداری به ازای ریدوم‌های مختلف کمترین فاصله را با مسیر پیش‌روی مطلوب داشته باشد. بدین صورت می‌توان در حضور عدم قطعیت ریدوم عملکرد را بهبود داد.

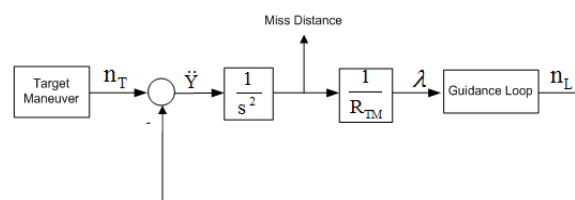


شکل ۴ پاسخ پله $\ddot{D}_c / \lambda$ به ازای شیب‌های ریدوم مختلف

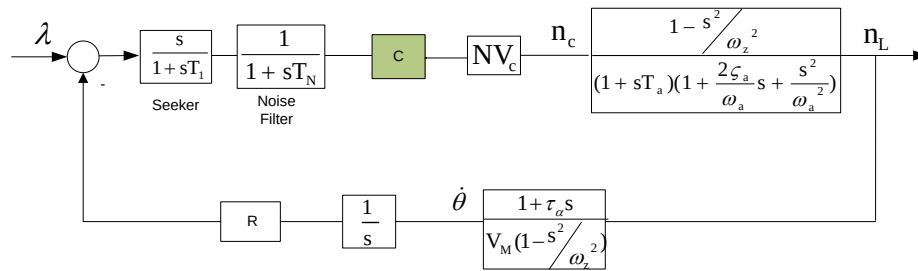
با توجه به اینکه $\dot{\theta}$ به عنوان ورودی مستقل مدل نشده است پس اثر پارازیتی خود را به صورت غیرمستقیم در تابع تبدیل $\ddot{D}_c / \lambda$ می‌گذارد. بنابراین رفتار مناسب پاسخ پله $\ddot{D}_c / \lambda$ قطعاً ناشی از حذف مناسب اثر پارازیتی $\dot{\theta}$ نیز می‌باشد و لازم به بررسی رفتار پاسخ پله $\ddot{D}_c / \lambda$ به صورت جداگانه نمی‌باشد و فقط به این دلیل در این قسمت آورده شده است که اثر حذف آن بخاطر ماهیت پارازیتی بودن آن روشن گردد. نمودارهای فوق دید کنترلی مناسبی در مورد اثر مخرب شیب ریدوم بر پایداری و عملکرد جستجوگر می‌دهد. با توجه به نمودار فوق می‌توان نتیجه گرفت که تغییر شیب ریدوم علاوه بر کاهش پایداری، خطای حالت ماندگار محسوسی در تخمین نرخ چرخش خط دید ایجاد می‌کند و رفتار پاسخ گذرا را نیز خراب می‌کند بنابراین منجر به افزایش خطای برخورد به هدف در فاز نهایی هدایت خواهد شد. از این‌رو استفاده از یک جبران‌ساز جهت بهبود پایداری و عملکرد حلقه هدایت لازم است.

۳- طراحی جبران‌ساز ریدوم

جهت طراحی جبران‌ساز همواره نیاز به تعریف یک معیار عملکرد می‌باشد که با زبان ریاضی از دیدگاه کنترل قابل فرموله کردن باشد. از آنجا که هدف نهایی جبران‌ساز کاهش خطای برخورد در حضور عدم قطعیت ریدوم می‌باشد، در مسئله مورد بررسی دو مشکل جهت تعریف معیار عملکرد وجود دارد. اولاً حلقه آشپانه‌یاب مطابق شکل ۵ به دلیل وجود پارامتر فاصله نسبی رهگیر تا هدف (R_{TM})، یک حلقه متغیر با زمان می‌باشد لذا ارتباط برقرار کردن میان خطای برخورد به هدف و جبران‌ساز از دیدگاه کنترل به سادگی قابل انجام نمی‌باشد.



شکل ۵. دینامیک خطای برخورد در حلقه آشپانه‌یاب [۱۹]



شکل ۶. دیاگرام بلوکی حلقه هدایت با فرض $K_{sl} = \infty$

فرکانسی، جبران ساز به گونه ای طراحی می شود که رفتار تابع A مشابه رفتار A_{ideal} مورد نظر شود. این ایده و الگوریتم ارائه شده در بخش بعد توضیح داده خواهد شد. اما مسئله ای برای محاسبه A_{ideal} وجود دارد که در این جا به بررسی این مسئله و نحوه حل آن پرداخته می شود.

با دقت در رابطه (۱۳) مشاهده می شود که پاسخ فرکانسی A_{ideal} تابعی از شیب ریدوم می باشد و از آن جایی که در عمل شیب ریدوم دارای عدم قطعیت می باشد، لذا اندازه پاسخ فرکانسی A_{ideal} برای شیب ریدوم های مختلف به صورت یک پوش منحنی خواهد شد. اما برای طراحی جبران ساز فقط به یک پاسخ فرکانسی نیاز است. از این رو در این مقاله برای انتخاب A_{ideal} مورد نظر (از میان دسته پوش به دست آمده ناشی از ریدوم های مختلف) از ابزار شکاف متریک وی استفاده می شود. در ادامه ابتدا این ابزار معرفی شده و سپس به ارائه ایده مورد نظر برای شکل دهی پاسخ فرکانسی پرداخته شده است.

ابزار شکاف متریک وی برای اندازه گیری فاصله بین دو سیستم حلقه بسته از روی رفتار حلقه باز آن ها مورد استفاده قرار می گیرد. شکاف وی بین دو سیستم بیان گر تفاوت در رفتار حلقه بسته آن ها است. شکاف وی همواره عددی بین صفر و یک بوده و هر چه این عدد به یک نزدیک تر باشد بیان گر تفاوت بیشتر دینامیک دو سیستم حلقه بسته می باشد. در ادامه به تعریف این ابزار پرداخته شده و سپس نحوه استفاده از این ابزار برای انتخاب A_{ideal} بیان خواهد شد.

تعریف: شکاف متریک وی به صورت زیر تعریف می شود [۲۰]:

$$\delta_v(P_1, P_2) = \begin{cases} \|\Psi(P_1, P_2)\|_\infty, & \det \theta(j\omega) \neq 0 \quad \forall \omega, \text{ wno } \det \theta(s) = 0 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (14)$$

که در آن:

$$\Psi(P_1, P_2) =: -\tilde{N}_2 M_1 + \tilde{M}_2 N_1 \quad (15)$$

$$\theta(s) =: \tilde{N}_2 N_1 + \tilde{M}_2 M_1 \quad (16)$$

و $\tilde{N}_2, N_1, \tilde{M}_2, M_1$ ضرایب نرمالیزه شده نسبت به هم اول پلانت های P_1, P_2 بوده و $\text{wno } \det \theta(s)$ برابر تعداد چرخش تابع $\theta(s)$ در جهت عقربه های ساعت حول مبدأ می باشد که در نمودار نایکوئیست مشخص است.

از منظر طراح هدایت تابع تبدیل حلقه بسته مطلوب هدایت به صورت زیر می باشد:

$$\frac{n_L}{\lambda} = \frac{sNV_c}{1+sT_G} \quad (8)$$

که T_G معادل ثابت زمانی مطلوب کل حلقه هدایت می باشد. با توجه به شکل ۶ اگر مسیر پیش رو و پس خور را مطابق زیر به ترتیب با A و B نشان دهیم

$$A = \text{Seeker} \times \text{Noise Filter} \times NV_c \times \frac{n_L}{n_c} \quad (9)$$

$$B = R \times \frac{1}{s} \times \frac{\dot{\theta}}{n_L} \quad (10)$$

تابع تبدیل حلقه بسته به صورت زیر خواهد شد.

$$\frac{n_L}{\lambda} = \frac{A}{1+AB} \quad (11)$$

که همانند شکل ۶ با قراردادن جبران ساز می توان مسیر پیش رو (A) را تغییر داد لذا اگر بخواهیم تابع تبدیل حلقه هدایت همانند تابع تبدیل مطلوب شود، خواهیم داشت:

$$\frac{sNV_c}{1+sT_G} = \frac{A_{ideal}}{1+A_{ideal}B} \quad (12)$$

که با انجام عملیات جبری، تابع تبدیل ایده آل مسیر پیش رو (A_{ideal}) به صورت زیر بدست می آید.

$$A_{ideal} = \frac{sNV_c}{1+sT_G - RNV_c \times \frac{\dot{\theta}}{n_L}} \quad (13)$$

اکنون اگر بتوان به کمک یک جبران ساز، پاسخ فرکانسی مسیر پیش رو حلقه هدایت (A) را به پاسخ فرکانسی A_{ideal} شبیه کرد می توان انتظار داشت که عملکرد سیستم حلقه بسته مشابه تابع تبدیل حلقه بسته مطلوب هدایت (n_L/λ) شود و در نتیجه عملکرد سیستم بهبود یابد. در این مقاله با استفاده از نامسای ماتریسی خطی در شکل دهی پاسخ

$$\min_{G_0} \max_{G_i} \delta_v(G_0, G_i) \quad (17)$$

در این رابطه G_i ها از رابطه زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \Delta G &= 0.005 \\ G_i &= \Delta G \times i \end{aligned} \quad (18)$$

برای این منظور شکاف وی بین پاسخ های فرکانسی A_{ideal} محاسبه می شود که نتایج آن در جدول زیر نشان داده شده است.

مزیت ابزار شکاف وی این است که می توان با بررسی رفتار دو سیستم حلقه باز، مقدار مشابهت رفتار حلقه بسته آن ها را تحلیل کرد. در مقاله حاضر نیز با استفاده از این ابزار شکاف وی بین پاسخ های فرکانسی A_{ideal} برای شیب ریدوم های مختلف را نسبت به هم به دست آورده و شیب ریدومی انتخاب می شود که پاسخ های فرکانسی A_{ideal} آن کمترین فاصله را با سایر پاسخ های فرکانسی A_{ideal} داشته باشد. به عبارت دیگر اگر پاسخ های فرکانسی A_{ideal} را در شیب ریدوم های مختلف با G_i نشان داده شود، از معیار زیر برای انتخاب بهترین G (G_0) استفاده می شود [۲۱].

جدول ۲. شکاف وی بین پاسخ های فرکانسی A_{ideal} در شیب ریدوم های مختلف

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8	G_9
G_1	0	0.0142	0.0326	0.0516	0.0713	0.0918	0.1131	0.1353	0.1583
G_2	0.142	0	0.0184	0.0374	0.0572	0.0777	0.0991	0.1213	0.1444
G_3	0.0326	0.0184	0	0.0191	0.0389	0.0594	0.0809	0.1031	0.1264
G_4	0.0516	0.0374	0.0191	0	0.0198	0.0404	0.0619	0.0843	0.1076
G_5	0.0713	0.0572	0.0389	0.0198	0	0.0206	0.0421	0.0646	0.0880
G_6	0.0918	0.0777	0.0594	0.0404	0.0206	0	0.0215	0.0440	0.0675
G_7	0.1131	0.0991	0.0809	0.0619	0.0421	0.0215	0	0.0225	0.0460
G_8	0.1353	0.1213	0.1031	0.0843	0.0646	0.0440	0.0255	0	0.0235
G_9	0.1583	0.1444	0.1264	0.1076	0.0880	0.0675	0.0460	0.0235	0
$\max \delta_v$	0.1583	0.1444	0.1264	0.1076	0.0880	0.0918	0.1131	0.1353	0.1583

نامساوی ماتریسی خطی برای طراحی وزن های شکل دهی حلقه ارائه گردیده است.

برای شکل دهی مسیر پیش رو می بایست وزن های شکل دهی حلقه W_1, W_2 به گونه ای انتخاب شوند که با ضرب آن ها در سیستم نامی A رفتار سیستم شبیه حالت ایده آل A_{ideal} شود. یعنی رابطه زیر برقرار شود:

$$W_2 A W_1 = A_{ideal} \quad (19)$$

باید توجه شود که در عمل شیب ریدوم دارای عدم قطعیت می باشد. بنابراین اندازه پاسخ فرکانسی A_{ideal} برای شیب ریدوم های مختلف به صورت یک پوش منحنی خواهد شد. البته لازم به ذکر است که در اینجا چون حلقه ایده آل به صورت SISO می باشد می توان یکی از وزن ها را برابر یک فرض کرد و تنها به طراحی وزن دوم پرداخت. در اینجا برای سادگی، وزن W_1 برابر یک انتخاب می شود. برای تبدیل مسئله فوق به یک مسئله جبری در قالب نامساوی ماتریسی خطی، فرض

همان طور که از جدول فوق مشاهده می شود بر مبنای معیار بیان شده در رابطه (۱۷)، بهترین سیستم برای انتخاب A_{ideal} سیستم G_5 می باشد. اکنون می بایست جبران ساز به گونه ای طراحی شود که مسیر پیش روی واقعی (A) بر A_{ideal} انتخاب شده منطبق گردد.

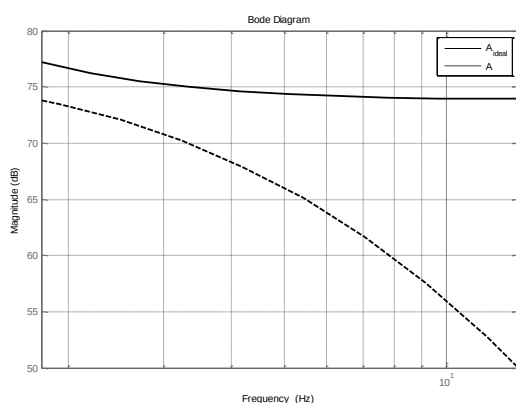
طراحی جبران ساز حلقه به گونه ای که با ضرب آن در مسیر واقعی A رفتاری شبیه حالت ایده آل A_{ideal} بدست آید، معمولاً کار سختی بوده و نیاز به سعی و خطای فراوان دارد. در این مقاله برای طراحی وزن های شکل دهی حلقه، ابتدا مسئله فوق با استفاده از یکسری روابط جبری تبدیل به یک مسئله نامساوی ماتریسی خطی می شود و سپس به سادگی وزن های مورد نظر طراحی می گردد. ایده مورد استفاده در این مقاله مشابه [۱۶] می باشد اما با این تفاوت که در روش ارائه شده در [۱۶] یک مسئله بهینه سازی برای طراحی کنترل کننده و وزن های شکل دهی حلقه ارائه شده است در حالی که در این مقاله یک مسئله جبری در قالب

می شود که A_{ideal} درون یک ناحیه فرکانسی مجاز مطابق شکل ۷ حرکت می کند (رابطه (۲۰)):

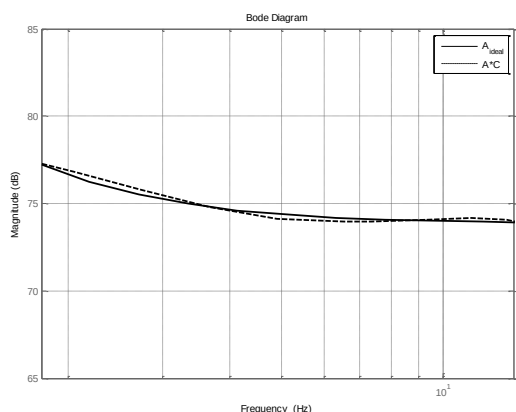
فرکانسی $W_2(s), W_1(s)$ با منطبق کردن توابع تبدیل می نیمم فاز روی مقادیر قطر اصلی $(\hat{\Lambda}_{1\omega})^{-1/2}, (\hat{\Lambda}_{2\omega})^{1/2}$ به سادگی به دست می آیند.

۴- نتایج طراحی جبران ساز و شبیه سازی

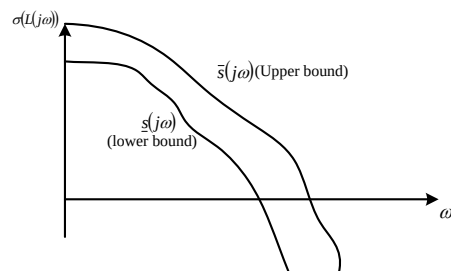
فرآیند ذکر شده در قسمت قبل برای یک رهگیر مدل در حضور خطای ریدوم پیاده گردید و با استفاده از الگوریتم ارائه شده برای طراحی وزن های شکل دهی حلقه، جبران ساز مناسب به گونه ای طراحی شد که با ضرب آن در پاسخ فرکانسی مسیر پیش رو (A)، پاسخ فرکانسی ایده آل (A_{ideal}) به دست آید. در شکل ۸ پاسخ فرکانسی مسیر پیش روی ایده آل و مسیر پیش روی بدون جبران ساز آورده شده است که گویای اختلاف زیاد آنها می باشد. سپس در شکل ۹ پاسخ فرکانسی مسیر پیش روی ایده آل و مسیر پیش روی جبران سازی شده برای رهگیر مورد نظر ترسیم شده است. شکل ۹ گویای اینست که جبران ساز با دقت بسیار مناسبی توانسته شکل دهی پاسخ فرکانسی را انجام دهد و پاسخ مسیر پیش روی حلقه هدایت را با وجود خطای ریدوم مشابه پاسخ مسیر پیش روی ایده آل نماید. (در نتایج ترسیم شده منظور از کنترل کننده C همان W_2 یا وزن شکل دهی حلقه می باشد).



شکل ۸. دیاگرام بود مسیر پیش رو ایده آل و مسیر پیش رو بدون جبران ساز



شکل ۹. دیاگرام بود مسیر پیش رو ایده آل و مسیر پیش رو با جبران ساز



شکل ۷. محدوده مجاز بالا و پایین برای پاسخ فرکانسی مسیر پیش رو ایده آل

$$|s(j\omega)| < |A_{ideal}(j\omega)| < |\bar{s}(j\omega)| \quad \forall i, \omega \quad (20)$$

هدف طراحی وزن های شکل دهی حلقه این است که با ضرب آن ها در پاسخ فرکانسی سیستم نامی A، سیستم A_{ideal} به دست آید. پس می توان در رابطه (۲۰) به جای A_{ideal} رابطه $W_2 A W_1$ را قرار داد. با جایگذاری در رابطه فوق رابطه زیر به دست می آید:

$$|s(j\omega)| < |W_2(j\omega) A(j\omega) W_1(j\omega)| < |\bar{s}(j\omega)| \quad \forall i, \omega \quad (21)$$

با مجذور نمودن طرفین تساوی رابطه زیر به دست می آید:

$$|s(j\omega)|^2 < |W_1^* A^* W_2^* W_2 A W_1| < |\bar{s}(j\omega)|^2 \quad \forall i, \omega \quad (22)$$

با استفاده از رابطه بالا، رابطه زیر به سادگی به دست می آید:

$$|s(j\omega)|^2 (W_1^* W_1^{-1}) < A^* (W_2^* W_2) A < |\bar{s}(j\omega)|^2 (W_1^* W_1^{-1}) \quad \forall \omega \quad (23)$$

از آنجایی که وزن های W_2, W_1 قطری هستند توابع $W_1^{-1} W_1^*$ و $W_2^* W_2$ نیز قطری بوده که به صورت زیر نمایش داده می شوند:

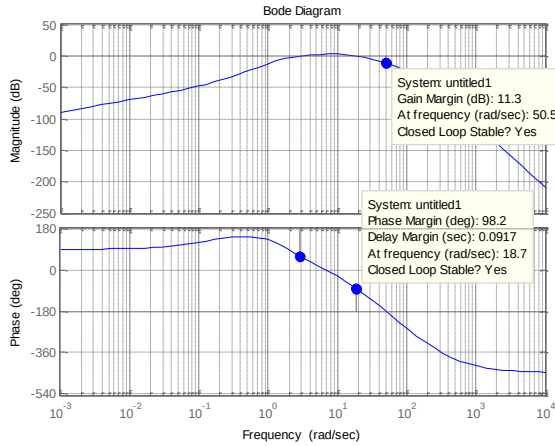
$$\begin{aligned} \Lambda_{1\omega} &= W_1^{-*} W_1^{-1} \in \Lambda_n \\ \Lambda_{2\omega} &= W_2^* W_2 \in \Lambda_m \end{aligned} \quad (24)$$

با در اختیار داشتن $\Lambda_{1\omega}$ و $\Lambda_{2\omega}$ می توان به سادگی توابع W_2, W_1 را با منطبق کردن توابع تبدیل می نیمم فاز روی قطر اصلی $(\Lambda_{1\omega})^{-1/2}$ و $(\Lambda_{2\omega})^{1/2}$ بدست آورد. با جایگذاری $\Lambda_{1\omega}$ و $\Lambda_{2\omega}$ از رابطه (۲۴) در (۲۳) می توان نوشت:

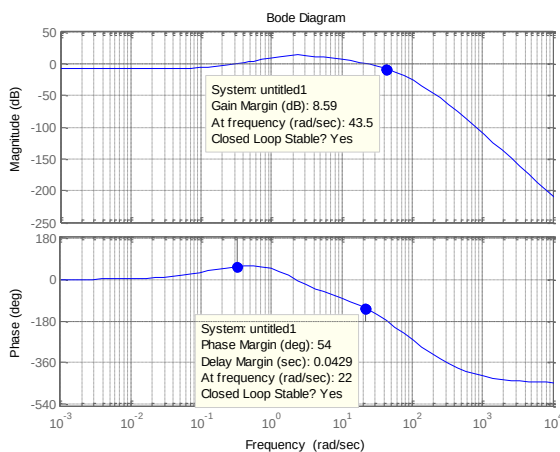
$$|s(\omega)|^2 (\Lambda_{1\omega}) < A^* (\Lambda_{2\omega}) A \quad \forall \omega \quad (25)$$

$$A^* (\Lambda_{2\omega}) A < |\bar{s}(\omega)|^2 (\Lambda_{1\omega}) \quad \forall \omega \quad (26)$$

دو نامساوی بیان شده در روابط فوق در هر فرکانس ω یک مسئله نامساوی ماتریسی خطی بوده که به سادگی توسط ابزارهای نرم افزار MATLAB قابل حل می باشد. کافی است که این نامساوی ها به ازای یک بازه فرکانسی حل شوند. ماتریس های توابع تبدیل قطری



شکل ۱۲. دیاگرام بود حلقه باز هدایت با جبران ساز ($R = 0$)



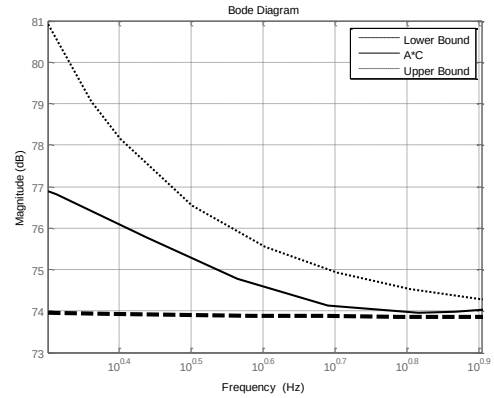
شکل ۱۳. دیاگرام بود حلقه باز هدایت با جبران ساز ($R = 0.04$)

همانطور که مشخص است در حضور خطای ریدوم حاشیه بهره و فاز حلقه هدایت با وجود جبران ساز به ترتیب برابر ۵۴ و ۸.۵۹ dB درجه می شود بنابراین در بازه تغییرات شیب ریدوم جبران ساز پایداری حلقه هدایت را به خوبی تأمین می نماید. در ادامه نتایج شبیه سازی آورده شده است.

جهت بررسی عملکرد جبران ساز ارائه شده، شبیه سازی پرواز رهگیر و هدف در حضور عدم قطعیت ریدوم و سناریوهای برخورد متفاوت (از حیث زمان پرواز و مانور هدف) مطابق با شکل ۲ و شکل ۵ انجام شد. تمامی سناریوها صفحه ای می باشد و از قانون هدایت ناوبری تناسبی حقیقی (TPN) جهت تولید فرامین شتاب جانبی استفاده شده است. همچنین مانور هدف به صورت یک تابع پله با زمان اعمال تصادفی به صورت زیر مدل شده است:

$$n_T(t) = n_T^{\max} u(t-T) \quad (28)$$

که $u(t-T)$ تابع پله و T به صورت تصادفی و با چگالی احتمال یکنواخت در بازه $[0, t_f]$ می باشد که t_f زمان پرواز است. مشخصات مانور هدف در جدول ۳ آورده شده است.

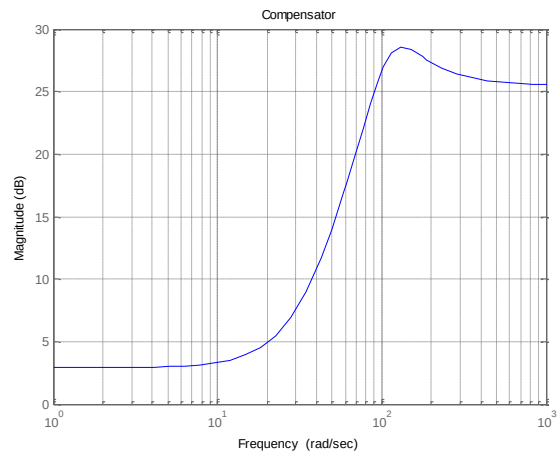


شکل ۱۰. مسیر پیشرو جبران سازی شده در حضور محدوده مجاز بالا و پایین

همچنین تابع تبدیل جبران ساز طراحی شده نیز به صورت زیر می باشد که از درجه ۲ است.

$$C = \frac{18.7537(s^2 + 51s + 935.2)}{(s^2 + 87.04s + 12570)} \quad (29)$$

و مشخصات فرکانسی آن در شکل ۱۱ نشان داده شده است.



شکل ۱۱. دیاگرام اندازه بود جبران ساز

از آنجا که در روند طراحی جبران ساز، K_{sl} بی نهایت فرض شده است لذا بایستی پایداری برای حلقه واقعی هدایت (شکل ۲) که مقدار K_{sl} محدود می باشد نیز بررسی شود. بدین منظور از معیار حاشیه فاز و حاشیه بهره استفاده می کنیم. لازم به ذکر است برای این رهگیر مدل بازه تغییرات شیب ریدوم $0 \leq R \leq 0.04$ در نظر گرفته شده است. از این رو نمودارهای پاسخ فرکانسی حلقه باز هدایت در حضور جبران ساز و به ازای مقدار شیب ریدوم ۰ و ۰.۰۴ در شکل ۱۲ و شکل ۱۳ آورده شده است.

مراجع

- [1] N.F. Palumbo, R.A. Blauwkamp, J.M. Lloyd, "Basic Principles of Homing Guidance", Johns Hopkins APL Technical Digest, vol. 29, No. 1, PP. 25-41, 2010.
- [2] C. Lin, Modern Navigation, Guidance and Control Processing, Prenitise Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [3] J. Lin, Y. Chau, "Radome slope Compensation Using Multiple-Model Kalman Filters", Journal of Guidance, vol. 18, no. 3, pp. 637-640, 1994.
- [4] F.W. Nelsin, P. Zarchan, "Radome Induced Miss Distance In Aerodynamically controlled Homing Missile", AIAA, 1984.
- [5] F.W. Nelsin, P. Zarchan, "Digital homing guidance - Stability vs performance tradeoffs", Journal of Guidance, vol. 8, no. 2, pp. 255-261, 1985.
- [6] B. Abhijit, P.K.Tiwari, V. Prashant, R.N. Bhattacharjee, "In Flight Radome Error Compensation through Simulated Test data", AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, 2005.
- [7] P. Zarchan, H. Gratt, "Adaptive radome compensation using dither", Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 22, No. 1, PP. 51-57, 1999.
- [8] W.R. Yueh, C. Lin, "Guidance Performance Analysis with In-flight Radome Error Calibration", Journal of Guidance, Vol. 8, No. 5, PP. 666-669, 1985.
- [۹] سید حمید جلالی نائینی، "تحلیل فاصله خطای استراتژی ناوبری تناسبی با بازخورد شتاب و سرعت زاویه بدنه با استفاده از روش الحاقی"، مجله کنترل دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، جلد ۷، شماره ۱، صفحه ۵۱-۴۳، بهار ۱۳۹۲.
- [10] T.L Song, S.J. Shin, "Active Homing Performance Enhancement With Multiple Model Radome slope Estimation", AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, 2004.
- [11] P. Gurfil, N.J. Kasdin, "Improving Missile Guidance Performance By In-flight Two-Step Nonlinear Estimation of Radome Aberration", IEEE Transaction on Control Systems Technology, vol. 12, no. 4, pp. 532-541, 2004.

جدول ۳. مشخصات مانور هدف

Symbol	value
$n_T^{\max}$	100 m/s ²
t_f	10 s

در جدول ۴ نتایج شبیه سازی آورده شده است. نتایج نشان دهنده این است که میانگین و بیشینه خطای برخورد به هدف (MD) در حضور جبران ساز، با وجود درجه پایین آن، به میزان محسوسی کاهش می یابد که گویای عملکرد بسیار خوب روش ارایه شده می باشد.

جدول ۴. نتایج شبیه سازی خطای برخورد

جبران ساز	RMS MD(m)	max MD(m)
×	93	138
✓	69	102

با توجه به رویکرد کاربردی این مقاله، با تعمیم روش ارایه شده به مدل سه بعدی و همچنین اعمال ابزار جدول بندی بهره می توان آن را در شبیه سازی کامل شش درجه آزادی نیز مورد ارزیابی قرار داد و در سیستم های هدایت واقعی پیاده سازی نمود.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله ابتدا اثر مخرب ریدوم بر حلقه هدایت از دیدگاه کنترل تحلیل شد که نتیجه آن کاهش پایداری و افت عملکرد حلقه می باشد. از این رو جبران ساز خطای ریدوم با استفاده از یک ایده جدید در شکل دهی پاسخ فرکانسی مسیر پیش رو در حلقه هدایت طراحی شده است. با توجه به ایجاد حلقه پس خور پارازیتی بوسیله خطای ریدوم و عدم همجنس بودن ورودی و خروجی حلقه هدایت، طراحی جبران ساز با چالش مواجه بوده و از روش های مرسوم طراحی کنترل کننده قابل حل نمی باشد. در روش پیشنهادی، هدف مسئله شکل دهی پاسخ فرکانسی مسیر پیش رو تعریف گشته و با تبدیل آن به نامساوی ماتریسی خطی بصورت یک مساله سیستماتیک حل می شود. همچنین با توجه به وجود عدم قطعیت در شیب ریدوم، به منظور تعیین پاسخ مطلوب از ابزار شکاف متریک وی استفاده شده است. از مزایای این روش می توان به درجه پایین جبران ساز و سادگی پیاده سازی اشاره کرد. نتایج شبیه سازی نشان می دهد که افزودن جبران ساز باعث بهبود پایداری حلقه هدایت و کاهش موثر خطای برخورد به هدف در حضور خطای ریدوم می شود.

- [16] A. Lanzon, "Weight optimization in H_∞ loop shaping", Automatica, Vol. 41, No. 7, PP. 1201-1208, 2005.
- [17] P. Garnell, Guidance weapon control systems, 2nd Edition, Pergamon Press, 1980.
- [18] F.W. Nesline, P. Zarchan, "Line of Sight Reconstruction for Faster Homing Guidance", Journal of Guidance, vol. 8, No. 1, PP. 3-8, 1985.
- [19] F.W. Nesline, P. Zarchan, "Missile Guidance Design Trade-Offs For High Altitude Air defense", Journal of Guidance, Vol. 6, No. 3, PP. 207-212, 1983.
- [20] G. Vinnicombe, Uncertainty and feedback: h-infinity loop shaping and the v-gap metric, Imperial College press, 1999.
- [21] سید محمد جواد معافی مدنی، ایمان محمدزمان، "طراحی خودخلبان با استفاده از روش کنترل کننده استاتیکی شکل دهی حلقه H_∞ "، نشریه علمی پژوهشی مهندسی هوانوردی، سال سیزدهم، شماره ۲، صفحه ۷۹-۹۴، سال ۱۳۹۰.
- [12] S.S. Han, S.K. Jang, S.J. Lee, "Radome Compensation Using Adaptive Particle Filter", 17th IFAC Symposium Automatic Control in Aerospace, Vol. 40, No.7, PP. 43-48, 2007.
- [13] X. Cao, C. Dong, Q. Wang, Y. Chen, "Radome Slope Estimation in Flight Using Fuzzy Adaptive Multiple Model for Active Homing Missile", 9th IEEE International Conference on Electronic Measurement & Instruments (ICEMI), 2009.
- [14] J.M. Lin, C.H. Lin, "Intelligent Fuzzy Terminal Guidance Law for High Altitude Air Defense by Taking Turning Rate and Radome Error Slope into Consideration", 6th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications, 2011.
- [15] S.K. Han, S. Ahn, W.S. Ra, J.B. Park, "Missile Radome Error Compensation Using Modified Interacting Multiple Model Kalman Filter", 14th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS), 2014.

طراحی قانون کنترلی مقاوم جهت پایداری سیستم های سینگولار دارای تأخیر متغیر با زمان با در نظر گرفتن عدم قطعیت در مدل و قید دامنه ورودی

مریم السادات اسدی نیا^۱، طاهره بینازاده^۲

^۱ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی برق و الکترونیک، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شیراز، m.asadinia@sutech.ac.ir

^۲ دانشیار، دانشکده مهندسی برق و الکترونیک، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی شیراز، binazadeh@sutech.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۵/۱، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۵/۸/۱۸)

چکیده: در این مقاله، مساله پایداری مقاوم برای سیستم های سینگولار نامعین دارای تأخیر زمانی با در نظر گرفتن عدم قطعیت های مدل و محدودیت بر روی دامنه سیگنال کنترلی مورد بررسی قرار می گیرد. هدف از پایداری مقاوم در اینجا، طراحی قانون کنترل فیدبک حالت اشباع شده می باشد به نحویکه سیستم حلقه بسته حاصل، برای همه عدم قطعیت های مجاز، رگولار، ضربه آزاد و پایدار باشد. تأخیر زمانی به صورت متغیر با زمان با کران بالا و پایین معلوم در نظر گرفته شده و مساله پایداری در دو حالت بررسی می شود. ابتدا، مساله پایداری مقاوم برای سیستم های سینگولار دارای تأخیر در حضور اشباع محرک و عدم قطعیت های مدل در نظر گرفته می شود. شرایط وجود کنترل کننده فیدبک حالت پایداری مستقل از تأخیر بر اساس نامساوی های ماتریس خطی بیان شده است. علاوه بر آن تخمینی از ناحیه جذب برای سیستم حلقه بسته، در قضیه مربوطه ارائه می گردد. در حالت دوم، معیارهای پایداری مقاوم و وابسته به تأخیر برای سیستم های سینگولار نامعین دارای تأخیر و ورودی محدود، طی دو قضیه ارائه شده است. این قضایا در دو نسخه ارائه شده اند. در این قضایا، شرایط تضمین پایداری وابسته به تأخیر در سیستم حلقه بسته بر اساس نامساوی های ماتریسی خطی برای تأخیر ثابت و تأخیر متغیر با زمان بیان گردیده است. ناحیه جذب سیستم حلقه بسته نیز برای حالت دوم تخمین زده شده است. در پایان، مثال های عملی و عددی ارائه شده است و نتایج شبیه سازی ها دستاوردهای تئوری مقاله را تایید می نمایند.

کلمات کلیدی: سیستم های سینگولار تأخیری، تأخیر متغیر با زمان، پایداری مقاوم، قید دامنه ورودی، عدم قطعیت مدل.

Design of Robust Control Law for Stabilization of Singular Systems with Time-Varying Delay in The Presence of Model Uncertainty and Input Amplitude Constraint

Maryamsadat Asadinia, Tahereh Binazadeh

Abstract: This paper investigates the problem of robust stabilization of uncertain singular systems with time-varying delay in the presence of model uncertainties and input amplitude constraint. Here, the purpose of robust stabilization is to design a saturated state feedback such that the closed-loop system is regular, impulse free and stable for all admissible uncertainties. The time-delay has been considered to be time-varying with known lower and upper bound. The problem of stabilization is studied in two cases. First, the robust stabilization problem is considered for the singular systems with time-varying delay in the presence of actuator saturation and model uncertainties. In this case, the existence conditions of robust stabilizing delay-independent state feedback controller are given via the linear matrix inequalities. Additionally, an estimation of the domain of attraction of the closed-looped system is proposed in the related theorem. In the second case, delay-dependent criteria for robust stability of uncertain time-delay singular systems with

constrained input is given in two theorems. These theorems investigate delay-independent stability conditions via the linear matrix inequalities for constant and time-varying delay. Also, the domain of attraction for the closed-looped system is estimated in this case, too. Finally, practical and numerical examples are given and simulation results verify the theoretical achievements of paper.

Keywords: Time-varying singular systems, Robust stability, Input amplitude constraint, Model uncertainty.

۱- مقدمه

سیستم های سینگولار^۱ که با نام های متفاوتی مانند سیستم های جبری دینامیکی^۲، توصیفی^۳، تعمیم یافته^۴، نیمه حالت^۵، ضمنی^۶ و... نیز شناخته می شوند، ترکیبی از معادلات جبری و دیفرانسیلی هستند. از این رو این سیستم ها در مقایسه با سیستم های فضای حالت معمولی، در توصیف سیستم های فیزیکی تواناترند. این حقیقت موجب شده تا سیستم های سینگولار کاربرهای بسیاری در زمینه مدلسازی و تحلیل سیستم های فیزیکی از قبیل سیستم های قدرت [۱]، فرایند های شیمیایی [۲]، مهندسی هوا فضا [۳]، رباتیک [۴]، سیستم های مکانیکی [۵]، سیستم های اقتصادی [۶] و... داشته باشند. به دلیل ساختار پیچیده تری که سیستم های سینگولار نسبت به سیستم های معمولی دارند، روش های کنترلی بکار گرفته شده برای تحلیل این سیستم ها از پیچیدگی بیشتری برخوردارند. به عنوان مثال، در کنترل سیستم های سینگولار علاوه بر پایداری، به مسائل دیگری از جمله رگولار و ضربه آزاد بودن نیز توجه می شود که اصطلاحاً به سیستم سینگولاری که این ویژگی ها را دارا باشد، سیستم مجاز^۷ می گویند. در دو دهه اخیر، تحقیقات زیادی در زمینه کنترل های سینگولار انجام شده است. اکثر مقالات در این حوزه، بر پایه تعمیم و گسترش تئوری سیستم های غیرسینگولار^۸ به سیستم های سینگولار شکل گرفته اند. برای مطالعه ی تاریخچه بتفصیل و تحقیقات پایه صورت گرفته در خصوص کنترل سیستم های سینگولار می توان به مراجع [۷-۹] رجوع نمود.

یکی از عوامل اصلی که موجب ناپایداری و عملکرد ضعیف در سیستم های کنترل می شود، تأخیر است. بنابراین، کنترل سیستم های دارای تأخیر یکی از مسائلی است که در سال های اخیر بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است و مقالات مختلفی نیز درحوزه تحلیل و طراحی سیستم های دارای تأخیر ارائه شده اند [۱۰-۱۴]. تأخیر در سیستم های سینگولار نیز رخ می دهد و بدلیل ماهیت این سیستم ها مساله کنترل در سیستم های سینگولار تأخیری در مقایسه با سیستم های دارای تأخیر

معمولی پیچیده تر است. با این وجود، کنترل سیستم های سینگولار تأخیر زمانی^۹ از موضوعاتی است که در پژوهش های اخیر به آن پرداخته شده است [۱۵-۱۷].

