I S I C E

مجله کنترل

ISSN 2008-8345

نشریه علمی- پژوهشی

انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران- دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

جلد ۴، شماره ۳، پاییز ۱۳۸۹

فهرست مقالات

www.isice.ir

مجله کنترل

(ISSN 2008-8345)

نشریه علمی- پژوهشی، انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران- دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی،

جلد ۴، شماره ۳، پاییز ۱۳۸۹

پست الکترونیکی: control@isice.ir

صاحب امتیاز: انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران

مدیر مسئول: پروفسور ایرج گودرزنیا

سردبیر: پروفسور علی خاکی صدیق- تلفن: ۸۴۰۶۲۳۱۷- پست الکترونیکی: sedigh@kntu.ac.ir

آدرس محل کار: خیابان دکتر شریعتی، پل سیدخندان، دانشکده برق دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

سمت: استاد دانشگاه

شورای سردبیری: پروفسور علی خاکی صدیق، دکتر حمید خالوزاده، دکتر علیرضا فاتحی

دبیر اجرایی: دکتر حمید خالوزاده

تهران، خیابان انقلاب، میدان فردوسی، خیابان عباس موسوی (فرصت)، پلاک ۷۱، طبقه دوم، اتاق ۲۴۱

صندوق پستی: ۳۵۹۵-۱۵۸۱۵ تلفن: ۸۸۸۱۳۰۰۲ فاکس: ۸۸۳۲۴۹۷۹

www.isice.ir

به نام خدا

در یازدهمین جشنواره تجلیل از پژوهشگران و فناوران برتر که در تاریخ هفتم دی ماه ۱۳۸۹ برگزار گردید، مجله کنترل به عنوان نشریه علمی برتر در زمینه فنی و مهندسی معرفی شد. خداوند علیم و حکیم را برای دست یابی به این رتبه علمی باوجود تعداد زیادی مجله ی علمی و پژوهشی در حوزه فنی و مهندسی در داخل کشور، شکر گزاریم.

بدون شک این عنایت خداوندی در سایه تلاش و کوشش تمام دست اندرکاران مجله میسر شده است. لذا بجا است که از تمام پژوهشگران حوزه ی مهندسی کنترل که با ارسال مقالات پربار به مجله و تمام داورانی که با دقت و حوصله فراوان در مدت زمان مقرر پاسخ های داوری را ارسال می نمایند و همچنین از تمام مسولان اجرایی مجله، هیأت تحریریه و هیأت مشاوران، انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق و معاونت پژوهشی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی جهت حمایت های بی دریغ از مجله تشکر نمایم. امید است که در آینده نیز با عنایات خداوند سبحان شاهد حضور موفق تر مجله در صحنه ی علمی کشور باشیم و بتوانیم وظیفه خویش را در پیشبرد اهداف علمی میهن اسلامی به نحو احسن ادامه دهیم.

با آرزوی توفیق الهی

علی خاکی صدیق - سردبیر مجله کنترل

هو الحکیم

سال همت مضاعف و کار مضاعف ۱۳۸۹

ستاد ملی هفته پژوهش و فناوری

یازدهمین جشنواره تجلیل از پژوهشگران و فناوران برتر کشور

مجله کنترل

صاحب امتیاز: انجمن مهندسان کنترل و ابزار دقیق ایران

مدیر مسئول: پروفسور ایرج گودرزنیا

سردبیر: پروفسور علی خاکی صدیق

شورای سردبیری: پروفسور علی خاکی صدیق، دکتر حمید خالوزاده، دکتر علیرضا فاتحی

دبیر اجرایی: دکتر حمید خالوزاده

هیأت تحریریه:

پروفسور علی خاکی صدیق - پروفسور ایرج گودرزنیا- دکتر حمید خالوزاده - پروفسور پرویز جبه دار مارالانی - پروفسور علی غفاری - دکتر حمیدرضا مومنی - پروفسور سید کمال الدین نیکروش - پروفسور مسعود شفیعی - پروفسور بهزاد مشیری

هیأت مشاوران:

دکتر حمیدرضا مومنی، پروفسور بهزاد مشیری، پروفسور مسعود شفیعی، پروفسور علی خاکی صدیق، پروفسور پرویز جبه دار مارالانی، پروفسور علی غفاری،

دکتر حمید خالوزاده، ، دکتر حمیدرضا تقی راد، دکتر کیوان مسروری، دکتر محمدتقی بطحایی، دکتر محمدتقی بهشتی، دکتر فرزاد جعفرکاظمی، دکتر رویا

امجدی فرد، دکتر سید علی اکبر موسویان، دکتر محمد تشنه لب، پروفسور محمد حایری، دکتر سید علی اکبر صفوی، پروفسور حسین سیفی، دکتر احد

کاظمی، دکتر علیرضا فاتحی، دکتر محمدرضا اکبرزاده توتونچی، دکتر مسعود علی اکبر گلکار، دکتر ناصر پریز، دکتر مهرداد جوادی، دکتر جعفر حیرانی

نوبری، پروفسور فرامرز حسین بابایی، دکتر بیژن معاونی، دکتر مهدی علیاری شوره دلی، دکتر محمد عاروان، دکتر محمد توکلی بینا.

نشریات علمی برتر

هوالحکیم

ستاد ملی هفته پژوهش و فناوری

سال همت مضاعف و کار مضاعف ۱۳۸۹

یازدهمین جشنواره تجلیل از پژوهشگران و فناوران برتر کشور

نشریات علمی برگزیده		
عنوان	**صاحب امتیاز**	**گروه تخصصی**
مطالعات ملی	مؤسسه مطالعات ملی	علوم انسانی
معماری و شهرسازی (هنرهای‌زیبا سابق)	دانشگاه تهران	هنر
حفاظت گیاهان	دانشگاه فردوسی مشهد	کشاورزی
کنترل	انجمن کنترل و مهندسان ابزار دقیق	فنی و مهندسی
فیزیک زمین و فضا	موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران	علوم پایه

یاریگران این شماره

- شرکت پتروشیمی امیر کبیر
- شرکت پلیمر آریاساسول
- شرکت پتروشیمی لاله
- شرکت جابون
- شرکت پردیس
- شرکت سپهر انرژی
- شرکت فریم کو
- شرکت مهندسی سنس

به نام خدا

فهرست مقالات

مجله کنترل، مجله ای علمی – پژوهشی است که در برگیرنده تازه ترین نتایج تحقیقات نظری و کاربردی در علوم مختلف مرتبط با مهندسی کنترل و ابزار دقیق میباشد. مقالات ارسالی به مجله کنترل می بایست به زبان فارسی و دارای چکیده انگلیسی باشند. از میان مباحث مورد نظر این مجله میتوان به موارد زیر اشاره نمود:

۱) مدلسازی، شناسایی، شبیه سازی و بهینه سازی سیستمها.
۲) تحلیل و طراحی سیستم های کنترل پیشرفته همچون سیستم های کنترل خطی و غیرخطی، سیستمهای کنترل تطبیقی، کنترل مقاوم و کنترل بهینه، سیستمهای کنترل هوشمند، سیستمهای کنترل تصادفی، سیستمهای کنترل گسسته پیشامد و ترکیبی، سیستمهای ابعاد وسیع.
۳) مکاترونیک و رباتیک.
۴) ابزار دقیق و سیستمهای ترکیب داده و اطلاعات سنسوری.
۵) اتوماسیون صنعتی همچون سیستمهای کنترل گسترده، رابط انسان – ماشین، سیستمهای ایمنی و تشخیص خطا، سیستمهای زمان حقیقی و سیستمهای کنترل سوپروایزری.

کاربردهای مورد علاقه این مجله، وسیع بوده و می تواند در برگیرنده موارد زیر با شد:

۱) سیستمهای هدایت و ناوبری.
۲) فرآیندهای صنعتی شامل فرآیندهای شیمیایی و بیوتکنولوژی.
۳) فرآیندهای استخراج و فراوری موارد معدنی.
۴) سیستمهای حمل و نقل و خودروهای خودکار.
۵) تولید و توزیع نیروی برق.
۶) مهندسی محیط زیست و هواشناسی.
۷) مهندسی تکنولوژی تولید.
۸) سیستمهای اقتصادی و مالی.
۹) سیستمهای اطلاعاتی، مخابراتی و شبکه های صنعتی.
۱۰) مهندسی پزشکی.
۱۱) سیستمهای آموزش هوشمند.

از کلیه پژوهشگران و کارشناسان فعال در زمینه های مرتبط با مهندسی کنترل و ابزار دقیق دعوت بعمل می آید تا مقالات و نتایج آخرین دستاوردهای علمی و پژوهشی خود را به این مجله ارسال نمایند. خواهشمند است مقالات خود را به صورت الکترونیکی به آدرس control@isice.ir ارسال فرمایید. برای کسب اطلاعات بیشتر و دریافت نحوه تهیه و ارسال مقالات می توانید به سایت مجله با آدرس www.isice.ir مراجعه نمایید.

شیوه تدوین

متن مقالات شامل چکیده، بدنه مقاله، مراجع و زیرنویسها باید با فونت ۱۲ B Zar و با فاصله double میان خطوط، در صفحات A4 یک ستونی و تحت نرم‌افزار Word تهیه گردد.

آدرس نویسندگان

آدرس پستی کامل همه نویسندگان همراه با شماره تلفن و دورنگار(فکس) و نشانی پیام‌نگار(email) نویسنده عهده‌دار مکاتبات در برگه مستقلی چاپ و به همراه مقاله ارسال گردد.

چکیده

هر مقاله باید شامل، عنوان (فارسی و انگلیسی)، چکیده (فارسی و انگلیسی) مقاله در حداکثر ۲۰۰ واژه، کلیدواژه (فارسی و انگلیسی) در حداکثر ۵ واژه باشد.

تصاویر و عکسها

در هنگام ارسال مقاله جهت داوری نیازی به ارسال اصل تصاویر و عکسها نمی‌باشد، ولی رونوشت ارسالی باید واضح باشد. پس از تایید مقاله، ارسال اصل تصاویر و عکسها جهت چاپ مقاله ضروری می‌باشد.

مراجع

به کلیه مراجع باید در متن ارجاع داده شده باشد. مراجع باید با شماره مشخص گردند و جزئیات آنها به شرح زیر در پایان مقاله به ترتیب حروف الفبای نویسندگان ظاهر گردد:

مقالات: [شماره مرجع] نام خانوادگی و علامت اختصاری اول نام، سال انتشار یا تاریخ برگزاری، "عنوان مقاله"، *نام کامل نشریه یا کنفرانس*، شماره مجله یا شماره جلد، شماره صفحات.

کتابها: [شماره مرجع] نام خانوادگی و نام کامل همه نویسندگان، *عنوان کتاب*، نام مترجم (در صورت وجود)، نام کامل ناشر، سال انتشار.

واحدها: کلیه مقالات باید از واحد استاندارد SI (متریک) در تمام بخشهای مقاله استفاده نمایند. در کنار واحد SI می‌توان از واحد انگلیسی در داخل پرانتز نیز استفاده نمود.

طول مقالات

حداکثر حجم مقالات در هنگام چاپ ۱۵ صفحه می‌باشد که معادل حدود ۷۵۰۰ واژه می‌باشد. برای چاپ صفحات بیشتر و یا رنگی لازم است هزینه‌ای معادل ۲۵۰,۰۰۰ ریال (۲۵ دلار آمریکا) برای هر صفحه به حساب مجله واریز گردد.

فرایند ارسال مقاله

مقالات قابل چاپ در مجله شامل مقالات کامل پژوهشی، مقالات کوتاه و یادداشتهای پژوهشی می باشد. مقالات ارسالی نباید در هیچ مجله داخلی و یا خارجی چاپ شده باشد و یا در حال داوری باشد.