از سوی دیگر، به دلیل خطا در مدلسازی و تغییر در شرایط محیطی و اجرایی، اغلب در سیستم ها نایقینی وجود دارد [۱۸-۱۹]. یکی از راه های توصیف سیستم های نامعین، نایقینی پارامتری در معادلات حالت سیستم می باشد. از آنجا که نایقینی عملکرد مطلوب سیستم را تحت تأثیر قرار می دهد، بنابراین طراحی قانون کنترلی که بتواند در برابر نایقینی ها مقاوم عمل کند حائز اهمیت است. مسأله ی آنالیز پایداری مقاوم و همچنین پایداری سازی مقاوم سیستم های سینگولار نامعین [۲۰-۲۲] و سیستم های سینگولار نامعین دارای تأخیر زمانی [۲۳-۲۵] مورد مطالعه محققان قرار گرفته است.

مساله مهم دیگری که در سیستم های عملی وجود دارد و باید به آن توجه داشت، محدودیت روی دامنه ورودی محرک ها می باشد. چنانچه این قید در حین طراحی قانون کنترلی در نظر گرفته نشود، پس از قرار گرفتن بلوک اشباع در خروجی کنترل کننده، در بسیاری از موارد پاسخ سیستم مطلوب نخواهد بود و حتی ممکن است سیستم حلقه بسته ناپایدار شود [۲۶-۲۷]. لذا طراحی قانون کنترلی با در نظر گرفتن اشباع محرک بسیار ضروری است. رویکردهای متنوعی در مقالات برای این منظور ارائه گردیده که بعضاً برای سیستم های سینگولار نامی آن هم بدون در نظر گرفتن عدم قطعیت مدل و تأخیر زمانی می باشد [۲۸ و ۲۹]. در حوزه کنترل سیستم های سینگولار دارای تأخیر و نایقینی با قید اشباع محرک مطالعاتی صورت گرفته [۳۰]، که منحصراً به بحث پایداری وابسته به تأخیر پرداخته اند.

در این مقاله، مسأله پایداریسیازی مقاوم برای سیستم های سینگولار نامعین همراه با تأخیر زمانی با در نظر گرفتن اشباع محرک در دو حالت مستقل از تأخیر و وابسته به تأخیر با رویکردی نو و متفاوت مورد بررسی قرار می گیرد. ساختار در نظر گرفته شده برای سیستم های سینگولار دارای تأخیر، وجود ترم های نایقینی در فضای مدل حالت می باشد که می تواند ناشی از عدم قطعیت های مدل و یا اغتشاشات خارجی باشد. هدف، طراحی قانون کنترل فیدبک حالت مقاوم با در نظر گرفتن اشباع محرک، به منظور مجاز نمودن سیستم حلقه بسته می باشد. تأخیر زمانی به صورت متغیر با زمان با کران بالا و پایین معلوم در نظر گرفته شده و مساله

¹ Singular Systems

² Algebraic-Differential

³ Descriptor

⁴ Generalized

⁵ Semi-State

⁶ Implicit

⁷ Admissible System

⁸ Non-Singular

⁹ Time-Delay Singular Systems

تعریف ۲-۳۱: سیستم سنگولار همراه با تأخیر (۱) را در نظر بگیرید. آنگاه تعاریف زیر برقرار است:

۱. سیستم سنگولار همراه با تأخیر (۱) را رگولار و ضربه آزاد گویند، اگر زوج (E, A) رگولار و ضربه آزاد باشد.

۲. سیستم سنگولار همراه با تأخیر (۱) را پایدار گویند، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ اسکالر $\delta(\varepsilon) > 0$ وجود داشته باشد به نحویکه برای هر شرایط اولیه همساز $\phi(t)$ که در شرط $\sup_{-d_2 \leq t \leq 0} \|\phi(t)\| \leq \delta(\varepsilon)$ صدق می کند، پاسخ سیستم (۱) شروط زیر را برآورده کند:

$$\|x(t)\| \leq \varepsilon \quad \text{for } t \geq 0 \quad (2)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0 \quad (3)$$

۳. سیستم سنگولار همراه با تأخیر (۱) را مجاز گویند، اگر رگولار، ضربه آزاد و پایدار باشد.

لم ۱-۲۴: فرض کنید سیستم سنگولار همراه با تأخیر (۱) رگولار و ضربه آزاد باشد، آنگاه پاسخ چنین سیستمی بر روی بازه $[0, \infty)$ یکتا و ضربه آزاد خواهد بود.

حال، سیستم سنگولار نامعین دارای تأخیر متغیر با زمان و قید اشباع محرک (۴) را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t-d(t)) \\ &\quad + (B + \Delta B)\sigma(u(t)) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-d_2, 0] \end{aligned} \quad (4)$$

که $x(t) \in R^n$ بردار حالت، $u(t) \in R^m$ بردار ورودی، $\phi(t)$ بردار شرایط اولیه است که المان های آن توابع پیوسته می باشند. تأخیر زمانی $d(t)$ یک تابع پیوسته و متغیر با زمان می باشد به نحویکه

$$0 < d_1 \leq d(t) \leq d_2, \quad 0 \leq \dot{d}(t) \leq \mu < 1 \quad (5)$$

که در آن d_1 و d_2 کران پایین و بالا برای تأخیر زمانی و μ حد بالای نرخ تغییرات تأخیر زمانی می باشند. به علاوه، تابع $\sigma: R^m \rightarrow R^m$ اشباع ورودی می باشد که به صورت زیر تعریف شده است

$$\sigma(u) = [\sigma(u_1) \quad \sigma(u_2) \quad \cdots \quad \sigma(u_m)]^T \quad (6)$$

که در آن $\sigma(u_i) = \text{sign}(u_i) \min\{|u_i|, u_{i_{\max}}\}$ بوده و $u_{i_{\max}} > 0$ ماکزیمم دامنه مجاز اندازه مولفه ورودی i -ام است. همچنین، ماتریس $E \in R^{n \times n}$ سنگولار بوده و فرض می شود $\text{rank } E = r < n$. ماتریس های A ، A_d و B ثابت، حقیقی و معلوم با ابعاد مناسب و ماتریس های ΔA ، ΔA_d و ΔB معرف ناپیچنی های پارامتری سیستم هستند که فرض می شود در رابطه زیر صادق باشند:

پایداری در دو حالت بررسی می شود. در حالت اول شرایط وجود کنترل کننده فیدبک حالت پایداری به نحوی که پایداری سیستم حلقه بسته مستقل از تأخیر باشد، بر اساس نامساوی های ماتریس خطی مناسب حاصل می گردد. همچنین تخمینی از ناحیه جذب برای سیستم حلقه بسته، طی قضیه ای بیان می شود. سپس، به بررسی مسأله پایداری وابسته به تأخیر برای سیستم های سنگولار پرداخته می شود. در این حالت تأخیر زمانی، متغیر با زمان فرض شده و شرایط تضمین پایداری وابسته به تأخیر سیستم حلقه بسته بر اساس نامساوی های ماتریس خطی جدیدی بیان می گردد و تخمینی از ناحیه جذب برای سیستم حلقه بسته ارائه می شود. در پایان، به کمک مثال های ارائه شده و شبیه سازی صورت پذیرفته، کارایی قضایای پیشنهادی مقاله، نشان داده می شود و عملکرد مناسب قانون کنترلی مقاوم در حضور تأخیر بررسی می گردد.

ادامه مقاله بدین شرح می باشد. ابتدا در بخش ۲، سیستم های سنگولار نامعین دارای تأخیر و قید اشباع محرک معرفی و تعاریف اولیه و قضایای پایه مربوط به آن مرور خواهد شد. سپس، قضایای ارائه شده برای حالت مستقل از تأخیر^{۱۱} در بخش ۳-۱ و قضایای وابسته به تأخیر^{۱۱} در بخش ۳-۲، شرایط وجود کنترل کننده پایداری مقاوم را بر اساس نامساوی های ماتریس خطی مناسب، برای سیستم های سنگولار نامعین دارای تأخیر با در نظر گرفتن اشباع محرک، ارائه می دهند. برای نشان دادن کارایی قضایای ارائه شده، در بخش ۴ به ارائه مثال های شبیه سازی شده خواهیم پرداخت. در آخر نیز، جمع بندی مطالب و نتیجه گیری آورده شده است.

تذکره: در این مقاله، علامت $K > 0$ نشانه آن است که ماتریس نمونه K مثبت معین و متقارن می باشد. همچنین علامت $(*)$ در ماتریس ها مبین عناصر متقارن است.

۲- توصیف سیستم و تعاریف اولیه

در این بخش ابتدا تعاریف پایه مربوط به سیستم های سنگولار دارای تأخیر ارائه می گردد.

تعریف ۱-۳۱: سیستم سنگولار نامی تأخیر زمانی نامقید (۱) را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-d(t)) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-d_2, 0] \end{aligned} \quad (1)$$

۱. زوج (E, A) را رگولار گویند، اگر $\det(sE - A)$ متحد با صفر نباشد.

۲. زوج (E, A) را ضربه آزاد گویند، اگر $\deg(\det(sE - A)) = \text{rank}(E)$.

¹⁰ Delay-Independent

¹¹ Delay-Dependent

بردار $H, F \in R^{m \times n}$ و بردار $\alpha \in R^m$ ، یک مجموعه ماتریس به صورت زیر تعریف می شود [۳۶]:

$$W(\alpha, F, H) = \left\{ W \in R^{m \times n} : W = \begin{bmatrix} \alpha_1 f_1 + (1 - \alpha_1) h_1 \\ \vdots \\ \alpha_m f_m + (1 - \alpha_m) h_m \end{bmatrix} \right\} \quad (۱۳)$$

که در آن h_i معرف i -امین سطر ماتریس فیدبک کمکی و α_i بیانگر i -امین المان بردار $\alpha \in \psi(\alpha)$ می باشد. همچنین مجموعه $\psi(\alpha)$ به صورت $\psi(\alpha) = \{\alpha \in R^m : \alpha_i = 0 \text{ or } 1\}$ تعریف می شود. از بردار $\alpha \in \psi(\alpha)$ برای انتخاب سطرهای ماتریس F و H و تشکیل ماتریس جدید $W(\alpha, F, H)$ استفاده می گردد. به منظور برآورده شدن قید اشباع محرک نیاز است که ماتریس فیدبک کمکی H شرط $|h_i x| \leq u_{i \max}$ را به ازای $i = 1, \dots, m$ برآورده کند. برای ماتریس فیدبک کمکی H ، ناحیه ای از فضای حالت که ورودی کنترلی نسبت به x خطی است، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Gamma(H) = \{x \in \mathbb{R}^n : |h_i x| \leq u_{i \max}, i = 1, 2, \dots, m\} \quad (۱۴)$$

حال، یک بیضی از میان زیر مجموعه های مجموعه $\Gamma(H)$ به صورت $\varepsilon(P, 1) = \{x : x^T P x \leq 1\}$ انتخاب می شود. که در آن $P > 0$ است. یافتن ماتریس H به نحوی که شرط $|h_i x| \leq u_{i \max}$ به ازای x های متعلق به مجموعه $\varepsilon(P, 1)$ برآورده شود معادل با حل نامساوی ماتریس خطی زیر است:

$$\begin{bmatrix} u_{i \max} & h_i \\ * & u_{i \max} P \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (۱۵)$$

بنابراین، با در نظر گرفتن $\sigma(Fx(t)) = W(\alpha, F, H)x(t)$ با هدف کاهش محافظه کاری، معادلات سیستم حلقه بسته به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t - d(t)) \\ &\quad + (B + \Delta B)W(\alpha, F, H)x(t) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-d_2, 0] \end{aligned} \quad (۱۶)$$

هدف، طراحی ماتریس های بهره F و H است به نحوی که سیستم حلقه بسته (۱۶) برای همه تاخیرهای متغیر با زمان که شرط (۵) و همه نایقینی هایی که شرط (۷) را ارضا می کنند، مجاز باشد.

۳- پایداریسیستم های سینگولار نامعین دارای تأخیر و قید اشباع محرک

۳-۱ پایداری مقاوم مستقل از تأخیر سیستم های سینگولار نامعین دارای تأخیر و قید اشباع محرک

در این قسمت، بر مبنای لم ها و تعاریفی که در بخش قبل به آن اشاره شد، شرایط وجود کنترل کننده پایدار ساز مقاوم مستقل از تأخیر با

$$\begin{aligned} &[\Delta A(t) \quad \Delta A_d(t) \quad \Delta B(t)] \\ &= DJ(t)[E_a \quad E_d \quad E_b] \end{aligned} \quad (۷)$$

که در آن D, E_a, E_d و E_b ماتریس های معلوم ثابت با ابعاد مناسب هستند و ماتریس نامعلوم $J(t)$ رابطه زیر را برآورده می کند:

$$J^T(t)J(t) \leq I, \quad \forall t \quad (۸)$$

لم ۲- [۲۲]: برای ماتریس های داده شده C و G با ابعاد مناسب و O متقارن و هر $J(t)$ که در شرط (۸) صدق کند، رابطه زیر برقرار است:

$$O + GJ(t)C + C^T J^T(t)G^T < 0 \quad (۹)$$

اگر و تنها اگر اسکالر $\lambda > 0$ وجود داشته باشد به نحوی که:

$$O + \lambda GG^T + \lambda^{-1}C^T C < 0 \quad (۱۰)$$

تعریف ۳- [۲۴] سیستم سینگولار نامعین دارای تأخیر (۴) را پایدار مقاوم گویند اگر سیستم (۴) در غیاب ورودی به ازای همه نایقینی های ΔA و ΔA_d که در رابطه (۷) صدق می کنند، رگولار، ضربه آزاد و پایدار باشد.

تعریف ۴- [۲۴] سیستم سینگولار نامعین دارای تأخیر زمانی (۴) را پایدارپذیر مقاوم گویند، اگر قانون کنترل $u(t)$ وجود داشته باشد به نحوی که سیستم حلقه بسته از نقطه نظر تعریف (۳) پایدار مقاوم باشد.

در این مقاله، قانون کنترل برای سیستم (۴) به صورت فیدبک حالت خطی $u = Fx$ در نظر گرفته می شود. بنابراین معادلات توصیف کننده سیستم حلقه بسته به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t - d(t)) \\ &\quad + (B + \Delta B)\sigma(Fx(t)) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-d_2, 0] \end{aligned} \quad (۱۱)$$

برای ماتریس فیدبک F ، ناحیه ای از فضای حالت که ورودی کنترلی نسبت به x خطی است، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Gamma(F) = \{x \in \mathbb{R}^n : |f_i x| \leq u_{i \max}, i = 1, 2, \dots, m\} \quad (۱۲)$$

که در آن f_i در واقع i -امین سطر ماتریس F می باشد. در این مقاله، به منظور کاهش محافظه کاری مساله اشباع محرک، از تکنیک اضافه کردن ماتریس فیدبک کمکی بهره گرفته می شود. این تکنیک سابقاً نیز در مراجع مختلف [۷ و ۸] برای پایداریسیستم های همراه با تأخیر معمولی با قید اشباع ورودی بکار گرفته شده است. در این مقاله، این تکنیک برای پایداریسیستم های سینگولار نامعین دارای تأخیر و قید اشباع محرک استفاده می شود، به این صورت که، برای دو ماتریس

۱ از آنجاییکه $P^{-1}E = P^{-1}EP^T P^{-T}$ ، لذا اگر رابطه (۱۷) برقرار گردد آنگاه $P^{-1}EP^T P^{-T} = P^{-1}PE^T P^{-T}$ خواهد بود. با این استدلال رابطه (۲۳) به صورت زیر قابل بازنویسی خواهد بود:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= (E\dot{x}(t))^T P^{-1}x(t) + x^T(t)P^{-1}E\dot{x}(t) \\ &+ x^T(t)P^{-1}QP^{-T}x(t) \\ &- (1-d(t))x^T(t-d(t))P^{-1}QP^{-T}x(t-d(t)) \end{aligned} \quad (24)$$

با جایگذاری معادلات سیستم (۱۶) در رابطه فوق می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &\leq x^T(t)P^{-1}[\tilde{A}P^T + P\tilde{A}^T + \\ &\tilde{B}W(\alpha, FP^T, HP^T) + (\tilde{B}W(\alpha, FP^T, HP^T))^T \\ &+ Q]P^{-T}x(t) + 2x^T(t)P^{-1}\tilde{A}_d x(t-d(t)) \\ &- (1-\mu)x^T(t-d(t))P^{-1}QP^{-T}x(t-d(t)) \end{aligned} \quad (25)$$

در رابطه بالا برای سهولت $B + \Delta B = \tilde{B}$ ، $A + \Delta A = \tilde{A}$

قرار داده شده اند. با انتخاب $FP^T = Y$ و جایگزینی در روابط فوق، داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &\leq x^T(t)P^{-1}[\tilde{A}P^T + P\tilde{A}^T \\ &+ \tilde{B}W(\alpha, Y, L) + (\tilde{B}W(\alpha, Y, L))^T \\ &+ Q]P^{-T}x(t) + 2x^T(t)P^{-1}\tilde{A}_d x(t-d(t)) \\ &- (1-\mu)x^T(t-d(t))P^{-1}QP^{-T}x(t-d(t)) \end{aligned} \quad (26)$$

رابطه فوق را می توان بصورت یک فرم کوادراتیک برحسب متغیر $\xi^T(t) = [x^T(t) \quad x^T(t-d(t))]^T$ نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &\leq x^T(t)P^{-1}[\tilde{A}P^T + P\tilde{A}^T \\ &+ \tilde{B}W(\alpha, Y, L) + (\tilde{B}W(\alpha, Y, L))^T \\ &+ Q]P^{-T}x(t) + x^T(t)P^{-1}\tilde{A}_d P^T P^{-T}x(t-d(t)) \\ &+ x^T(t-d(t))P^{-1}P\tilde{A}_d^T P^{-T}x(t) \\ &- (1-\mu)x^T(t-d(t))P^{-1}QP^{-T}x(t-d(t)) \\ &= \xi^T(t)\tilde{\Sigma}\xi(t) \end{aligned} \quad (27)$$

که در آن ماتریس $\tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_{11} & \tilde{\Sigma}_{12} \\ * & \tilde{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$ یک ماتریس متقارن با المان های زیر است:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{11} &= \tilde{A}P^T + P\tilde{A}^T + \tilde{B}W(\alpha, Y, L) \\ &+ (\tilde{B}W(\alpha, F, H))^T + Q \\ \tilde{\Sigma}_{12} &= \Sigma_{21}^T = \tilde{A}_d P^T \\ \tilde{\Sigma}_{22} &= -(1-\mu)Q \end{aligned} \quad (28)$$

شرط مجاز بودن سیستم (۱۶) آن است که $\tilde{\Sigma} < 0$ شود. بر اساس رابطه (۷) ماتریس های $\tilde{A}$ ، $\tilde{B}$ و $\tilde{A}_d$ را با $A + DJ(t)E_a$ ، $B + DJ(t)E_b$ و $A_d + DJ(t)E_d$ در رابطه فوق جایگزین می کنیم:

رویکرد نامساوی خطی ماتریسی و تخمین متناظری از ناحیه جذب برای سیستم حلقه بسته (۱۶) طی قضیه زیر ارائه می شود.

قضیه ۱- سیستم سینگولار نامعین دارای تأخیر (۱۶) را با شروط داده شده (۵) و (۷) در نظر بگیرید، اگر ماتریس های Y ، L ، P و ماتریس $Q > 0$ وجود داشته باشند به نحویکه:

$$EP^T = PE^T \geq 0 \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} + DD^T & \Sigma_{12} & \bar{E}_a^T \\ * & \Sigma_{22} & \bar{E}_d^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} u_{i_{\max}} & l_i \\ * & u_{i_{\max}} P^{-1}E \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (19)$$

که در آن $\bar{E}_a = E_a P^T$ ، $\bar{E}_d = E_d P^T + E_b W(\alpha, Y, L)$ ، l_i مین i -امین سطر از ماتریس L و Σ_{ij} ها توسط رابطه زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= AP^T + PA^T + BW(\alpha, Y, L) \\ &+ (BW(\alpha, F, H))^T + Q \\ \Sigma_{12} &= \Sigma_{21}^T = A_d P^T \\ \Sigma_{22} &= -(1-\mu)Q \\ \Sigma &= \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ * & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

آنگاه سیستم (۱۶) با بهره کنترل کننده فیدبک پایدار ساز $F = YP^{-T}$ پایدار مقاوم خواهد بود. همچنین مجموعه زیر یک مجموعه پایا درون ناحیه جذب می باشد:

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\phi) &= \{ \phi \in C_{n,d_2} : \phi^T(0)P^{-1}E\phi(0) + \\ &\int_{-d_2}^0 \phi^T(\theta)P^{-1}QP^{-T}\phi(\theta)ds \leq 1, \forall \theta \in [-d_2, 0] \} = \\ &\max_{\theta \in [-d_2, 0]} \|\phi(\theta)\|^2 (\lambda_{\max}(P^{-1}E) + d_2 \lambda_{\max}(P^{-1}QP^{-T})) \end{aligned} \quad (21)$$

اثبات- تابع $V(x_t)$ زیر به عنوان کاندید لیاپانوف برای سیستم (۱۶) پیشنهاد می شود:

$$\begin{aligned} V(x_t) &= x^T(t)P^{-1}Ex(t) \\ &+ \int_{t-d(t)}^t x^T(s)P^{-1}QP^{-T}x(s)ds \end{aligned} \quad (22)$$

که در آن $x_t = x(t+\theta)$ ، $\theta \in [-d_2, 0]$ می باشد. مشتق $V(x_t)$ در راستای مسیر سیستم (۱۶) به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= \dot{x}^T(t)P^{-1}Ex(t) + x^T(t)P^{-1}E\dot{x}(t) \\ &+ x^T(t)P^{-1}QP^{-T}x(t) \\ &- (1-d(t))x^T(t-d(t))P^{-1}QP^{-T}x(t-d(t)) \end{aligned} \quad (23)$$

حالت قضیه پایداری وابسته به تأخیر برای سیستم های سینگولار همراه با تأخیر و قید اشباع محرک پیشنهاد می شود.

قضیه ۲- سیستم سینگولار نامعین دارای تأخیر متغیر با زمان (۱۶) با شروط داده شده (۵) و (۷) پایدار مقاوم است، اگر ماتریس های Y ، L ، $P > 0$ ، $Q_i > 0, i = 1, \dots, 5$ ، $Z_i > 0, i = 1, \dots, 5$ و $T > 0$ ، $N_i, M_i, S_i, i = 1, \dots, 5$ با ابعاد مناسب وجود داشته باشند به نحویکه نامساوی های ماتریسی خطی (۳۵) و (۳۶) زیر برقرار باشند:

$$\hat{\Delta} = \begin{bmatrix} \Phi & K \\ K^T & V \end{bmatrix} < 0 \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} u_{i_{\max}} & l_i \\ * & u_{i_{\max}} P \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (36)$$

که در آن

$$K = \begin{bmatrix} d_2 N_1 & d_{12} M_1 & d_{12} S_1 & \bar{E}_a^T & \bar{E}_d^T \\ d_2 N_2 & d_{12} M_2 & d_{12} S_2 & \bar{E}_a^T & \bar{E}_d^T \\ d_2 N_3 & d_{12} M_3 & d_{12} S_3 & 0 & 0 \\ d_2 N_4 & d_{12} M_4 & d_{12} S_4 & 0 & 0 \\ d_2 N_5 & d_{12} M_5 & d_{12} S_5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

و ماتریس $V = \text{diag}(V_1 \ V_2 \ \dots \ V_4)$ با عناصر روی قطر زیر:

$$\begin{aligned} V_1 &= -d_2 Z_1, & V_2 &= -d_{12}(Z_1 + Z_2) \\ V_3 &= -d_{12} Z_2, & V_4 &= -I \end{aligned} \quad (38)$$

همچنین ماتریس متقارن Φ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} & \Phi_{15} \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} & \Phi_{25} \\ * & * & \Phi_{33} & \Phi_{34} & \Phi_{35} \\ * & * & * & \Phi_{44} & \Phi_{45} \\ * & * & * & * & \Phi_{55} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + N_1 + N_1^T + AT + DD^T \\ &+ BW(\alpha, Y, L) + (AT + BW(\alpha, Y, L))^T, \\ \Phi_{12} &= N_2^T - N_1 + S_1 - M_1 + A_d T, \\ \Phi_{13} &= M_1 + N_3^T, \quad \Phi_{14} = -S_1 + N_4^T, \\ \Phi_{15} &= N_5^T - ET + P + DD^T \\ &+ (AT + BW(\alpha, Y, L))^T, \\ \Phi_{22} &= (\mu - 1)Q_3 + S_2 + S_2^T - N_2 - N_2^T - M_2 - M_2^T \\ \Phi_{23} &= M_2 - N_3^T + S_3^T - M_3^T \\ \Phi_{24} &= -S_2 - N_4^T + S_4^T - M_4^T \\ \Phi_{25} &= TA_d^T + S_5^T - N_5^T - M_5^T \\ \Phi_{33} &= -Q_1 + M_3 + M_3^T, \quad \Phi_{34} = -S_3 + M_4^T \\ \Phi_{35} &= M_5^T, \quad \Phi_{44} = -Q_2 - S_4 - S_4^T, \\ \Phi_{45} &= -S_5^T, \quad \Phi_{55} = d_2 Z_1 + d_{12} Z_2 - 2ET \end{aligned} \quad (40)$$

در رابطه (۳۷)، $\bar{E}_d = E_d T$ و $\bar{E}_a = E_a T + E_b W(\alpha, Y, L)$ می باشد. به علاوه، مجموعه $\Lambda_2(\rho) \leq 1$ تخمینی از ناحیه جذب خواهد بود:

$$\tilde{\Sigma} = \Sigma + \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} J(t) \begin{bmatrix} \bar{E}_a & \bar{E}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{E}_a^T \\ \bar{E}_d^T \end{bmatrix} J^T(t) \begin{bmatrix} D^T & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

$\bar{E}_d$ و $\bar{E}_a$ در صورت قضیه (۱) بعد از رابطه (۱۹) تعریف شده اند. همچنین ماتریس Σ در رابطه (۲۰) آورده شده است. با استناد به لم (۲) رابطه فوق برای همه $J(t)$ هایی که در نامساوی (۸) صدق می کنند برقرار است اگر و تنها اگر اسکالر $\lambda > 0$ وجود داشته باشد به نحویکه

$$\lambda \Sigma + \lambda^2 \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^T & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \bar{E}_a^T \\ \bar{E}_d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_a & \bar{E}_d \end{bmatrix} < 0 \quad (30)$$

با تغییر متغیرهای λP و λD به P و D رابطه (۳۰) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\Sigma + \begin{bmatrix} DD^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{E}_a^T \\ \bar{E}_d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_a & \bar{E}_d \end{bmatrix} < 0 \quad (31)$$

با استفاده از قضیه متمم شر، نامساوی ماتریسی خطی زیر حاصل می شود:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} + DD^T & \Sigma_{12} & \bar{E}_a^T \\ * & \Sigma_{22} & \bar{E}_d^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (32)$$

اگر نامساوی ماتریسی فوق برقرار باشد، آنگاه:

$$\dot{V}(x_t) \leq -\xi(t)(-\hat{\Sigma})\xi(t) \leq -\lambda_{\min}(-\hat{\Sigma})\|x_t\|^2 \quad (33)$$

و نتایج زیر را در بر خواهد داشت:

$$\begin{aligned} x^T P^{-1} E x &\leq V(x_t) < V(x_t(0)) = \\ &\phi^T(0) P^{-1} E \phi(0) + \int_{-d(t)}^0 \phi^T(\theta) P^{-1} Q P^{-T} \phi(\theta) d\theta \\ &\leq \max_{\theta \in [-d, 0]} \|\phi(\theta)\|^2 (\lambda_{\max}(P^{-1} E) + d_2 \lambda_{\max}(P^{-1} Q P^{-T})) \\ &= \Lambda_1(\phi) \end{aligned} \quad (34)$$

روابط فوق اذعان می دارد که اگر $\Lambda_1(\phi) \leq 1$ باشد حتماً $x^T P^{-1} E x \leq 1$ خواهد بود، بنابراین همه مسیرهای $x(t)$ که از $\Lambda_1(\phi) \leq 1$ شروع می شوند درون باقی $x^T P^{-1} E x \leq 1$ می مانند و بدان وسیله قید $|h_i x| \leq u_{i_{\max}}$ به سبب نامساوی ماتریسی (۱۹) برآورده می شود.

۳-۲ پایداری مقاوم وابسته به تأخیر سیستم های سینگولار نامعین همراه با تأخیر و قید اشباع محرک

در این بخش، پایداری وابسته به تأخیر برای سیستم (۱۶) در دو حالت بررسی می شود. حالت اول، تأخیر زمانی را متغیر با زمان در نظر گرفته به نحویکه در شرط (۵) صدق کند و طی قضیه ای شرط وجود کنترل کننده پایدار ساز و تخمینی از ناحیه جذب برای سیستم حلقه بسته (۱۶) ارائه می شود. سپس تأخیر زمانی، ثابت فرض می شود و در این

$$d_2 \xi^T(t) X \xi(t) - \int_{t-d(t)}^t \xi^T(s) X \xi(s) ds \geq 0 \quad (47)$$

که در آن $\xi(t) = [\xi_{11} \quad \xi_{12} \quad \xi_{13} \quad \xi_{14} \quad \xi_{15}]^T$ و

$$\begin{aligned} \xi_{11} &= x^T(t) T^{-1}, \quad \xi_{12} = x^T(t-d(t)) T^{-1}, \\ \xi_{13} &= x^T(t-d_1) T^{-1}, \quad \xi_{14} = x^T(t-d_2) T^{-1}, \\ \xi_{15} &= \dot{x}^T(t) T^{-1}, \end{aligned}$$

حال، مشتق $V(x_t)$ در مسیر سیستم (۱۶) به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= 2\dot{x}^T(t) T^{-1} P T^{-1} x(t) \\ &+ \sum_{i=1}^2 \{x^T(t) T^{-1} Q_i T^{-1} x(t) - \\ &x^T(t-d_i) T^{-1} Q_i T^{-1} x(t-d_i)\} \\ &+ x^T(t) T^{-1} Q_3 T^{-1} x(t) \\ &- (1-d(t)) x^T(t-d(t)) T^{-1} Q_3 T^{-1} x(t-d(t)) \\ &+ d_2 \dot{x}^T(t) T^{-1} Z_1 T^{-1} \dot{x}(t) + d_{12} \dot{x}^T(t) T^{-1} Z_2 T^{-1} \dot{x}(t) \\ &- \int_{t-d_2}^t \dot{x}^T(s) T^{-1} Z_1 T^{-1} \dot{x}(s) ds \\ &- \int_{t-d_1}^{t-d_2} \dot{x}^T(s) T^{-1} Z_2 T^{-1} \dot{x}(s) ds \end{aligned} \quad (48)$$

با اضافه کردن روابط (۴۳) - (۴۷) را به رابطه فوق داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &\leq \xi^T(t) (\tilde{\Phi} + d_2 N Z_1^{-1} N^T \\ &+ d_{12} S (Z_1 + Z_2)^{-1} S^T + d_{12} M Z_2^{-1} M^T) \xi(t) \\ &- \int_{t-d(t)}^t [\xi^T(s) N + \dot{x}(s) Z_1] Z_1^{-1} [\xi^T(t) N + \dot{x}(t) Z_1]^T ds \\ &- \int_{t-d_2}^{t-d(t)} [\xi^T(s) S + \dot{x}(s) (Z_1 + Z_2)] (Z_1 + Z_2)^{-1} \\ &[\xi^T(t) N + \dot{x}(t) (Z_1 + Z_2)]^T ds \\ &- \int_{t-d(t)}^{t-d_1} [\xi^T(t) M + \dot{x}(t) Z_2] Z_2^{-1} [\xi^T(t) M + \dot{x}(t) Z_2]^T ds \\ &\leq \xi^T(t) (\tilde{\Phi} + d_2 N Z_1^{-1} N^T + d_{12} S (Z_1 + Z_2)^{-1} S^T \\ &+ d_{12} M Z_2^{-1} M^T) \xi(t) = \xi^T(t) \bar{\Delta} \xi(t) \end{aligned} \quad (49)$$

که در آن

$$\begin{aligned} N &= [N_1 \quad N_2 \quad \cdots \quad N_5]^T \\ M &= [M_1 \quad M_2 \quad \cdots \quad M_5]^T \\ S &= [S_1 \quad S_2 \quad \cdots \quad S_5]^T \end{aligned}$$

می باشد. برای آنکه سیستم (۱۶) مجاز باشد می بایست $\bar{\Delta} < 0$ باشد. با استفاده از قضیه متمرکز می توان نشان داد که منفی معین بودن ماتریس $\bar{\Delta}$ معادل با منفی معین بودن ماتریس زیر است:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Phi} & d_2 N & d_{12} M & d_{12} S \\ * & -d_2 Z_1 & 0 & 0 \\ * & * & -d_{12} (Z_1 + Z_2) & 0 \\ * & * & * & -d_{12} Z_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_2(\rho) &= \max_{\theta \in [0, d_2]} \left\{ \|\phi(\theta)\|^2 \left[\lambda_{\max}(T^{-1} P T^{-1}) \right. \right. \\ &+ d_1 \lambda_{\max}(T^{-1} Q_1 T^{-1}) + d_2 \lambda_{\max}(T^{-1} Q_2 T^{-1}) \\ &+ d_2 \lambda_{\max}(T^{-1} Q_3 T^{-1}) \left. \right] + \|\phi(\theta)\|^2 \\ &\left[\frac{1}{2} d_2^2 \lambda_{\max}(T^{-1} Z_1 T^{-1}) \right. \\ &\left. + \frac{d_{12}}{2} (d_1 + d_2) \lambda_{\max}(T^{-1} Z_2 T^{-1}) \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

اثبات - تابع لیپانوف زیر برای سیستم (۱۶) در نظر گرفته می شود:

$$\begin{aligned} V(x_t) &= x^T(t) T^{-1} P T^{-1} x(t) \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_{t-d_i}^t x^T(s) T^{-1} Q_i T^{-1} x(s) ds \\ &+ \int_{t-d(t)}^t x^T(s) T^{-1} Q_3 T^{-1} x(s) ds \\ &+ \int_{-d_2 t + \theta}^0 \int_t^t \dot{x}^T(s) T^{-1} Z_1 T^{-1} \dot{x}(s) ds d\theta \\ &+ \int_{-d_2 t + \theta}^{-d_1} \int_t^t \dot{x}^T(s) T^{-1} Z_2 T^{-1} \dot{x}(s) ds d\theta \end{aligned} \quad (42)$$

از طرف دیگر، برای هر ماتریس $\bar{S}_i, i=1, \dots, 5$ و $\bar{M}_i, i=1, \dots, 5$ و $T > 0$ معادلات زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} 2[x^T(t) T^{-1} + \dot{x}^T(t) T^{-1}] \\ \times [-E \dot{x}(t) + \tilde{A} x(t) + \tilde{A}_d x(t-d(t)) + \tilde{B} \sigma(Fx)] = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} 2[x^T(t) \bar{N}_1 + x^T(t-d(t)) \bar{N}_2 \\ + x^T(t-d_1) \bar{N}_3 + x^T(t-d_2) \bar{N}_4 + \dot{x}^T(t) \bar{N}_5] \\ \times \left[x(t) - \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s) ds - x(t-d(t)) \right] = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} 2[x^T(t) \bar{S}_1 + x^T(t-d(t)) \bar{S}_2 \\ + x^T(t-d_1) \bar{S}_3 + x^T(t-d_2) \bar{S}_4 + \dot{x}^T(t) \bar{S}_5] \\ \times \left[x(t-d(t)) - \int_{t-d_2}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds - x(t-d_2) \right] = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} 2[x^T(t) \bar{M}_1 + x^T(t-d(t)) \bar{M}_2 \\ + x^T(t-d_1) \bar{M}_3 + x^T(t-d_2) \bar{M}_4 + \dot{x}^T(t) \bar{M}_5] \\ \times \left[x(t-d_1) - \int_{t-d(t)}^{t-d_1} \dot{x}(s) ds - x(t-d(t)) \right] = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

در روابط فوق $\tilde{A}_d = A_d + \Delta A_d$, $\tilde{B} = B + \Delta B$, $\tilde{A} = A + \Delta A$ برای $\bar{S}_i = T^{-1} S_i T^{-1}$ و $\bar{N}_i = T^{-1} N_i T^{-1}$, $\bar{M}_i = T^{-1} M_i T^{-1}$ $i=1, \dots, 5$ می باشد. از طرف دیگر، برای هر ماتریس متقارن مثبت نیمه معین X رابطه زیر به ازای مقادیر تأخیر که رابطه (۵) را برآورده می کنند برقرار است [۱۳]:

که در آن:

$$\lambda \Theta + \lambda^2 \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ D \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^T & 0 & 0 & 0 & D^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$+ \begin{bmatrix} \bar{E}_a^T \\ \bar{E}_d^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_a & \bar{E}_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0$$

برای تبدیل نامساوی ماتریسی غیر خطی فوق به یک نامساوی ماتریسی خطی از تغییر متغیرهای λT , λN_i , λM_i , λQ_i , λZ , λP و λS_i به ترتیب به جای S_i و T , N_i , M_i , Q_i , Z , P استفاده می کنیم:

$$\Theta + \begin{bmatrix} DD^T & 0 & 0 & 0 & DD^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ DD^T & 0 & 0 & 0 & DD^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$+ \begin{bmatrix} \bar{E}_a^T \\ \bar{E}_d^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_a & \bar{E}_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0$$

با استفاده از قضیه متمم شر، برقراری نامساوی ماتریسی خطی فوق معادل با منفی معین بودن ماتریس $\hat{\Delta}$ که در رابطه (۳۵) تعریف شده می باشد. اگر نامساوی ماتریسی (۳۵) برقرار باشد آنگاه

$$\dot{V}(x_t) \leq -\xi^T(t)(-\hat{\Delta})\xi(t) \leq -\lambda_{\min}(-\hat{\Delta})\|x_t\|^2 \quad (57)$$

و متعاقباً:

$$\tilde{\Phi} = \hat{\Phi} + \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ D \end{bmatrix} J(t) \begin{bmatrix} \bar{E}_a & \bar{E}_d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$+ \begin{bmatrix} \bar{E}_a^T \\ \bar{E}_d^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} J^T(t) \begin{bmatrix} D^T & 0 & 0 & 0 & D^T \end{bmatrix}$$

که در آن ماتریس $\tilde{\Phi} \in R^{5 \times 5}$ متقارن می باشد و عناصر آن در رابطه (۵۲) تعریف شده اند. (تعریف مابقی عناصر $\tilde{\Phi}$ از تقارن آن استخراج می گردد).

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{11} &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + N_1 + N_1^T + AT \\ &+ BW(\alpha, Y, L) + (AT + BW(\alpha, Y, L))^T \\ \hat{\Phi}_{12} &= N_2^T - N_1 + S_1 - M_1 + A_d T, \\ \hat{\Phi}_{13} &= M_1 + N_3^T, \quad \hat{\Phi}_{14} = -S_1 + N_4^T, \\ \hat{\Phi}_{15} &= N_5^T - ET + P + (AT + BW(\alpha, Y, L))^T \\ \hat{\Phi}_{22} &= (\mu - 1)Q_3 + S_2 + S_2^T - N_2 - N_2^T - M_2 - M_2^T \\ \hat{\Phi}_{23} &= M_2 - N_3^T + S_3^T - M_3^T \\ \hat{\Phi}_{24} &= -S_2 - N_4^T + S_4^T - M_4^T \\ \hat{\Phi}_{25} &= TA_d^T + S_5^T - N_5^T - M_5^T \\ \hat{\Phi}_{33} &= -Q_1 + M_3 + M_3^T, \quad \hat{\Phi}_{34} = -S_3 + M_4^T, \\ \hat{\Phi}_{35} &= M_5^T, \quad \hat{\Phi}_{44} = -Q_2 - S_4 - S_4^T, \\ \hat{\Phi}_{45} &= -S_5^T, \quad \hat{\Phi}_{55} = d_2 Z_1 + d_{12} Z_2 - 2ET \end{aligned} \quad (52)$$

اکنون، در رابطه (۵۰)، رابطه (۵۱) را جایگزین ماتریس $\tilde{\Phi}$ می کنیم:

$$\Theta + \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ D \end{bmatrix} J(t) \begin{bmatrix} \bar{E}_a & \bar{E}_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$+ \begin{bmatrix} \bar{E}_a^T \\ \bar{E}_d^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} J^T(t) \begin{bmatrix} D^T & 0 & 0 & 0 & D^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0$$

که در آن Θ برابر است با:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \hat{\Phi} & d_2 N & d_{12} M & d_{12} S \\ * & -d_2 Z_1 & 0 & 0 \\ * & * & -d_{12}(Z_1 + Z_2) & 0 \\ * & * & * & -d_{12} Z_2 \end{bmatrix} \quad (54)$$

با توجه به لم (۲) رابطه (۵۳) برقرار است اگر:

$$V(x_t) = x^T(t)T^{-1}PT^{-1}x(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(s)T^{-1}QT^{-1}x(s)ds + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)T^{-1}ZT^{-1}\dot{x}(s)dsd\theta \quad (63)$$

با بکار بستن روندی مشابه با اثبات قضیه (۲)، نامساوی ماتریسی خطی

$$\dot{V}(x_t(t)) \text{ LMI فوق برقرار باشد، آنگاه } (59)$$

منفی می باشد. در نتیجه:

$$x^T Px \leq V(x_t) < V(x_t(0)) \leq \max_{\theta \in [0, \tau]} \left\{ \|\phi(\theta)\|^2 [\lambda_{\max}(T^{-1}PT^{-1}) + \tau \lambda_{\max}(T^{-1}QT^{-1})] + \|\phi(\theta)\|^2 \left[\frac{1}{2} \tau^2 \lambda_{\max}(T^{-1}ZT^{-1}) \right] \right\} = \Lambda_3(\phi, \dot{\phi}) \quad (64)$$

اگر $\Lambda_3(\phi, \dot{\phi}) \leq 1$ باشد حتماً $x^T Px \leq 1$ خواهد بود در نتیجه همه

مسیرهای $x(t)$ که از $\Lambda_3(\phi, \dot{\phi}) \leq 1$ شروع می شوند درون $x^T Px \leq 1$

باقی می ماند و به این طریق قید $|h_i x| \leq u_{i_{\max}}$ به سبب نامساوی ماتریسی

(۶۰) برآورده می شود.

۴- شبیه سازی کامپیوتری

در این بخش، شبیه سازی هایی انجام می پذیرد تا عملکرد قانون

کنترلی مقاوم پیشنهادی نشان داده شود. برای این منظور، یک مثال

کاربردی و یک مثال عددی در نظر گرفته شده اند.

مثال ۱: سیستم سینگولار نامعین دارای تأخیر (۴) را با مشخصات زیر در

نظر بگیریم:

$$A = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.3 & -0.6 & 0.4 \\ 0.9 & 0.5 & 0.8 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & -0.2 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$E = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.0 \\ 2.0 \end{bmatrix}$$

ماتریس های نایقینی به فرم مجاز زیر در نظر گرفته می شوند

$$[\Delta A \quad \Delta A_d \quad \Delta B] = DJ(t)[E_a \quad E_d \quad E_b] \quad (66)$$

که در آن،

$$D = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}, E_a = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$E_d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.0 & 0.2 \\ 0.0 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}, E_b = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, J(t) = \sin(t)$$

تأخیر زمانی $d(t)$ و قید دامنه ورودی از روابط زیر پیروی می کند:

$$1 \leq d(t) \leq 3, \quad 0 \leq \dot{d}(t) \leq 1, \quad -1 \leq u(t) \leq 1 \quad (68)$$

$$x^T Px \leq V(x_t) < V(x_t(0)) \leq \max_{\theta \in [0, d_2]} \left\{ \|\phi(\theta)\|^2 [\lambda_{\max}(T^{-1}PT^{-1}) + d_1 \lambda_{\max}(T^{-1}Q_1 T^{-1}) + d_2 \lambda_{\max}(T^{-1}Q_2 T^{-1}) + d_2 \lambda_{\max}(T^{-1}Q_3 T^{-1})] + \|\phi(\theta)\|^2 \left[\frac{1}{2} d_2^2 \lambda_{\max}(T^{-1}Z_1 T^{-1}) + \frac{d_{12}}{2} (d_1 + d_2) \lambda_{\max}(T^{-1}Z_2 T^{-1}) \right] \right\} = \Lambda_2(\phi, \dot{\phi}) \quad (58)$$

آنگاه اگر مجموعه $\Lambda_2(\phi, \dot{\phi}) \leq 1$ باشد حتماً $x^T Px \leq 1$ خواهد بود و

همه مسیرهای $x(t)$ که از $\Lambda_2(\phi, \dot{\phi}) \leq 1$ شروع می شوند درون

$x^T Px \leq 1$ باقی می ماند و بدان وسیله قید $|h_i x| \leq u_{i_{\max}}$ به سبب

نامساوی ماتریسی (۳۶) برآورده می شود.

قضیه ۳- سیستم سینگولار (۱۶) را با $d_1 = d_2 = \tau$ و $\mu = 0$ در نظر

بگیرید، اگر ماتریس های $L, Y, Z, Q, P > 0$ و

ماتریس های $T > 0, N_i, i = 1, \dots, T$ با ابعاد مناسب وجود داشته

باشند به نحوی که:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} + DD^T & \Psi_{12} & \Psi_{13} + DD^T & \tau N_1 & \bar{E}_a^T \\ * & \Psi_{22} & \Psi_{23} & \tau N_2 & \bar{E}_d^T \\ * & * & \Psi_{33} & \tau N_3 & 0 \\ * & * & * & -\tau Z & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (59)$$

$$\begin{bmatrix} u_{i_{\max}} & I_i \\ * & u_{i_{\max}} P \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (60)$$

که در آن $\bar{E}_d = E_d T$ و $\bar{E}_a = E_a T + E_b W(\alpha, Y, L)$ و Ψ_{ij} ها در

رابطه زیر تعریف شده اند:

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= AT + BW(\alpha, Y, L) \\ &+ (AT + BW(\alpha, Y, L))^T + N_1 + N_1^T + Q \\ \Psi_{12} &= A_d T - N_1 + N_2^T \\ \Psi_{13} &= (AT + BW(\alpha, Y, L))^T + P - ET + N_3^T \\ \Psi_{22} &= -N_2 - N_2^T - Q, \quad \Psi_{23} = -N_3 + TA_d^T, \\ \Psi_{33} &= \tau Z - 2ET \end{aligned} \quad (61)$$

آنگاه سیستم (۱۶) با بهره کنترل کننده فیدبک پایدار ساز $F = T^{-1}Y$

پایدار مقاوم خواهد بود و مجموعه $\Lambda_3(\phi, \dot{\phi}) \leq 1$ یک مجموعه پایا

درون ناحیه جذب خواهد بود:

$$\Lambda_3(\phi, \dot{\phi}) = \max_{\theta \in [0, \tau]} \left\{ \|\phi(\theta)\|^2 (\lambda_{\max}(P) + \tau \lambda_{\max}(Q)) + \|\phi(\theta)\|^2 \frac{\tau^2}{2} \lambda_{\max}(Z) \right\} \quad (62)$$

اثبات - $V(x_t)$ را کاندید لیاپانوف برای سیستم (۱۶) با تأخیر زمانی

ثابت τ در نظر می گیریم:

مثال ۲: در نظریه مدارهای الکتریکی، مدل های مدارهای خطوط انتقال و نیز مدار معادل برخی المان های جزئی (PEEC)، به معادلات دیفرانسیل تأخیردار خنثی (NDE) منجر می شود [۳۳]. از آنجاییکه حل عددی معادلات تأخیری نوع NDE سخت است، رویکرد پیشنهادی در مراجع مختلف [۱۳، ۳۴] آن است که ابتدا معادلات را به صورت معادلات سینگولار تأخیری از نوع تأخیردار عقب افتاده (RDE) بازنویسی کرده و سپس آنها را حل نمود. یک مدار الکتریکی با المان های جزئی با معادلات زیر قابل توصیف است [۳۵]:

$$\begin{cases} C_0 \dot{y}(t) + G_0 y(t) + C_1 \dot{y}(t-d(t)) \\ \quad + G_1 y(t-d(t)) = B_0 u(t) \\ y(t) = \phi(t); \quad t \in (-d_2, 0) \end{cases} \quad (71)$$

که در آن C_0 یک ماتریس قطری و G_0 ، C_1 و G_1 ماتریس های حقیقی با ابعاد مناسب هستند. همانطور که واضح است این دسته معادلات تأخیری از نوع NDE می باشند. معادلات فوق را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \bar{G}_0 y(t) + \bar{C}_1 \dot{y}(t-d(t)) \\ \quad + \bar{G}_1 y(t-d(t)) + \bar{B}_0 u(t) \\ y(t) = \phi(t); \quad t \in (-d_2, 0) \end{cases} \quad (72)$$

که در آن بردار $y(t) \in \mathbb{R}^n$ و شامل ولتاژ و جریان گره های مدار می باشد، همچنین تمامی ماتریس های $\bar{G}_0$ ، $\bar{C}_1$ ، $\bar{G}_1$ و $\bar{B}_0$ دارای مقادیر حقیقی با ابعاد مناسب هستند. با تعریف:

$$\eta(t) = y(t), \quad \zeta(t) = \dot{y}(t) - \bar{G}_0 y(t) \quad (73)$$

دسته معادلات سیستم (۷۲) قابل تبدیل به معادلات سینگولار تأخیری RDE به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} E \dot{x}(t) = A x(t) + A_d x(t-d(t)) + B u(t) \\ \begin{cases} \eta(t) = \phi(t), & t \in (-d_2, 0) \\ \zeta(t) = \dot{\phi}(t) - \bar{G}_0 \phi(t), & t \in (-d_2, 0) \end{cases} \end{cases} \quad (73)$$

که در آن $x(t) = [\eta^T(t) \quad \zeta^T(t)]^T$ و $\phi(t)$ بردار شرایط اولیه است که المان های آن توابع پیوسته مشتق پذیر می باشند و

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \bar{G}_0 & I_{n \times n} \\ 0 & -I_{n \times n} \end{bmatrix} \\ A_d &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{C}_1 + \bar{G}_1 \bar{G}_0 & \bar{G}_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (74)$$

مدار الکتریکی با معادل PEEC شامل یک سلف و یک خازن را با پارامترهای داده شده زیر در نظر بگیرید [۳۴]:

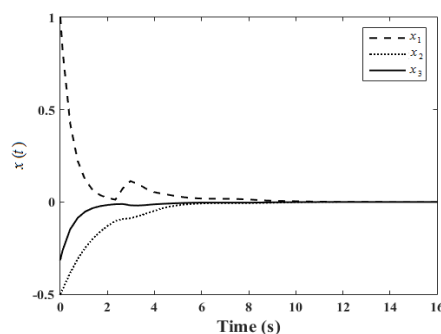
هدف طراحی کنترل کننده پایداری ساز مقاوم وابسته به تأخیر می باشد به نحویکه ضمن برآورده شدن قید اشباع، سیستم حلقه بسته داده شده پایداری مقاوم باشد. بدین منظور، طبق قضیه (۲) می بایست به حل LMI (۳۵) و (۳۶) پردازیم. از نرم افزار متلب برای حل LMI استفاده شده است. نتایج بدست آمده به صورت زیر می باشد:

$$L = L_1 = \begin{bmatrix} -0.7918 & -0.5351 & -0.5394 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 0, \quad T = \begin{bmatrix} 1.9681 & -0.3307 & -0.6283 \\ -0.3307 & 0.8752 & 0.0175 \\ -0.6283 & 0.0175 & -0.1437 \end{bmatrix} \quad (69)$$

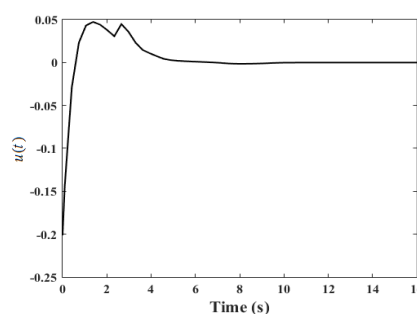
و نهایتاً کنترل کننده فیدبک حالت مقاوم پیشنهادی به صورت زیر خواهد بود:

$$u(t) = L_1 T^{-1} x(t) = [0.2845 \quad -0.5527 \quad 2.4424] x(t) \quad (70)$$

حال، سیستم سینگولار نامعین تأخیر زمانی (۵) با پارامترها و قیود داده شده را به ازای شرایط اولیه $\phi(t) = [1 \quad -0.5 \quad -0.3]^T$ ، $t \in [-3, 0]$ سازی کرده و نتایج بدست آمده را مورد بررسی قرار می دهیم. شکل (۱) وضعیت حالت های سیستم حلقه بسته را به تصویر می کشد. نتایج حاکی از آن است که کنترل کننده طراحی شده ضمن دفع مطلوب ناپایداری، منجر به پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته گردیده است. همچنین در شکل (۲)، که وضعیت سیگنال کنترلی را نمایش می دهد، ملاحظه می کنید که قید اشباع ورودی نیز برآورده شده است.



شکل ۱: وضعیت پاسخ حالت های سیستم سینگولار تأخیر زمانی نامعین تحت کنترل کننده پایداری ساز مقاوم



شکل ۲: پاسخ سیگنال کنترلی سیستم سینگولار تأخیر زمانی نامعین تحت کنترل کننده پایداری ساز مقاوم

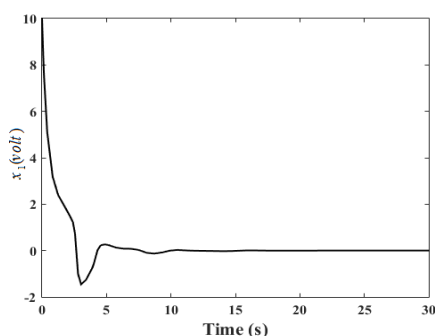
$$\alpha = 0, l = [0.0574 \quad -0.0176 \quad -0.0852 \quad -0.0091] \quad (A1)$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.2662 & -0.1774 & 0.0826 & 0.0336 \\ -0.1774 & 0.4847 & -0.0775 & 0.0067 \\ 0.0826 & -0.0775 & 0.9589 & -0.1803 \\ 0.0336 & 0.0067 & -0.1803 & 1.0951 \end{bmatrix}$$

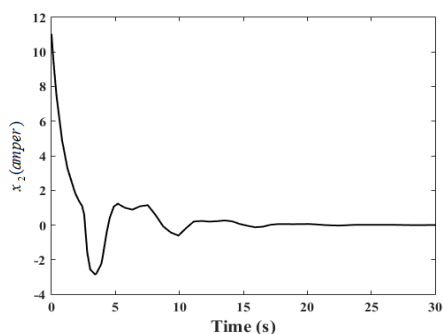
در نتیجه کنترل کننده فیدبک حالت پایداری برای سیستم داده شده (بر اساس قضیه ۲) به صورت زیر خواهد بود:

$$u(t) = [0.2912 \quad 0.0522 \quad -0.1166 \quad -0.0368]x(t) \quad (A2)$$

برای بررسی کارایی کنترل کننده طراحی شده، سیستم حلقه بسته سینگولار را با پارامترهای داده شده تحت کنترل کننده (A2) به ازای تابع اولیه $\phi(t) = [1 \ 0 \ 1 \ 1]^T$ و $\theta \in [-\pi, \pi]$ شبیه سازی کرده و نتایج شبیه سازی در شکل های ۳-۶ آورده شده است.



شکل ۳: پاسخ زمانی متغیرهای حالت x_1 تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده در سناریوی اول



شکل ۴: پاسخ زمانی متغیرهای حالت x_2 تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده در سناریوی اول

$$\bar{G}_0 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \bar{C}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \bar{G}_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta \bar{G}_0(t) = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix}, \Delta \bar{C}_1(t) = \begin{bmatrix} \Delta_3 & 0 \\ 0 & \Delta_4 \end{bmatrix} \quad (A5)$$

که Δ_i ها نایقینی های پارامتری بوده و در شرایط زیر صدق می کنند:

$$|\Delta_1| \leq 1.6, \quad |\Delta_2| \leq 0.05, \quad |\Delta_3| \leq 0.1, \quad |\Delta_4| \leq 0.3 \quad (A6)$$

بردارهای $\eta(t)$ و $\zeta(t)$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\eta(t) = y(t) = [x_1 \quad x_2]^T \quad (A7)$$

$$\zeta(t) = \dot{y}(t) - \bar{G}_0 y(t) = [x_3 \quad x_4]^T$$

که در آن x_1 ولتاژ خازن و x_2 جریان سلف بوده و متغیرهای x_3 و x_4 تعریف شده اند تا سیستم با معادلات تأخیری نوع NDE را به سیستم با معادلات سینگولار دارای تأخیر نوع RDE تبدیل کنند. با این تعریف ماتریس های زیر جهت توصیف سیستم حاصل می گردد:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2 & 0 & 0.1 & 0 \\ -1 & -1.1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A8)$$

$$E_a = \begin{bmatrix} 1.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, J(t) = \sin(t)$$

در ادامه دو سناریوی مختلف ارائه می گردد و در هر مورد بر اساس تکنیک های پیشنهادی در مقاله، کنترل کننده مناسب طراحی و عملکرد مطلوب آن نشان داده می شود.

سناریوی اول: سیستم سینگولار دارای تأخیر با پارامترهای (A8) لحاظ می گردد. تأخیر زمانی از روابط زیر پیروی می کنند:

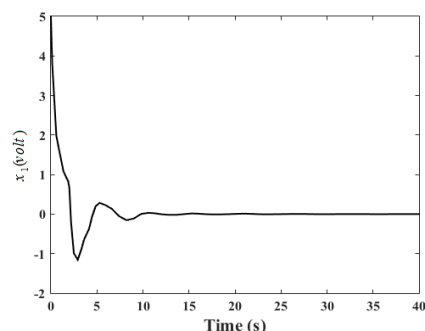
$$1 \leq d(t) \leq 3, \quad 0 \leq \dot{d}(t) \leq 1 \quad (A9)$$

همچنین سیگنال کنترلی می بایست قید زیر را برآورده سازد:

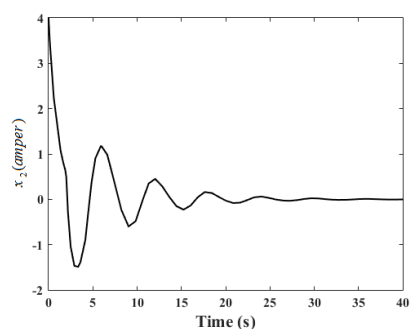
$$-0.1 \leq u(t) \leq 0.1 \quad (A10)$$

هدف، طراحی قانون کنترل فیدبک حالت $u(t) = [\alpha f + (1-\alpha)h]x(t)$ می باشد به نحوی که ضمن برآورده کردن قید اشباع، سیستم حلقه بسته مجاز نیز باشد. از حل LMI های (A5) و (A6) با استفاده از نرم افزار MATLAB نتایج زیر به دست می آید:

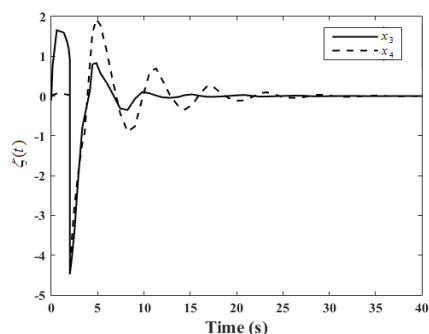
مطلوب قضایای ارائه شده در این مقاله برای کنترل سیستم های سینگولار دارای تأخیر ثابت عملی دارد.



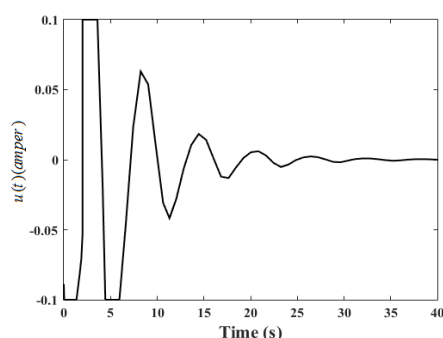
شکل ۷: پاسخ زمانی متغیر حالت x_1 تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده در سناریوی دوم



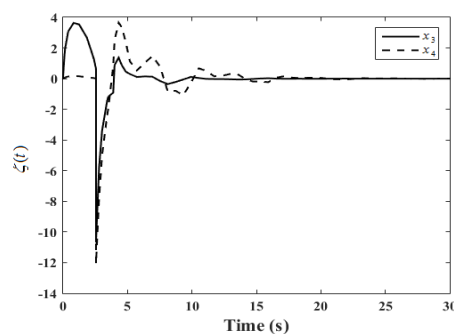
شکل ۸: پاسخ زمانی متغیر حالت x_2 تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده در سناریوی دوم



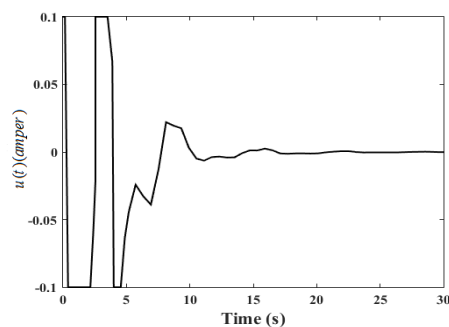
شکل ۹: پاسخ زمانی متغیرهای حالت $\zeta(t) = [x_3 \ x_4]^T$ تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده در سناریوی دوم



شکل ۱۰: پاسخ زمانی سیگنال کنترلی اشباع شده در سناریوی دوم



شکل ۵: پاسخ زمانی متغیرهای حالت $\zeta(t) = [x_3 \ x_4]^T$ تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده در سناریوی اول



شکل ۶: پاسخ سیگنال کنترلی اشباع شده در سناریوی اول

همانطور که در شکل (۶) مشاهده می کنید سیگنال کنترلی به اشباع رفته اما با این وجود کنترل کننده طراحی شده در این بخش منجر به پایداری سیستم حلقه بسته گردیده است. نتایج حاصل حاکی از آن است که تکنیک پیشنهاد شده در مقاله از کارایی لازم برای کنترل سیستم های سینگولار دارای تأخیر متغیر با زمان و در حضور اشباع محرک برخوردار است.

سناریوی دوم: در این بخش، مدل PEEC با پارامترهای داده شده

(۷۸) را با تأخیر ثابت $d_1 = d_2 = 2$ و سیگنال کنترلی با دامنه محدود $|u| \leq 0.1$ در نظر گرفته و برای طراحی کنترل کننده مشابه آنچه در سناریوی قبل گفته شد عمل می کنیم. با مد نظر قراردادن قضیه (۲) و با کمک نرم افزار MATLAB نتایج زیر حاصل می شود:

$$u(t) = [-0.0231 \ -0.0728 \ -0.0654 \ -0.0454]x(t) \quad (۸۳)$$

به منظور تحلیل کارایی کنترل کننده طراحی شده (۸۵)، سیستم حلقه بسته سینگولار را با پارامترهای داده شده در رابطه (۷۸) و با تأخیر ثابت، به ازای تابع اولیه $\phi(t) = [5 \ 4 \ 0]^T$ و $\theta \in \mathbb{R}$ می کنیم. شکل های ۷-۱۰ نتایج حاصل از شبیه سازی ها را نشان می دهد. همانطور که پیداست، علی رغم محدودتر کردن دامنه سیگنال کنترلی، کنترل کننده پیشنهادی در حضور قید اشباع محرک منجر به پایداری سیستم حلقه بسته شده است. بنابراین نتایج حاصل، حکایت از کارایی

- [5] L. SH. You, and B. S. Chen, "Tracking control designs for both holonomic and non-holonomic constrained mechanical systems: a unified viewpoint," *International Journal of Control*, vol. 58, no. 3, pp. 587-612, 1993.
- [6] D. G. Luenberger, and A. Arbel, "Singular dynamic Leontief systems," *Econometrica*, vol. 45, no. 4, pp. 991-995, 1977.
- [7] A. Azarfar, H. Toossian Shandiz, and M. Shafiee, "Adaptive feedback control for linear singular systems," *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, vol. 22, pp. 132-142, 2014.
- [8] J. Y. Ishihara, and M. H. Terra, "On the Lyapunov theorem for singular systems," *Automatic Control, IEEE Transactions*, vol. 47, no. 11, pp. 1926-1930, 2002.
- [9] Ch. Yang, Q. Zhang, and L. Zhou, *Stability Analysis and Design for Nonlinear Singular Systems*, Applied Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, 2013.
- [10] L. Zhang, E. K. Boukas, A. Haidar, "Delay-range-dependent control synthesis for time-delay systems with actuator saturation," *Automatica*, vol. 44, pp. 2691-2695, 2008.
- [11] Y. Y. Cao, and T. Hu, "Stability analysis of linear time-delay systems subject to input saturation," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 49, no. 2, pp. 233-240, 2002.
- [12] T. Binazadeh, and M. Yousefi, "Designing a cascade-control structure using fractional-order controllers: time delay fractional-order proportional-derivative controller and fractional-order sliding-mode controller," *ASCE's Journal of Engineering Mechanics*, doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001234, 2017.
- [13] M. Yousefi, and T. Binazadeh, "Delay-independent sliding mode control of time-delay linear fractional order systems," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, doi: 0142331216678059, 2017.
- [14] M. Hosseini Toodeshki, S. Hosseinnia, and J. Askari, "Adaptive robust control of uncertain systems with state and input delay," *International Journal of Control, Automation and systems*, vol. 8, no. 6, pp. 1212-1220, 2010.
- [15] H. Gao, and C. Wang, "Comments and further results on: A descriptor system approach to Hinf control of linear time-delay systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, pp. 520-525, 2003.
- [16] U. Ascher, and L. R. Petzold, "The numerical solution of delay-differential-algebraic equations of retarded and neutral type," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 32, pp. 1635-1657, 1995.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، مسأله پایدارسازی سیستم های سینگولار دارای تأخیر متغیر با زمان با در نظر گرفتن اشباع محرک در دو حالت مستقل از تأخیر و وابسته به تأخیر بررسی شد. ابتدا، برای سیستم سینگولار نامعین دارای تأخیر زمانی متغیر با زمان، شرایط وجود کنترل کننده فیدبک حالت، مستقل از تأخیر، با در نظر گرفتن اشباع محرک با هدف مجاز نمودن سیستم حلقه بسته در قالب قضیه ای ارائه شد. سپس قضایای پایداری مقاوم وابسته به تأخیر برای این سیستم ها در دو نسخه تأخیر متغیر با زمان و تأخیر ثابت، شرایط پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته تحت کنترل کننده فیدبک حالت اشباع شده را از نقطه نظر LMI نتیجه دادند. در انتها، از مثالهای عددی و عملی شبیه سازی شده برای نشان دادن کارایی قضایای ارائه شده، استفاده شد.

پیوست

قضیه - (لیاپانوف - کراسوفسکی) سیستم سینگولار دارای تأخیر (۱) را در نظر بگیرید. اگر سیستم (۱) ضربه آزاد و رگولار باشد و ثوابت مثبت V ، σ و ς و R و $C[-d, 0] \rightarrow R \times C[-d, 0]$ وجود داشته باشند، به نحویکه:

$$\sigma \|x(t)\|^2 \leq V(x_t) \leq \nu \|x_t\|^2 \quad (۸۴)$$

$$\dot{V}(x_t) \leq -\varsigma \|x_t\|^2$$

و تابع $V(x_t)$ برای x_t هایی که در معادله (۱) صدق می کنند، مطلقاً پیوسته باشد، آنگاه سیستم (۱) پایدار مجانبی می باشد. [۳۷]

قضیه - (متمم شر) دو گزاره زیر معادلند [۳۷]:

$$(i) \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (۸۵)$$

$$(ii) \quad A_{22} < 0 \quad \& \quad A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{12}^T < 0 \quad (۸۶)$$

مراجع

- [1] S. Ayasun, CH.O. Nwankpa, and H.G. Kwatny, "An efficient method to compute singularity induced bifurcations of decoupled parameter-dependent differential algebraic power system model," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 167, no. 1, pp. 435-453, 2005.
- [2] R. Gani, and I.T. Cameron, "Modelling for dynamic simulation of chemical processes: the index problem," *Chemical Engineering and Science*, vol. 47, no. 5, pp. 1311-1315, 1992.
- [3] Y. Liu, and X. Wen, *Variable structure Control for singular systems*, South China University of technology Press, Guangzhou, 1997.
- [4] H. Krishnan, and N. H. Mcclamroch, "Tracking in nonlinear differential-algebraic control systems with applications to constrained robot systems," *Automatica*, vol. 30, no. 12, pp. 1885-1897, 1994.

- [28] Y. Liu, Y. Kao, Sh. Gu, and H. R. Karimi, "Soft variable structure controller design for singular systems," *Jornal of the Franklin Institute*, vol. 352, no. 4, pp. 1613-1626, 2015.
- [29] Y. Liu, C. Zhang, and C. Gao, "Dynamic soft variable structure control of singular systems," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 17, no. 8, pp. 3345-3352, 2012.
- [30] Y. Ma, and L. Fu, "Robust exponential stability and memory state feedback control for uncertain singular time-delay systems with saturating actuators," *IET Control Theory & Applications*, vol. 10, no. 3, pp. 328-338, 2016.
- [31] L. Dai, *Singular Control Systems*, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1989.
- [32] I. R. Petersen, "A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems," *System Control Letter*, vol. 8, pp. 351-357, 1987.
- [33] A. Bellen, N. Guglielmi, and A. E. Ruehli, "Methods for linear systems of circuit delay differential equations of neutral type," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 46, no. 1, pp. 212-215, 1999.
- [34] D. Yue, and Q. L. Han, "A delay-dependent stability criterion of neutral systems and its application to a partial element equivalent circuit model," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 51, no. 12, pp. 685-689, 2004.
- [35] J. Cullum, A. Ruehli, and T. Zhang, "A method for reduced-order modeling and simulation of large interconnect circuits and its application to PEEC models with retardation," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 47, no. 4, pp. 261-273, 2000.
- [36] T. Hu, Z. Lin, and B. M. Chen, "An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance," *Automatica*, vol. 38, no. 2, pp. 351-359, 2002.
- [37] L. L. Liu, J. G. Peng, B. W. Wu, "On parameterized Lyapunov-Krasovskii functional techniques for investigating singular time-delay systems," *Applied Mathematics Letters*, vol. 24, pp. 703-708, 2011.
- [17] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [18] H. Chenarani, and T. Binazadeh, "Flexible structure control of unmatched uncertain nonlinear systems via passivity-based sliding mode technique," *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Electrical Engineering*, doi: 10.1007/s40998-017-0012-x, 2017.
- [19] A.R. Hakimi, and T. Binazadeh, "Robust generation of limit cycles in nonlinear systems: application on two mechanical systems," *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 12, no. 4, pp. 041013(1-8), 2017.
- [20] E. Uezato, and M. Ikeda, "Strict LMI conditions for stability, robust stabilization, and control of descriptor systems," *Proceedings of the 38th conference on decision and control*, Phoenix, Arizona USA, vol. 4, pp. 4092-4097, 1999.
- [21] R. Lu, H. Su, and A. Xue, *The robust control theory of singular systems*, Science Press, Beijing, 2008.
- [22] S.Y. Xu, and J. Lam, *Robust control and filtering of singular systems*, Berlin: Springer-Verlag, 2006.
- [23] L. Wu, and W. X. Zheng, "Passivity-based sliding mode control of uncertain singular time-delay systems," *Automatica*, vol. 45, pp. 2120-2127, 2009.
- [24] S. Xu, P. Van Dooren, R. Stefan, and J. Lam, "Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, pp. 1122-1128, 2002.
- [25] N. Chaibi, E. H. Tissir, "Delay-dependent robust stability of singular systems with time-varying delay," *International Journal of Control and Information*, vol. 28, no. 2, pp. 147-162, 2011.
- [26] T. Binazadeh, and M. Bahmani, "Design of robust controller for a class of uncertain discrete-time systems subject to actuator saturation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, doi: 10.1109/TAC.2016.2580662, 2017.
- [27] T. Binazadeh, and M. Bahmani, "Robust time-varying output tracking control in the presence of actuator saturation," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, doi: 0142331216650022, 2017.

کنترل کننده پیش بین بر پایه حالت ماندگار سیگنال کنترلی، تنظیم تحلیلی و تحلیل سیستم حلقه بسته

پیمان باقری

استادیار گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تبریز، Pbagheri@tabrizu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۵/۲۶، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۵/۸/۳۰)

چکیده: برای تضمین حذف خطای حالت ماندگار در ردیابی ورودی پله و حذف اغتشاش پله در کنترل کننده های پیش بین، دو راهکار وجود دارد. در راهکار اول که متداول تر است، به مدل سیستم انتگرال گیر اضافه می شود. در کنترل کننده هایی نظیر کنترل پیش بین تعمیم یافته و کنترل ماتریس دینامیکی از این ایده استفاده شده است. در راهکار دوم، از مقدار مطلوب حالت ماندگار سیگنال کنترلی در تابع معیار کنترل کننده استفاده می شود. با توجه به مزیت های راهکار دوم، در این مقاله سعی شده است روش تنظیم تحلیلی برای چنین کنترل کننده هایی ارائه شود. با توجه به این که غالباً مدل های مرتبه اول با تاخیر بسیاری از فرآیندهای صنعتی را به خوبی توصیف می کنند، در این مقاله از این مدل ها برای تقریب سیستم واقعی و محاسبه پیش بینی ها استفاده شده است. با استفاده از این مدل ها و با فرض غیرفعال بودن قیده ها، تابع تبدیل سیستم حلقه بسته تعیین می گردد و تحلیل های عمیقی از سیستم حلقه بسته و قوام آن نسبت به نامعینی، نویز و اغتشاش ارائه می شود. در انتهای مقاله نیز چند مثال شبیه سازی برای نشان دادن قابلیت های روش تنظیم پیشنهادی، ارائه می شود.

کلمات کلیدی: کنترل کننده پیش بین، تنظیم تحلیلی کنترل کننده، مدل مرتبه اول با تاخیر، حالت ماندگار سیگنال کنترلی.

Model Predictive Controller Based on Steady-State Value of Control Signal, Analytically Tuning and Closed-Loop Studies

Peyman Bagheri

Abstract: There are two approaches to guarantee zero steady-state error in step reference tracking and step disturbance rejection in model predictive controllers. In the first scheme, which is more prevalent, integrator is added to the model of the system. In generalized predictive control and dynamic matrix control, this structure is used. In second scheme, the desired steady-state value of control signal is used in cost function of predictive controller. Due to substantial characteristics of second scheme, in this paper it is tried to propose an analytically tuning method for these predictive controllers. Besides, many industrial processes can be effectively described with first-order plus dead time models. Hence, in this paper these models are used to provide predictions. Using these models and considering the constraints are inactive, the closed-loop transfer function is derived and a deep study on the closed-loop system and its robustness are given. Finally, the simulation results are used to evaluate the efficiency of the proposed tuning method.

Keywords: Model Predictive Control, Analytically Controller tuning, First Order plus Dead Time Models, Steady-State Control Signal.

۱- مقدمه

کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل^۱ امروزه مطرح‌ترین روش کنترل فرآیند پیشرفته محسوب می‌شود. پیشرفت‌های چشمگیر این خانواده از کنترل‌کننده‌ها و استقبال روزافزون از آن در صنعت، مخصوصاً صنایع شیمیایی مانند نفت و پتروشیمی در مراجع متعددی مورد تأکید، بررسی و مطالعه قرار گرفته است [۱-۳]. به صراحت می‌توان گفت ویژگی‌هایی مانند برخورد اصولی و مهندسی با سیستم‌های تأخیردار، کنترل سیستم‌های چندمتغیره، قابلیت حل مسئله قید و امکان استفاده از اطلاعات ورودی مرجع آینده، از دلایل موفقیت این کنترل‌کننده‌ها است. کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل به خانواده وسیعی از روش‌های کنترلی اطلاق می‌شود که در آن‌ها روند زیر اجرا می‌شود [۴]:

- استفاده از مدل برای پیش‌بینی رفتار آینده خروجی سیستم در طول افق پیش‌بین،
- تعریف یک تابع معیار (تابع هزینه) به عنوان هدف بهینه‌سازی،
- حل مسئله بهینه‌سازی برای به‌دست آوردن سیگنال‌های کنترلی بهینه در طول افق کنترل با استفاده از مدل پیش‌بین،
- اعمال اولین سیگنال کنترلی بهینه به‌دست آمده در طول افق کنترل و اجرای مجدد همین روند.