- لازم است نسخه الکترونیکی مقاله به شکل pdf و word جهت داوری به نشانی مجله control@isice.ir ارسال شود.
- مقالات جهت داوری به داوران متخصص ارسال میگردد. در پایان تایید یا رد هر مقاله توسط هیئت تحریریه مجله انجام خواهد پذیرفت. سردبیر مجله نتیجه داوری را برای نویسنده عهده‌دار مکاتبات ارسال خواهد نمود.
- در صورتی که نیاز به تصحیح مقاله باشد، تصحیحات باید منحصرا محدود به موارد ذکر شده باشد. در سایر موارد نویسنده لازم است سردبیر را در جریان هر گونه تغییر و یا تصحیح دیگری قرار دهد. در هر صورت مسئولیت صحت و سقم مطالب بر عهده نویسنده خواهد بود.
- در صورتی که مقاله جهت چاپ پذیرفته شود، یک نسخه از مجله همراه با ۵ نسخه از مقاله به هر یک از نویسندگان اهدا خواهد گردید.

حق کپی: در صورت تایید مقاله، نویسندگان لازم است فرم انتقال حق انتشار آن به "انجمن مهندسان کنترل و ابزاردقیق ایران" را تکمیل و به همراه اصل مقاله ارسال نماید. نویسندگان لازم است موافقت کتبی دارندگان حق کپی بخشهایی از مقاله که از مراجع و منابع دیگر نسخه‌برداری شده است را دریافت و به دفتر مجله ارسال نمایند.

بدینوسیله از کلیه اساتید، پژوهشگران و کارشناسان مهندسی کنترل و ابزاردقیق جهت ارائه مقالات خود در این نشریه دعوت به عمل می‌آورد. خواهشمند است مقالات خود را به صورت الکترونیکی به آدرس: control@isice.ir ارسال فرمایید. برای کسب اطلاعات بیشتر میتوانید به سایت: http://www.isice.ir مراجعه نمایید.

مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۴، شماره ۳، پاییز ۱۳۸۹، صفحه ۱۴-۱

بهبود عملکرد کنترلگر چندمنظوره H_2/H_∞ با استفاده از استراتژی کلیدزنی با سرپرستی و تضمین پایداری بر مبنای تابع لیاپانوف مشترک

فاطمه جمشیدی[۱]، محمد تقی حمیدی بهشتی[۲]

[۱] دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه تربیت مدرس، fjamshidi@modares.ac.ir

[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، دانشگاه تربیت مدرس، mbehesht@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۹/۶/۵، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۹/۸/۱۲)

چکیده: طراحی کنترل کننده برای سیستم‌های پیچیده شامل بهینه سازی اهداف مختلف و اغلب مغایر می‌باشد که به یک مساله طراحی چندمنظوره می‌انجامد. از آنجا که با استفاده از یک کنترل کننده نمی‌توان تمام اهداف را به طور بهینه برآورده نمود، در این مقاله، از رویکرد کلیدزنی با سرپرستی برای حل مساله کنترل چندمنظوره H_2/H_∞ استفاده شده است. با استفاده از نامساوی‌های ماتریسی خطی، دو کنترل کننده مجزا برای تامین اهداف عملکردی H_2 و H_∞ طراحی گردیده است. برای ماتریس تبدیل هر کنترل کننده نمایش فضای حالت به گونه‌ای یافت شده که برای هر سیگنال کلیدزنی سیستم حلقه بسته پایدار مطلق باقی بماند. سرپرست کلیدزنی ورودی‌های خارجیِ نویز، اغتشاش و ورودی مرجع را تشخیص داده و کنترل کننده مربوط به آن را در حلقه قرار می‌دهد. رویکرد متداول کنترل چندمنظوره H_2/H_∞، طراحی کنترل کننده واحدی است که اهداف عملکردی H_2 و H_∞ را برآورده می‌سازد. نتایج شبیه سازی نشان می‌دهد که در مقایسه با کنترل کننده چندمنظوره H_2/H_∞ متداول، استراتژی کلیدزنی محافظه کاری را کاهش داده و عملکرد کنترل کننده را به طور قابل ملاحظه-ای بهبود بخشیده است.

کلمات کلیدی: پایداری، تحقق فضای حالت، سرپرست تشخیص ورودی خارجی، کنترلگر کلیدزنی باسرپرستی H_2/H_∞، نامساوی‌های ماتریسی خطی.

Improving the H_2/H_∞ Control Performance Using Supervisory Based Switching

Fatemeh Jamshidi, Mohammad Taghi Hamidi Beheshti

Abstract: In this paper, a supervisory based switching strategy is employed to solve the H_2/H_∞ multi objective controller design. Using linear matrix inequalities, two distinict controllers are designed to meet the H_2 and H_∞ performance specifications. A state realization for each controller transfer matrix is found such that the asymptotical stability of the closed-loop switching system is guaranteed for any switching sequence. A supervisor is used to diagnose the exogenous input changes and switch to the relevant controller. Simulation results show that switching strategy improves the performance of the controller and reduces the conservation in comparison with the common H_2/H_∞ controller.

Keywords: Linear Matrix inequality, Realization Theory, Stability Theory, Supervisor, Switching H_2/H_∞ control.

۱- مقدمه

در مسایل واقعی مهندسی کنترل، اغلب لازم است نیازهای مغایری همانند حذف انواع مختلف اغتشاش، تعقیب ورودی مرجع، محدودیت روی بیشینه سیگنال‌ها و مقاوم بودن در برابر شرایط متغیر و عدم قطعیت‌های سیستم، برآورده گردد که به مسایل سنتز چندمنظوره که چندین عملکرد را همزمان تامین می‌کنند، منجر می‌شود. به طور کلی مسائل کنترل چندمنظوره همچنان به صورت مسائل باز باقی مانده‌اند.

روش متداول حل مسایل کنترل چندمنظوره، یافتن یک کنترل کننده برای همه اهداف طراحی و یکسان در نظر گرفتن ماتریس‌های لیاپانوفِ به کار رفته برای مشخصه‌های مختلف طراحی است. اگرچه تامین همه اهداف یک مساله طراحی مطلوب است، اما طراحی یک تک کنترل کننده چندمنظوره مستلزم برقراری مصالحه میان اهداف رقابتی همچون حذف نویز، تعقیب، تنظیم و محدودیت روی سیگنالهاست. از این رو استفاده از یک تک کنترل کننده، محدود کننده و محافظه کارانه می‌باشد [۱، ۲ و ۳].

کنترل H_2/H_∞ یک روش کارآمد در کنترل مقاوم است و به طراحی کنترلگری می‌پردازد که عملکرد H_2 سیستم را کمینه می‌کند در حالی که عملکرد H_∞ معینی را تضمین می‌نماید [۱].

امروزه کنترل کلیدزنی به دلیل قابلیت آن در غلبه بر محدودیت-های کنترل تطبیقی و کنترل سیستم‌هایی که با یک تک کنترل کننده نمی‌توانند به عملکرد مطلوب دست‌یابند، بسیار مورد توجه قرار گرفته است. طرح کنترل کلیدزنی، مکانیزم موثری در مقابله با عدم قطعیت-های مدلسازی و سیستم‌هایِ با پیچیدگی زیاد فراهم می‌آورد. حتی برای سیستم‌های خطی غیر متغیر با زمان نیز کنترل کننده کلیدزنی برای بهبود عملکرد به کار رفته است [۴، ۵ و ۶]. پایه و اساس تئوری کنترل کننده-های هایبرید توسط Hespanha ،Morse و Liberzon بنا شده است [۷، ۸ و ۹]. در [۱۰] برای پایدارسازی یک سیستم پیوسته از فیدبک خروجی کلیدزنی استفاده شده است و پاسخ کنترل کننده کلیدزنی و دو کنترل کننده LTI دیگر با هم مقایسه گردیده است. در [۱۱] به طور عملی از کنترل کننده کلیدزنی برای غلبه بر محدودیت‌های دامنه کنترل و حالت استفاده شده است. کنترل مقاوم چندمنظورهٔ یک موتور القایی با مشخصات تعقیب و حذف اغتشاش از طریق کلیدزنی در [۱۲] پیشنهاد گردیده است. کلیدزنی میان کنترل کننده‌ها برای بهبود مصالحه در اهداف طراحی در [۱۳، ۱۴ و ۱۵] نیز به کار رفته است.

در این مقاله مساله کنترل سیستم‌های پیچیده با استفاده از کنترل کننده کلیدزنی با سرپرستی بررسی گردیده است. هدف، استفاده از کنترل کننده کلیدزنیِ با سرپرستی برای کاهش محافظه کاری در طراحی کنترل کننده و بهبود عملکرد آن می‌باشد. از این رو مفهوم کنترل کننده چندگانه به کار رفته و از سرپرست برای تنظیم کلیدزنی میان کنترل کننده‌ها در جهت بهبود عملکرد حلقه بسته استفاده شده است. با به کارگیری کلیدزنی میان کنترل کننده‌هایِ از پیش طراحی شده که هر کدام یکی از مشخصات H_2 و H_∞ را برآورده می‌سازند، رفتار مطلوب بدست آمده است. کلیدزنی توسط یک سیستم بالادستی تحت عنوان «سرپرست» سازماندهی می‌شود که وقوع ورودی‌هایِ خارجی مختلف را تشخیص داده و کنترل کننده مربوطه را در حلقه قرار می‌دهد. در اغلب مسایل مهندسی، محدودیت‌های سیگنال کلیدزنی از قبل شناخته شده نیست. از این رو کلیدزنی به طور دلخواه در نظر گرفته شده است. در این مقاله برای تضمین پایداری سیستم کلیدزنی تحت هر دنباله کلیدزنی دلخواه تحقق کنترل کننده‌ها بر اساس پارامتریزاسیونِ یولا آنها که در [۱۶ و ۱۷] بیان شده، انتخاب گردیده است.

ساختار این مقاله به شرح زیر است. در بخش ۲، تعریف مساله و نحوه محاسبهٔ تابع تبدیلِ کنترلگرهایِ H_2 و H_∞، ارائه شده است. در بخش ۳، مسالهٔ طراحی کنترل کننده کلیدزنیِ پایدار به طور دقیق بررسی و چگونگی انتخاب تحقق فضای حالت کنترل کننده‌ها بیان گردیده است. چگونگی تشخیص وقوع ورودی‌های خارجیِ نویز، اغتشاش و ورودی مرجع توسط سرپرستِ کلیدزنی در بخش ۴ توصیف شده است. در بخش ۵، نحوهٔ ارزیابیِ عملکردِ H_2 و H_∞ سیستم کلیدزنی ارائه گردیده است. در بخش بعد روش پیشنهادی به یک مثال اعمال و نتایج با کنترل کننده چندمنظوره H_2/H_∞ متداول مقایسه شده است که کارآمدی روش پیشنهادی را نشان می‌دهد. نتیجه گیری از مباحث مطرح شده و ارائه پیشنهادات بخش انتهایی مقاله را تشکیل می-دهد.

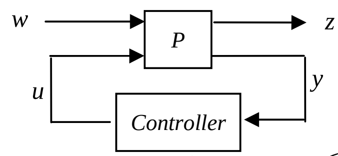
۲- بیان مساله

سیستم LTI با بعد محدود P، به شکل زیر در نظر گرفته شده است:

$$P:\begin{cases}\dot{x} = Ax + B_u u_C + B_w w \\ z = C_z x + D_{zu} u_C + D_{zw} w \\ y = C_y x + D_{yw} w\end{cases} \qquad (1)$$

که $x \in R^{n_x}$، متغیر حالت، $w \in R^{n_w}$، ورودی خارجی (نویز، اغتشاش و ورودی مرجع)، $u_C \in R^{n_u}$، ورودی کنترل، $z \in R^{n_z}$، خروجی کنترل شونده و $y \in R^{n_y}$، خروجی اندازه-

گیری شده است. فرضیات لازم برای کنترل H_2 و H_∞ صادق می‌باشد [۲]. شکل ۱، دیاگرامِ استانداردِ سیستمِ کنترل شدهٔ حلقه بسته برای طراحی کنترل کننده‌های H_2 و H_∞ را نمایش می‌دهد.