همان‌طور که می‌دانیم، بعد از پایدارسازی مهم‌ترین خواسته از یک سیستم کنترلی تضمین حذف خطای حالت ماندگار در ردیابی ورودی پله و حذف اغتشاش پله است. برای رسیدن به این هدف، در ساختار کنترل پیش‌بین دو راهکار وجود دارد [۵]؛ که عبارت‌اند از افزودن انتگرال‌گیر به مدل سیستم و استفاده از حالت ماندگار سیگنال کنترلی. در راهکار اول، به مدل سیستم انتگرال‌گیر افزوده می‌شود و از قابلیت انتگرال‌گیر برای حذف خطای حالت ماندگار استفاده می‌شود. در این ساختار اغلب در تابع معیار کنترل‌کننده، توان دوم خطای پیش‌بینی ردیابی به همراه توان دوم تغییرات سیگنال کنترلی آینده وجود دارد. لازم به ذکر است که انتگرال‌گیر مرتبه سیستم حلقه بسته را بالا برده و همچنین می‌تواند مشکل پایان‌پذیری انتگرالی^۲ را به همراه داشته باشد [۶]. در ساختار دوم، مرتبه سیستم افزایش نمی‌یابد و به جای استفاده از انتگرال‌گیر، مقدار حالت ماندگار سیگنال کنترلی استفاده می‌شود و در تابع معیار کنترل‌کننده علاوه بر توان دوم خطای پیش‌بینی ردیابی، توان دوم اختلاف مقدار ماندگار سیگنال کنترلی آینده و مقدار مطلوب آن وجود دارد. ثابت می‌شود که این تابع معیار در ساختار کنترل پیش‌بین می‌تواند حذف خطای حالت ماندگار در ردیابی ورودی پله و حذف اغتشاش پله را تضمین کند [۷]. مزیت اصلی این روش ساده بودن ساختار کنترلی و سیستم حلقه بسته ایجاد شده است. همچنین در این ساختار مشکل پایان‌پذیری انتگرال نیز وجود ندارد. البته باید ذکر گردد که این ساختار نمی‌تواند اغتشاش‌های پله ورودی را در سیستم‌های انتگرالی

حذف کند ولی بحث ردیابی و حذف اغتشاش خروجی همچنان تضمین شده است؛ این مطلب با مثالی در این مقاله نشان داده می‌شود. در کنار تمام این بحث‌ها، یکی از چالش‌های به‌کارگیری کنترل‌کننده‌های پیش‌بین نحوه تنظیم پارامترهای آن‌ها است. این مسئله از ابتدا مورد توجه محققان بوده است و در سال‌های اخیر نیز تلاش‌های زیادی در این زمینه انجام گرفته است. در [۸-۹] روش‌های تنظیم ارائه شده تا سال ۲۰۰۹ بررسی شده‌اند. اخیراً نیز در [۱۰]، دسته‌بندی جدیدی از روش‌های تنظیم کنترل‌کننده‌های پیش‌بین ارائه شده است و بر اساس آن، روش‌های جدیدتر تنظیم تا سال ۲۰۱۴ مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در این دسته‌بندی، روش‌های تنظیم به سه دسته اصلی تقسیم می‌گردند؛ روش‌های متفرقه تنظیم، تنظیم بر پایه روش‌های عددی و محاسبات نرم و فرمول‌های بسته تنظیم. البته فرمول‌های بسته تنظیمی که بر پایه‌های نظری استوارند، اهمیت بیشتری دارند زیرا این فرمول‌ها دید خوبی از سیستم حلقه بسته از نظر پایداری، عملکرد و مقاومت ایجاد می‌کنند. قابل ذکر است که ارتباط پیچیده پارامترهای تنظیم با پایداری و عملکرد سیستم حلقه بسته، مسئله تنظیم را دشوار و حل کامل آن را مسئله‌ای باز در حوزه کنترل پیش‌بین نگه داشته است. در ادامه چند نمونه از روش‌های تنظیم مطرح و جدید معرفی می‌شود.

کنترل شبکه انتقال آب آشامیدنی با استفاده از کنترل‌کننده پیش‌بین چندمتغیره در مرجع [۱۱] مد نظر بوده و تنظیم افق پیش‌بینی و وزن‌های موجود در تابع هزینه با استفاده از بهینه‌سازی چندهدفه بر اساس قوانین فازی انجام شده است. در [۱۲] با استفاده از بهینه‌سازی اجتماع ذرات^۳ برای کنترل‌کننده پیش‌بین چندمتغیره مقید، روش تنظیمی ارائه شده است که عملکرد مقاوم را تضمین می‌کند. تنظیم کنترل پیش‌بین غیرخطی بر اساس بهینه‌سازی چندهدفه در مرجع [۱۳] مطرح شده است. در [۱۴] بر اساس محاسبه حساسیت پیش‌بینی انجام شده نسبت به پارامترهای قابل تنظیم، روش تنظیمی به‌صورت برخط برای ماتریس‌های وزنی کنترل‌کننده پیش‌بین مقید ارائه شده است. حل مسئله تنظیم به وسیله بحث تطابق کنترل‌کننده پیش‌بین با کنترل‌کننده فیدبک حالت در [۱۵] ارائه شده است. در مرجع [۱۶] کار مشابهی با مسئله تطابق کنترل‌کننده‌ها انجام شده است با این تفاوت که سیستم از دید ورودی-خروجی مد نظر بوده و با استفاده از روش بهینه‌سازی محدب، ماتریس‌های وزنی کنترل‌کننده تنظیم می‌شوند. همین ایده در مرجع [۱۷] برای تنظیم کنترل‌کننده پیش‌بین تعمیم یافته^۴ به‌کار گرفته شده است برای تطابق دادن کنترل‌کننده پیش‌بین با هر کنترل‌کننده دلخواه خطی تغییرناپذیر با زمان. لازم به ذکر است که در هیچ یک از روش‌های فوق، فرمول‌های بسته تنظیم ارائه نشده است. در ادامه به بررسی چند نمونه از روش‌های تنظیمی که به فرمول بسته منجر شده‌اند، پرداخته می‌شود. در [۱۸] سعی شده است با استفاده از تحلیل واریانس و برازش منحنی برای کنترل ماتریس دینامیکی^۵

^۳ Particle Swarm Optimization (PSO)^۴ Generalized Predictive Control (GPC)^۵ Dynamic Matrix Control (DMC)^۱ Model Based Predictive Control^۲ Integral Windup

استفاده از این دو مفهوم می‌توانیم بررسی کنیم که آیا یک عملکرد مطلوب حلقه بسته با تنظیم پارامترهای کنترل کننده دست‌یافتنی و یا شدنی هست یا خیر. این‌که به هر عملکرد دلخواهی با تنظیم کنترل کننده نمی‌توان دست یافت، واضح است؛ ولی تعیین بازه عملکردی دست‌یافتنی و شدنی بسیار کاربردی خواهد بود و یکی از نوآوری‌های مقاله محسوب می‌شود. همچنین برای سیستم حلقه بسته تحلیل‌های پایداری مقاوم در حضور نامعینی در مدل نیز انجام می‌شود و ارتباط بین تنظیم پایداری مقاوم حلقه بسته ارائه می‌شود. در نهایت با چند مثال شبیه‌سازی به بررسی فرمول‌ها و قضایا پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است که در مرجع [۲۳] راهکار افزودن انتگرال‌گیر به مدل مد نظر بوده است درحالی‌که در این مقاله از حالت ماندگار سیگنال کنترلی استفاده شده است. همچنین در مرجع [۲۲] فقط سیستم‌های پایدار با تاخیر به صورت صحیح از زمان نمونه‌برداری مد نظر بوده است که محدودتر از روش ارائه شده در این مقاله است. در نهایت قابل ذکر است که در هیچ یک از مراجع [۲۱-۲۳] بحث پایداری مقاوم سیستم نامعین مطرح نشده است. ارتباطدهی پایداری مقاوم سیستم حلقه بسته به مسئله تنظیم نیز نوآوری دیگر این مقاله است. باید به این نکته نیز اشاره کرد که اصلی‌ترین محدودیت روش ارائه شده در این مقاله غیرفعال فرض کردن قیده‌های سیستم است. اما باید تاکید شود که به‌دست آوردن روابط تحلیلی تنظیم برای حالتی که قیده‌های سیستم فعال باشند در حالت کلی امکان‌ناپذیر است. در کنار این بحث باید به این مطلب هم اشاره شود که یک سیستم کنترلی همیشه در مرز قیده‌ها نخواهد بود و در خیلی از زمان‌ها قیده‌ها فعال نخواهند بود. پس در این زمان‌ها روش ارائه شده در این مقاله، خواسته کنترلی را به صورت دقیق برآورده خواهد ساخت. در زمان‌هایی هم که قیده‌ها فعال هستند، چون راهی جز سعی و خطا وجود ندارد، پس حداقل روش ارائه شده نقطه اولیه برای سعی و خطا برای قیده‌ها نیز می‌تواند باشد. ساختار مقاله به این شکل است که در بخش دوم، فرموله‌بندی مسئله کنترل پیش‌بین در فضای حالت مطرح می‌شود، روابط سیستم حلقه بسته بدست می‌آید و شروط پایداری سیستم حلقه بسته تعیین می‌گردد. بخش سوم به مسئله تنظیم کنترل کننده معرفی شده در بخش دوم می‌پردازد و قضایایی را برای تنظیم تحلیلی پارامترها ارائه می‌کند. همچنین نشان داده می‌شود که حداکثر عملکرد دست‌یافتنی سیستم حلقه بسته با افق کنترل یک نیز امکان‌پذیر است. در بخش چهارم، تحلیل پایداری مقاوم سیستم را خواهیم داشت. بخش بعدی مثال‌های شبیه‌سازی را در بر دارد که به منظور بررسی کارایی روش ارائه تنظیم شده در این مقاله آمده است و نهایتاً در بخش ششم مقاله جمع‌بندی و نتیجه‌گیری را خواهیم داشت.

۲- فرموله‌بندی مساله

در این بخش برای سیستم‌هایی که با مدل خطی مرتبه اول با تاخیر تخمین زده شده‌اند، یک ساختار استاندارد کنترل پیش‌بین مقید در فضای

فرمول‌های تنظیم بسته ارائه شود. همین ایده در [۱۹] برای تنظیم مقاوم کنترل ماتریس دینامیکی بکار رفته است و برای سیستم دارای نامعینی فرمول‌های بسته تنظیم ارائه شده است. البته در بخش برازش منحنی، تعیین ساختار فرمول تنظیم به صورت سعی و خطا می‌باشد. شاید بتوان [۲۰] را به عنوان اولین کار تحلیلی در حوزه تنظیم پارامترهای کنترل پیش‌بین تلقی نمود که برای تمامی پارامترهای قابل تنظیم کنترل ماتریس دینامیکی روابط تحلیلی به صورت فرمول‌های بسته تعیین کرده است. در مرجع [۲۱] با در نظر گرفتن مدل مرتبه اول با تاخیر^۱ برای سیستم، روش تحلیلی برای تنظیم پارامترهای کنترل پیش‌بین تک ورودی- تک خروجی ارائه شده است. همچنین نشان داده شده است برای چنین ساختاری تمام عملکردهای ممکن سیستم توسط افق کنترل یک و دو قابل دسترس است. تعمیم این ایده به سیستم‌های چندمتغیره را می‌توان در مرجع [۲۲] یافت؛ به همین ترتیب تعمیم و گسترش این روش به سیستم‌های ناپایدار و دارای تاخیر کسری در مرجع [۲۳] انجام شده است. در این مقاله، برای تنظیم کنترل کننده پیش‌بین از ایده مطرح شده در [۲۱-۲۳] کمک گرفته شده است و همان‌طور که ذکر شد برای تضمین حذف خطای حالت ماندگار در ردیابی ورودی پله و حذف اغتشاش پله، از مقدار مطلوب حالت ماندگار سیگنال کنترلی در تابع معیار کنترل کننده استفاده می‌شود. با توجه به این‌که به‌دست آوردن فرمول‌های تحلیلی بسته در حالت کلی امکان‌پذیر نیست و همین‌طور چون مدل‌های مرتبه اول با تاخیر بسیاری از فرآیندهای صنعتی را به خوبی توصیف می‌کنند، در این‌جا از این مدل‌ها برای تقریب سیستم واقعی و محاسبه پیش‌بینی‌ها استفاده می‌گردد. لازم به ذکر است که در گسسته‌سازی مدل، اغلب فرض می‌شود تاخیر سیستم ضریب صحیحی از زمان نمونه‌برداری است. این فرض موجب ساده‌تر شدن مدل مرتبه اول با تاخیر گسسته در زمان می‌شود ولی محدود کننده است [۲۳]. در حالتی که لزوماً تاخیر مدل ضریب صحیحی از زمان نمونه‌برداری نباشد به آن مدل مرتبه اول با تاخیر کسری^۲ گوئیم. قابل ذکر است که در این مقاله مسئله تنظیم برای هر سیستمی که بتوان آن را با مدل مرتبه اول تقریب زد، حل شده است و فقط محدود به خود سیستم‌های مرتبه اول نیست. البته واضح است که هر چقدر دقت این تقریب بیشتر باشد، به محدوده عملکردی وسیع‌تری می‌توان دست یافت. با فرض غیرفعال بودن قیده‌های سیستم، تابع تبدیل سیستم حلقه بسته محاسبه می‌شود و مسئله تنظیم پارامترهای کنترل کننده پیش‌بین به یافتن ارتباط تحلیلی بین پارامترهای تنظیم و بهره‌ای که در این تابع تبدیل حلقه بسته ایجاد می‌شود، تغییر داده می‌شود. سپس دو مفهوم کلیدی دست‌یافتنی^۳ و شدنی^۴ به واسطه تعریف بهره‌های دست‌یافتنی و بهره‌های شدنی ارائه می‌شود. این دو مفهوم کلیدی پل ارتباطی بین پارامترهای تنظیم و عملکرد و پایداری سیستم حلقه بسته است. در واقع با

¹ First Order plus Dead Time (FOPDT)

² First Order plus Fractional Dead Time

³ Achievable

⁴ Feasible

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S} &= k(1-a)[\bar{\mathbf{S}}_1 \quad \bar{\mathbf{S}}_2 \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{S}}_{M-1} \quad \bar{\mathbf{S}}_M] \\
 \bar{\mathbf{S}}_1 &= \begin{bmatrix} a^0(1-b_1) \\ a(1-b_1) + a^0b_1 \\ \vdots \\ a^{P-1}(1-b_1) + a^{P-2}b_1 \end{bmatrix} \\
 &\vdots \\
 \bar{\mathbf{S}}_{M-1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a^0(1-b_1) \\ \vdots \\ a^{P-M-1}(1-b_1) + a^{P-M-2}b_1 \end{bmatrix}, \\
 \bar{\mathbf{S}}_M &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a^0(1-b_1) + v_0 \\ \vdots \\ a^{P-M}(1-b_1) + v_{P-M} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F} &= [\mathbf{F}_1 \quad \mathbf{F}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{F}_d \quad \mathbf{F}_{d+1} \quad \mathbf{F}_{d+2}] \\
 \mathbf{F}_1 &= \mathbf{F}_2 = \cdots = \mathbf{F}_d = \mathbf{0}_{P \times 1} \\
 \mathbf{F}_{d+1} &= a[a^0 \quad a^1 \quad \cdots \quad a^{P-1}]^T = a\mathbf{F}_{d+2}
 \end{aligned} \quad (8)$$

و $d+1$ حد پایین افق پیش‌بینی، $d+P$ حد بالای افق پیش‌بینی، P طول افق پیش‌بینی، M افق کنترل، $\hat{y}(n+j|n)$ پیش‌بینی j گام جلوتر خروجی مدل در m امین زمان نمونه‌برداری بوده و از نماد $\hat{\cdot}$ برای نشان دادن تخمین استفاده شده است. همچنین داریم:

$$v_i = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \sum_{j=1}^i a^{j-1} = 1 + a + \cdots + a^{i-1} & i \geq 1 \end{cases} \quad (9)$$

حال پیش‌بینی خروجی سیستم از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\hat{\mathbf{y}}_p(n) = \begin{bmatrix} \hat{y}_p(n+d+1|n) \\ \hat{y}_p(n+d+2|n) \\ \vdots \\ \hat{y}_p(n+d+P|n) \end{bmatrix}_{P \times 1} \quad (10)$$

که در آن $\hat{\mathbf{y}}(n)$ در (۸) تعریف شده است و داریم:

$$b(n) = y_p(n) - y(n) \quad (11)$$

که $y_p(n)$ خروجی واقعی سیستم است و $b(n)$ در برگیرنده اغتشاش‌ها، نامعینی‌ها، نویز و غیرخطی‌گری سیستم است. قابل ذکر است که در رابطه (۷) فرض بر این است که سیگنال کنترلی در طول افق پیش‌بینی، بعد از افق کنترل ثابت می‌ماند؛ یعنی $u(n+M+j) = u(n+M-1)$ برای $j = 0, 1, 2, \dots$ بعد از پیش‌بینی‌ها تابع معیار کنترل کننده پیش‌بین باید معرفی شود. در این مقاله مسئله بهینه‌سازی زیر مد نظر است:

$$\min_{\mathbf{u}(n)} \left\{ \left(\mathbf{w}(n) - \hat{\mathbf{y}}_p(n) \right)^T \mathbf{Q} \left(\mathbf{w}(n) - \hat{\mathbf{y}}_p(n) \right) + \left(\mathbf{u}_{ss}(n) - \mathbf{u}(n) \right)^T \mathbf{R} \left(\mathbf{u}_{ss}(n) - \mathbf{u}(n) \right) \right\} \quad (12)$$

s. t.

$$\begin{aligned}
 u_{\min} &\leq u(n+i|n) \leq u_{\max} & 0 \leq i \leq M-1 \\
 y_{\min} &\leq \hat{y}_p(n+j|n) \leq y_{\max} & d+1 \leq j \leq d+P
 \end{aligned}$$

که در آن:

حالت ارائه می‌شود. با فرض فعال نبودن قیدها، روابط سیستم حلقه بسته محاسبه شده و تعاریف لازم برای ورود به بحث تنظیم مطرح می‌شود. فرض کنید مدل مرتبه اول با تاخیر تک ورودی-تک خروجی پیوسته زیر، برای تخمین سیستم واقعی در نظر گرفته شده باشد:

$$y(t) = G(s)u(t) \quad (1)$$

که در آن $y(t)$ خروجی مدل پیوسته و $u(t)$ سیگنال کنترلی پیوسته در زمان t است و داریم:

$$G(s) = \frac{ke^{-\theta s}}{\tau s + 1} \quad (2)$$

و k بهره حالت ماندگار، θ تاخیر و τ ثابت زمانی مدل است. با فرض این که تاخیر لزوماً ضریب صحیحی از زمان نمونه‌برداری نباشد، شکل گسسته‌شده رابطه (۱) را با زمان نمونه‌برداری T_s به شکل زیر داریم:

$$y(n) = G(z)u(n) \quad (3)$$

که در آن $y(n)$ خروجی مدل گسسته شده و $u(n)$ سیگنال کنترلی در m امین زمان نمونه‌برداری است و داریم:

$$G(z) = k(1-a) \frac{(1-b_1)z + b_1}{z^{d+1}(z-a)} \quad (4)$$

و $a = e^{-\frac{T_s}{\tau}}$ ، $d + b_1 = \theta/T_s$ ، d عددی صحیح و غیرمنفی، $0 \leq b_1 < 1$ و $a > 0$ ، $a \neq 1$ است. به $G(z)$ در رابطه (۴) مدل مرتبه اول با تاخیر کسری گوئیم. نمایش فضای حالت (۴) را به صورت زیر در نظر بگیرد:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(n+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}u(n) \\
 y(n) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(n)
 \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن

$$\mathbf{x}(n) = [y(n) \quad y(n+1) \quad \cdots \quad y(n+d) \quad k(1-a)b_1u(n-1)]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = k(1-a) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1-b_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0]$$

تحقق فوق می‌نماید. ابتدا باید پیش‌بینی خروجی مدل را بدست آورد؛ با توجه به رابطه (۶) داریم:

$$\hat{\mathbf{y}}(n) = \mathbf{F}\mathbf{x}(n) + \mathbf{S}u(n) \quad (7)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{y}}(n) &= \begin{bmatrix} \hat{y}(n+d+1|n) \\ \hat{y}(n+d+2|n) \\ \vdots \\ \hat{y}(n+d+P|n) \end{bmatrix}_{P \times 1} \\
 \mathbf{u}(n) &= \begin{bmatrix} u(n) \\ u(n+1) \\ \vdots \\ u(n+M-1) \end{bmatrix}_{M \times 1}
 \end{aligned}$$

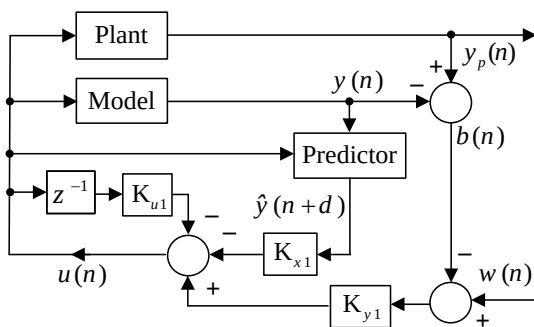
به این ترتیب می‌توان معادله سیگنال کنترلی بهینه (۱۷) را با در نظر گرفتن رابطه (۱۹) به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$u(n) = (K_{x1}[1 + b_1(a^{-1} - 1)] + k^{-1}) \times [w(n) - b(n)] - K_{x1}\hat{y}(n + d) - K_{x1}k(1 - a)(b_1/a)u(n - 1) \quad (20)$$

برای محاسبه $u(n)$ در رابطه (۲۰) نیاز به $\hat{y}(n + d)$ داریم. با توجه به تابع تبدیل آمده در رابطه (۴) داریم:

$$\hat{y}(n + d) = a^d y(n) + k(1 - a) \times [(1 - b_1) + b_1 z^{-1}] z^{-d} a^{d-1} \sum_{i=0}^{d-1} a^{-i} z^i u(n) \quad (21)$$

به این ترتیب، با استفاده از روابط (۲۰) و (۲۱) سیگنال کنترلی به سیستم و مدل قابل اعمال خواهد بود. در شکل ۱ بلوک دیاگرام ساختار کنترلی معادل مطرح شده در این بخش نشان داده شده است.



شکل ۱: بلوک دیاگرام معادل کنترل کننده پیش‌بین مطرح شده.

تابع تبدیل سیستم حلقه بسته برای سیستم مرتبه اول با تاخیر کسری. در این بخش روابط سیستم حلقه بسته در حالتی که سیستم، مرتبه اول با تاخیر کسری باشد محاسبه می‌شود. با فرض فعال نبودن قیده‌های سیستم و تطابق بین خروجی مدل و سیستم؛ یعنی $b(n) = 0$ و انجام محاسبات ساده بر روی روابط (۲۰)، (۲۱) و (۳) رابطه سیستم حلقه بسته به صورت زیر به دست می‌آید:

$$G_{cl}(z) = \frac{[1 - a + \hat{K}_{x1}(1 + b_1(a^{-1} - 1))][1 - b_1]z + b_1}{z^{d+1}[z - a + \hat{K}_{x1}(1 + b_1(a^{-1} - 1))]} \quad (22)$$

که در آن:

$$\hat{K}_{x1} = k(1 - a)K_{x1} \quad (23)$$

لم ۲. سیستم حلقه بسته (۲۲) پایدار است، اگر:

$$\frac{-1 + a}{1 + b_1(a^{-1} - 1)} < \hat{K}_{x1} < \frac{1 + a}{1 + b_1(a^{-1} - 1)} \quad (24)$$

اثبات. با توجه به چندجمله‌ای مشخصه تابع تبدیل حلقه بسته، شرط پایداری به سادگی به دست می‌آید. ■

تابع تبدیل سیستم حلقه بسته برای سیستم از مرتبه بالا. حال فرض کنیم سیستم از مرتبه بالا باشد که با مدل مرتبه اول با تاخیر کسری

$$\begin{aligned} w(n) &= w(n) \mathbf{1}_{p \times 1} \\ u_{ss}(n) &= k^{-1}[w(n) - b(n)] \mathbf{1}_{M \times 1} \\ Q &= \text{diag}\{1, q_2, q_3, \dots, q_p\} \\ R &= k^2(1 - a)^2 \text{diag}\{r_1, r_2, \dots, r_M\} \end{aligned} \quad (13)$$

و Q ماتریس مثبت نیمه معین، R ماتریس مثبت معین، $w(n)$ سیگنال مرجع در n امین زمان نمونه برداری است. diag برای نمایش بلوکی قطری استفاده شده است و $u_{ss}(n)$ مقادیر مطلوب ماندگار سیگنال‌های کنترلی در طول افق کنترل است.

نکته قابل ذکر در رابطه (۱۳) این است که محدودیت دیگر روش تنظیم ارائه شده در این مقاله عدم امکان استفاده از اطلاعات آینده سیگنال مرجع $w(n)$ در طول کل افق پیش‌بینی است. البته باید تاکید شود که در رابطه (۱۳) اگر از اطلاعات آینده سیگنال مرجع تا زمان تاخیر سیستم استفاده گردد (که این کار در این مقاله امکان‌پذیر است)، می‌توان کل تاخیر سیستم را در پاسخ سیستم حلقه بسته حذف کرد که یکی از اهداف استفاده از اطلاعات آینده سیگنال مرجع است. در واقع کافی است در رابطه (۱۳) داشته باشیم: $w(n) = w(n + d) \mathbf{1}_{p \times 1}$.

با فرض غیرفعال بودن قیدها، مسئله بهینه‌سازی (۱۲) با توجه به مدل پیش‌بین مد نظر، به بردار سیگنال کنترلی بهینه زیر منجر می‌شود:

$$u(n) = (S^T Q S + R)^{-1} (S^T Q [1_{p \times 1} [w(n) - b(n)] - F_{d+1} k(1 - a)(b_1/a)u(n - 1) - F_{d+1} y(n + d)] + R(1_{M \times 1} [w(n) - b(n)]/k)) \quad (14)$$

در ادامه برای سادگی کار، بردارهای بهره زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} K_x &= [K_{x1} \ K_{x2} \ \dots \ K_{xM}]^T \\ &= (S^T Q S + R)^{-1} S^T Q F_{d+1} \\ K_y &= [K_{y1} \ K_{y2} \ \dots \ K_{yM}]^T \\ &= (S^T Q S + R)^{-1} [S^T Q 1_{p \times 1} + R 1_{M \times 1} k^{-1}] \\ K_u &= [K_{u1} \ K_{u2} \ \dots \ K_{uM}]^T \\ &= (S^T Q S + R)^{-1} S^T Q F_{d+1} k(1 - a)(b_1/a) \\ &= K_x k(1 - a)(b_1/a) \end{aligned} \quad (15)$$

به این ترتیب معادله (۱۴) را با توجه به (۱۵) می‌توان بازنویسی کرد. با توجه به این که متغیر حالت $y(n + d)$ را نداریم از تخمین آن یعنی $\hat{y}(n + d)$ استفاده می‌کنیم، داریم:

$$u(n) = K_y[w(n) - b(n)] - K_x \hat{y}(n + d) - K_x k(1 - a)(b_1/a)u(n - 1) \quad (16)$$

که در نهایت می‌توان سیگنال کنترلی لحظه حال (زمان نمونه برداری n ام) را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$u(n) = K_y[w(n) - b(n)] - K_{x1} \hat{y}(n + d) - K_{x1} k(1 - a)(b_1/a)u(n - 1) \quad (17)$$

لم ۱. بردار بهره‌های K_y و K_x طبق رابطه زیر به هم وابسته هستند:

$$K_y = K_x [1 + b_1(a^{-1} - 1)] + 1_{M \times 1} k^{-1} \quad (18)$$

اثبات. با توجه به روابط (۸) و (۱۵) این لم به سادگی اثبات می‌شود. ■ حال با توجه به لم ۱ خواهیم داشت:

$$K_{y1} = K_{x1}[1 + b_1(a^{-1} - 1)] + k^{-1} \quad (19)$$

تعریف ۱. به بهره مطلوب $\hat{K}_{xd1}$ که در روابط (۱۵) و (۲۳) صدق کند بهره مطلوب دست یافتنی گوئیم.

تعریف ۲. به بهره مطلوب دست یافتنی $\hat{K}_{xd1}$ که پایداری سیستم حلقه بسته (۲۲) یا (۲۸) را تضمین کند، بهره مطلوب شدنی گوئیم.

۳- تنظیم پارامترهای کنترل کننده برای دستیابی به عملکرد مطلوب

در این بخش با فرض غیر فعال بودن قیده‌ها و با در نظر گرفتن افق کنترل یک، برای تنظیم پارامترهای کنترل کننده پیش‌بین معرفی شده در بخش قبل با هدف رسیدن به بهره مطلوب $\hat{K}_{xd1}$ ، قضایایی مطرح شده و فرمول‌های تحلیلی تنظیم ارائه می‌شود. همچنین محدوده بهره دست‌یافتنی و شدنی نیز در این قضا یا مشخص می‌گردد. سپس بیشترین محدوده بهره دست‌یافتنی نیز تعیین می‌شود که از اهمیت زیادی برخوردار است. در نهایت نشان داده می‌شود که تمام عملکرد شدنی که کنترل کننده پیش‌بین برای مدل مرتبه اول با تاخیر کسری می‌تواند ایجاد کند، با افق کنترل یک قابل حصول بوده و نیازی به افزایش حجم محاسباتی به واسطه بالا بردن افق کنترل نیست.

ابتدا افق کنترل را یک فرض می‌کنیم. طبق رابطه (۱۳)، ماتریس‌های وزنی را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$Q = \text{diag} \{1, q_2, \dots, q_p\}, \quad R = k^2(1-a)^2 r \quad (30)$$

همچنین در رابطه (۸) با فرض افق کنترل یک داریم:

$$S = S_1 = k(1-a) \begin{bmatrix} a^0(1-b_1) + v_0 \\ a^1(1-b_1) + v_1 \\ \vdots \\ a^{p-1}(1-b_1) + v_{p-1} \end{bmatrix} \quad (31)$$

ماتریس بهره K_x تعریف شده در رابطه (۱۵) به صورت اسکالر خواهد بود:

$$K_x = K_{x1} = (R + S^T Q S)^{-1} S^T Q F_{d+1} = \frac{1}{k(1-a)X + r} aY \quad (32)$$

که در آن:

$$X = \sum_{i=1}^p q_i (a^{i-1}(1-b_1) + v_{i-1})^2 \quad (33)$$

$$Y = \sum_{i=1}^p q_i (a^{i-1}(1-b_1) + v_{i-1}) a^{i-1}$$

که در آن $q_1 = 1$ و v_i در (۹) تعریف شده است. از بین پارامترهای وزنی $q_2, q_3, \dots, q_p$ به یک پارامتر نیاز هست تا بتوان به بهره مطلوب $\hat{K}_{xd1}$ دست یافت. برای افق کنترل یک، r گزینه مناسبی می‌تواند باشد.

قضیه ۱. فرض کنید داشته باشیم:

$$Q = \text{diag} \{1, q_2, \dots, q_p\}, \quad R = k^2(1-a)^2 r \quad (34)$$

(۳) تخمین زده شده است. سیستم مرتبه بالا داده شده باشد با تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرد:

$$G_p(z) = \frac{y_p(n)}{u(n)} = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (25)$$

اندیس p برای مشخص کردن سیستم استفاده شده است. برای محاسبه تابع تبدیل سیستم حلقه بسته باید $\hat{y}(n+d)$ محاسبه شود. با توجه به (۲۱)، (۲۵) و (۴) داریم:

$$\hat{y}(n+d) = k(1-a) \frac{(1-b_1) + b_1 z^{-1}}{1 - a z^{-1}} z^{-1} \times \frac{D(z)}{N(z)} y_p(n) \quad (26)$$

حال باید $b(n)$ محاسبه شود. داریم:

$$b(n) = y_p(n) - y(n) = y_p(n) \left[1 - k(1-a) \frac{D(z)}{N(z)} \times \frac{[(1-b_1) + b_1 z^{-1}] z^{-d-1}}{1 - a z^{-1}} \right] \quad (27)$$

با انجام محاسباتی ساده بر روی روابط (۲۰) و (۲۵) تا (۲۷)، تابع تبدیل سیستم حلقه بسته را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$G_{cl}(z) = \frac{K_{y1} N(z) (z-a) z^{d+1}}{\Delta_{cl}(z)} \quad (28)$$

که در آن:

$$\Delta_{cl}(z) = z^d \left\{ (z-a) [zD(z) + K_{y1} zN(z) + \hat{K}_{x1} (b_1/a) D(z)] + [(1-b_1)z + b_1] \times \right. \quad (29)$$

$$\left. \hat{K}_{x1} D(z) \right\} - \hat{K}_{y1} [(1-b_1)z + b_1] D(z)$$

و داریم $\hat{K}_{y1} = k(1-a)K_{y1}$ که در آن K_{y1} با توجه به رابطه (۱۹) محاسبه می‌شود.

با توجه به این که در ساختار معرفی شده در این بخش فقط یک بهره $\hat{K}_{x1}$ را برای تنظیم داریم، پس فقط نیاز به یک پارامتر قابل تنظیم است. به این ترتیب، مسئله تنظیم به یافتن ارتباطی تحلیلی بین پارامترهای قابل تنظیم و بهره مطلوب $\hat{K}_{xd1}$ تبدیل می‌شود. نحوه انتخاب بهره مطلوب از طریق تابع تبدیل‌های (۲۲) یا (۲۸) برای دست‌یابی به عملکرد مطلوب حلقه بسته خواهد بود. البته می‌توان از توابع تبدیل اغتشاش و نویز در خروجی که در بخش چهارم ارائه خواهد شد نیز استفاده نمود. نکته مهم این است که به ازای یک مقدار خاص برای پارامترهای تنظیم به مقداری خاص برای بهره $\hat{K}_{x1}$ دست می‌یابیم و حتی ممکن است چند مقدار مختلف برای پارامترهای تنظیم به یک مقدار برای این بهره بیانجامد که مطلب جالبی است. ولی برعکس این مطلب لزوماً صادق نیست؛ یعنی هر مقدار مطلوب این بهره یعنی $\hat{K}_{xd1}$ لزوماً دست‌یافتنی نیست. یعنی ممکن است هیچ مقداری برای پارامترهای تنظیم وجود نداشته باشد که به $\hat{K}_{xd1}$ خاص بیانجامد. برای مشخص‌تر شدن این مسئله دو مفهوم کلیدی دست‌یافتنی و شدنی در ادامه تعریف می‌شود که در بخش بعدی مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

$$\sum_{i=1}^P q_i (a^{i-1}(1-b_1) + v_{i-1})(1-b_1)a^{i-1} > \sum_{i=1}^P q_i (a^{i-1}(1-b_1) + v_{i-1})^2 \quad (42)$$

$$\Rightarrow 0 > \sum_{i=1}^P q_i (v_{i-1}^2 + v_{i-1}a^{i-1})(1-b_1)$$

با توجه به این که $0 \leq b_1 < 1$ ، پس فرض $\frac{Y}{X} > \frac{1}{1-b_1}$ نیز به تبعیت از آن صحیح نبوده و (۴۰) بزرگ‌ترین ناحیه دست یافتنی را می‌دهد. ■

لازم به ذکر است که حداکثر محدوده به‌دست آمده در (۴۰) هم برای سیستم‌های پایدار معتبر است و هم ناپایدار. در ساختار معرفی شده برای سیستم تقریب زده شده با مدل مرتبه اول، می‌توان نشان داد حداکثر ناحیه دست یافتنی برای افق کنترل یک، دو و بالاتر برابر است. برای افق کنترل ۲ نیز به سادگی می‌توان این مطلب را نشان داد [۲۱]. برای افق‌های بالاتر، روابط تحلیلی بسیار پیچیده می‌شود ولی برای این که نشان دهیم که این ناحیه برای افق‌های بالاتر نیز همان است می‌توان از شبیه‌سازی استفاده کرد. روند شبیه‌سازی به مانند [۲۱] خواهد بود که برای طولانی نشدن مقاله از آوردن آن صرف نظر می‌شود. نتیجه این که در ساختار ارائه شده، افزایش افق کنترل تأثیری بر عملکرد سیستم کنترلی ندارد.

مواجهه با سیستم‌های ناپایدار و یا دارای انتگرال‌گیر. برای استفاده از ساختار کنترلی معرفی شده، در مواجهه با سیستم‌های ناپایدار و انتگرال‌گیر باید نکاتی را مد نظر داشت. تمام روابط ارائه شده در این بخش برای سیستم‌های ناپایدار نیز معتبر است. فقط مطلبی که در مرجع [۲۳] برای مواجهه با سیستم‌های ناپایدار آمده است در این جا نیز باید در نظر گرفته شود. نکته این است که با توجه به ساختاری که در این مقاله برای کنترل کننده پیش‌بین در نظر گرفته شده است سیگنال کنترلی هم به سیستم اعمال می‌شود و هم به مدل مرتبه اول با تاخیر سیستم. در حالتی که سیستم به تبعیت از آن، مدل ناپایدار باشد و کوچک‌ترین عدم تطابق بین دینامیک مدل و سیستم باشد، اعمال سیگنال کنترلی که سیستم ناپایدار را پایدار می‌سازد به مدل، می‌تواند ناپایداری خروجی مدل را به بار آورد و در نتیجه سیستم حلقه بسته نیز ناپایدار گردد. برای حل این مشکل راهکاری در [۲۳] ارائه شده است که در این جا نیز می‌توان از آن استفاده کرد. در مورد سیستم‌های دارای انتگرال‌گیر، مدل مرتبه اول انتگرالی با تاخیر کسری مد نظر است. فرض کنید تابع تبدیل تک ورودی-تک خروجی پیوسته در زمان انتگرالی زیر، برای تخمین سیستم واقعی در نظر گرفته شده باشد:

$$G(s) = \frac{ke^{-\theta s}}{s} \quad (43)$$

شکل گسسته شده مدل (۴۳) را با زمان نمونه‌برداری T_s به صورت رابطه (۴) خواهیم داشت با فرض $a = 1$ و به جای عبارت $(1-a)$ مقدار ۱ قرار خواهد گرفت. تمامی روابط آمده در بخش‌ها پیشین در این جا نیز صادق است فقط با چند تغییر کوچک. این تغییرات به این شکل خواهد بود که در روابط به جای a مقدار ۱ قرار خواهد گرفت بغیر از جاهایی

که در آن $q_i \in \mathbb{R}_{0+}$ برای $i = 2, 3, \dots, P-1$ و $q_P \in \mathbb{R}_{+}$ پارامترهای دلخواه و $r \in \mathbb{R}_{+}$ به عنوان پارامتر تنظیم انتخاب شده است. همچنین داریم $P \in \mathbb{Z}_{+}$ ، $P \geq 1$. در حالتی که قیدهای سیستم فعال نباشد، مسئله بهینه‌سازی (۱۲) با در نظر گرفتن مدل (۳) به سیستم‌های حلقه بسته (۲۲) یا (۲۸) منجر می‌شود با بهره مطلوب دست یافتنی $\hat{K}_{xd1}$ که در نامعادله زیر صدق می‌کند:

$$0 < \hat{K}_{xd1} < \frac{aY}{X} \quad (35)$$

که در آن X و Y در (۳۳) تعریف شده‌اند. شرط شدنی بودن این بهره، اشتراک رابطه (۳۵) و شرط پایداری سیستم حلقه بسته است. فرمول تنظیم برای دستیابی به بهره مطلوب دست یافتنی $\hat{K}_{xd1}$ به صورت زیر است:

$$r = \frac{aY - \hat{K}_{xd1}X}{\hat{K}_{xd1}} \quad (36)$$

اثبات. با توجه به روابط (۳۲) و (۳۳) داریم:

$$\hat{K}_{x1} = \frac{aY}{X+r} \rightarrow r = \frac{aY - \hat{K}_{x1}X}{\hat{K}_{x1}} \quad (37)$$

با توجه به شرط مثبت معین بودن ماتریس R و رابطه (۳۷) داریم:

$$r = \frac{aZ - \hat{K}_{x1}X}{\hat{K}_{x1}} > 0 \rightarrow 0 < \hat{K}_{xd1} < \frac{aY}{X} \quad (38)$$

با توجه به تعریف ۲، اشتراک ناتساوی (۳۸) و شرط پایداری سیستم حلقه بسته، شرط شدنی بودن بهره مطلوب را می‌دهد. ■

لازم به ذکر است که محدوده $\hat{K}_{xd1}$ در ناتساوی (۳۵)، محدودیت روش تنظیم ارائه شده در قضیه ۱ را نشان می‌دهد. در ادامه لمی آمده است که در آن حداکثر ناحیه ممکن در این ناتساوی مشخص می‌شود که در واقع حداکثر ناحیه دست یافتنی بهره مطلوب $\hat{K}_{xd1}$ را نشان می‌دهد.