شکل ۱: دیاگرام استاندارد سیستم کنترل شدهٔ حلقه بسته برای طراحی کنترل کننده‌های H_2 و H_∞

نمایش فضای حالت کنترلگر و سیستم حلقه بسته به ترتیب به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dot{x}_C = F x_C + G y \\ u_C = H x_C + J y \end{cases} \qquad (۲)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{cl} = A_{cl} x_{cl} + B_{cl} w \\ z = C_{cl} x_{cl} + D_{cl} w \end{cases} \qquad (۳)$$

که

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} A + B_u J C_y & B_u H & B_w + B_u J D_{yw} \\ G C_y & F & G D_{yw} \\ \hline C_z + D_{zu} J C_y & D_{zu} H & D_{zw} + D_{zu} J D_{yw} \end{array}\right)$$

و $T_i(s) = L_i T(s) R_i$ تابع تبدیل از ورودی خارجی $w_i = R_i^{-1} w$ به خروجی کنترل شده $z_i = L_i z$ (که برای بیان اهداف عملکردی مختلف به کار می‌رود) است [۲]. تحقق فضای حالت $T_i(s)$ به صورت $\left(\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_i \\ \hline C_i & D_i \end{array}\right)$ است که در آن

$B_i = \begin{pmatrix} B_{w_i} + B_u J D_{yw_i} \\ G D_{yw_i} \end{pmatrix}$، $B_{w_i} = B_w R_i$،

$C_i = \begin{pmatrix} C_{z_i} + D_{z_i u} J C_y & D_{z_i u} H \end{pmatrix}$، $C_{z_i} = L_i C_z$،

$D_i = D_{z_i w_i} + D_{z_i u} J D_{yw_i}$، $D_{z_i w_i} = L_i D_{zw} R_i$،

$D_{z_i u} = L_i D_{zu}$، $D_{yw_i} = D_{yw} R_i$.

معیار عملکرد استاندارد H_2/H_∞ مورد نظر می‌باشد. به منظور بیان مساله به فرم نامساوی خطی ماتریسی (LMI) ماتریس لیاپانوف P_i، $i \in I = \{H_2, H_\infty\}$ به صورت زیر افراز بندی شده است

$$P_i = \begin{bmatrix} Y_i & N_i \\ N_i^T & * \end{bmatrix}, P_i^{-1} = \begin{bmatrix} X_i & M_i \\ M_i^T & * \end{bmatrix} \qquad (۴)$$

X_i, Y_i, M_i, N_i باید در رابطه (۴) صدق کنند، از این رو M_i, N_i به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که:

$$M_i N_i^T = I - X_i Y_i \qquad (۵)$$

شرط پایداری سیستم حلقه بسته توسط کنترل کننده طراحی شده، $P_i > 0$، به شکل $\begin{bmatrix} X_i & I \\ I & Y_i \end{bmatrix} > 0$ در می‌آید [۲].

متغیرهای طراحی، F_i, G_i, H_i, J_i، (تحقق فضای حالت کنترل کننده) با استفاده از رابطه (۶) به $\hat{F}_i, \hat{G}_i, \hat{H}_i, \hat{J}_i$ تغییر می‌کنند:

$$\begin{aligned} \hat{F}_i &= N_i F_i M_i^T + N_i G_i C_y X_i + \\ &\quad + Y_i B_u H_i M_i^T + Y_i \left(A + B_u J_i C_y\right) X_i \\ \hat{G}_i &:= N_i G_i + Y_i B_u J_i \\ \hat{H}_i &:= H_i M_i^T + J_i C_y X_i \\ \hat{J}_i &:= J_i \end{aligned} \qquad (۶)$$

لم ۲-۱.(طراحی کنترل کننده H_∞) [۲]: سیستم حلقه بسته (۳) پایدار بوده و به حد نرم-∞ از پیش تعیین شده ($\left\|T_{w_{H_\infty} \to z_{H_\infty}}\right\|_\infty < \gamma$) $\gamma > 0$ دست می‌یابد، اگر و تنها اگر ماتریس‌های $X_{H_\infty}, Y_{H_\infty}$، $\hat{F}_{H_\infty}, \hat{G}_{H_\infty}, \hat{H}_{H_\infty}, \hat{J}_{H_\infty}$ وجود داشته باشند که در LMI های زیر صدق نمایند ($i = H_\infty$):

$$\begin{bmatrix} X_{H_\infty} & I \\ I & Y_{H_\infty} \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} L_{11} & * & * & * \\ L_{21} & L_{22} & * & * \\ L_{31} & L_{32} & -\gamma I & * \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \qquad (۷)$$

که

$$\begin{aligned} L_{11} &= A X_{H_\infty} + B_u \hat{H}_{H_\infty} + \left(A X_{H_\infty} + B_u \hat{H}_{H_\infty}\right)^T \\ L_{21} &= \hat{F}_{H_\infty} + \left(A + B_u \hat{J}_{H_\infty} C_y\right)^T \\ L_{22} &= Y_{H_\infty} A + \hat{G}_{H_\infty} C_y + \left(Y_{H_\infty} A + \hat{G}_{H_\infty} C_y\right)^T \\ L_{31} &= \left(B_{w_i} + B_u \hat{J}_{H_\infty} D_{yw_i}\right)^T \\ L_{32} &= \left(Y_{H_\infty} B_{w_i} + \hat{G}_{H_\infty} D_{yw_i}\right)^T \\ L_{41} &= C_{z_i} X_{H_\infty} + D_{z_i u} \hat{H}_{H_\infty} \\ L_{42} &= C_{z_i} + D_{z_i u} \hat{J}_{H_\infty} C_y \\ L_{43} &= D_{z_i w_i} + D_{z_i u} \hat{J}_{H_\infty} D_{yw_i} \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه (۶)، تحقق فضای حالت کنترل کننده ای که سیستم حلقه بسته را پایدار می‌سازد و عملکرد مطلوب را تامین می‌نماید، به ازای $i = H_\infty$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} J_i &:= \hat{J}_i \\ H_i &:= \left(\hat{H}_i - J_i C_y X_i\right) M_i^{-T} \\ G_i &:= N_i^{-1} \left(\hat{G}_i - Y_i B_u J_i\right) \end{aligned}$$

$$F_i = N_i^{-1}\left(\hat{F}_i - N_i G_i C_y X_i - Y_i B_u H_i M_i^T - Y_i\left(A + B_u J_i C_y\right) X_i\right) M_i^{-T} \quad (۸)$$