لم ۳. فرض کنید در قضیه ۱ داشته باشیم:

$$P = 1, \quad Q = 1, \quad R = k^2(1-a)^2r \quad (39)$$

در این صورت بهره مطلوب دست یافتنی $\hat{K}_{xd1}$ بیشترین محدوده عملکردی ممکن را که توسط نامعادله زیر داده می‌شود خواهد داشت:

$$0 < \hat{K}_{xd1} < a \frac{1}{1-b_1} \quad (40)$$

اثبات. با توجه به فرض (۳۹) و روابط (۳۵) و (۳۳)، ناتساوی فوق به دست می‌آید. حال باید ثابت کرد که این ناحیه بزرگ‌ترین ناحیه دست یافتنی ممکن است، یعنی:

$$\max_{P, q_2, q_3, \dots, q_P} \left(\frac{Y}{X} \right) = \frac{1}{1-b_1} \quad (41)$$

برای اثبات، از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم وجود داشته باشد $P, q_2, q_3, \dots, q_P$ که به ازای آن داشته باشیم $\frac{Y}{X} > \frac{1}{1-b_1}$ در نتیجه:

$$\begin{aligned} \frac{y_p(n)}{d_o(n)} &= 1 - T(z), \quad \frac{y_p(n)}{n(n)} = -T(z) \\ \frac{y_p(n)}{d_i(n)} &= G(z)(1 - T(z)) \end{aligned} \quad (47)$$

با توجه به تابع تبدیل‌های اغتشاش بدست آمده در رابطه (۴۷) دیده می‌شود که ساختار کنترلی معرفی شده قابلیت حذف خطای حالت ماندگار به اغتشاش پله در ورودی و خروجی را دارد. البته در حالتی که سیستم دارای انتگرال گیر باشد، برای اغتشاش در سیگنال کنترلی دچار خطای ماندگار خواهد شد. برای بررسی پایداری مقاوم سیستم نمایش داده شده در شکل ۲، تابع تبدیل دیده شده از دو سر نامعینی Δ باید محاسبه شود. با توجه به ضریبی بودن نامعینی می‌توان نشان داد که تابع تبدیل دیده شده از دو سر Δ عبارت است از $T(z)W(z)$. پس شرط پایداری مقاوم این ساختار عبارت است از:

$$\|\Delta W(z)T(z)\|_{\infty} \leq 1 \quad (48)$$

حال روش‌های حوزه فرکانسی می‌توانند برای بررسی و طراحی کنترل کننده به قصد رسیدن به پایداری مقاوم استفاده شوند. اگر نامعینی ساختار یافته باشد، در حالت‌های ساده می‌توان روابط تنظیم تحلیلی مفیدی برای پایداری مقاوم به دست آورد که در ادامه اشاره می‌شود. فرض کنیم سیستم متعلق به مجموعه‌ای از سیستم‌های مرتبه اول با تاخیر کسری به صورت زیر باشد:

$$G_p(z) = \left\{ \tilde{G}_p(z) = \tilde{k}(1 - \tilde{a}) \frac{(1 - \tilde{b}_1)z + \tilde{b}_1}{z^{d+1}(z - \tilde{a})} \mid \begin{aligned} k_{min} \leq \tilde{k} \leq k_{max}, a_{min} \leq \tilde{a} \leq a_{max} \\ d_{min} \leq \tilde{d} \leq d_{max}, b_{1min} \leq \tilde{b}_1 \leq b_{1max} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

با توجه به $T(z)$ (تابع تبدیل حلقه بسته در حالت نامی) که در رابطه (۴۶) آمده است، تعریف می‌کنیم:

$$a_{cl} = a - \hat{K}_{x1}(1 + b_1(a^{-1} - 1)) \quad (50)$$

که در آن a_{cl} محل قطب سیستم حلقه بسته در حالت نامی است. به این ترتیب داریم:

$$G_{cl}(z) = T(z) = \frac{(1 - a_{cl})((1 - b_1)z + b_1)}{z^{d+1}(z - a_{cl})} \quad (51)$$

با توجه به این که $|z|^{d+1}|_{z=e^{-j\omega T_s}} = 1 \quad \forall \omega \in [0, \pi]$ داریم:

$$|T(z)| = \left| \frac{(1 - a_{cl})((1 - b_1)z + b_1)}{z - a_{cl}} \right|_{z=e^{-j\omega T_s}} \quad (52)$$

همچنین با توجه به ناساوی $0 \leq b_1 < 1$ داریم $|(1 - b_1)z + b_1|_{z=e^{-j\omega T_s}} \leq 1 \quad \forall \omega \in [0, \pi]$ به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |T(z)| &= \left| \frac{(1 - a_{cl})((1 - b_1)z + b_1)}{z - a_{cl}} \right|_{z=e^{-j\omega T_s}} \\ &\leq \left| \frac{1 - a_{cl}}{z - a_{cl}} \right|_{z=e^{-j\omega T_s}} \end{aligned} \quad (53)$$

که عبارت $(1 - a)$ وجود دارد که به جای این عبارت نیز ۱ قرار می‌گیرد. هم‌چنین تساوی آمده در رابطه (۹) یعنی $\sum_{j=1}^i a^{j-1} = \frac{1-a^i}{1-a}$ دیگر برقرار نخواهد بود. یک تغییر هم در $u_{ss}(n)$ آمده در رابطه (۱۳) خواهیم داشت به صورت زیر:

$$u_{ss}(n) = \mathbf{0}_{M \times 1} \quad (44)$$

چون در ردیابی ورودی پله برای سیستم انتگرالی، مقدار ماندگار سیگنال کنترلی برابر صفر است. به این ترتیب در هر فرمولی که عبارت $1_{M \times 1} k^{-1}$ وجود داشته باشد آن را با $\mathbf{0}_{M \times 1}$ جایگزین خواهیم کرد. لازم به ذکر است که در ساختار ارائه شده در این فصل که از $u_{ss}(n)$ استفاده شده است، اگر سیستم دارای انتگرال گیر باشد در حذف خطای ماندگار اغتشاش پله در سیگنال کنترلی دچار مشکل خواهد شد. همان‌طور که ذکر شد مقدار ماندگار سیگنال کنترلی در این حالت برابر صفر است. پس برای هر مقدار ورودی مرجع در حالت ماندگار، مقدار صفر را در سیگنال کنترلی خواهیم داشت. حال اگر در سیگنال کنترلی اغتشاش پله وارد شود، دیگر این ساختار قادر به صفر کردن خطای حالت ماندگار نخواهد بود. به این مطلب در بخش بعدی اشاره می‌شود. البته روش‌هایی برای تخمین اغتشاش وجود دارد که می‌توان در این ساختار از آن‌ها استفاده نمود و این مشکل را حل کرد.

۴- بررسی تاثیر اغتشاش، نویز و نامعینی در مدل

در این بخش به بررسی تاثیر اغتشاش‌های مختلف، نویز و نامعینی در مدل پرداخته می‌شود. برای این منظور ساختار ارائه شده در شکل ۱ به صورت معادل اسمیت^۱ آن در شکل ۲ نمایش داده می‌شود. در این شکل اغتشاش‌های ورودی $d_i(n)$ و خروجی $d_o(n)$ به همراه نویز $n(n)$ نیز لحاظ شده است. هم‌چنین سیستم مد نظر به صورت نامعینی ضریبی در نظر گرفته شده است:

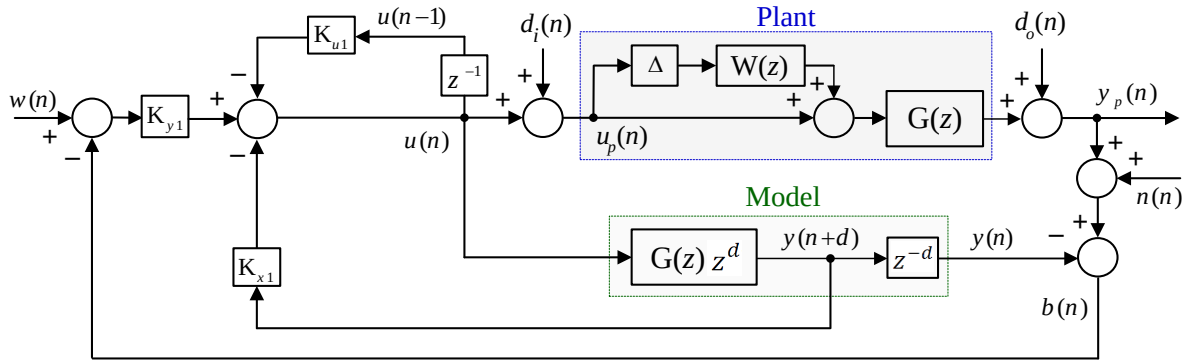
$$G_p(z) = [1 + \Delta W(z)]G(z) \quad (45)$$

که در آن $G(z)$ مدل مرتبه اول با تاخیر کسری تعریف شده در (۴) می‌باشد که برای تقریب سیستم (سیستم نامی) بکار گرفته شده است و $\Delta W(z)$ نامعینی ضریبی سیستم است. در بخش ۲ دیدیم که سیستم حلقه بسته برای سیستم مرتبه اول با تاخیر کسری عبارت است از:

$$G_{cl}(z) = T(z) = \frac{[1 - a + \hat{K}_{x1}(1 + b_1(a^{-1} - 1))][(1 - b_1)z + b_1]}{z^{d+1}[z - a + \hat{K}_{x1}(1 + b_1(a^{-1} - 1))]} \quad (46)$$

تابع تبدیل حلقه بسته فوق برای سیستم نامی است، یعنی $G_p(z) = G(z)$ و آن با $T(z)$ (تابع مکمل حساسیت) نمایش داده شده است. حال تابع تبدیل از اغتشاش‌ها و نویز به خروجی را می‌توان با توجه به شکل ۲ و رابطه حلقه بسته (۴۶) به صورت زیر به دست آورد:

¹ Smith



شکل ۲: بلوک دیاگرام معادل ساختار کنترلی ارائه شده در این مقاله به صورت اسمیت.

$$G_p(z) = \left\{ \tilde{G}_p(z) = k(1-\tilde{a}) \frac{(1-b_1)z+b_1}{z^{d+1}(z-\tilde{a})} \mid a_{min} \leq \tilde{a} \leq a_{max} \right\} \quad (59)$$

با توجه به رابطه (۴۵) داریم:

$$\Delta W(z) = \frac{a-\tilde{a}z-1}{1-\tilde{a}z-\tilde{a}} \quad (60)$$

$$\xrightarrow{(54)} \left\| \frac{(a-\tilde{a})(1-a_{cl})}{1-a} \frac{z-1}{(z-\tilde{a})(z-a_{cl})} \right\|_{\infty} \leq 1$$

همچنین می‌توان نشان داد:

$$\max_{\omega} \left| \frac{z-1}{(z-\tilde{a})(z-a_{cl})} \right|_{z=e^{-j\omega T_s}} = \left| \frac{1}{(1-a_{cl})\sqrt{\tilde{a}} + (1-\tilde{a})\sqrt{a_{cl}}} \right| \quad (61)$$

به این ترتیب ناتساوی (۶۰) با در نظر گرفتن رابطه (۶۱) منجر می‌شود به:

$$-\frac{1-a}{1-a_{cl}} \leq \frac{a-\tilde{a}}{(1-a_{cl})\sqrt{\tilde{a}} + (1-\tilde{a})\sqrt{a_{cl}}} \leq \frac{1-a}{1-a_{cl}} \quad (62)$$

ناتساوی‌های (۶۲) نشان می‌دهند که انتخاب a و a_{cl} بر میزان نامعینی تحمل شده در ثابت زمانی تأثیرگذار است. به این ترتیب که هر چقدر a_{cl} کوچک‌تر انتخاب شود نامعینی کمتری قابل تحمل است. در نتیجه با توجه به رابطه (۵۰) هر چقدر $\tilde{K}_{x1}$ کوچک‌تر انتخاب شود سیستم حلقه بسته نسبت به نامعینی در ثابت زمانی مقاومت بیشتری خواهد داشت.

حالت سوم. نامعینی در بخش کسری تاخیر سیستم: فرض کنیم بخش کسری تاخیر سیستم نامعین باشد، یعنی داشته باشیم:

$$G_p(z) = \left\{ \tilde{G}_p(z) = k(1-a) \frac{(1-\tilde{b}_1)z+\tilde{b}_1}{z^{d+1}(z-a)} \mid b_{1min} \leq \tilde{b}_1 \leq b_{1max} \right\} \quad (63)$$

در این حالت با توجه به رابطه (۴۵) داریم:

$$\Delta W(z) = (b_1-\tilde{b}_1) \frac{z-1}{(1-b_1)z+b_1} \quad (64)$$

$$\xrightarrow{(54)} \left| (b_1-\tilde{b}_1)(1-a_{cl}) \right| \left\| \frac{z-1}{z-a_{cl}} \right\|_{\infty} \leq 1$$

همچنین می‌توان نشان داد:

$$\max_{\omega} \left| \frac{z-1}{z-a_{cl}} \right|_{z=e^{-j\omega T_s}} = \frac{2}{1+a_{cl}} \quad (65)$$

حال با توجه به (۵۳) برای ساده‌تر شدن محاسبات، کمی محافظه کاری را قبول کرده و به جای استفاده از ناتساوی $\|\Delta W(z)T(z)\|_{\infty} \leq 1$ ، از ناتساوی با محافظه کاری بیشتر به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left\| \Delta W(z) \frac{1-a_{cl}}{z-a_{cl}} \right\|_{\infty} \leq 1 \quad (54)$$

در ادامه برای حالت‌های مختلف نامعینی، شرایط پایداری مقاوم را به دست می‌آوریم.

حالت اول. نامعینی در بهره: فرض کنیم فقط بهره حالت ماندگار سیستم نامعین باشد، یعنی داشته باشیم:

$$G_p(z) = \left\{ \tilde{G}_p(z) = \tilde{k}(1-a) \frac{(1-b_1)z+b_1}{z^{d+1}(z-a)} \mid k_{min} \leq \tilde{k} \leq k_{max} \right\} \quad (55)$$

با توجه به رابطه (۴۵) داریم:

$$\Delta W(z) = \frac{\tilde{k}-k}{k} \xrightarrow{(54)} \left\| \frac{\tilde{k}-k}{k} \frac{1-a_{cl}}{z-a_{cl}} \right\|_{\infty} \leq 1 \quad (56)$$

به سادگی می‌توان نشان داد:

$$\max_{\omega} \left| \frac{1}{z-a_{cl}} \right|_{z=e^{-j\omega T_s}} = \left| \frac{1}{1-a_{cl}} \right| \quad (57)$$

به این ترتیب ناتساوی (۵۶) با در نظر گرفتن (۵۷) منجر می‌شود به:

$$\left| \frac{\tilde{k}-k}{k} \right| \leq 1 \rightarrow \begin{cases} 0 \leq \tilde{k} \leq 2k & k > 0 \\ 2k \leq \tilde{k} \leq 0 & k < 0 \end{cases} \quad (58)$$

ناتساوی‌های (۵۸) نشان می‌دهند که میزان تحمل نامعینی در بهره سیستم مستقل از تنظیم پارامترهای کنترل‌کننده است و فقط به انتخاب مقدار نامی بهره وابسته است. همچنین باید ذکر شود که در صورت انتخاب مقدار نامی بهره برابر با $k = (k_{min} + k_{max})/2$ و با فرض تغییر علامت ندادن بهره سیستم، رابطه (۵۸) نشان می‌دهد که برای هر مقدار نامعینی در بهره سیستم (۵۵) با این انتخاب همواره پایداری مقاوم را داریم. این خصوصیت مهم، می‌تواند یکی از نقاط قوت روش کنترلی ارائه شده باشد.

حالت دوم. نامعینی در ثابت زمانی سیستم: فرض کنیم فقط ثابت زمانی سیستم نامعین باشد، یعنی:

در این بخش با استفاده از دو مثال شبیه‌سازی به بررسی روش تنظیم ارائه شده پرداخته می‌شود. در مثال اول یک سیستم نامینیم فاز و در مثال دوم یک سیستم انتگرالی مد نظر است.

۱-۲ مثال شبیه‌سازی اول (سیستم نامینیم فاز)

سیستم داده شده با تابع تبدیل غیرمی‌نیم فاز $G_p(s)$ و تقریب مدل مرتبه اول با تاخیر آن $G(s)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید [۲۰]:

$$G_p(s) = \frac{(-50s + 1)e^{-10s}}{(100s + 1)^2}, \quad G(s) = \frac{e^{-100s}}{163s + 1}$$

زمان نمونه برداری ۲۰ ثانیه برای سیستم و مدل فوق مناسب است. صورت گسسته شده سیستم و مدل را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$G_p(z) = \frac{0.04056z^2 + 0.0328z + 0.04062}{z^2 - 1.637z - 0.6703}$$

$$G(z) = \frac{0.1155}{z^6(z - 0.8845)}$$

فرض کنید پاسخ مطلوب مد نظر دارای حداکثر فراجشی کم‌تر از ۵٪، حداکثر فروجهشی کم‌تر از ۱۵٪ و زمان نشست (با معیار ۲٪) بین ۳۰۰ تا ۴۰۰ ثانیه داشته باشد. با توجه به تابع تبدیل حلقه بسته (۲۸) و عملکرد مطلوب مد نظر، ناحیه مطلوب برای بهره عبارت است از $0.034 < \tilde{K}_{xd1} < 0.064$. این ناحیه با شبیه‌سازی به‌دست آمده است و چون داخل حداکثر ناحیه دست‌یافتنی $0 < \tilde{K}_{xd1} < 1.18$ است، با استفاده از قضایای آمده در بخش‌های قبل می‌توان به عملکرد مطلوب دست یافت. فرض کنیم $\tilde{K}_{xd1} = 0.04$ انتخاب ما باشد. در قضیه ۱ فرض کنید داشته باشیم $Q = I_{p \times p}$ ، با توجه به ناتساوی (۳۵)، به‌دست می‌آوریم $P \leq 25$. فرض کنید افق پیش‌بینی P را برابر ۱۰ انتخاب نماییم. به این ترتیب با توجه به (۳۶) پارامتر تنظیم به صورت $r = 469.58$ و در نتیجه $R = 1.66$ به‌دست می‌آید. فرض کنیم قید حاکم بر سیستم به صورت $|u(n)| \leq 1.1$ باشد. در شکل ۳ نتیجه اعمال کنترل کننده تنظیم شده به سیستم آمده است. در حالتی که قیدهای مسئله فعال نباشد پاسخ سیستم حلقه بسته بر پاسخ مطلوب منطبق است و خواسته‌های زمانی مسئله برآورده شده است. همچنین در زمان ۵۰۰۰ و ۶۰۰۰ ثانیه به ترتیب اغتشاش‌های پله در خروجی و سیگنال کنترلی با دامنه ۰/۳ جمع شده‌اند و در زمان ۷۰۰۰ ثانیه نویز سفید با واریانس ۰/۰۰۱ با خروجی جمع شده است. در شکل ۳ دیده می‌شود که اغتشاش‌ها با سرعت مناسبی دفع شده‌اند و خطای ماندگار نداریم. همچنین تاثیر نویز اندازه‌گیری هم در شکل دیده می‌شود. همچنین در زمان‌هایی که قید فعال بوده است هم دیده می‌شود که پاسخ سیستم اختلاف زیادی با مقدار مطلوب ندارد.

۲-۲ مثال شبیه‌سازی دوم (سیستم دارای انتگرال گیر)

سیستم انتگرالی داده شده با تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$G_p(s) = G(s) = \frac{e^{-4s}}{s}$$

به این ترتیب ناتساوی (۶۴) با در نظر گرفتن رابطه (۶۵) منجر می‌شود به:

$$-\frac{1 + a_{cl}}{2(1 - a_{cl})} \leq b_1 - \tilde{b}_1 \leq \frac{1 + a_{cl}}{2(1 - a_{cl})} \quad (66)$$

با توجه به ناتساوی‌های (۶۶) می‌بینیم که انتخاب a_{cl} و b_1 بر میزان نامعینی تحمل شده در بخش کسری تاخیر تاثیرگذار است. هر چقدر a_{cl} کوچک‌تر انتخاب شود نامعینی کمتری قابل تحمل است. در نتیجه هر چقدر $\tilde{K}_{x1}$ کوچک‌تر انتخاب شود نامعینی بیشتری قابل تحمل است. همچنین، با توجه به (۶۶) می‌توان نشان داد که به ازای $a_{cl} \geq \frac{1}{3}$ پایداری مقاوم حلقه بسته نسبت به هر مقدار نامعینی در بخش کسری تاخیر سیستم تضمین شده است؛ دقت شود که داریم $0 \leq b_1, \tilde{b}_1 < 1$.

حالت چهارم. نامعینی در بخش صحیح تاخیر سیستم: فرض

کنیم بخش صحیح تاخیر سیستم نامعین باشد، یعنی داشته باشیم:

$$G_p(z) = \left\{ \tilde{G}_p(z) = k(1 - a) \frac{(1 - b_1)z + b_1}{z^{\tilde{d}+1}(z - a)} \right. \quad (67)$$

$$\left. d_{min} \leq \tilde{d} \leq d_{max} \right\}$$

در این حالت با توجه به رابطه (۴۵) داریم:

$$\Delta W(z) = z^{\tilde{d}-d} - 1 \quad (68)$$

$$\xrightarrow{(54)} \left\| (1 - a_{cl}) \frac{z^{\tilde{d}-d} - 1}{z - a_{cl}} \right\|_{\infty} \leq 1$$

با توجه به صحیح بودن $\tilde{d} - d$ به دست آوردن رابطه تحلیلی از (۶۸) بسیار مشکل است. اگر معادل پیوسته در زمان آن در نظر گرفته شود و برای آن، محاسبات انجام شود فرمول تحلیلی زیر را خواهیم داشت:

$$|\tilde{\theta} - \theta| \leq \tau_{cl} \frac{\pi\sqrt{2}}{3} \quad (69)$$

که در آن $\tau_{cl} = -\frac{T_s}{\ln(a_{cl})}$ و $\text{round}\left(\frac{\tilde{\theta}-\theta}{T_s}\right) = \tilde{d} - d$ و عبارت را به سمت نزدیک‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی خود عبارت گرد می‌کند. با توجه به صحیح بودن $\tilde{d} - d$ می‌توان از رابطه زیر برای برآورده کردن ناتساوی (۶۸) استفاده نمود:

$$\max\left(0, -\text{round}\left(\frac{-\pi\sqrt{2}}{3 \ln(a_{cl})}\right)\right) \leq \tilde{d} - d \quad (70)$$

$$\leq \text{round}\left(\frac{-\pi\sqrt{2}}{3 \ln(a_{cl})}\right)$$

با بررسی ناتساوی (۷۰) برای تمامی $\tilde{d} - d$ از ۱ تا ۲۰ دیده می‌شود رابطه فوق با دقت خوبی به جواب منجر می‌شود (برای $a_{cl} > 0.7$ دقت بالایی دارد). با توجه به ناتساوی (۷۰) دیده می‌شود که هر چقدر a_{cl} بزرگ‌تر و در نتیجه $\tilde{K}_{x1}$ کوچک‌تر باشد، نامعینی بیشتری در بخش صحیح تاخیر قابل تحمل است. همچنین می‌توان نشان داد که به ازای انتخاب $a_{cl} \leq \frac{1}{3}$ هیچ نامعینی در بخش صحیح تاخیر قابل تحمل نیست.

۵- نتایج شبیه‌سازی

لحظه ۴۰ و ۸۰ ثانیه به ترتیب اغتشاش‌های پله با دامنه ۰/۵ و ۰/۱ به ترتیب در خروجی و سیگنال کنترلی جمع شده‌اند. همان‌طور که در بخش سوم ذکر شد این ساختار قادر به حذف خطای ماندگار ایجاد شده به دلیل اغتشاش پله در سیگنال کنترلی نیست. با استفاده از (۴۷) نیز این مطلب را می‌توان نشان داد:

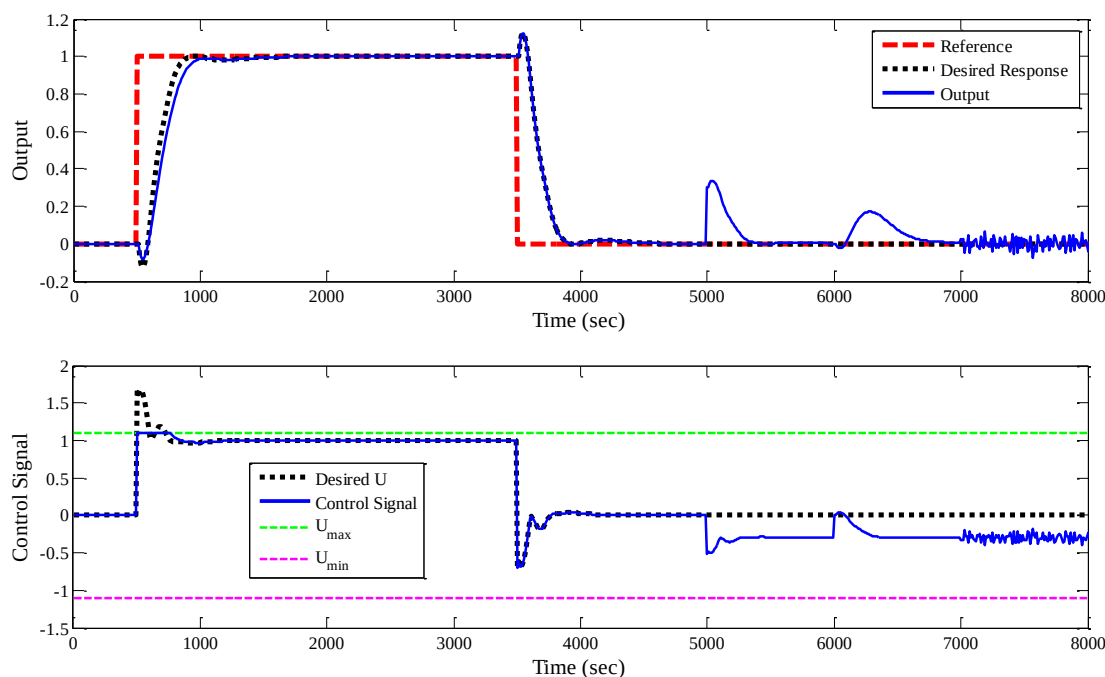
$$\begin{aligned} \frac{y_p(n)}{d_i(n)} &= G(z)(1 - T(z)) \\ &= \frac{z^4 + (1 - a_{cl})(z^2 + 1)(z + 1)}{z^4(z - a_{cl})} \end{aligned}$$

که در آن a_{cl} در (۵۰) تعریف شده است.

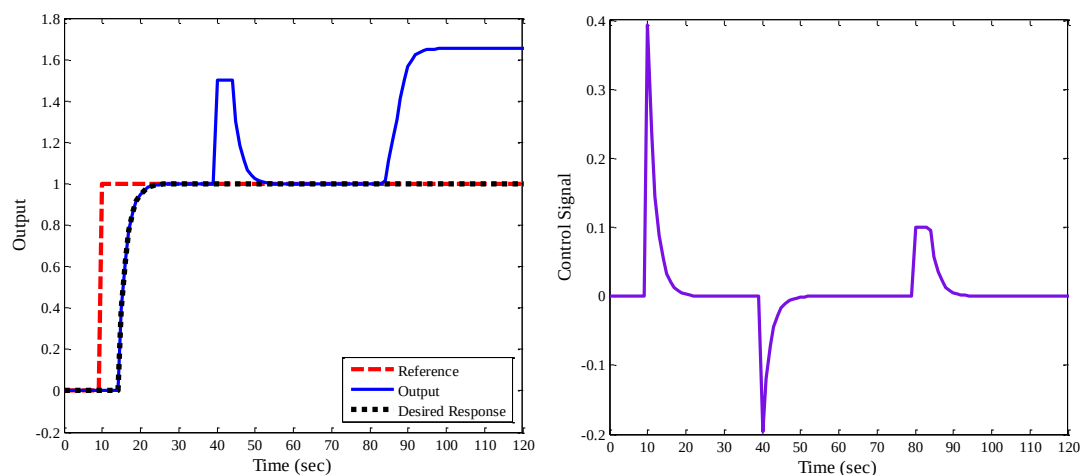
زمان نمونه‌برداری را برابر ۱ ثانیه در نظر می‌گیریم. شکل گسسته شده سیستم را به صورت زیر داریم:

$$G_p(z) = G(z) = \frac{1}{z^4(z - 1)}$$

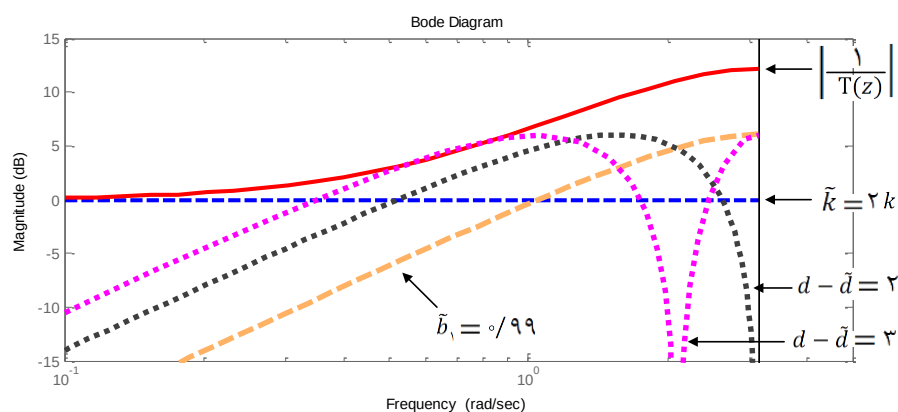
فرض کنیم می‌خواهیم قطب سیستم حلقه بسته در $s = -5$ قرار گیرد. با توجه به تابع تبدیل حلقه بسته (۲۲) و با توجه به زمان نمونه‌برداری و $a = 1$ خواهیم داشت $\hat{K}_{xd1} = 0.3935$. از قضیه ۱ برای تنظیم استفاده می‌کنیم. فرض کنید داشته باشیم $Q = I_{P \times P}$. با توجه به ناتساوی (۳۵) داریم $P \leq 4$. با فرض افق پیش‌بینی برابر ۳ و با استفاده از (۳۶) خواهیم داشت $R = r = 1.248$. در شکل ۴ نتیجه شبیه‌سازی آمده است.



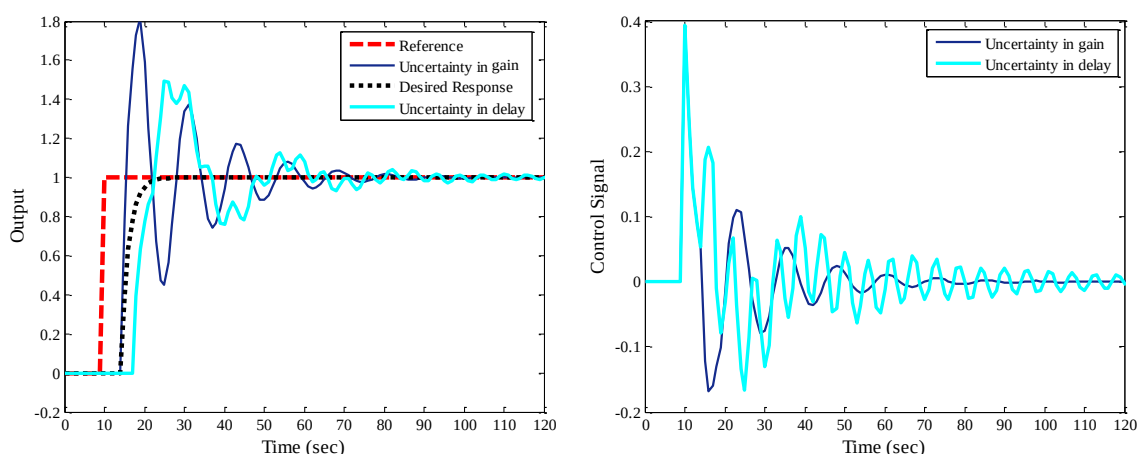
شکل ۳: پاسخ سیستم حلقه بسته در اولین مثال شبیه‌سازی.



شکل ۴: پاسخ سیستم حلقه بسته در دومین مثال شبیه‌سازی.



شکل ۵: نمودارهای بود نامعینی‌ها و تابع تبدیل حلقه بسته نامی در دومین مثال شبیه‌سازی.



شکل ۶: تاثیر نامعینی در مدل در شبیه‌سازی مربوط به دومین مثال شبیه‌سازی.

باید ناپایدار شده باشد اما در شکل ۶ هر دوی این حالت‌ها شبیه‌سازی شده‌اند و دیده می‌شود که ناپایداری رخ نداده است.

۶- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله، به تنظیم تحلیلی پارامترهای کنترل کننده پیش‌بین تک ورودی- تک خروجی پرداخته شد. با در نظر گرفتن مقدار ماندگار سیگنال کنترلی در ساختار کنترل پیش‌بین، حذف خطای حالت ماندگار در ردیابی ورودی پله و حذف اغتشاش پله تضمین شد. با فرض مدل مرتبه اول پایدار، ناپایدار و انتگرالی با تاخیر کسری، تحلیل‌های حلقه بسته انجام شد و فرمول‌های تحلیلی تنظیم بدست آمد. عملکرد دست‌یافتنی، شدنی کنترل کننده مشخص گردید و بر اساس آن حداکثر عملکرد دست‌یافتنی نیز بدست آمد. همچنین برای پایداری مقاوم سیستم دارای نامعینی ساختار یافته در حالت‌های خاصی فرمول‌های تحلیلی ارائه

از رابطه فوق خطای ماندگار برابر است با $4 + \frac{1}{1-a_{cl}}$. در این مثال داریم $a_{cl} = 0.6065$. پس خطای حالت ماندگار به اغتشاش پله واحد در سیگنال کنترلی برابر است با $6/54$. در انتهای این شبیه‌سازی نیز بررسی مقاومت کنترل کننده طراحی شده با استفاده از روابط بخش چهارم مد نظر است. نامعینی در بهره، بخش کسری تاخیر و بخش صحیح تاخیر را تک تک در نظر می‌گیریم. طبق رابطه (۵۸) حداکثر میزان نامعینی در بهره که منجر به ناپایداری نشود برابر است با $1 - k - \tilde{k}$. همچنین برای بخش کسری تاخیر طبق رابطه (۶۶) داریم $-2.04 \leq b_1 - \tilde{b}_1 \leq 2.04$ پس برای هر مقدار نامعینی در بخش کسری تاخیر، پایداری مقاوم را خواهیم داشت. برای بخش صحیح تاخیر طبق رابطه (۷۰) داریم $\tilde{d} - d \leq 2.96$. در شکل ۵ نمودار بود مربوط به هر نامعینی به همراه بود معکوس سیستم حلقه بسته در حالت نامی آمده است. اگر نامعینی‌ها در تمامی فرکانس‌ها زیر نمودار بود معکوس سیستم حلقه بسته در حالت نامی قرار گیرند، پایداری مقاوم تضمین شده است. البته این شرایط بدست آمده محافظه کارانه می‌باشد. به عنوان مثال برای $\tilde{k} - k = 1$ سیستم در مرز ناپایداری قرار می‌گیرد و یا به ازای $\tilde{d} - d = 3$ سیستم

- [12] G. A. NeryJúnior, M. A. F. Martins, R. Kalid, "A PSO-based optimal tuning strategy for constrained multivariable predictive controllers with model uncertainty", ISA Transactions, Vol. 53, No. 2, pp. 560–567, 2014.
- [13] M. Vallerio, J. Van Impe, F. Logist, "Tuning of NMPC controllers via multi-objective optimization", Computers & Chemical Engineering, Vol. 61, pp. 38–50, 2014.
- [14] A. Al. Ghazzawi, E. Ali, A. Nouh and E. Zafiriou, "On-line Tuning Strategy for Model Predictive Controllers", Journal Process Control, Vol. 11, No. 3, pp. 265–284, 2001.
- [15] S. Di Cairano, A. Bemporad, "Model Predictive Control Tuning by Controller Matching", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 55, No. 1, pp. 185–190, 2010.
- [16] G. Shah, S. Engell, "Tuning MPC for Desired Closed-Loop Performance for MIMO Systems", In American Control Conference (ACC), San Francisco, USA, pp. 4404–4409, 2011.
- [17] Q. N. Tran, L. Özkan, A.C.P.M. Backx, "Generalized predictive control tuning by controller matching", Journal of Process Control, Vol. 25, pp. 1–18, 2015.
- [18] P. Bagheri, A. Khaki-Sedigh, "Tuning of Dynamic Matrix Controller for FOPDT models using analysis of variance", In Proc of 18th IFAC World Congress, Milan, Italy, pp. 12319–12324, 2011.
- [19] P. Bagheri, A. Khaki-Sedigh, "Robust tuning of dynamic matrix controllers for first order plus dead time models," Applied Mathematical Modelling, Vol. 39, No 22, pp. 7017–7031, 2015.
- [20] R. Shridhar, D. J. Cooper, "A tuning strategy for unconstrained SISO model predictive control", Industrial & Engineering Chemistry Research, Vol. 36, No. 3, pp. 729–746, 1997.
- [21] P. Bagheri, and A. Khaki Sedigh, "Analytical approach to tuning of model predictive control for first-order plus dead time models," IET Control Theory & Applications, Vol. 7, No. 14, pp. 1806–1817, 2013.
- [22] P. Bagheri, and A. Khaki-Sedigh, "An analytical tuning approach to multivariable model predictive controllers", Journal of Process Control, Vol. 24, No. 12, pp. 41–54, 2014.
- [23] P. Bagheri, and A. Khaki-Sedigh, "Closed form tuning equations for model predictive control of first-order plus fractional dead time models", International Journal of Control, Automation and Systems, Vol. 13, No. 1, pp. 73–80, 2015.
- شد. در انتها نیز با استفاده از مثال‌هایی قابلیت‌ها و محدودیت‌های روش ارائه شده مورد بررسی قرار گرفت.
- ## مراجع
- [1] M. Kano, M. Ogawa, "The state of the art in chemical process control in Japan: Good practice and questionnaire survey", Journal of Process Control, Vol. 20, No. 9, pp. 969–982, 2010.
- [2] M. L. Darby, M. Nikolaou, "MPC: Current practice and challenges", Control Engineering Practice, Vol. 20, No. 4, pp. 328–342, 2012.
- [3] D. Q. Mayne, "Model predictive control: Recent developments and future promise," Automatica, Vol. 50, No. 12, pp. 2967–2986, 2014.
- [4] E. F. Camacho, A. C. Bordons, Model Predictive Control. Berlin: Springer, 2013.
- [5] J. B. Rawlings, D. Q. Mayne, Model Predictive Control: Theory and Design, London, U.K.: Nob Hill Publishing, 2009.
- [6] J. A. De Dona, G. C. Goodwin, M. M. Seron, "Anti-windup and Model Predictive Control: Reflections and Connections," European Journal of Control, Vol. 6, pp. 467–477, 2000.
- [7] J. A. Rossiter, Model-based predictive control: a practical approach. CRC press, 2003.
- [8] K. Y. Rani, H. Unbehauen, "Study of Predictive Controller Tuning Methods", Automatica, Vol. 33, No. 12, pp. 2243–2248, 1997.
- [9] L. Garriga, M. Soroush, "Model Predictive Control Tuning Methods: A Review", Industrial & Engineering Chemistry Research, Vol. 49, No. 8, pp. 3505–3515, 2010.
- [۱۰] علی خاکی صدیق و پیمان باقری، "بررسی روش‌های تنظیم پارامترهای کنترل‌کننده‌های پیش‌بین و راهکارهای نوین تنظیم"، مجله کنترل، دوره ۸، شماره ۳، صفحه ۶۹–۸۵، پاییز ۱۳۹۳.
- [11] J. M. Grosso, C. Ocampo-Martínez, V. Puig, "Learning-based tuning of supervisory model predictive control for drinking water networks", Engineering Applications of Artificial Intelligence, Vol. 26, No. 7, pp. 1741–1750, 2013.