تابع تبدیل کنترل کننده به صورت زیر برای $i = H_\infty$ محاسبه می‌گردد:

$$K_i(s) = H_i\left(sI - F_i\right)^{-1} G_i + J_i \quad (۹)$$

لم ۲-۲.(طراحی کنترل کننده H_2) [۲]: سیستم حلقه بسته (۳) پایدار بوده و به حد نرم-۲ از پیش تعیین شده ($\left\|T_{w_{H_2}\to z_{H_2}}\right\|_2 < \nu$) $\nu > 0$ دست می‌یابد، اگر و تنها اگر ماتریس‌های X_{H_2}, Y_{H_2}, Z، $\hat{F}_{H_2}, \hat{G}_{H_2}, \hat{H}_{H_2}, \hat{J}_{H_2}$ وجود داشته باشند که در LMI های زیر صدق نمایند ($i = H_2$):

$$\begin{bmatrix} X_{H_2} & I \\ I & Y_{H_2} \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} L_{11} & * & * \\ L_{21} & L_{22} & * \\ L_{31} & L_{32} & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} X_{H_2} & * & * \\ I & Y_{H_2} & * \\ C_{z_i} X_{H_2} + D_{z_i u}\hat{H}_{H_2} & C_{z_i} + D_{z_i u}\hat{J}_{H_2} C_y & Z \end{bmatrix} > 0$$

$$D_{z_i w_i} + D_{z_i u}\hat{J}_{H_2} D_{y w_i} = 0, \quad trace(Z) < \nu \quad (۱۰)$$

که

$$L_{11} = A X_{H_2} + B_u \hat{H}_{H_2} + \left(A X_{H_2} + B_u \hat{H}_{H_2}\right)^T$$

$$L_{21} = \hat{F}_{H_2} + \left(A + B_u \hat{J}_{H_2} C_y\right)^T$$

$$L_{22} = Y_{H_2} A + \hat{G}_{H_2} C_y + \left(Y_{H_2} A + \hat{G}_{H_2} C_y\right)^T$$

$$L_{31} = \left(B_{w_i} + B_u \hat{J}_{H_2} D_{y w_i}\right)^T$$

$$L_{32} = \left(Y_{H_2} B_{w_i} + \hat{G}_{H_2} D_{y w_i}\right)^T$$

نمایش فضای حالت و تابع تبدیل کنترل کننده از رابطه (۸) و (۹) به ازای $i = H_2$ بدست می‌آید. در همه نامساوی‌های بالا * نماینده بلوک‌های متقارن است.

در روش متداول طراحی کنترل کننده چندمنظوره H_2/H_∞، حد نرم-۲، ν، کمینه می‌گردد در حالی‌که LMIهای (۷) و (۱۰) همزمان صادقند. برای این منظور کنترل کننده‌ها و ماتریس‌های لیاپانوفِ LMI-های (۷) و (۱۰) یکسان در نظر گرفته می‌شوند، یعنی:

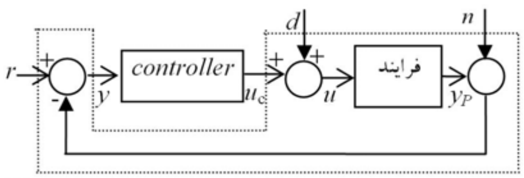
$$\hat{F}_{H_2} = \hat{F}_{H_\infty}, \hat{G}_{H_2} = \hat{G}_{H_\infty}, \hat{H}_{H_2} = \hat{H}_{H_\infty}$$

$$\hat{J}_{H_2} = \hat{J}_{H_\infty}, X_{H_2} = X_{H_\infty}, Y_{H_2} = Y_{H_\infty}$$

۳- طراحی کنترل کننده کلیدزنی پایدارساز

پیکربندی سیستم حلقه بسته در شکل ۲ نشان داده شده که در آن، y_P، خروجی فرآیند، r، ورودی مرجع (نقطه تنظیم) محدود، d، ورودی اغتشاش نامعلوم و محدود و n، نویز اندازه‌گیری نامعلوم و محدود است. برای تطبیق ساختار حلقه بسته شکل ۲ با بلوک دیاگرام شکل ۱، خط چین در شکل ۲، به عنوان P در شکل ۱ در نظر گرفته می‌شود و ورودی‌های خارجی در شکل ۲، w در شکل ۱ را می‌سازند: $w = \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}$. $H_P(s)$ تابع تبدیل اکیدا مناسب و $\{A_P, B_P, C_P\}$ تحقق فضای حالت فرایند LTI مورد بررسی است:

$$\dot{x}_P = A_P x_P + B_P u, \; y_P = C_P x_P$$



شکل ۲: پیکربندی حلقه بسته

کنترل کننده چندگانه که میان توابع تبدیلِ کنترل کننده‌های پایدارساز طراحی شدهٔ بخش ۲، $K_{H_2}(s), K_{H_\infty}(s)$، به طور موثری کلیدزنی می‌کند، یک سیستم دینامیکی با دو ورودی σ و y و یک خروجی u_C است. ورودی تکه‌ای ثابت $\sigma : [0,\infty) \to \mathrm{I}$ سیگنال کلیدزنی خوانده می‌شود. زمانی که σ مقدار ثابت $i \in I$ دارد، کنترل کننده چندگانه همانند یک سیستم LTI با تابع تبدیل $K_i(s)$ از y به u_C و تحقق فضای حالت

$$\dot{x}_C = F_i x_C + G_i y; \; u_C = H_i x_C + J_i y \quad (۱۱)$$

رفتار می‌نماید. لحظاتی که نقاط ناپیوستگی σ رخ می‌دهد، لحظات کلیدزنی خوانده می‌شود. اگر t_1 و t_2 دو لحظه کلیدزنی متوالی باشد، σ روی بازه زمانی $t \in [t_1 \quad t_2)$ ثابت است.