تخمین ناحیه جذب سیستم های چند جمله ای مرتبه دو با بکار بردن تابع لیاپانوف کسری

فرهاد اسماعیلی^۱، علی وحیدیان کامیاد^۲، محمد رضا جاهد مطلق^۳، ناصر پریرز^۴

^۱ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد تهران Esmaili@iaubir.ac.ir

^۲ استاد، دانشکده ریاضیات کاربردی، دانشگاه فردوسی مشهد kamyad@math.um.ac.ir

^۳ دانشیار، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت تهران Jahedmr@iust.ac.ir

^۴ استاد، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد N-Pariz@um.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۶/۴، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۵/۹/۳)

چکیده: در این مقاله تخمین ناحیه جذب سیستم های چند جمله ای مرتبه دو با استفاده از تابع لیاپانوف کسری مورد بررسی قرار گرفته است. یکی از روش های تخمین ناحیه جذب، یافتن بزرگترین مجموعه رویه است. در این مطالعه تابع هزینه برای رسیدن به بزرگترین مجموعه رویه به جای استفاده از فاکتور شکل دهی بر اساس افزایش ناحیه محصور به مجموعه رویه پیشنهاد شده است. تخمین ناحیه جذب به حل مسئله بهینه سازی نامعاده ماتریسی دوخطی تبدیل گردیده و با چند مثال توانایی این روش در مقایسه با روش های موجود در مطالعات اخیر بررسی شده است.

کلمات کلیدی: سیستم چند جمله ای، تخمین ناحیه جذب، چند جمله ای های مجموع مربعات، مجموعه رویه.

Domain of Attraction Estimation of Second Order Polynomial System using Rational Lyapunov Function

Farhad Esmaili, Ali Vahidian Kamyad, Naser Pariz, Mohamad Reza Jahed Motlagh

Abstract: In this paper, estimation of second order polynomial systems' domain of attraction (DA) via rational Lyapunov function is investigated. One of the methods for estimating DA is to find the greatest level set. In this study, in order to obtain the greatest level set, cost function based on increasing the region enclosed to the level set has been offered instead of using shape factor. Estimating DA has been converted into solving bilinear matrix inequality optimization problem. Capacity of this method compared to other methods in recent studies has been shown through some examples.

Keywords: Polynomial system, domain of attraction estimation, SOS polynomial, level set.

۱- مقدمه

زمان طولانی به نقطه تعادل میل کند. تئوری زبوف^[۱] مهمترین ابزار برای بدست آوردن دقیق DA است که نیاز به حل معادلات با مشتقات جزئی دارد. معمولاً محاسبه دقیق ناحیه جذب غیرممکن است و

یکی از مسائل چالش برانگیز در تئوری کنترل بدست آوردن ناحیه جذب^۱ (DA) سیستم های غیرخطی برای یک نقطه تعادل است. DA به مجموعه ای از شرایط اولیه گفته می شود که متغیرهای حالت سیستم در

² Zubov

¹ Domain of Attraction

باید تخمین زده شود. روش های تخمین DA را می توان به سه دسته تقسیم کرد.

دسته اول روشهایی که با استفاده از مفهوم تابع لیاپانوف بیشینه^۱ (MLF) به حل تقریبی معادلات با مشتقات جزئی در تئوری زبوف می پردازند [۵-۲]. Vanelli و Vidyasagar در [۲] یک روش بازگشتی با بکار بردن تابع لیاپانوف کسری بر اساس MLF پیشنهاد نموده اند. در [۴] تخمین DA با استفاده از تئوری moment و با محاسبه MLF تبدیل به مسئله نامعادله ماتریسی خطی (LMI)^۲ شده است. در [۳] MLF توسط تابع لیاپانوف چندجمله ای با حل مسئله مینیم سازی نا محذب^۳ و در [۵] با استفاده از الگوریتم ژنتیک با بکار بردن تابع لیاپانوف کسری بدست آمده است.

دسته دوم روشها که پرکاربردتر است، تخمین DA با محاسبه بزرگترین مجموعه رویه^۴ است. در این روش برای تخمین DA ابتدا تابع لیاپانوفی را می یابیم که مثبت و مشتق زمانی آن بر روی مجموعه رویه منفی باشد. این مجموعه رویه یک مجموعه پایای مثبت^۵ است و بنابراین تخمینی از DA است. در [۶] با بکار بردن تابع لیاپانوف چند وجهی^۶ محاسبه بزرگترین مجموعه رویه انجام شده است. با استفاده از تابع لیاپانوف درجه ۲ تخمین DA به حل مسئله LMI منجر شده است [۷]. در سال های اخیر به دلیل پیشرفت هایی که در جبر و همچنین چند جمله ایها اتفاق افتاده، استفاده از توابع لیاپانوف پیچیده تر امکان پذیر شده است. در [۸] با بکار بردن تابع لیاپانوف چندجمله ای، نتایج بهتری برای تخمین DA سیستم های چندجمله ای بدست آمده است. در این مقاله بدنبال یافتن مجموعه رویه ای است که بزرگترین فاکتور شکل دهی^۷ را شامل می شود. خدادادی و همکارانش در [۹] با تغییر فاکتور شکل دهی در هر مرحله، تخمین بهتری از DA با بکار بردن تابع لیاپانوف چندجمله ای بدست آورده اند. در [۸،۹] تخمین DA به برنامه ریزی چندجمله ای های مجموع مربعات^۸ SOS تبدیل شده است. Packard و Tran در [۱۰] استفاده از چند تابع لیاپانوف چندجمله ای که هر کدام در ناحیه خاصی DA را تخمین می زنند، پیشنهاد داده و به مسئله برنامه ریزی SOS دوخطی تبدیل کرده اند. در [۱۱] تخمین DA با استفاده از تابع لیاپانوف کسری به نامعادله ماتریسی دوخطی^۹ (BMI) منجر شده است. دسته سوم روشها مبتنی بر استفاده از مجموعه های پایاست [۱۲،۱۳]. تخمین DA با بکار بردن مجموعه پایای مثبت در [۱۳] به مسئله برنامه ریزی SOS دوخطی تبدیل شده است. ایده بکار رفته در [۱۳] استفاده از مجموعه های advection که مجموعه پایای مثبت هستند، می باشد.

این روش منجر به نتایج بهتری نسبت به سایر روش ها گردیده، اما بدلیل اینکه یک روش تکراری است نیاز به محاسبات زیادی برای بدست آوردن تخمین DA دارد.

در این مقاله تخمین DA سیستم های چندجمله ای مرتبه دو با بکار بردن تابع لیاپانوف کسری مطالعه شده است. برای تخمین DA مجموعه رویه محاسبه می شود که برای رسیدن به بزرگترین مجموعه رویه هدف در مسئله بهینه سازی بر اساس ناحیه محصور به مجموعه رویه تعریف گردیده و مسئله تخمین DA به BMI^{۱۰} فرموله شده است.

استفاده از تابع لیاپانوف کسری که حالتی خاص از آن تابع لیاپانوف چندجمله ای را نتیجه می دهد، به دلیل پیچیدگی بیشتر منجر به تخمین بهتری از DA خواهد شد. اما انتخاب تابع هدف مناسب اهمیت زیادی دارد. در تعدادی از مقالات [۲،۴] برای تخمین DA تابع لیاپانوف کسری بکار رفته و تابع هدف بصورت یافتن بزرگترین v_c که C تخمینی از ناحیه جذب باشد، تعریف شده است. در دسته ای دیگر از مقالات [۵،۱۱] تابع هدف بر اساس یافتن بزرگترین فاکتور شکل دهی تعریف شده که منجر به تخمین بهتری از DA گردیده است. در [۹] تابع هدف بر اساس فاکتور شکل دهی تصحیح شده، بدست آمده است که تخمین بدست آمده از DA نسبت به روش های قبل دقیق تر بوده است. استفاده از این تابع هدف ها در روش های بیان شده تضمینی برای دست یافتن به بهترین تخمین DA با تابع لیاپانوف کسری را نمی دهد. در روش پیشنهادی در این مقاله تابع هدف بر اساس افزایش ناحیه محصور به مجموعه رویه در نظر گرفته شده که این تابع هدف با توجه به مفهوم آن می تواند به تخمین بهتر DA منجر شود.

مقاله بدین صورت سازمان دهی شده است. در بخش بعد چندجمله ای های SOS و تخمین DA با مجموعه رویه بیان شده است. در بخش ۳ نتایج اصلی ارائه شده است. به این منظور ابتدا مسئله تخمین DA با استفاده از تابع لیاپانوف کسری به SOS دوخطی تبدیل شده، سپس تابع هزینه بر اساس افزایش ناحیه محصور به مجموعه رویه تعریف و در ادامه تخمین DA به BMI فرموله شده است. بخش ۴ چند مثال برای نشان دادن توانایی روش پیشنهادی ارائه و نتایج با روشهای موجود مقایسه شده است. در انتها جمع بندی نتایج ارائه گردیده است.

۱-۲ چندجمله ایهای SOS

$x^{[d]}$ را برداری شامل همه مونومیل^{۱۰} های درجه d و

$$x^{\{d\}} = (1, x^{[1]}, \dots, x^{[d]})' \in R^{\sigma(n,d)}$$

برداری شامل همه مونومیل های با درجه کوچکتر یا مساوی d تعریف می کنیم که $x \in R^n$ و $\sigma(n,d) = \frac{(n+d)!}{n!d!}$. بعنوان مثال برای

$$x = (x_1, x_2)'$$

$$x^{\{2\}} = (x_1^2, x_1x_2, x_2^2)'$$

$$x^{\{2\}} = (1, x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2)'$$

¹⁰ Monomial

¹ Maximal Lyapunov Function

² Linear Matrix Inequality

³ Non Convex

⁴ Level Set

⁵ Invariant Set

⁶ Polyhedral

⁷ Shape Factor

⁸ Sum of Squares

⁹ Bilinear Matrix Inequality

که $\phi(t, x_{init})$ پاسخ سیستم (۲) به شرایط اولیه x_{init} است، تعریف می شود. سیستم (۲) در مبدا پایدار مجانبی است اگر تابع لیپانوف $v(x)$ وجود داشته باشد که

$$\begin{aligned} v(x) &> 0 \quad \forall x \in D - \{0\}, \quad v(0) = 0 \\ \dot{v}(x) &< 0 \quad \forall x \in D \end{aligned} \quad (۴)$$

و D مجموعه ای در همسایگی مبدا است. از طرف دیگر مجموعه رویه به صورت

$$v_c = \{x | c - v(x) \geq 0\} \quad (۵)$$

تعریف می شود. در صورتی که $D = v_c$ آنگاه v_c تخمینی از DA خواهد بود [۱۶]. بنابراین یافتن بزرگترین مجموعه رویه منجر به تخمین بزرگتری از DA خواهد گردید. در [۱۱] با در نظر گرفتن تابع لیپانوف ثابت، بزرگترین مجموعه رویه با حل مسئله BMI بدست آمده است که انتخاب $v(x)$ یک مسئله چالش برانگیز است. در صورتی که $v(x)$ ثابت نباشد، معمولاً با استفاده از فاکتور شکل دهی، v_c بدست می آید [۹، ۱۰، ۱۳]. در این روش با در نظر گرفتن چندجمله ای مثبت $p(x)$ که به آن فاکتور شکل دهی گفته می شود، بزرگترین β و $v(x)$ به گونه ای بدست می آید که علاوه بر برآورده کردن شرایط (۴) شرط $v_c \subset \{x | \beta - p(x) \geq 0\}$ نیز برقرار گردد. در این صورت با افزایش β به تخمین بزرگتری از DA دست می یابیم. اما انتخاب $p(x)$ های متفاوت تخمین های متفاوتی از DA ارائه می دهد. در الگوریتم پیشنهادی در [۹]، چند جمله ای $p(x)$ در هر مرحله، قسمت درجه ۲ تابع لیپانوف بدست آمده، در نظر گرفته شده، که منجر به تخمین بهتری از DA شده است. در صورتی که قسمت درجه دو تابع لیپانوف، تابعی مثبت نباشد، این روش کاربرد ندارد و علاوه بر این تضمینی برای این که به بهترین تخمین ممکن از DA رسیده باشد، وجود ندارد. با یک تغییر مقیاس می توان به جای محاسبه مجموعه رویه v_c ، رویه v_1 را برای تخمین DA بکار برد، اما باید تابع هزینه مناسب برای رسیدن به تخمین بهتر از DA تعریف گردد.

۳- نتایج اصلی

در این بخش ابتدا با در نظر گرفتن تابع لیپانوف کسری، تخمین DA برای مبدا سیستم (۲) تبدیل به SOS دوخطی می گردد. سپس تابع هزینه ای بر اساس افزایش ناحیه محصور در مجموعه رویه تعریف و در انتها مسئله یافتن تخمین DA به BMI تبدیل می شود.

۳-۱ تخمین DA با بکار بردن تابع لیپانوف کسری

تابع لیپانوف کسری $v(x) = v_n(x)/v_d(x)$ را که

$$v_n(x) = c_n x^{n_d}$$

و

$$v_d(x) = c_d x^{n_d}$$

در نظر بگیرید. قضیه زیر شرایطی برای یافتن تخمین DA ارائه می دهد.

تعریف می گردد. بنابراین هر چند جمله ای درجه d را می توان بصورت $p(x) = cx^{\{d\}}$ بیان کرد که c بردار ضرایب چندجمله ای است. برای هر چند جمله ای درجه زوج فرم نمایش ماتریسی مربعی^۱ (SMR) بصورت

$$p(x) = cx^{\{2d\}} = (x^{\{d\}})' G x^{\{d\}}$$

را داریم (G یک ماتریس متقارن است) که این نمایش یکتا نیست.

نمایش ماتریسی مربعی کامل^۲ (CSMR) بصورت

$$p(x) = (x^{\{d\}})' (G + L(\alpha)) x^{\{d\}}$$

شامل تمام SMR های ممکن چند جمله ای $p(x)$ است که $L(\alpha)$ یک ترکیب خطی از فضای

$$L = \{L = L' | (x^{\{d\}})' L x^{\{d\}} = 0 \quad \forall x \in R^n\}$$

است. برای سادگی از نمایش

$$G + L(\alpha) = CSMR(p(x))$$

استفاده می کنیم. هر چند جمله ای که بتوان آنرا بصورت مجموع مربعات چندجمله ایهای دیگر یعنی $p(x) = \sum_{i=1}^m p_i^2(x)$ بازنویسی کرد را چندجمله ای SOS گوئیم. لم زیر ارتباط بین چندجمله ای های SOS و CSMR را بیان می کند [۱۴، ۱۵].

لم ۱: چندجمله ای $p(x)$ SOS است اگر و فقط اگر α وجود داشته باشد که $G + L(\alpha) \geq 0$ در آن

$$G + L(\alpha) = CSMR(p(x))$$

الگوریتم محاسبه ماتریس های G و L در مرجع [۱۵] بیان شده است. تئوری زیر یکی از قضایای پر کاربرد برای تبدیل مسائل مختلف کنترل به نامعادلات چندجمله ای است [۱۴].

قضیه ۱: چندجمله ای های $p(x), p_1(x), \dots, p_m(x)$ مفروض است.

$$p(x) \geq 0 \quad \forall x \in \{x | p_1(x) \geq 0, \dots, p_m(x) \geq 0\} \quad (۱)$$

اگر و فقط اگر چندجمله ایهای SOS $s_1(x), \dots, s_m(x)$ وجود داشته باشد که $p(x) - \sum_{i=1}^m s_i(x)p_i(x)$ یک چندجمله ای SOS باشد.

۲-۲ تخمین DA با استفاده از مجموعه رویه

سیستم با معادلات حالت

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_{init} \quad (۲)$$

که در آن $x \in R^n$ متغیرهای حالت و $f(x)$ یک تابع برداری چندجمله ای است، را در نظر بگیرید. مبدا یکی از نقاط تعادل پایدار مجانبی سیستم فرض شده است. DA برای مبدا بصورت

$$DA = \{x_{init} | \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x_{init}) = 0\} \quad (۳)$$

^۱ Square Matrix Representation

^۲ Complete SMR

مخرج تابع لیاپانوف است و بنابراین می توان آنرا بصورت $J_1(c_n, c_d)$ نمایش داد. با حل مسئله بهینه سازی

$$\max J_1 \quad (12)$$

subject to $q_i(x)$ is SOS $i = 1, 2, 3$

بهترین تخمین برای DA بدست می آید. با توجه به اینکه قیدهها برحسب متغیرهای تصمیم گیری از درجه دو می باشد، در صورت تعریف یک تابع هزینه خطی، مسئله بهینه سازی (۱۲) به یک مسئله برنامه ریزی SOS دوطرفی تبدیل می شود. با تعریف مختصات قطبی

$$\begin{cases} x_1 = r \cos(\theta) \\ x_2 = r \sin(\theta) \end{cases} \quad (13)$$

انتگرال ارائه شده در رابطه (۱۱) بصورت

$$J_1 = \oint_{v_1} r dr d\theta \quad (14)$$

و سپس

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r_1^2 d\theta \quad (15)$$

ساده می شود که در آن r_1 اندازه در مختصات قطبی روی مرز v_1 است. از معادله

$$v_{nd}(x_1, x_2) = v_{nd}(r_1 \cos(\theta), r_1 \sin(\theta)) = 1 \quad \text{و یا معادل آن}$$

$$r_1^2 R_2(\theta) + r_1^4 R_4(\theta) - 1 = 0 \quad (16)$$

بدست می آید که در آن

$$\begin{aligned} R_2(\theta) &= a_{nd_1} \cos^2(\theta) + a_{nd_2} \cos(\theta) \sin(\theta) + a_{nd_3} \sin^2(\theta) \\ R_4(\theta) &= a_{nd_4} \cos^4(\theta) \\ &+ a_{nd_5} \cos^3(\theta) \sin(\theta) + a_{nd_6} \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \\ &+ a_{nd_7} \cos(\theta) \sin^3(\theta) + a_{nd_8} \sin^4(\theta) \end{aligned} \quad (17)$$

پس از حل معادله (۱۶)، r_1^2 بصورت

$$r_1^2 = \frac{2}{R_2(\theta) + \sqrt{R_2^2(\theta) + 4R_4(\theta)}} \quad (18)$$

محاسبه می شود. برای رسیدن به یک تابع هدف خطی بر حسب پارامترهای تصمیم گیری a_{n_i} و a_{d_i} به جای ماکزیمم کردن تابع هزینه J_1 بدست آمده در رابطه (۱۵)، J_2 در رابطه (۱۹) مینیمم می شود.

$$\begin{aligned} J_2 &= 2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_1^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (R_2(\theta) + \sqrt{R_2^2(\theta) + 4R_4(\theta)}) d\theta \end{aligned} \quad (19)$$

با توجه به اینکه توابع $R_2(\theta)$ و $R_4(\theta)$ بر حسب پارامترهای تصمیم گیری خطی است، در صورتی که جمله $\sqrt{R_2^2(\theta) + 4R_4(\theta)}$ را در انتگرال (۱۹) حول نقطه ای خطی کنیم، به تابع هزینه خطی خواهیم رسید.

بسط تیلور تابع دو متغیره هموار دلخواه R_{20} و R_{40} مقادیر حول $g(R_2, R_4)$ برابر است با

$$\begin{aligned} g(R_2, R_4) &\cong g(R_{20} + R_{40}) \\ &+ \frac{\partial g}{\partial R_2}|_{R_2=R_{20}, R_4=R_{40}} (R_2 - R_{20}) \\ &+ \frac{\partial g}{\partial R_4}|_{R_2=R_{20}, R_4=R_{40}} (R_4 - R_{40}) \end{aligned}$$

قضیه ۲: اگر چندجمله ای های $v_d(x)$ و $v_n(x)$ و چندجمله ای های SOS $s_1(x), s_2(x), s_3(x)$ وجود داشته باشد که $q_1(x), q_2(x), q_3(x)$ چندجمله ای های SOS باشند آنگاه

$$v_1 = \{x | v_d(x) - v_n(x) \geq 0\} \quad (6)$$

تخمینی از DA مبدا سیستم (۲) است.

$$\begin{aligned} q_1(x) &= v_n(x) - l(x) - s_1(x)(v_d(x) - v_n(x)) \\ q_2(x) &= v_d(x) - \epsilon - s_2(x)(v_d(x) - v_n(x)) \\ q_3(x) &= -v(x) + \epsilon - s_3(x)(v_d(x) - v_n(x)) \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن

$$l(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n/2} \epsilon_{ij} x_i^{2j}$$

و

$$\epsilon > 0 \in R, \quad \epsilon_{ij} > 0 \in R.$$

اثبات قضیه ۲: با توجه به اینکه $s_i(x), q_i(x)$ چندجمله ای های

SOS هستند با بکار بردن تئوری (۱) نتیجه می شود

$$\begin{aligned} v_n(x) - l(x) &\geq 0 \quad \forall x \in v_1 \\ v_d(x) - \epsilon &\geq 0 \quad \forall x \in v_1 \\ -v(x) + \epsilon &\geq 0 \quad \forall x \in v_1 \end{aligned} \quad (8)$$

با $l(x)$ و ϵ تعریف شده شرایط تئوری لیاپانوف (۴) برای

برآورده می شود و بنابراین v_1 تخمینی از DA برای مبدا سیستم (۲) است.

۳-۲ تابع هزینه برای تخمین DA

در ادامه $v_d(x)$ و $v_n(x)$ چندجمله ای های درجه چهار به

صورت

$$\begin{aligned} v_n(x) &= a_{n_1} x_1^2 + a_{n_2} x_1 x_2 + a_{n_3} x_2^2 + a_{n_4} x_1^4 \\ &+ a_{n_5} x_1^3 x_2 + a_{n_6} x_1^2 x_2^2 + a_{n_7} x_1 x_2^3 + a_{n_8} x_2^4 \\ v_d(x) &= 1 + a_{d_1} x_1^2 + a_{d_2} x_1 x_2 + a_{d_3} x_2^2 + a_{d_4} x_1^4 \\ &+ a_{d_5} x_1^3 x_2 + a_{d_6} x_1^2 x_2^2 + a_{d_7} x_1 x_2^3 + a_{d_8} x_2^4 \end{aligned} \quad (9)$$

فرض شده است. البته واضح است که چندجمله ای صورت و مخرج می توانند فقط درجه ۲ یا فقط همگن درجه ۴ نیز باشند و علاوه بر این مخرج می تواند از درجه صفر باشد که در این حالت تابع لیاپانوف چندجمله ای را نتیجه می دهد. با تعریف $v_{nd}(x)$ که

$$1 - v_{nd}(x) = v_d(x) - v_n(x)$$

$$a_{nd_i} = a_{n_i} - a_{d_i} \quad \forall i = 1, \dots, 8$$

فرض شده است. بنابراین

$$v_1 = \{x | 1 - v_{nd}(x) \geq 0\} \quad (10)$$

تخمین DA است. برای رسیدن به تخمین بهتری از DA باید $v(x)$ را بگونه ای بیابیم که به v_1 بزرگتری منجر شود. به این منظور تابع هدف، مساحت محصور در v_1 یعنی

$$J_1 = \oint_{v_1} dx_1 dx_2 \quad (11)$$

تعریف می گردد و در نتیجه بزرگ شدن J_1 به معنای بزرگ شدن v_1 است. از طرفی J_1 تابعی از c_n, c_d ضرایب چندجمله ایهای صورت و

می گیرد. با توجه به DA تخمین زده شده در [۹] که در شکل ۱ بصورت خط چین نشان داده شده است، می توان ناحیه جذب را با دایره ای به شعاع $r_1 = 7$ تقریب زد. با جایگذاری r_1 در معادله (۱۶) باید

$$49R_2(\theta) + 2401R_4(\theta) - 1 = 0$$

برقرار باشد. تابع هزینه را حول

$$R_{20} = R_2(\theta) = 1/(49 * 2)$$

و

$$R_{40} = R_4(\theta) = 1/(2041 * 2)$$

که یکی از جواب های معادله مذکور است، خطی می کنیم. حال با حل مساله بهینه سازی BMI (۲۲) تابع لیپانوف کسری

$$v(x) = v_n(x)/v_d(x)$$

که در آن

$$\begin{aligned} v_n(x) = & 0.28x_1^2 - 0.026x_1x_2 + 0.425x_2^2 \\ & + 0.014x_1^4 + 0.033x_1^3x_2 \\ & + 0.13x_1^2x_2^2 - 0.016x_1x_2^3 \\ & + 0.011x_2^4 \\ v_d(x) = & 1 + 1.091x_1^2 - 0.066x_1x_2 + 1.245x_2^2 \end{aligned}$$

بدست می آید. DA تخمین زده شده با این تابع لیپانوف در شکل (۱) رسم شده است. صورت تابع لیپانوف چندجمله ای، درجه ۴ و مخرج آن درجه ۲ فرض شده است.

مثال ۲: سیستم چندجمله ای با معادلات حالت

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5.2x_1 - 0.1x_2 - 0.5x_1^3 + 1.9x_1^2x_2 - x_1x_2^2 - 1.7x_2^3 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 + 0.4x_1^3 - 0.3x_1^2x_2 + 2.9x_1x_2^2 + 1.6x_2^3 \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. در [۱۹] DA این سیستم با تابع لیپانوف درجه ۲ تخمین زده شده است. با بکار بردن الگوریتم پیشنهادی و همچنین در نظر گرفتن $n_n = 4, n_d = 2$ تابع لیپانوف کسری با چندجمله ایهای صورت و مخرج

$$\begin{aligned} v_n(x) = & 56.1x_1^2 + 29.6x_1x_2 + 56.7x_2^2 + 0.014x_1^4 \\ & + 0.016x_1^3x_2 + 0.017x_1^2x_2^2 \\ & + 0.004x_1x_2^3 + 0.0018x_2^4 \\ v_d(x) = & 1 + 56.8x_1^2 + 29.67x_1x_2 + 57.6x_2^2 \end{aligned}$$

بدست می آید. DA تخمین زده شده با این تابع لیپانوف در شکل ۲ رسم شده است. همچنین در روش پیشنهادی می توان تابع لیپانوف را چندجمله ای درجه ۴ در نظر گرفت که DA تخمین زده شده پس از بدست آوردن تابع لیپانوف در شکل ۲ رسم شده است.

حال بسط تیلور $g(R_2, R_4) = \sqrt{R_2^2 + 4R_4}$ با رابطه (۲۰) بدست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} \sqrt{R_2^2 + 4R_4} & \simeq \sqrt{R_{20}^2 + 4R_{40}} \\ & + \frac{R_{20}}{\sqrt{R_{20}^2 + 4R_{40}}}(R_2 - R_{20}) + \frac{2}{\sqrt{R_{20}^2 + 4R_{40}}}(R_4 - R_{40}) \quad (20) \end{aligned}$$

که θ برحسب توابعی شده بیان (۱۷) رابطه در که همانگونه R_2 و R_4 هستند. با جایگذاری رابطه (۲۰) در انتگرال (۱۹) و ساده کردن این انتگرال، تابع هزینه خطی شده ای به صورت ارائه شده در (۲۱) بدست می آید.

$$\begin{aligned} J_L = & \pi \left(1 + \frac{R_{20}}{\sqrt{R_{20}^2 + 4R_{40}}} \right) (a_{nd_1} + a_{nd_3}) + \\ & \frac{\pi}{4\sqrt{R_{20}^2 + 4R_{40}}} (3a_{nd_4} + a_{nd_6} + 3a_{nd_8}) \quad (21) \end{aligned}$$

که در این تابع هزینه جملاتی که مستقل از متغیرهای تصمیم گیری هستند حذف شده است.

۳-۳ تخمین DA با حل مسئله BMI

با تعریف $G_i + L_i(\alpha_i) = CSMR(q_i(x))$ و بکار بردن لم (۱) اگر $G_i + L_i(\alpha_i) \geq 0$ آنگاه $q_i(x)$ چندجمله ای SOS است. بنابراین می توان مسئله بهینه سازی برای رسیدن به تخمین DA را بصورت

$$\begin{aligned} \min J_L \\ \epsilon > 0, \epsilon_{ij} > 0, \alpha_i, a_{n_i}, a_{d_i} \\ \text{subject to } G_i + L_i(\alpha_i) \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (22)$$

بیان کرد. مسئله برنامه ریزی BMI (۲۲) توسط ابزار PENBMI شرکت TOMLAB [۱۷] و YALMIP [۱۸] حل شده است.

۴-۴ مثال ها و شبیه سازی

در ادامه چند مثال برای نشان دادن توانایی روش پیشنهادی در تخمین DA سیستم های چندجمله ای ارائه شده است. در همه این مثال ها مبدا نقطه تعادل پایدار مجانبی است.

مثال ۱: سیستم با معادلات حالت

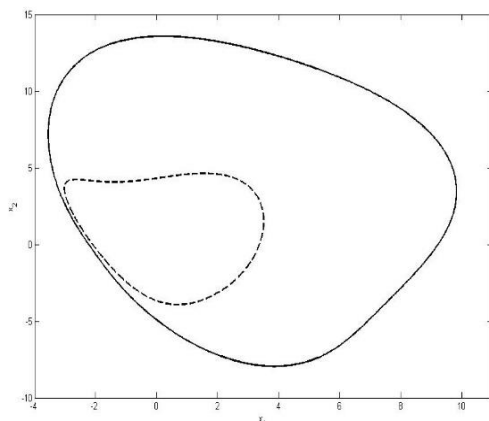
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -50x_1 - 16x_2 + 13.8x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = 13x_1 - 9x_2 + 5.5x_1x_2 \end{cases}$$

را که در مراجع [۶،۹] مورد بررسی قرار گرفته است، را در نظر بگیرید. DA این سیستم با چندوجهی در [۶] تخمین زده شده که در شکل ۱ نمایش داده شده است. با بکار بردن تابع لیپانوف چند جمله ای درجه ۴ نتیجه بهتری در [۹] بدست آمده است. در [۹] با استفاده از برنامه ریزی SOS و بکار بردن تابع هزینه بر حسب افزایش تابع شکل دهی، تخمین بزرگتری از DA نتیجه شده است. برای پیاده سازی روش پیشنهادی در این مقاله، باید تابع هزینه حول R_{20} و R_{40} خطی شود. انتخاب مقادیر R_{40} و R_{20} بر اساس تخمین اولیه ای که از DA بدست آمده صورت

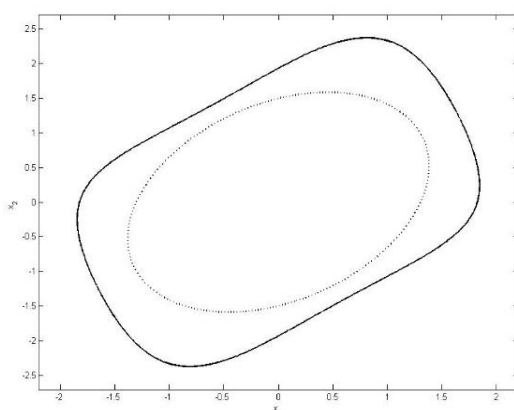
مثال ۴: سیستم وندربول^۱ با معادلات حالت

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_1^2 x_2 \end{cases}$$

که تخمین ناحیه جذب آن در مقالات متعددی از جمله [۴،۲۰] ارجاع داده شده است، را در نظر بگیرید. بکار بردن روش پیشنهادی به همراه تابع لیپانوف چند جمله ای درجه ۲ ($n_d = 0$ ، $n_n = 2$) و یا تابع لیپانوف

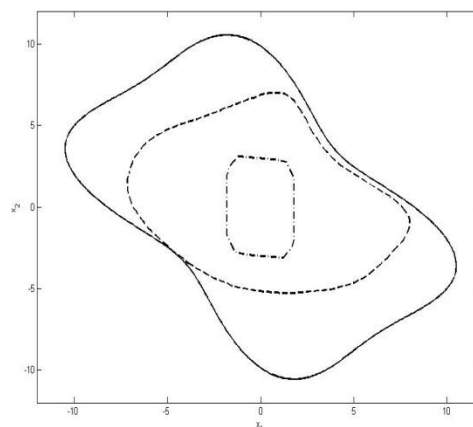


شکل ۳: تخمین DA سیستم مثال ۳ با بکار بردن تابع لیپانوف کسری و استفاده از MLF [۴] (خط چین)، تابع لیپانوف کسری و روش پیشنهادی (خط)



شکل ۴: تخمین DA مثال ۴ با بکار بردن تابع لیپانوف درجه ۲ [۲۰] (نقطه چین) و تابع چندجمله ای درجه ۴ با بکار بردن روش پیشنهادی (خط) کسری درجه ۲ ($n_d = 2$ ، $n_n = 2$) منجر به تخمین یکسانی از DA این سیستم می گردد. علاوه بر این DA تخمین زده شده بوسیله تابع لیپانوف درجه دو در [۲۰] نیز به همین نتیجه انجامیده که در شکل ۴ رسم شده است. در [۴] DA این سیستم با اعمال تابع لیپانوف کسری درجه ۴ تخمین زده شده که در ۵ نشان داده شده است. با استفاده از

^۱ van-der-pole

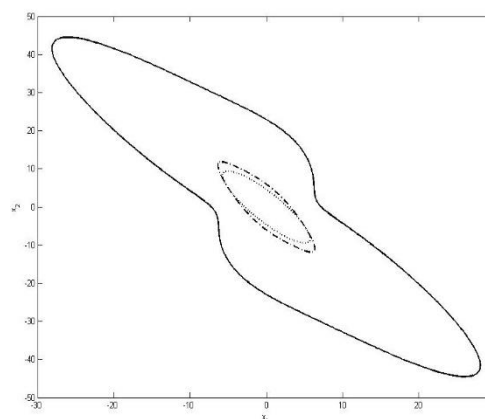


شکل ۱: DA تخمین زده شده در مثال (۱) با چندوجهی [۶] (خط-نقطه)، چندجمله ای [۹] (خط چین)، روش پیشنهادی با تابع لیپانوف کسری (خط)

مثال ۳: سیستم با معادلات حالت بیان شده در [۴] بصورت

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 - x_1^2 + 0.1x_1^3 \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. در [۴] با بکار بردن تابع لیپانوف کسری به حل تقریبی معادلات با مشتقات جزئی در تئوری زیوف یا استفاده از MLF پرداخته است. DA تخمین زده شده با تابع لیپانوف کسری که صورت آن چندجمله ای درجه ۴ و منجر آن درجه ۲ است، در شکل ۳ رسم شده



شکل ۲: DA تخمین زده شده در مثال ۲ با استفاده از تابع لیپانوف درجه ۲ [۱۹] (نقطه چین)، روش پیشنهادی با تابع لیپانوف چندجمله ای درجه ۴ (خط-نقطه چین) و روش پیشنهادی با تابع لیپانوف تابع لیپانوف کسری (خط)

است. تابع لیپانوف کسری بدست آمده بصورت زیر می باشد.

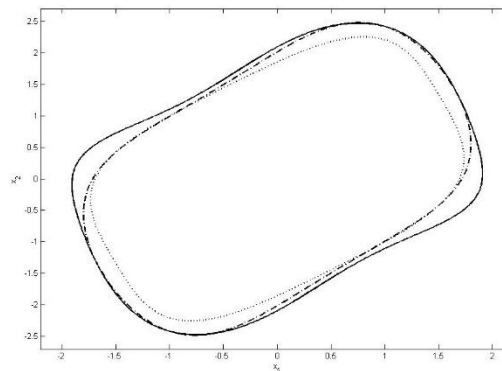
$$\begin{aligned} v_n(x) = & 10.6x_1^2 + 6.57x_1x_2 + 9.54x_2^2 \\ & + 0.047x_1^4 + 0.0076x_1^3x_2 \\ & + 0.18x_1^2x_2^2 + 0.02x_1x_2^3 \\ & + 0.012x_2^4 \end{aligned}$$

$$v_d(x) = 1 + 11.4x_1^2 + 6.48x_1x_2 + 10.3x_2^2$$

همان گونه که در شکل دیده می شود روش پیشنهادی منجر به تخمین بهتری نسبت به MLF با بکار بردن تابع لیپانوف کسری گردیده است.