روی هر بازه زمانی که σ مقدار ثابت i دارد، فرایند با کنترل کننده K_i کنترل شده و زیرسیستم دینامیکی حلقه بسته به شکل زیر است:

$$\dot{x} = A_i x + B_i w, \; y_P = Cx \quad (۱۲)$$

که $x := \begin{bmatrix} x_P \\ x_C \end{bmatrix}$، $w := \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}$ و

$$C := \begin{bmatrix} C_P & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} B_P J_i & B_P & -B_P J_i \\ G_i & 0 & -G_i \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} A_P - B_P J_i C_P & B_P H_i \\ -G_i C_P & F_i \end{bmatrix} \qquad (۱۳)$$

از آنجا که سیستم حلقه بسته با هر یک از کنترل کننده‌ها پایدار مجانبی است بنابراین قسمت حقیقی مقدار ویژه‌های ماتریس A_i منفی است و داریم $Q_i A_i + A_i^T < 0$.

با فرض اینکه در لحظه کلیدزنیِ t مقدار بردار حالت کنترل کننده، x_C، ثابت نباشد، در لحظه کلیدزنیِ t، مقدار x_C با نگاشت بازنشانی خطی، $R_C\left(\sigma(t), \sigma(t^-)\right)$ به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$x_C(t) = R_C\left(\sigma(t), \sigma(t^-)\right) x_C(t^-)$$

در ادامه برای تابع تبدیل کنترل کننده‌ها تحققی جستجو می‌شود که برای هر سیگنال کلیدزنیِ σ و هر ورودی خارجیِ محدودِ w، سیستم کلیدزنی پایدار بوده و متغیرهای حالتِ x، محدود باقی بماند. برای این منظور لازم است علاوه بر پایداری زیرسیستم‌هایِ سیستم کلیدزنی، نگاشت بازنشانی $R_C(i,j)$ به گونه‌ای انتخاب شود که در هر لحظه کلیدزنی از کنترل کننده j به کنترل کننده i داشته باشیم [۱۶]:

$$R(i,j)^T Q_i R(i,j) \le Q_j \qquad (۱۴)$$

که

$$R(i,j) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & R_C(i,j) \end{bmatrix}$$

بدین ترتیب سیستم کلیدزنی با داشتن تابع لیاپانوف چندگانهٔ کاهشی پایدار می‌گردد.

برای این منظور، از میان اعضای مجموعه $K = \left\{K_{H_2}(s), K_{H_\infty}(s)\right\}$، تابع تبدیل یکی از کنترل کننده‌ها، $K_k(s)$، به دلخواه انتخاب می‌گردد. اگر $\{A_P, B_P, C_P\}$ و $\{F_k, G_k, H_k, J_k\}$ به ترتیب تحقق‌های کاهش ناپذیر $H_P(s)$ و $K_k(s)$ باشند، ماتریس‌های X_{AC}, Y_{FH} به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که $A_P + X_{AC} C_P$ و $F_k + Y_{FH} H_k$ پایدار مجانبی باشند و ماتریس‌های $A_E, B_E \quad C_E, D_E, F_E, G_E$ به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$A_E = \begin{bmatrix} A_P + X_{AC} C_P & 0 \\ 0 & F_k + Y_{FH} H_k \end{bmatrix}, \; B_E = \begin{bmatrix} B_P \\ -Y_{FH} \end{bmatrix}$$

$$D_E = \begin{bmatrix} -X_{AC} \\ -G_k - Y_{FH} J_k \end{bmatrix}, C_E = \begin{bmatrix} C_P & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_E = \begin{bmatrix} 0 & -H_k \end{bmatrix}, G_E = J_k \qquad (۱۵)$$

به آسانی دیده می‌شود که A_E یک ماتریس پایدار و $\{A_E + D_E C_E, B_E, C_E\}$ و $\{A_E - B_E F_E, D_E - B_E G_E, F_E, G_E\}$ به ترتیب تحقق‌های پایدارپذیر و آشکارپذیر $H_P(s)$ و $K_k(s)$ هستند.

توابع تبدیل $X_C(s), Y_C(s), Y_P(s), X_P(s)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} X_C & -Y_C \\ Y_p & X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_E \\ C_E \end{bmatrix} (sI - A_E)^{-1} \begin{bmatrix} B_E & -D_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & -G_E \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

برای هر $i \in I$، تابع تبدیل $S_i(s)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

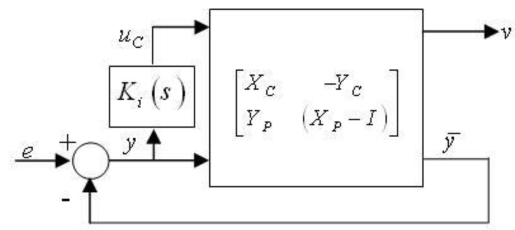
$$S_i(s) = \left(-Y_C(s) + X_C(s) K_i(s)\right)$$
$$\times \left(X_p(s) + Y_p(s) K_i(s)\right)^{-1} \qquad (۱۴)$$

می‌توان تحقیق کرد که $\{A_E - B_E F_E, B_E, -F_E, I\}$ تحقق فضای حالت کاهش‌پذیر $X_C^{-1}(s)$ و $\left\{\begin{bmatrix} A_E & 0 \\ B_E F_E & A_E - B_E F_E \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D_E \\ B_E G_E \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} F_E & -F_E \end{bmatrix}, G_E\right\}$ تحقق فضای حالت کاهش‌پذیر $X_C^{-1}(s) Y_C(s)$ با بردار حالت $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ است. با انتخاب بردار حالتِ $x = x_1 - x_2$، $X_C^{-1}(s) Y_C(s)$ به صورت $\{A_E - B_E F_E, D_E - B_E G_E, F_E, G_E\}$ تحقق می‌یابد که همان تحقق فضای حالت $K_k(s)$ است. به بیان دیگر $K_k(s) = X_C^{-1}(s) Y_C(s)$ و در نتیجه $S_k(s) = 0$. به طور مشابه می‌توان نشان داد که $H_P(s) = X_P^{-1}(s) Y_P(s)$.