مراجع

- [1] V. I. Zubov, "Methods of A.M. Lyapunov and Their Application", P. Noordhoff, 1964.
- [2] A. Vannelli, M. Vidyasagar, "Maximal Lyapunov functions and domains of attraction for autonomous nonlinear systems", Automatica, vol. 21, pp. 69-80, 1985.
- [3] W. Fermin Guerrero-Sanchez, J.F. Guerrero-Castellanos, V.V. Alexandrov, "A computational method for the determination of attraction regions", In: Proceedings of the Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, Toluca, pp. 1-7, 2009.
- [4] O. Hachicho, "A novel LMI-based optimization algorithm for the guaranteed estimation of the domain of attraction using rational Lyapunov functions", Journal of Franklin Institute, vol. 344, pp. 535-552, 2007.
- [5] F. Hamidi, H. Jerbi, et al., "Enlarging the domain of attraction in nonlinear polynomial systems", International Journal of Computers Communications and Control, vol. 8, pp. 538-547, 2013.
- [6] F. Amato, F. Calabrese, et al., "Stability analysis of nonlinear quadratic systems via polyhedral Lyapunov functions", Automatica, vol. 47, pp. 614-617, 2011.
- [7] A. Levin, "An analytical method of estimating the domain of attraction for polynomial differential equations", IEEE Transaction on Automation Control, vol. 39, pp. 2471-2475, 1994.
- [8] Jarvis-Wloszek, "Lyapunov based analysis and controller synthesis for polynomial systems using sum-of-squares optimization" Berkeley, University of California, 2003.
- [9] L. Khodadadi, B. Samadi, H. Khaloozadeh, "Estimation of region of attraction for polynomial nonlinear systems: A numerical method", ISA Transaction, vol. 53, pp. 25-32, 2014.
- [10] T. Weehong, A. Packard, "Stability region analysis using polynomial and composite polynomial lyapunov functions and sum-of-squares programming", IEEE Transaction on Automation Control, vol. 53, pp. 565-571, 2008.
- [11] G. Chesi, "Rational Lyapunov functions for estimating and controlling the robust domain of attraction", Automatica, vol. 49, pp. 1051-1057, 2013.
- [12] W. Ta-Chung, S. Lall, M. West, "Polynomial level-set method for polynomial system reachable set estimation", IEEE Transaction on Automation Control, vol. 58, pp. 2508-2521, 2013.
- [13] G. Valmorbida, J. Anderson, "Region of attraction analysis via invariant sets", In: Proceedings of



شکل ۵: تخمین DA مثال ۴ با بکار بردن تابع لیپانوف کسری با درجه صورت ۴ و مخرج ۲ [۴] (نقطه چین)، تابع لیپانوف کسری با درجه صورت ۴ و مخرج ۲ با بکار بردن روش پیشنهادی (خط-نقطه چین) و تابع لیپانوف کسری با درجه صورت ۴ و مخرج ۴ در روش پیشنهادی (خط)

روش پیشنهادی و بکار بردن تابع لیپانوف چندجمله ای درجه ۴، DA بصورت نمایش داده در شکل ۴ تخمین زده می شود. با بکار بردن تابع لیپانوف کسری می توان به تخمین بهتری از ناحیه جذب این سیستم رسید که با در نظر گرفتن تابع لیپانوف کسری با صورت درجه ۴ و مخرج درجه ۲، DA تخمین زده شده در شکل ۵ رسم شده است. همان گونه که در این شکل مشاهده می شود به دلیل استفاده از تابع هدف مناسب، به تخمین بهتری نسبت به نتیجه مقاله [۴] بدست آمده است. پس از اعمال روش پیشنهادی، و بکار بردن تابع لیپانوف کسری با درجه صورت و مخرج ۴ پس از حل BMIP، تابع لیپانوف کسری با چندجمله ای صورت و مخرج

$$v_n(x) = 2.29x_1^2 + 2.43x_1x_2 + 1.46x_2^2 + 0.45x_1^4 + 1.44x_1^3x_2 + 1.64x_1^2x_2^2 + 0.71x_1x_2^3 + 0.68x_2^4$$

$$v_d(x) = 1 + 2.19x_1^2 - 1.1x_1x_2 + 1.49x_2^2 + 0.4x_1^4 + 1.28x_1^3x_2 + 1.47x_1^2x_2^2 - 0.65x_1x_2^3 + 0.62x_2^4$$

بدست می آید. DA تخمین زده شده با این تابع لیپانوف در شکل ۵ قابل مشاهده است.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله تخمین DA سیستم های چندجمله ای با بکار بردن تابع لیپانوف کسری بررسی شده است. برای رسیدن به تخمین بهتر از DA تابع هزینه جدیدی بر اساس ناحیه محصور به مجموعه رویه ارائه و تخمین DA بصورت یک الگوریتم بر مبنای حل مسئله بهینه سازی BMI خلاصه شده است. همانگونه که در مثال ها نشان داده شد، این روش منجر به تخمین بهتری از DA در قیاس با MLF و استفاده از فاکتور شکل دهی شده است.

-
- [18] J. Lofberg, "YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB", In: IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, Taiwan, pp. 284-289, 2004.
- [19] G. Chesi, A. Garulli, et al., "LMI-based computation of optimal quadratic Lyapunov functions for odd polynomial systems", International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 15, pp. 35-49, 2005.
- [20] A. Tesi, F. Villoresi, et al., "On the stability domain estimation via a quadratic Lyapunov function: convexity and optimality properties for polynomial systems", IEEE Transaction on Automation Control, vol. 41, pp. 1650-1657, 1996.
- American Control Conference, Portland, pp. 3591-3596, 2014.
- [14] G. Chesi, "LMI Techniques for optimization over polynomials in control: a survey", IEEE Transaction on Automation Control, vol. 55, pp. 2500-2510, 2010.
- [15] G. Chesi, A. Garulli, et al., "Solving quadratic distance problems: an LMI-based approach", IEEE Transaction on Automation Control, vol. 48, pp. 200-212, 2003.
- [16] H. Khalil, J. Grizzle, "Nonlinear Systems", New Jersey, Prentice hall, 2002.
- [17] M. Kocvara, M. Stingl, "PENBMI user's guide", Available from <http://www.penopt.com>, 2005.

کنترل مقاوم یک گروه خودرو با لحاظ تاخیر زمانی و ساختار ارتباطی زمان متغیر

حسین چهاردولی^۱، محمدرضا همایی نژاد^۲

^۱ دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک، گروه جامدات، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، hchehardoli@gmail.com
^۲ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، گروه جامدات، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، mrhomaeinezhad@kntu.ac.ir
(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۹۵/۶/۱۵، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۹۵/۹/۲۱)

چکیده: در این مقاله به طراحی کنترلر و تحلیل پایداری داخلی و رشته‌ای یک گروه خودرو در حرکت یک بعدی پرداخته می‌شود. با توجه به اینکه ارسال داده و اندازه‌گیری سنسورها در یک دسته خودرو می‌تواند با تاخیر رخ دهد، لذا در مدل‌سازی سیستم، تاخیر زمانی در نظر گرفته می‌شود. تغییر ساختار شبکه ارتباطی یک دسته خودرو می‌تواند منجر به ناپایداری داخلی و رشته‌ای سیستم گردد. با در نظر گرفتن تاخیر زمانی و ساختار شبکه متغیر با زمان به طراحی یک کنترلر مقاوم برای حفظ پایداری داخلی و رشته‌ای دسته خودرو پرداخته می‌شود. با استفاده از قضایای لیپانوف کراسوفسکی و لیپانوف رازومیکین، دو روش جدید برای تحلیل پایداری داخلی دسته خودرو ارائه می‌گردد. همچنین در ادامه قضیه‌ای نو برای تحلیل پایداری رشته‌ای در حضور تاخیر زمانی و ساختار شبکه متغیر بیان می‌گردد. نشان داده می‌شود که کنترلر مربوطه پایداری داخلی و رشته‌ای دسته را تحت عمل سوئیچ و تاخیر زمانی تضمین می‌نماید. کیفیت روش‌های ارائه شده با انجام مثال‌های شبیه‌سازی متعدد بررسی می‌گردد.

کلمات کلیدی: یک دسته خودرو، تاخیر زمانی، ساختار ارتباطی متغیر، سیستم سوئیچینگ، پایداری رشته‌ای.

Robust Control of a Platoon of Vehicles with Communication Time Delay and Switched Interaction Topology

Hossein Chehardoli, Mohammadreza Homaeinezhad

Abstract: In this paper the problem of vehicular platoons control with time delay and switching topology is considered. Due to data transmissions and sensors measurements, time delay should be investigated in system's modeling and controller design. Changes in communication topology may cause the internal and string instability of the vehicular platoons. Based on constant spacing policy, a robust controller is designed to provide internal and string stability of the vehicular platoons. By using Lyapunov-Krasovskii and Lyapunov-Razumikhin theorems, two new approaches are presented to perform the internal stability of the proposed switched linear time-delay system. In continuance, a new theorem is presented to attain conditions satisfying string stability. Several simulation studies are provided to show the effectiveness of the proposed approaches.

Keywords: Platoon of vehicles, Time delay, Time varying topology, Switching system, String stability.

۱- مقدمه

به منظور افزایش ایمنی سرنشینان و نیز بالا بردن ظرفیت ترافیکی جاده‌ها بحث اتوبان خودکار^۱ در دو دهه اخیر مورد توجه قرار گرفته است [۱-۳]. یک دسته خودرو^۲ شامل تعدادی خودرو است که به صورت مرتبط با هم در حرکت هستند. یک خودرو در حال تبادل اطلاعات با سایر خودروها و خودروی راهنما^۳ می‌باشد که خودروی راهنما اطلاعات اساسی مورد نیاز برای حرکت خود را از زیرساخت‌های اتوبان دریافت می‌کند [۴]. ساختار موردنظر دسته بر مبنای فاصله نسبی مطلوب خودروها حاصل می‌گردد که این فاصله بر مبنای دو استراتژی کنترل فاصله ثابت^۴ [۵-۸] و کنترل زمان پیشرفت ثابت^۵ [۹-۱۱] صورت می‌گیرد. در روش کنترل فاصله ثابت، فاصله بین دو خودرو مقداری ثابت در نظر گرفته می‌شود در حالی که در روش دیگر مدت زمان رسیدن خودرو به موقعیت فعلی خودروی جلویی مقداری ثابت در نظر گرفته می‌شود.

در کنترل یک دسته خودرو علاوه بر پایداری داخلی^۶ سیستم، پایداری رشته‌ای^۷ نیز اهمیت بالایی دارد. مفهوم پایداری رشته‌ای اولین بار در [۲] مطرح شد. یک دسته خودرو پایدار رشته‌ای است اگر با ورود اغتشاش به خودروی راهنما، خطای موقعیت در طول دسته افزایش نیابد. بحث پایداری رشته‌ای برای مسائلی چون ساختار یکسویه [۷]، دوسویه [۹]، مسئله ایمنی دسته خودرو [۱۰]، مدل‌سازی با ساختار معادله دیفرانسیلی پاره‌ای [۱۱] در کارهای گذشته مورد توجه قرار گرفته است. مدل‌سازی حرکت طولی خودرو با استفاده از مدل مرتبه دو در [۱۲، ۹، ۸] و مدل مرتبه سه در [۱۱، ۱۰] انجام شده است. مدل مرتبه سه برای توصیف حرکت طولی خودرو برای اولین بار در [۱۳] ارائه گردید و در [۱۴] با انجام آزمایش‌های تجربی، صحت آن مورد تأیید قرار گرفت. در این مقاله نیز از مدل مرتبه سه برای توصیف حرکت طولی خودرو استفاده شده است.

در کنترل سیستم‌های چند عاملی مانند یک دسته خودرو، قانون کنترلی تابعی از توپولوژی ارتباطی شبکه می‌باشد. لذا با تغییر شبکه ارتباطی، ساختار قانون کنترلی نیز دچار تغییر شده که این امر منجر به تغییر دینامیک حلقه بسته سیستم می‌گردد. طبق تئوری سیستم‌های سوئیچینگ، عمل سوئیچ بین زیر سیستم‌های (حتی) پایدار می‌تواند منجر به ناپایداری سیستم حلقه بسته گردد [۱۵، ۱۶]. این امر در مورد یک دسته خودرو اهمیت بیشتری می‌یابد چرا که علاوه بر پایداری داخلی، پایداری رشته‌ای نیز ممکن است در اثر عمل سوئیچ مختل گردد.

تحقیقات انجام شده در حوزه کنترل گروهی خودروها در دو دسته کنترل سیستم بدون لحاظ عدم قطعیت و اغتشاش [۸-۱۱، ۱۷-۱۹] و کنترل سیستم با لحاظ عدم قطعیت و اغتشاش [۸، ۲۰، ۲۱] قابل تقسیم می‌باشند. در نگرش اول جبران عدم قطعیت‌ها و اغتشاش اعمالی به خودرو به عهده دینامیک سطح پایین^۸ خودرو گذاشته می‌شود در حالی که در نگرش دوم علاوه بر وظیفه تعیین شتاب مطلوب، وظایف فوق به عهده دینامیک سطح بالای^۹ خودرو محول می‌شود. در [۱۱] با تقریب معادلات دیفرانسیلی جزئی به مدل‌سازی و کنترل طولی حرکت خودرو پرداخته شده است. در [۸، ۲۱] اثرات اغتشاش و عدم قطعیت‌های نیروی درگ در دینامیک سطح بالا لحاظ شده و کنترلی مقاوم برای تضمین پایداری رشته‌ای ارائه شده است. تاخیر زمانی در حرکت گروهی خودروها در مقالات متعددی مورد بررسی قرار گرفته است [۸، ۹، ۱۴]. مسئله توافق^{۱۰} بر اساس اندازه‌گیری موقعیت مطلق خودروها در [۹] و بر اساس اندازه‌گیری موقعیت نسبی در [۶، ۱۰، ۱۷، ۲۱] بررسی شده است. اکثر تحقیقات گذشته به تحلیل گروه همگن^{۱۱} خودرو متمرکز بوده‌اند [۷، ۸، ۱۴، ۱۹، ۲۰] در حالی که کارهای بسیار کمی به تحلیل گروه‌های ناهمگن^{۱۲} خودرو پرداخته‌اند [۹، ۱۱].

در تمامی کارهای گذشته در حوزه کنترل حرکت گروهی خودروها، ساختار شبکه ارتباطی ثابت و بدون تغییر در نظر گرفته شده است. در حالی که تغییر ساختار ارتباطی امری محتمل در سیستم‌های چند عاملی به شمار می‌رود. یک سیستم سوئیچینگ تحت هر سوئیچ دلخواه پایدار مجانبی است اگر تمامی زیر سیستم‌های آن پایدار مجانبی باشند و یک تابع لیاپانوف مشترک^{۱۳} وجود داشته باشد که مشتق آن به ازای تمامی زیر سیستم‌ها منفی باشد [۱۵، ۱۶].

در این مقاله برای اولین بار به طراحی کنترلی به منظور پایداری داخلی و رشته‌ای یک گروه خودرو با لحاظ تغییر ساختار شبکه پرداخته می‌شود. علاوه بر این امر، تاخیر زمانی ارتباطی در مدل‌سازی و طراحی کنترلی لحاظ می‌گردد. همچنین گروه خودرو، ناهمگن در نظر گرفته می‌شود. طور خلاصه مهمترین نوآوری این مقاله عبارتست از:

- ۱- تحلیل پایداری داخلی در حضور تاخیر زمانی و شبکه زمان متغیر
- ۲- تحلیل پایداری رشته‌ای در حضور تاخیر زمانی و شبکه زمان متغیر
- ۳- تحلیل گروه ناهمگن خودرو

ادامه مقاله به شرح زیر سازمان‌دهی شده است. در قسمت ۲ مسئله مورد نظر شرح داده شده و به استخراج معادلات مرتبه ۳ حرکت طولی خودرو پرداخته می‌شود. در قسمت ۳ به طراحی کنترلی و تحلیل پایداری داخلی پرداخته می‌شود و به کمک قضایای لیاپانوف کراسوفسکی^{۱۴} و

⁸ Lower level dynamic⁹ Upper level dynamic¹⁰ Consensus¹¹ Homogenous¹² Heterogenous¹³ Common Lyapunov function¹⁴ Lyapunov-Krasovskii¹ Autonomous highways² Platoon of vehicles³ Lead vehicle⁴ Constant spacing control⁵ Constant time headway control⁶ Internal stability⁷ String stability

جهت‌دار از مرتبه N عبارتست از سه تایی $G = (V, \mathcal{E}, A)$ که $V = \{1, 2, \dots, N\}$ نشان دهنده مجموعه راس‌ها، $\mathcal{E} \in V \times V$ و $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ماتریس مجاورت^۲ رئوس می‌باشد. فرض می‌شود هر خودرو فقط از سایر خودروها اطلاعات دریافت می‌کند. بنابراین به ازای هر $i \in V$ و $(i, i) \notin \mathcal{E}$ اگر $a_{ii} = 0$ و $a_{ij} > 0$ اگر $(i, j) \in \mathcal{E}$ و در غیر اینصورت $a_{ij} = 0$. ماتریس لاپلاسیان^۳ گراف G به صورت $L = [l_{ij}]$ ، $l_{ii} = \sum_j a_{ij}$ ، $l_{ij} = -a_{ij}$ تعریف می‌شود. می‌توان نشان داد که این ماتریس دارای حداقل یک مقدار ویژه صفر است و بنابراین تمام رتبه^۴ نمی‌باشد [۲۴]. همچنین برای یک گراف، ماتریس مجاورت راس صفر به صورت $B = [b_{ij}]$ ، $b_{ii} = a_{i0}$ ، $b_{ij} = 0$ تعریف می‌گردد.

تعریف: یک راس از گراف G قابل دسترس سراسری است اگر از آن راس به سایر رئوس حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

۳- تحلیل پایداری داخلی

بر مبنای استراتژی فاصله ثابت و با لحاظ تاخیر زمانی ارتباطی بین خودروها قانون کنترلی زیر برای هر خودرو در نظر گرفته می‌شود:

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij}^\sigma k_{ij} [x_j(t - \xi) - x_i(t - \xi) - d_{ji}] + b_i^\sigma k_i^l [x_0(t - \beta) - x_i(t - \beta) - d_{0i}] + b_i^\sigma \beta_i (v_0 - v_i) \quad (5)$$

که در آن k_{ij}^l و β_i ضرایب کنترلی، a_{ij}^σ عناصر ماتریس مجاورت خودرو i و b_i^σ عناصر ماتریس مجاورت خودروی راهنما هستند. x_i ، v_i و x_0 ، v_0 به ترتیب موقعیت و سرعت خودروی i ام و موقعیت و سرعت خودروی راهنما می‌باشد. $\xi(t)$ تاخیر زمانی ارتباطی است که کراندار و نامعلوم در نظر گرفته می‌شود: $0 \leq \xi(t) \leq \bar{\xi}$. $\sigma(t): [0, \infty) \rightarrow \{1, 2, \dots, n_\sigma\}$ سیگنال سوئیچینگ و n_σ تعداد زیر سیستم‌های سیستم سوئیچینگ می‌باشد. همچنین d_{0i} و d_{ij} به ترتیب فاصله بین خودروی صفر و j با خودروی i ام دسته می‌باشد. بر اساس استراتژی کنترل فاصله ثابت، فاصله بین خودروی راهنما و خودروی i ام

به صورت $d_{0i} = \sum_{j=1}^i (D_{j-1,j} + L_{j-1})$ تعریف می‌گردد. همچنین موقعیت مطلوب هر خودرو به صورت $x_i^d = x_0 - \sum_{j=1}^i (D_{j-1,j} + L_{j-1})$ تعریف می‌شود که در آن L معرف

لیاپانوف رازومیکین^۱ رهیافت‌های جدیدی برای تحلیل سیستم‌های سوئیچینگ خطی تاخیر زمانی ارائه می‌گردد. در قسمت ۴ به تحلیل پایداری رشته‌ای مجموعه پرداخته می‌شود. در قسمت ۵ به بررسی کیفیت روش‌های ارائه شده، به کمک نتایج شبیه‌سازی پرداخته می‌شود. در نهایت مقاله در قسمت ۶ جمع بندی و نتیجه گیری می‌گردد.

۲- توصیف مسئله

۲-۱- مدل طولی مرتبه سه خودرو:

حرکت طولی یک گروه شامل $N+1$ خودرو (یک خودرو رهبر و N خودرو پیرو) مطابق شکل (۱) در نظر گرفته می‌شود. معادله طولی یک خودرو به صورت یک معادله دیفرانسیلی غیر خطی به صورت زیر قابل بیان است [۱۳، ۱۴، ۲۲]:

$$\dot{a}_i = h_i(v_i, a_i) + l_i(v_i) r_i \quad (1)$$

که در آن r_i ورودی موتور است و همچنین داریم:

$$h_i(v_i, a_i) = -\frac{1}{\tau_i} \left(a_i + \frac{\rho A_i c_{di}}{2 m_i} v_i^2 + \frac{R_i}{m_i} \right) - \frac{\rho A_i c_{di} v_i a_i}{m_i}$$

$$l_i(v_i) = \frac{1}{\tau_i m_i} \quad (2)$$

در رابطه فوق ρ ، A_i ، c_{di} ، R_i به ترتیب چگالی هوا، ثابت موتور، سطح مقطع عمودی خودرو، ضریب درگ هوا و مقاومت غلتشی لاستیک خودرو می‌باشند. اگر ورودی موتور به صورت زیر در نظر گرفته شود:

$$r_i = u_i m_i + 0.5 \rho A_i c_{di} v_i^2 + d_{mi} + \tau_i \rho A_i c_{di} v_i a_i \quad (3)$$

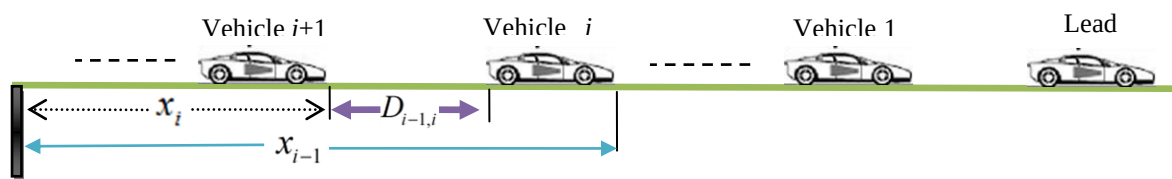
معادله (۱) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\tau_i \dot{a}_i + a_i = u_i \quad (4)$$

که در آن u_i ورودی کنترلی جدید است که طراحی بر اساس آن صورت می‌گیرد. مدل دینامیکی فوق اولین بار در [۱۳] ارائه گردید. در [۱۴] با انجام آزمایش‌های تجربی صحت مدل فوق برای حرکت طولی خودرو با دقت خوبی اعتبارسنجی شده است. این مدل تاکنون مورد استفاده بسیاری از محققان قرار گرفته است [۱۰، ۱۱، ۲۲، ۲۳].

۲-۲- مقدمه‌ای بر تئوری گراف

در یک گروه شامل N خودرو، رابطه بین خودروها را می‌توان با یک گراف مدل کرد که معرف توپولوژی شبکه می‌باشد. رئوس این گراف، خودروها و یال‌ها ارتباط بین خودروها هستند. یک گراف



شکل ۱: حرکت طولی یک گروه خودرو

² Adjacency matrix

³ Laplacian matrix

⁴ Full rank

¹ Lyapunov-Razumikhin

همچنین $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$ برای سیستم (۱۰)، فرض کنید تابع پیوسته و مشتق پذیر $f: C([- \beta, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ مجموعه محدود $C([- \beta, 0], \mathbb{R}^n)$ را به یک مجموعه محدود در $\mathbb{R}^n$ می نگارد. اگر یک تابع پیوسته $V(\mathbf{x}, t)$ وجود داشته باشد به نحوی که

$$\phi_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \phi_2(\|\mathbf{x}\|), t \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (۱۱)$$

و در ادامه اگر یک تابع غیر کاهشی $s > \phi(s)$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq -\phi_3(\|\mathbf{x}\|), \quad \text{if } V(t + \theta, \mathbf{x}(t + \theta)) < \phi(V(t, \mathbf{x}(t))), \theta \in [- \beta, 0] \quad (۱۲)$$

آنگاه مبدأ یک نقطه پایدار مجانبی برای سیستم (۱۰) خواهد بود.

لم ۱ [۲۶]: به ازای هر دو بردار (با ابعاد مناسب) $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ همچنین ماتریس مثبت معین Ψ نامساوی زیر موسوم به نامساوی یانگ^۱ برقرار است:

$$2\mathbf{a}^T \mathbf{b} \leq \mathbf{a}^T \Psi \mathbf{a} + \mathbf{b}^T \Psi^{-1} \mathbf{b} \quad (۱۳)$$

لم ۲ [۲۷]: ماتریس متقارن $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید که $\mathbf{A}$ معکوس پذیر است. آنگاه $\mathbf{M} \succ \mathbf{0}$ اگر و فقط اگر:

$$\mathbf{A} \succ \mathbf{0}, \mathbf{C} - \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \succ \mathbf{0} \quad (۱۴)$$

لم ۳ [۲۸]: اگر $\lambda_i, i = 1, \dots, v$ مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{v \times v}$ و $\mu_j, j = 1, \dots, w$ مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{w \times w}$ باشند، آنگاه ماتریس $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ دارای vw مقدار ویژه به فرم $\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_1 \mu_w, \lambda_2 \mu_1, \dots, \lambda_2 \mu_w, \dots, \lambda_v \mu_1, \dots, \lambda_v \mu_w$ خواهد بود.

قضیه ۲: سیستم سوئیچینگ تاخیر زمانی (۹) به ازای هر سوئیچ دلخواه پایدار مجانبی فراگیر است اگر به ازای هر سیگنال سوئیچینگ:

- ۱- خودروی راهنما برای کل دسته قابل دسترس باشد.
- ۲- یک ماتریس مثبت معین $\bar{\mathbf{P}}$ وجود داشته باشد که معادله زیر برقرار باشد:

$$\bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{H}}^\sigma + \bar{\mathbf{H}}^{\sigma T} \bar{\mathbf{P}} \succ \mathbf{0} \quad (۱۵)$$

$$\gamma \bar{\lambda} > \mu \quad \gamma = \min(\text{eig}(\mathbf{Z})); \bar{\lambda} = \min(\text{eig}(\bar{\mathbf{P}}));$$

$$\mu = \max(\text{eig}(\mathbf{W}))$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} -2\mathbf{I} + 2\bar{\mathbf{B}}_1^\sigma & -(D+1)\mathbf{I} + \bar{\mathbf{B}}_1^{\sigma T} + \bar{\mathbf{I}}_1 \\ -(D+1)\mathbf{I} + \bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{\mathbf{B}}_1^\sigma & -2\mathbf{I} + 2\bar{\mathbf{I}}_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \bar{\mathbf{P}} \otimes \begin{pmatrix} -D\mathbf{I} + \bar{\mathbf{B}}_1^{\sigma T} + \bar{\mathbf{H}}^\sigma \\ -\mathbf{I} + \bar{\mathbf{H}}^\sigma + \bar{\mathbf{I}}_1 \end{pmatrix} (\bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{H}}^\sigma + \bar{\mathbf{H}}^{\sigma T} \bar{\mathbf{P}})^{-1} \\ (-D\mathbf{I} + \bar{\mathbf{B}}_1^\sigma + \bar{\mathbf{H}}^{\sigma T} \quad -\mathbf{I} + \bar{\mathbf{H}}^{\sigma T} + \bar{\mathbf{I}}_1) \otimes \bar{\mathbf{P}}$$

طول خودرو و $D_{j-1,j}$ فاصله مطلوب بین دو خودروی متوالی است. با فرض سرعت ثابت برای خودروی راهنما خطای تعقیب و مشتق آن برای هر خودرو به صورت زیر بیان می گردد:

$$e_i = x_i - x_i^d \Rightarrow \dot{e}_i = \dot{x} - v_0 \Rightarrow \ddot{e}_i = \ddot{x}_i \quad (۶)$$

بنابراین ورودی کنترلی (۵) برحسب دینامیک خطا به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij}^\sigma k_{ij} [e_j(t - \xi) - e_i(t - \xi)] - b_i^\sigma k_i^l e_i(t - \xi) - b_i^\sigma \beta_i \dot{e}_i \quad (۷)$$

با جایگذاری (۷) در (۴) دینامیک حلقه بسته هر خودرو به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\tau_i \ddot{e}_i + \ddot{e}_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}^\sigma k_{ij} [e_j(t - \xi) - e_i(t - \xi)] - b_i^\sigma k_i^l e_i(t - \xi) - b_i^\sigma \beta_i \dot{e}_i \quad (۸)$$

با تعریف بردار خطا به صورت $\mathbf{e} = [e_1, \dots, e_n, \dot{e}_1, \dots, \dot{e}_n, \ddot{e}_1, \dots, \ddot{e}_n]^T$ دینامیک حلقه بسته دسته خودرو را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_1^\sigma \mathbf{e} + \mathbf{A}_2^\sigma \mathbf{e}(t - \xi) \quad (۹)$$

که در آن:

$$\mathbf{A}_1^\sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N \times N} & \mathbf{I}_N & \mathbf{0}_{N \times N} \\ \mathbf{0}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times N} & \mathbf{I}_N \\ \mathbf{0}_{N \times N} & -\bar{\mathbf{B}}_1^\sigma & -\bar{\mathbf{I}}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2^\sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times N} \\ \mathbf{0}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times N} \\ -\bar{\mathbf{H}}^\sigma & \mathbf{0}_{N \times N} & \mathbf{0}_{N \times N} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{H}}^\sigma = \bar{\mathbf{L}}^\sigma + \bar{\mathbf{B}}_2^\sigma$$

$$\bar{\mathbf{B}}_1^\sigma = \text{diag}\left(\frac{b_i^\sigma \beta_i}{\tau_i}\right), \bar{\mathbf{I}}_1 = \text{diag}\left(\frac{1}{\tau_i}\right),$$

$$\bar{\mathbf{B}}_2^\sigma = \text{diag}\left(\frac{b_i^\sigma k_i^l}{\tau_i}\right), \bar{\mathbf{L}} = [\bar{l}_{ij}], \bar{l}_{ij} = \frac{k_{ij} l_{ij}^\sigma}{\tau_i}$$

برای اثبات آنکه دسته خودرو تحت ورودی کنترلی (۵) و تحت هر سوئیچ دلخواه پایدار مجانبی است در ادامه قضایای ارائه می گردد. به منظور تحلیل پایداری سیستم سوئیچینگ تاخیر زمانی (۹) در ادامه روش-هایی نوین بر اساس قضایای لیپانوف-رازومیکین و لیپانوف-کراسوفسکی ارائه می گردد. در ابتدا قضیه لیپانوف-رازومیکین ارائه می-شود.

قضیه ۱ (لیپانوف-رازومیکین) [۲۵]: سیستم تاخیردار زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}_t) \\ \mathbf{x}(\theta) = \phi(\theta), \theta \in [- \beta, 0] \end{cases} \quad (۱۰)$$

$$\mathbf{x}_t(\theta) = \mathbf{x}(t + \theta), \forall \theta \in [- \beta, 0], f(0) = 0$$

توابع پیوسته، غیر منفی و غیر کاهشی ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 را در نظر بگیرید به نحوی که به ازای $s > 0$: $\phi_1(s) > 0, \phi_2(s) > 0, \phi_3(s) > 0$.

^۱ Young's inequality

$$\begin{pmatrix} -2\mathbf{I} + 2\bar{\mathbf{B}}_1^\sigma & -(D+1)\mathbf{I} + \bar{\mathbf{B}}_1^{\sigma T} + \bar{\mathbf{I}}_1 \\ -(D+1)\mathbf{I} + \bar{\mathbf{I}}_1 + \bar{\mathbf{B}}_1^\sigma & -2\mathbf{I} + 2\bar{\mathbf{I}}_1 \end{pmatrix} \otimes \bar{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{P}} \begin{pmatrix} -D\mathbf{I} + \bar{\mathbf{B}}_1^{\sigma T} + \bar{\mathbf{H}}^\sigma \\ -\mathbf{I} + \bar{\mathbf{H}}^\sigma + \bar{\mathbf{I}}_1 \end{pmatrix} (\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{H}}^\sigma + \bar{\mathbf{H}}^{\sigma T}\bar{\mathbf{P}})^{-1} \begin{pmatrix} -D\mathbf{I} + \bar{\mathbf{B}}_1^\sigma + \bar{\mathbf{H}}^{\sigma T} \\ -\mathbf{I} + \bar{\mathbf{H}}^{\sigma T} + \bar{\mathbf{I}}_1 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{P}} \succ 0 \quad (22)$$

با توجه به لم ۳ ماتریس $\mathbf{Q}$ مثبت معین است اگر:

$$\gamma\bar{\lambda} > \mu \quad (23)$$

حال اگر تاخیر زمانی رابطه $\xi_{\max} < \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{\lambda_{\max}(\bar{\mathbf{Q}}^k + 2q\mathbf{P})}$ را ارضا

کند آنگاه:

$$\dot{V} \leq -\eta \mathbf{e}^T \mathbf{e}, \quad \eta > 0 \quad (24)$$

بنابراین پایداری مجانبی سیستم سوئیچینگ خطی تاخیر زمانی (۹) تحت هر سوئیچ دلخواه تضمین می گردد.

در ادامه تحلیل قضیه ای نو بر اساس قضیه لیاپانوف-کراسوفسکی برای تحلیل سیستم (۹) ارائه می گردد.

قضیه ۳: سیستم سوئیچینگ خطی تاخیر زمانی (۹) تحت هر سوئیچ دلخواه پایدار مجانبی فراگیر است اگر:

۱- خودرو راهنما به ازای تمامی سیگنال های سوئیچینگ قابل دسترس سراسری باشد.

$$\gamma\bar{\lambda} > \mu - 2$$

۳- بتوان ماتریس هایی مانند $\mathbf{N}_{k3}, \mathbf{N}_{k2}, \mathbf{N}_{k1}, \mathbf{X}_k, \mathbf{S}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}$ پیدا کرد به نحوی که روابط (۲۵) تا (۲۷) برقرار باشند:

$$\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S} \succ 0 \quad (25)$$

$$\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11}^k & \mathbf{X}_{12}^k & \mathbf{X}_{13}^k \\ * & \mathbf{X}_{22}^k & \mathbf{X}_{23}^k \\ * & * & \mathbf{X}_{33}^k \end{bmatrix} \succ 0, \quad (26)$$

$$\mathbf{\Psi}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11}^k & \mathbf{X}_{12}^k & \mathbf{X}_{13}^k & \mathbf{N}_{k1} \\ * & \mathbf{X}_{22}^k & \mathbf{X}_{23}^k & \mathbf{N}_{k2} \\ * & * & \mathbf{X}_{33}^k & \mathbf{N}_{k3} \\ * & * & * & \mathbf{S} \end{bmatrix} \succ 0$$

$$\mathbf{\Phi}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_{11}^k & \mathbf{\Phi}_{12}^k & \mathbf{\Phi}_{13}^k \\ * & \mathbf{\Phi}_{22}^k & \mathbf{\Phi}_{23}^k \\ * & * & \mathbf{\Phi}_{33}^k \end{bmatrix} \prec 0 \quad (27)$$

که در آن:

$$\begin{cases} \mathbf{\Phi}_{11}^k = \mathbf{P}\mathbf{A}_1^{kT} + \mathbf{A}_1^{kT}\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{A}_1^{kT}(\mathbf{R} + \xi\mathbf{S})\mathbf{A}_1^k + \xi\mathbf{X}_{11}^k + \mathbf{N}_{k1} + \mathbf{N}_{k1}^T \\ \mathbf{\Phi}_{12}^k = \mathbf{P}\mathbf{A}_2^{kT} + \mathbf{A}_1^{kT}(\mathbf{R} + \xi\mathbf{S})\mathbf{A}_2^k + \xi\mathbf{X}_{12}^k - \mathbf{N}_{k1} + \mathbf{N}_{k2}^T \\ \mathbf{\Phi}_{13}^k = \xi\mathbf{X}_{13}^k + \mathbf{N}_{k3}^T \\ \mathbf{\Phi}_{22}^k = -\mathbf{Q} + \mathbf{A}_2^{kT}(\mathbf{R} + \xi\mathbf{S})\mathbf{A}_2^k + \xi\mathbf{X}_{22}^k - \mathbf{N}_{k2} - \mathbf{N}_{k2}^T \\ \mathbf{\Phi}_{23}^k = \xi\mathbf{X}_{23}^k - \mathbf{N}_{k3}^T \\ \mathbf{\Phi}_{33}^k = \xi\mathbf{X}_{33}^k - \mathbf{R} \end{cases}$$

اثبات: شرط آنکه معادله (۱۵) به ازای هر سیگنال سوئیچینگ جواب داشته باشد آن است که ماتریس $\bar{\mathbf{H}}^\sigma = \bar{\mathbf{L}}^\sigma + \bar{\mathbf{B}}_2^\sigma$ مثبت معین باشد. که لازمه این امر در دسترس بودن راس صفر برای کل گراف است. در ادامه اثبات، تابع لیاپانوف رازومین $V = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}$ را در نظر بگیرید که در آن:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} D\mathbf{I}_N & \mathbf{I}_N & \mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & D\mathbf{I}_N & \mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & \mathbf{I}_N & \mathbf{I}_N \end{pmatrix} \otimes \bar{\mathbf{P}}, D > 1 \quad (16)$$

با استفاده از رابطه نیوتن-لایبنیتز^۱

$$\mathbf{e}(t - \xi) = \mathbf{e}(t) - \int_{t-\xi}^t \dot{\mathbf{e}}(s) ds \quad (17)$$

و با توجه به آنکه $(\mathbf{A}_2^\sigma)^2 = \mathbf{0}$ می توان معادله (۹) را به شکل زیر نوشت:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{F}^\sigma \mathbf{e} - \int_{t-\xi}^0 \mathbf{A}_2^{\sigma(t)} \mathbf{A}_1^{\sigma(s)} \mathbf{e}(s) ds, \quad \mathbf{F}^\sigma = \mathbf{A}_1^\sigma + \mathbf{A}_2^\sigma \quad (18)$$

مشتق V در امتداد (۱۸) به صورت زیر خواهد بود:

$$\dot{V} = \mathbf{e}^T \left\{ \mathbf{P}(\mathbf{A}_1^{\sigma(t)} + \mathbf{A}_2^{\sigma(t)}) + (\mathbf{A}_1^{\sigma(t)} + \mathbf{A}_2^{\sigma(t)})^T \mathbf{P} \right\} \mathbf{e} + \quad (19)$$

$$+ \int_{t-\xi}^t -2\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{A}_2^{\sigma(t)} \left\{ \mathbf{A}_1^{\sigma(s)} \mathbf{e}(s) + \mathbf{A}_2^{\sigma(s)} \mathbf{e}(s - \xi) \right\} ds$$

با استفاده از نامساوی ینگ (لم ۱) و لحاظ $q > 1$ خواهیم داشت: $V(\mathbf{e}(t + \theta)) < qV(\mathbf{e}(t))$, $-\xi \leq \theta \leq 0$.

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \mathbf{e}^T \left\{ \mathbf{P}\mathbf{F}^\sigma + \mathbf{F}^{\sigma T}\mathbf{P} \right\} \mathbf{e} + 2q \int_{t-\xi}^t \mathbf{e}^T(s) \mathbf{P} \mathbf{e}(s) ds + \\ & + \mathbf{e}^T \left\{ \int_{t-\xi}^t (\mathbf{P}\mathbf{A}_2^{\sigma(t)} \mathbf{A}_1^{\sigma(s)} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_1^{\sigma(s)T} \mathbf{A}_2^{\sigma(t)T} \mathbf{P} + \right. \\ & \left. + \mathbf{P}\mathbf{A}_2^{\sigma(t)} \mathbf{A}_2^{\sigma(s)} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_2^{\sigma(s)T} \mathbf{A}_2^{\sigma(t)T} \mathbf{P}) ds \right\} \mathbf{e} \end{aligned} \quad (20)$$

حال فرض کنید در بازه $[-\xi, 0]$ زیر سیستم $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_i \mathbf{z}$ به اندازه α_i فعال باشد که $\sum_{i=1}^{ns} \alpha_i = 1, 0 \leq \alpha_i \leq 1$ بنابرین داریم:

$$\dot{V} \leq -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \xi_{\max} \mathbf{e}^T \left\{ \bar{\mathbf{Q}}^k + 2q\mathbf{P} \right\} \mathbf{e} \quad (21)$$

که در آن:

$$\bar{\mathbf{Q}}^k = \mathbf{P}\mathbf{A}_2^k \left\{ \sum_{i=1}^{n_i} \alpha_i (\mathbf{A}_1^i \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_1^{iT} + \mathbf{A}_2^i \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_2^{iT}) \right\} \mathbf{A}_2^{kT} \mathbf{P}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & \mathbf{Q}_{13} \\ * & \mathbf{Q}_{22} & \mathbf{Q}_{23} \\ * & * & \mathbf{Q}_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{11} = \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{H}}^T\bar{\mathbf{P}}, \mathbf{Q}_{12} = \bar{\mathbf{H}}^T\bar{\mathbf{P}} - D\bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{B}}_1^\sigma$$

$$\mathbf{Q}_{13} = \bar{\mathbf{H}}^T\bar{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{I}}_1, \mathbf{Q}_{22} = -2\bar{\mathbf{P}} + 2\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{B}}_1^\sigma$$

$$\mathbf{Q}_{23} = -(D+1)\bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{B}}_1^{\sigma T}\bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{I}}_1, \mathbf{Q}_{33} = -2\bar{\mathbf{P}} + 2\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{I}}_1$$

طبق لم ۲ ماتریس $\mathbf{Q}$ مثبت معین است اگر و فقط اگر $(\otimes)$ حاصلضرب کرائیکر:

¹ Newton-Leibnitz

ساختارهای مختلف رهبر-پیرو^۲، رهبر-پیشین پیرو^۳ و دوسویه^۴ در حال تغییر خواهد بود. در ادامه این بخش به استخراج شرایط لازم روی بهره-های کنترلی به منظور پایدار سازی رشته‌ای گروه خودرو پرداخته می-شود. با فرض فوق قانون کنترلی به صورت زیر است:

$$u_i = -k_{i,\sigma}^f(x_{i,\xi} - x_{i-1,\xi} + d_{i,i-1}) - k_{i,\sigma}^b(x_{i,\xi} - x_{i+1,\xi} + d_{i+1,i}) - k_{i,\sigma}^l(x_{i,\xi} - x_{0,\xi} + d_{i0}) - \beta_{i,\sigma}(\dot{x}_i - \dot{x}_0) \quad (35)$$

که در آن: $k_{i,\sigma}^f \in \{0, k_i^f\}$ که صفر متناظر با $a_{i,i-1} = 0$ و $k_{i,\sigma}^b$ متناظر با $a_{i,i-1} = 1$ می‌باشد. به طور مشابه $k_{i,\sigma}^l \in \{0, k_i^l\}$ و $\beta_{i,\sigma} \in \{0, \beta_i\}$ ، $k_{i,\sigma}^b \in \{0, k_i^b\}$ تعریف می-گردند. در روابط فوق k_i^f, k_i^b, k_i^l و β_i به ترتیب بهره‌های کنترلی موقعیت نسبی با خودروی جلو، موقعیت نسبی با خودروی عقب و موقعیت و سرعت نسبی با خودروی راهنما می‌باشند.

قضیه ۴: اگر پارامترهای کنترلی خودروهای دسته در روابط زیر صادق باشند آنگاه پایداری رشته‌ای دسته تحت عمل سوئیچ و تاخیر زمانی کراندار تضمین می‌گردد ($i = 1, \dots, N$):

$$k_{i,\sigma}^l \geq |k_{i,\sigma}^f - k_{i,\sigma}^b| \quad (36)$$

$$\beta_{i,\sigma}^2 - 2(k_{i,\sigma}^f + k_{i,\sigma}^b + k_{i,\sigma}^l)(1 + 2\xi\beta_{i,\sigma}) \geq 0 \quad (37)$$

$$1 - 2\tau_i\beta_{i,\sigma} - 2\xi\tau_i(k_{i,\sigma}^f + k_{i,\sigma}^b + k_{i,\sigma}^l) \geq 0 \quad (38)$$

اثبات: اگر رابطه زیر صادق باشد آنگاه دسته خودرو پایدار رشته‌ای خواهد بود [۲۳]:

$$\left| \frac{E_i(j\omega)}{E_{i-1}(j\omega)} \right| \leq 1, \omega > 0 \quad (39)$$

جایگذاری (۳۵) در رابطه (۴) و دو بار مشتق زمانی از رابطه حاصله، منجر به رابطه زیر می‌گردد:

$$\tau_i \ddot{a}_i + \ddot{a}_i = -k_{i,\sigma}^f(\ddot{x}_{i,\xi} - \ddot{x}_{i-1,\xi}) - k_{i,\sigma}^b(\ddot{x}_{i,\xi} - \ddot{x}_{i+1,\xi}) - k_{i,\sigma}^l \ddot{x}_{i,\xi} - \beta_{i,\sigma} \ddot{x}_i \quad (40)$$

تبدیل لاپلاس طرفین رابطه (۴۰) منجر به رابطه زیر خواهد شد:

$$E_i = \Gamma_{i-1}E_{i-1} + \Gamma_{i+1}E_{i+1} \\ \Gamma_{i-1} = \frac{k_{i,\sigma}^f e^{-\xi s}}{\tau_i s^3 + s^2 + \beta_{i,\sigma} s + (k_{i,\sigma}^f + k_{i,\sigma}^b + k_{i,\sigma}^l) e^{-\xi s}}, \quad (41) \\ \Gamma_{i+1} = \frac{k_{i,\sigma}^b e^{-\xi s}}{\tau_i s^3 + s^2 + \beta_{i,\sigma} s + (k_{i,\sigma}^f + k_{i,\sigma}^b + k_{i,\sigma}^l) e^{-\xi s}}$$

با انجام ساده‌سازی، رابطه (۴۱) به شکل زیر درخواهد آمد:

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{\Gamma_{i-1}}{1 - \Gamma_{i+1} \frac{E_{i+1}}{E_i}} \quad (42)$$

اثبات. موارد ۱ و ۲ مشابه قضیه قبل قابل اثبات است. شرط لازم برای پایداری سیستم (۹)، پایداری آن در حالت بدون تاخیر زمانی است. مشابه روال اثبات قضیه قبل، پایداری سیستم (۹) بدون تاخیر زمانی منجر به ارضای شرایط ۱ و ۲ می‌گردد. در ادامه اثبات تابع لیاپانوف مشترک زیر را در نظر بگیرید:

$$V = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \int_{t-\xi}^t \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} ds + \int_{t-\xi}^t \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{R} \dot{\mathbf{e}} ds + \int_{-\xi}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{S} \dot{\mathbf{e}} ds d\theta \quad (28)$$

که مشتق آن به صورت زیر است:

$$\dot{V} = 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - \mathbf{e}^T(t-\xi) \mathbf{Q} \mathbf{e}(t-\xi) + \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{R} \dot{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{e}}^T(t-\xi) \mathbf{R} \dot{\mathbf{e}}(t-\xi) + \xi \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{S} \dot{\mathbf{e}} - \int_{-\xi}^0 \dot{\mathbf{e}}^T(t+\theta) \mathbf{S} \dot{\mathbf{e}}(t+\theta) d\theta \quad (29)$$

با جایگذاری از (۹) داریم:

$$\dot{V} = \mathbf{e}^T \mathbf{P} [\mathbf{A}_1^k \mathbf{e} + \mathbf{A}_2^k \mathbf{e}(t-\xi)] + [\mathbf{A}_1^k \mathbf{e} + \mathbf{A}_2^k \mathbf{e}(t-\xi)]^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - \mathbf{e}^T(t-\xi) \mathbf{Q} \mathbf{e}(t-\xi) + [\mathbf{A}_1^k \mathbf{e} + \mathbf{A}_2^k \mathbf{e}(t-\xi)]^T (\mathbf{R} + \xi \mathbf{S}) [\mathbf{A}_1^k \mathbf{e} + \mathbf{A}_2^k \mathbf{e}(t-\xi)] - \mathbf{e}^T(t-\xi) \mathbf{R} \dot{\mathbf{e}}(t-\xi) - \int_{-\xi}^0 \dot{\mathbf{e}}^T(t+\theta) \mathbf{S} \dot{\mathbf{e}}(t+\theta) d\theta \quad (30)$$

روابط زیر بدیهی هستند:

$$\mathbf{e} - \mathbf{e}(t-\xi) - \int_{-\xi}^0 \dot{\mathbf{e}}(t+\theta) d\theta = 0 \quad (31)$$

$$(\mathbf{e}^T \mathbf{N}_1 + \mathbf{e}^T(t-\xi) \mathbf{N}_{k2} + \dot{\mathbf{e}}^T(t-\xi) \mathbf{N}_{k3}) (\mathbf{e} - \mathbf{e}(t-\xi) - \int_{-\xi}^0 \dot{\mathbf{e}}(t+\theta) d\theta) = 0 \quad (32)$$

$$\xi \dot{\mathbf{e}}_1^T \mathbf{X} \dot{\mathbf{e}}_1 - \int_{-\xi}^0 \dot{\mathbf{e}}_1^T \mathbf{X} \dot{\mathbf{e}}_1 d\theta = 0 \quad (33)$$

که در آن: $\dot{\mathbf{e}}_1 = [\mathbf{e}^T, \mathbf{e}^T(t-\xi), \dot{\mathbf{e}}^T(t-\xi)]^T$. حال با افزودن روابط (۳۱) تا (۳۳) به (۳۰) و ساده‌سازی، رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\dot{V} = \delta_1^T \Phi \delta_1 - \int_{-\xi}^0 \delta_2^T \Psi \delta_2 d\theta \quad (34)$$

که در آن: $\delta_2 = [\mathbf{e}^T, \mathbf{e}^T(t-\xi), \dot{\mathbf{e}}^T(t-\xi), \dot{\mathbf{e}}^T(t+\theta)]^T$. حال با توجه به رابطه فوق اگر $\Phi < 0$ و $\Psi > 0$ آنگاه $\dot{V} \leq 0$ و پایداری مجانبی سیستم سوئیچینگ خطی تاخیر زمانی (۹) تحت هر سوئیچ دلخواه تضمین می‌گردد.

۴- پایداری رشته‌ای

به منظور بررسی پایداری رشته‌ای باید ساختار ارتباطی مشخص گردد. در این مقاله ساختار ارتباطی گروه خودرو به صورت دوسویه-رهبر پیرو^۱ در نظر گرفته می‌شود. بنابراین ساختار شبکه ارتباطی بین

² Leader follower (LF)

³ Leader predecessor follower (LPF)

⁴ Bi-directional (BD)

¹ Bi-directional leader follower (BDLF)

باجایگذاری در دینامیک آخرین خودرو، مشتق زمانی از طرفین و تبدیل لاپلاس رابطه زیر حاصل می‌گردد:

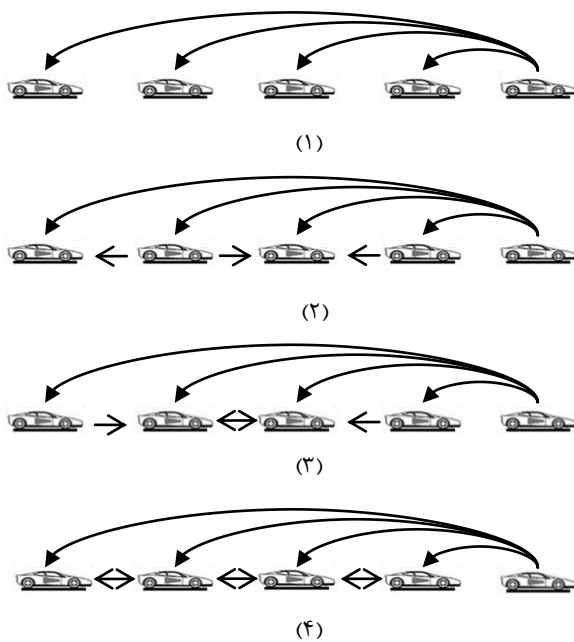
$$\Gamma_{N-1} = \frac{k_{N,\sigma} e^{-\xi s}}{\tau_i s^3 + s^2 + \beta_{N,\sigma} s + (k_{N,\sigma} + k_{N,\sigma}^l) e^{-\xi s}} \quad (47)$$

حال اگر روابط (۳۷) و (۳۸) برقرار باشند آنگاه $\left| \frac{E_N}{E_{N-1}} \right| \leq 1$

توجه: همانطور که قضایای ۲ و ۳ بیان می‌کنند، دسته خودرو تحت هر سوئیچ دلخواه می‌تواند پایدار داخلی باشد اگر خودرو راهنما در دسترس سراسری باشد. اما طبق قضیه ۴ در دسترس سراسری بودن خودرو راهنما به تنهایی پایداری رشته‌ای را تحت عمل سوئیچینگ تضمین نمی‌کند. بلکه اگر اطلاعات سرعت خودروی راهنما در دسترس باشد پایداری رشته‌ای تضمین می‌گردد.

۵- نتایج شبیه‌سازی

مطابق شکل ۲ یک دسته شامل ۵ خودرو در نظر گرفته شده است.



شکل ۲: ساختار سوئیچینگ در یک دسته خودرو

نتایج شبیه‌سازی برای چهار سناریوی مختلف ارائه شده‌اند. در تمام شبیه‌سازی‌ها طول خودرو راهنما برابر ۴ متر و فاصله مطلوب بین خودرویی ۲ متر لحاظ شده است.

طبق رابطه (۴۲) اگر شرایط $|\Gamma_{i+1}| \leq 0.5, |\Gamma_{i-1}| \leq 0.5$ و

$\left| \frac{E_N}{E_{N-1}} \right| \leq 1$ برقرار باشند آنگاه $\left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \leq 1$ در ادامه روند اثبات

در نظر بگیرید: $|\Gamma_{i-1}| = \sqrt{\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow q_{i-1} - 4p_{i-1} \geq 0$ که

معادل عبارت زیر است:

$$(k_{i,\sigma}^f + k_{i,\sigma}^b + k_{i,\sigma}^l)^2 - 4(k_{i,\sigma}^f)^2 + \beta_{i,\sigma}^2 \omega^2 + (1 - 2\tau_i \beta_{i,\sigma}) \omega^4 + \tau_i^2 \omega^6 - 2\omega^2 (k_{i,\sigma}^f + k_{i,\sigma}^b + k_{i,\sigma}^l) \cos \xi \omega + 2\omega (k_{i,\sigma}^f + k_{i,\sigma}^b + k_{i,\sigma}^l) (\tau_i \omega^2 - \beta_{i,\sigma}) \sin \xi \omega \geq 0 \quad (43)$$

برای تحلیل رابطه (۴۳) با توجه به علامت عبارت $\tau_i \omega^2 - \beta_{i,\sigma}$ دو حالت زیر ممکن است:

الف- $\tau_i \omega^2 > \beta_{i,\sigma}$ و ب- $\tau_i \omega^2 < \beta_{i,\sigma}$. در حالت الف با لحاظ $-\cos \xi \omega \geq -1$ و $\sin \xi \omega \geq -\xi \omega$ (و $\xi \omega > 0$) در حالت ب با لحاظ $-\cos \xi \omega \geq -1$ و $-\sin \xi \omega \geq -\xi \omega$ رابطه (۴۳) به صورت زیر درخواهد آمد:

$$(k_{i,\sigma}^f + k_{i,\sigma}^b + k_{i,\sigma}^l)^2 - 4(k_{i,\sigma}^f)^2 + (\beta_{i,\sigma}^2 - 2(k_{i,\sigma}^f + k_{i,\sigma}^b + k_{i,\sigma}^l) \pm 2\xi(k_{i,\sigma}^f + k_{i,\sigma}^b + k_{i,\sigma}^l)\beta_{i,\sigma}) \omega^2 + (1 - 2\tau_i \beta_{i,\sigma} \pm 2\xi \tau_i (k_{i,\sigma}^f + k_{i,\sigma}^b + k_{i,\sigma}^l)) \omega^4 + \tau_i^2 \omega^6 \geq 0 \quad (44)$$

که علامت منفی برای حالت الف و علامت مثبت برای حالت ب می‌باشد.

با انجام محاسبات مشابه برای

$$|\Gamma_{i+1}| = \sqrt{\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow q_{i+1} - 4p_{i+1} \geq 0$$

خواهند شد:

$$(k_{i,\sigma}^f + k_{i,\sigma}^b + k_{i,\sigma}^l)^2 - 4(k_{i,\sigma}^b)^2 + (\beta_{i,\sigma}^2 - 2(k_{i,\sigma}^f + k_{i,\sigma}^b + k_{i,\sigma}^l) \pm 2\xi(k_{i,\sigma}^f + k_{i,\sigma}^b + k_{i,\sigma}^l)\beta_{i,\sigma}) \omega^2 + (1 - 2\tau_i \beta_{i,\sigma} \pm 2\xi \tau_i (k_{i,\sigma}^f + k_{i,\sigma}^b + k_{i,\sigma}^l)) \omega^4 + \tau_i^2 \omega^6 \geq 0 \quad (45)$$

دو معادله اخیر چند جمله‌ای‌هایی از توان‌های زوج ω هستند. بنابراین اگر ضرایب این دو معادله مثبت باشند هر دو نامساوی برقرار خواهند بود. حال اگر روابط (۳۶) تا (۳۸) برقرار باشند معادلات (۴۴) و (۴۵) نیز

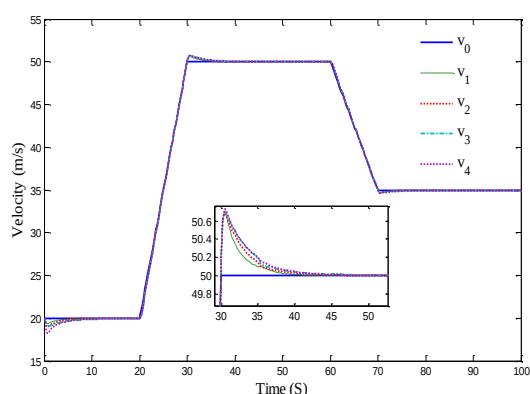
برقرار خواهند بود. گام آخر، یافتن شرایط برقراری می‌باشد.

با در نظر گرفتن قانون کنترلی زیر برای خودروی آخر:

$$u_N = -k_{N,\sigma}^f (x_{N,\xi} - x_{N-1,\xi} + d_{N,N-1}) - k_{N,\sigma}^l (x_{N,\xi} - x_{0,\xi} + d_{10}) - \beta_{N,\sigma} (\dot{x}_N - \dot{x}_0) \quad (46)$$

جدول ۱: پارامترهای کنترلی در سناریوهای مختلف $\tau, \beta, k^l, k^b, k^f$

سناریو	خودرو ۱	خودرو ۲	خودرو ۳	خودرو ۴
۱	0.1, 4.1, 0.0, 0.7, 1.8	0.1, 4.2, 1.1, 0.6, 1.4	0.1, 4.0, 0.9, 0.8, 1.3	0.1, 3.8, 1.0, 1.7
۲	0.1, 4.1, 0.0, 0.7, 1.8	0.1, 4.2, 1.1, 0.6, 1.4	0.1, 4.0, 0.9, 0.8, 1.3	0.1, 3.8, 1.0, 1.7
۳	0.1, 3.5, 4.1, 0.7, 1.8	0.15, 2.8, 2.9, 0.7, .5, 0.8	0.12, 3.1, 3.0, 0.6, 0.5, 0.8	0.12, 4.5, 2.7, 0.5, 0.8
۴	0.1, 0.04, 0.0, 0.7, 2.8	0.1, 0.4, 1.5, 0.75, 2	0.1, 0.4, 1.2, 0.9, 3	0.1, 0.4, 1.0, 2.7



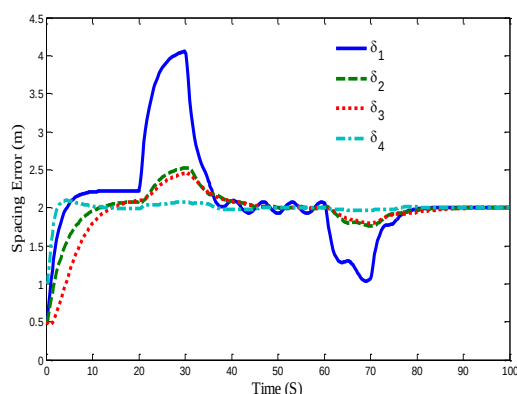
شکل ۴: خطای تعقیب سرعت برای سناریو ۱

سناریو ۲: در این سناریو پایداری رشته‌ای مجموعه در برابر اغتشاش اعمالی به خودرو راهنما مورد بررسی قرار می‌گیرد. یک سیگنال اغتشاش

$$d = \begin{cases} 0.4, & t \leq 30 \\ 0.3\sin(t), & 30 < t \leq 70 \\ e^{-0.1t} \sin t, & t > 70 \end{cases}$$

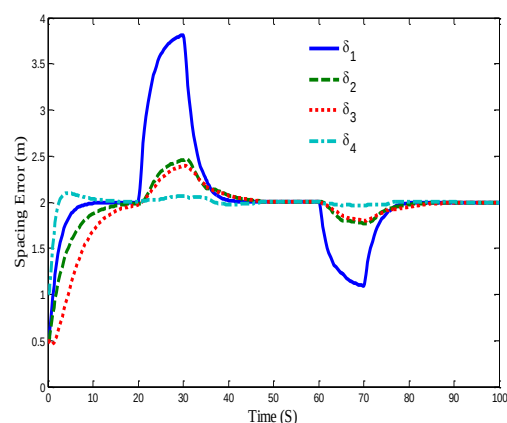
به صورت

می‌گردد. در این سناریو تاخیر زمانی به صورت رابطه $\delta_i(t) = 0.11|\sin(2t)|$ در نظر گرفته می‌شود. شکل ۵ خطای تعقیب سیستم را نشان می‌دهد. مطابق این شکل با وجود اغتشاش اعمالی به سیستم، پایداری رشته‌ای سیستم حفظ می‌گردد. شکل ۶ خطای تعقیب سرعت گروه را نشان می‌دهد.

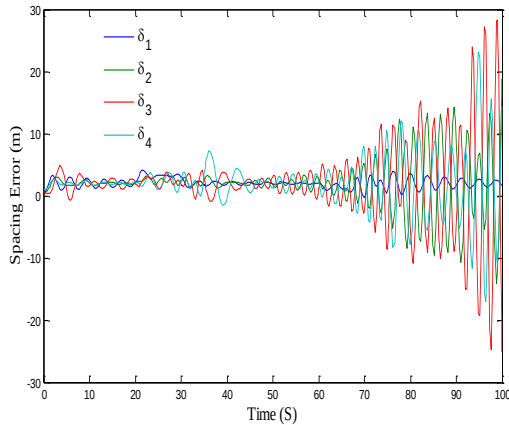


شکل ۵: خطای تعقیب موقعیت برای سناریو ۲

سناریو ۱: شکل ۳ نتایج شبیه‌سازی برای سناریوی ۱ را نشان می‌دهد. در این سناریو تمامی خودروهای دسته یکسان در نظر گرفته شده‌اند. طول تمامی خودروها در این سناریو برابر ۴ متر در نظر گرفته می‌شود. همچنین تاخیر زمانی ارتباطی در این سناریو برای کلیه خودروها مقدار $|\sin(t)| = 0.1$ در نظر گرفته شده است. همانطور که از این شکل پیداست با وجود تاخیر زمانی و سوئیچ بین زیر سیستم‌ها، کلیه خودروها به فاصله مطلوب ۲ متر از یکدیگر می‌رسند و سرعت خودروهای دسته با سرعت خودروی راهنما برابر می‌گردد. جدول ۱ پارامترهای کنترلی $\tau, \beta, k^l, k^b, k^f$ استفاده شده در سناریوهای مختلف را نشان می‌دهد. در کلیه شبیه‌سازی‌ها خطای تعقیب به صورت $\delta_i = x_i - x_{i-1} - L_{i-1}$ تعریف می‌شود. شکل ۳ خطای تعقیب گروه خودرو را برای سناریو ۱ نشان می‌دهد. مطابق این شکل دامنه خطا در طول دسته کاهش می‌یابد که نشان دهنده پایداری رشته‌ای مجموعه می‌باشد.



شکل ۳: خطای تعقیب موقعیت برای سناریو ۱



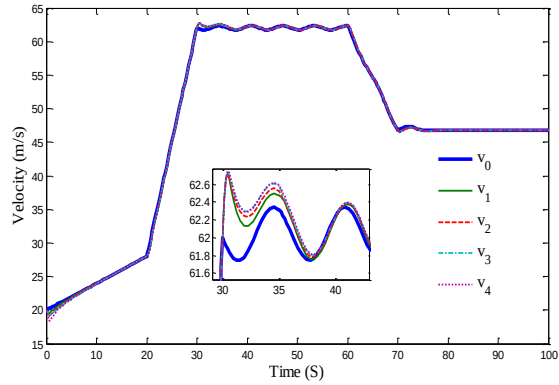
شکل ۹: ناپایداری رشته‌ای و داخلی سیستم در سناریو ۴

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله به کنترل مقاوم یک دسته خودرو در برابر تاخیر زمانی و تغییر توپولوژی ارتباطی پرداخته شد. یک مدل مرتبه ۳ که صحت آن توسط کارهای عملی گذشته تایید شده است جهت مدل‌سازی دسته خودرو مورد استفاده قرار گرفت. استراتژی فاصله ثابت بین خودرویی برای حرکت دسته در نظر گرفته شد و برای نیل به این هدف یک کنترلر خطی برای سیستم طراحی گردید. با استفاده از دو روش لیاپانوف-کراسوفسکی و لیاپانوف-رازومیکین دو رهیافت جداگانه به منظور یافتن تابع لیاپانوف مشترک برای اثبات پایداری دسته در لحظات سوئیچ ارائه گردیدند. در ادامه به استخراج شرایط لازم برای پایداری رشته‌ای سیستم در شرایط عادی و در لحظات سوئیچ پرداخته شد و نشان داده شد که اگر شرایط مزبور رعایت گردند پایداری رشته‌ای سیستم همچون پایداری داخلی آن در لحظات سوئیچ تضمین می‌گردد. در انتها با ارائه شبیه‌سازی‌های متعدد به بررسی کیفیت روش ارائه شده در حالات مختلف پرداخته شد.

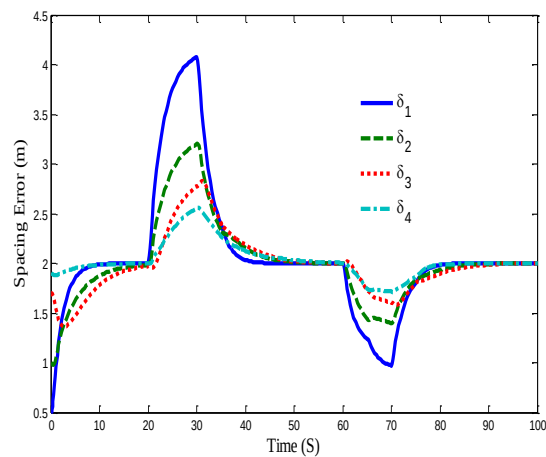
مراجع

- [1] P. Varaiya, "Smart cars on smart roads: problems of control", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 38, no. 2, pp. 195-207, 2000.
- [2] D. Swaroop, J. K. Hedrick, "Constant spacing strategies for platooning in automated highway systems," Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 121, no. 3, pp. 462-470, 1999.
- [3] A. Yahiaoui, "Using optimal control for safe analysis of vehicles in a platoon of automated highway systems," Summer Computer Simulation Conference, pp. 467-472, 2004.
- [4] R. Bishop, "Whatever happened to automated highway systems (AHS) traffic technology

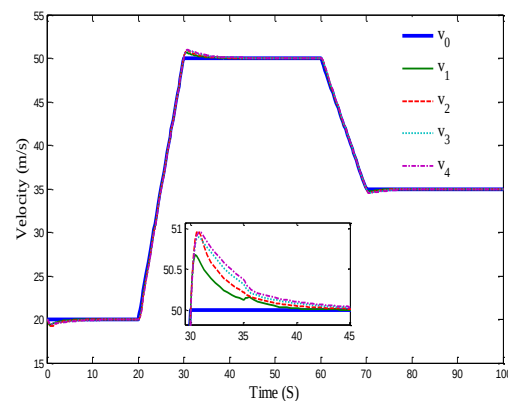


شکل ۶: خطای تعقیب سرعت برای سناریو ۲

سناریو ۳: در این سناریو خودروهای گروه متفاوت در نظر گرفته می‌شوند. جدول ۱ پارامترهای استفاده شده در این سناریو را نشان می‌دهد. طول و ثابت موتور برای هر خودرو متفاوت فرض می‌شوند. شکل ۷ خطای تعقیب موقعیت را نشان می‌دهد. مطابق این شکل سیستم پایدار رشته‌ای است. شکل ۸ خطای تعقیب سرعت را نشان می‌دهد. تاخیر زمانی در این سناریو مشابه سناریو قبل در نظر گرفته شده است.



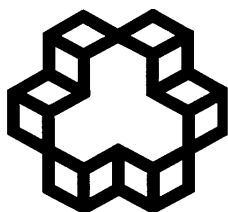
شکل ۷: خطای تعقیب موقعیت برای سناریو ۳



شکل ۸: خطای تعقیب سرعت برای سناریو ۳

سناریو ۴: در این سناریو پارامترهای کنترلی به گونه‌ای تنظیم می‌شوند تا پایداری رشته‌ای سیستم ارضا نشود. شکل ۹ ناپایداری داخلی و ناپایداری رشته‌ای سیستم را نشان می‌دهد.

- in strict feedback form with unknown time delay,” IMA Journal of Mathematical Control And Information, vol. 32, pp. 761–779, 2015.
- [17] S. Eben, F. Gao, D. Cao, and K. Li, “Multiple-model switching control of vehicle longitudinal dynamics for platoon-level automation”, IEEE Transaction on Intelligent Transportation, vol. 65, no. 6, pp. 4480-4492, 2016.
- [18] Y. Zheng, S. Eben, K. Li, and L. Wang, “Stability margin improvement of vehicular platoon considering undirected topology and asymmetric control,” IEEE Transaction on Control Systems Technology, vol. 24, no. 4, pp. 1253-1266, 2016.
- [19] G. Guo and S. Wen, “Communication scheduling and control of a platoon of vehicles in VANETs,” IEEE Transaction of Intelligent Transportation Systems, vol. 7, no. 1, pp. 14-21, 2016.
- [20] J. Kwon and D. Chwa, “Adaptive bidirectional platoon control using a coupled sliding mode control method,” IEEE Transaction of Intelligent Transportation Systems, vol. 15, no. 5, pp. 2040-2049, 2014.
- [21] X. Guo, J. Wang, F. Liao and R. Teo, “Distributed adaptive integrated-sliding-mode controller synthesis for string stability of vehicle platoons,” IEEE Transaction of Intelligent Transportation Systems, vol. 17, no. 9, pp. 2419-2432, 2016.
- [22] Y. Zheng, S. Eben, J. Wang, D. Cao, “Stability and scalability of homogeneous vehicular platoon: study on the influence of information flow topologies,” IEEE Transaction of Intelligent Transportation Systems, vol. 7, no. 1, pp. 14-21, 2016.
- [23] R. Kianfar, P. Falcone, J. Frekricson, “A control matching model predictive control approach to string stable vehicle platooning,” Control Engineering Practice, vol. 45, pp. 163-172, 2015.
- [24] C. Godsil, G. Royle, Algebraic Graph Theory, New York: Springer, 2004.
- [25] K. Gu, V. Kharitonov, J. Chen, Stability of Time-Delay Systems, Birkhauser, 2003.
- [26] J. Hu, “On robust consensus of multi-agent systems with communication delays,” Kybernetika, vol. 45, no. 5, pp. 768-784, 2009.
- [27] B. Gallier, The Schur Complement and Symmetric Positive Semi-definite (and Definite) Matrices, December 10, 2010.
- [28] A. J. Laub, “Matrix Analysis for Scientists and Engineers,” SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, vol.3, pp. 213-219, 2004.
- international”, IFAC Control Conference, pp. 135-142, 2001.
- [5] V. L. Bageshwar, W. L. Garrard and R. Rajamani, “Model predictive control of transitional maneuvers for adaptive cruise control vehicles,” IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 53, no. 5, pp. 1573-1585, 2004.
- [6] W. B. Dunbar and D. S. Caveney, “Distributed receding horizon control of vehicle platoons: stability and string stability,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 57, no. 3, pp. 620-633, 2012.
- [7] A. Ghasemi, R. Kazemi, S. Azadi, “Stability analysis of longitudinal control of a platoon of vehicles by considering lags subject to communication delay”, International Journal of Innovative Computing, Information and Control, vol. 6, pp. 134-142, 2015.
- [8] A. A. Peters, R. H. Middleton and O. Mason, “Leader tracking homogeneous platoons with broadcast delays,” Automatica, vol. 50, pp. 64-74, 2014.
- [9] M. Bernardo, A. Salvi and S. Santini, “Distributed consensus strategy for platooning of vehicles in the presence of time-varying heterogeneous communication delay,” IEEE Transaction on Intelligent Transportation System, vol. 16, no. 1, pp. 102-112, 2015.
- [10] A. Alan, G. Garcia, P. Martinet, “The flatbed platoon towing model for safe and dense platooning on highways,” IEEE Transportation Systems Magazine, vol. 3, pp. 58-68, 2015.
- [11] A. Ghasemi, R. Kazemi, S. Azadi, “Stable decentralized control of platoon of vehicles with heterogeneous information feedback,” IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 62, no. 7, pp. 4299-4308, 2013.
- [12] F. Lin, M. Fardad, R. Mihailo, “Optimal control of vehicular formations with nearest neighbor interaction,” IEEE Transaction On Automatic Control, vol. 57, no. 9, pp. 2203-2209, 2012.
- [13] S. Sheikholeslam, C. A. Desoer, “Longitudinal control of a platoon of vehicles III: Nonlinear model,” PATH, Res. Rep. UCB-ITS-PRR-90-1, pp. 19-26, 1990.
- [14] G. Naus, R. Vugts, J. Ploeg, R. Molengraft and M. Steinbuch, “String-stable cacc design and experimental validation: A frequency-domain approach,” IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 59, pp. 4268 – 4279, 2010.
- [15] D. Liberzon, Switching in Systems and Control, Birkhauser, 2003.
- [16] H. Chehardoli and M. Eghtesad, “Robust adaptive control of switched nonlinear systems



Industrial Control Center of Excellence
K.N. Toosi University of Technology

Journal of Control (ISSN 2008-8345)



A Joint Publication of the Iranian Society of Instrument and Control Engineers and the Industrial Control Center of Excellence of K.N. Toosi University of Technology, Vol. 10, No. 3, Fall 2016.

Publisher: Iranian Society of Instrumentation and Control Engineers

Managing Director: Prof. Iraj Goodarznia

Editor-in-Chief: Prof. Ali Khaki-Sedigh

Tel: 84062317

Email: sedigh@kntu.ac.ir

Assistant Editor: Prof. Hamid Khaloozadeh, Dr. Alireza Fatehi, Dr. Mahdi Aliyari Shoorehdeli

Executive Director: Dr. Mahdi Aliyari Shoorehdeli, Tel: 84062403, Email: aliyari@kntu.ac.ir

Editorial Board:

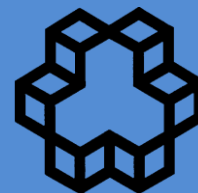
Prof. A. Khaki-Sedigh, Prof. I. Goodarznia, Prof. H. Khaloozadeh, Prof. P. Jabedar-Maralani, Prof. A. Ghafari, Dr. H.R. Momeni (Associate Prof), Prof. S.K. Nikraves, Prof. M. Shafiee, Prof. B. Moshiri.

Advisory Board:

Dr. H.R. Momeni, Prof. B. Moshiri, Prof. M. Shafiee, Prof. A. Khaki-Sedigh, Prof. P. Jabedar-Maralani, Prof. A. Ghaffari, Prof. H. Khaloozadeh, Prof. H.R. Taghirad, Dr. K. Masroori, Dr. M.T. Bathaei, Dr. M.T. Hamidi-Beheshti, Dr. F. Jafarkazemi, Dr. R. Amjadifard, Prof. S.A. Moosavian, Prof. M. Teshnelab, Prof. M. Haeri, Prof. S.A. Safavi, Prof. H. Seyfi, Dr. A. Fatehi, Prof. M.R. Akbarzadeh- Toutounchi, Prof. M. Golkar, Prof. N. Pariz, Dr. M. Javadi, Dr. J. Heirani-Nobari, Prof. F. Hossein- Babaei, Dr. B. Moaveni, Dr. M. Aliyari Sh., Dr. M. Arvan, Prof. M. Tavakoli-Bina, Dr. F. Farivar, Dr. M. Ayati, Dr. M. Mansouri, Dr. R. Havangi, Dr. A. Ramezani, Dr. A. Ghasemi, Prof. M. Farrokhi, Dr. Y. Batmani.

Site Manager: Nasibeh Farahani

Page Editor: Kiyan Khaloozadeh



**A Joint Publication of the Iranian Society of Instrument and Control Engineers and
the Industrial Control Center of Excellence of K.N. Toosi University of Technology**

Vol. 10, No. 3, Fall 2016

Contents

- | | |
|---|-----------|
| Permanent Magnet Synchronous Motor Sensor Fault Compensation via Fault Tolerant Sliding Mode Controller | 1 |
| Seyed Moosa Ayati, Hamidreza Nikbakht | |
| Design of Radome Compensator in Guidance Loop Using Frequency Response Shaping | 13 |
| Mahdi Khosravi Samani, Mohammad Javad Moafi Madani, Mahdi Nikusokhan, Iman Mohammadzaman | |
| Design of Robust Control Law for Stabilization of Singular Systems with Time-Varying Delay in The Presence of Model Uncertainty and Input Amplitude Constraint | 25 |
| Maryamsadat Asadina, Tahereh Binazadeh | |
| Model Predictive Controller Based on Steady-State Value of Control Signal, Analytically Tuning and Closed-Loop Studies | 39 |
| Peyman Bagheri | |
| Domain of Attraction Estimation of Second Order Polynomial System using Rational Lyapunov Function | 53 |
| Farhad Esmaili, Ali Vahidian Kamyad, Naser Pariz, Mohamad Reza Jahed Motlagh | |
| Robust Control of a Platoon of Vehicles with Communication Time Delay and Switched Interaction Topology | 61 |
| Hossein Chehardoli, Mohammadreza Homaeinezhad | |