تابع تبدیل $S_i(s)$، از e به v، با رابطه (۱۷) توصیف می‌شود و بلوک دیاگرام آن در شکل ۳ نشان داده شده است ($L(.)$ بیانگر تبدیل لاپلاس است):

$$\begin{bmatrix} L(v) \\ L(\bar{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_C(s) & -Y_C(s) \\ Y_P(s) & (X_P - I)(s) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L(u_C) \\ L(y) \end{bmatrix}$$

$$y = e - \bar{y} \text{ ، } L(u_C) = K_i(s) \times L(y) \qquad (۱۵)$$



شکل ۳: بلوک دیاگرام رابطه (۱۷)

با انتخاب تحقق کاهش‌ناپذیر دلخواه $\{F_i, G_i, H_i, J_i\}$ برای $K_i(s)$، رابطه (۱۷) به صورت زیر تحقق می‌یابد:

$$\dot{x}_E = A_E x_E + B_E u_C - D_E y \quad , \bar{y} = C_E x_E$$
$$v = F_E x_E + u_C - G_E y$$
$$\dot{x} = F_i x + G_i y \quad , u_C = H_i x + J_i y$$

و تابع تبدیل $S_i(s)$ با $\{\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i, \bar{D}_i\}$ تحقق می یابد که

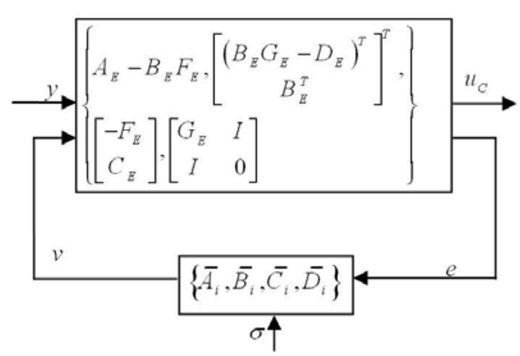
$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_E + D_E C_E - B_E J_i C_E & B_E H_i \\ -G_i C_E & F_i \end{bmatrix} \qquad (۱۶)$$

از آنجا که $K_i(s)$، فرایند $H_P(s)$ را پایدار می‌سازد و $\{A_E + D_E C_E,\ B_E,\ C_E\}$ یک تحقق پایدارپذیر و آشکارپذیر $H_P(s)$ است و از مقایسه $\bar{A}_i$ رابطه (۱۸) با A_i رابطه (۱۳)، نتیجه می‌شود که $\bar{A}_i$ و تابع تبدیل $S_i(s)$ پایدار مجانبی است.

بنابراین کنترل کننده کلیدزنی شکل ۴ به صورت زیر تحقق می‌یابد:

$$\dot{x}_E = A_E x_E + B_E u_C - D_E y \quad , e = C_E x_E + y$$
$$u_C = -F_E x_E + G_E y + v \qquad (۱۷)$$

از آنجا که ماتریس‌های $A_E, B_E, C_E, D_E, F_E, G_E$ ثابت هستند، رابطه (۱۹) از یک کنترل کننده به کنترل کننده دیگر تغییر نمی‌کند.



شکل ۴: کنترل کننده چندگانه کلیدزنی

بدین ترتیب ماتریس‌های تحقق تابع تبدیل کنترل کننده از y به u_C ($\{\tilde{F}_i, \tilde{G}_i, \tilde{H}_i, \tilde{J}_i\}$) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tilde{F}_i = \begin{bmatrix} A_E - B_E F_E + B_E \bar{D}_i C_E & B_E \bar{C}_i \\ \bar{B}_i C_E & \bar{A}_i \end{bmatrix}$$

$$\tilde{G}_i = \begin{bmatrix} -D_E + B_E\left(\bar{D}_i + G_E\right) \\ \bar{B}_i \end{bmatrix}$$

$$\tilde{H}_i = \begin{bmatrix} -F_E + \bar{D}_i C_E & \bar{C}_i \end{bmatrix}, \ \tilde{J}_i = \bar{D}_i + G_E$$

در حالت کلی تحقق $\{\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i, \bar{D}_i\}$ و $\{\tilde{F}_i, \tilde{G}_i, \tilde{H}_i, \tilde{J}_i\}$ کاهش ناپذیر نیست.

چنانچه در لحظات کلیدزنی مقدار بردار حالتِ x_C ثابت باشد ($R_C(i,j) = I$)، برای برقراری رابطه (۱۴) و تضمین پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته تحت کلیدزنی دلخواه لازم است زیرسیستم-های حلقه بسته با هر کنترل کننده تابع لیاپانوف مشترک داشته باشند.

خانواده توابع تبدیل پایدار مجانبی $S_i(s) \in S := \{S_{H_2}(s), S_{H_\infty}(s)\}$ را در نظر بگیرید. در ادامه نشان داده می‌شود که چگونه تحقق پایدارپذیر و رویت‌پذیر $\{\bar{A}_i,\ \bar{B}_i, \bar{C}_i,\ \bar{D}_i\}$ از مرتبه n برای هر $S_i(s) \in S$ یافت شود به گونه‌ای که:

$$Q\bar{A}_i + \bar{A}_i^T Q < 0, \ i \in I \qquad (۱۸)$$

که $Q = Q^T = R'R > 0$ و R غیرمنفرد است. با چنین ماتریسی می‌توان تابع لیاپانوف مشترک $V(z) = z'Qz$ برای خانواده سیستم‌های LTI $\{\dot{z} = \bar{A}_i z : i \in I\}$ ساخت. اگر بزرگترین درجه مک میلان ماتریس‌های تبدیل مجموعه S، n باشد، تحقق مرتبه n برای ماتریس تبدیل $\{\tilde{A}_i,\ \tilde{B}_i, \tilde{C}_i, \tilde{D}_i\}$ $S_i(s), i \in I$ انتخاب می‌شود که $\tilde{A}_i$ پایدار مجانبی است. به دلیل پایدار مجانبی بودن $\tilde{A}_i$، خانواده معادلات لیاپانوف $Q_i \tilde{A}_i + \tilde{A}_i^T Q_i = -I$، جواب $Q_i = Q_i^T = R_i' R_i > 0$ دارد که R_i غیرمنفرد است. با انتخاب

$\bar{A}_i := R^{-1} R_i \tilde{A}_i R_i^{-1} R;\ \bar{B}_i := R^{-1} R_i \tilde{B}_i;\ \bar{C}_i := \tilde{C}_i R_i^{-1} R$، $\bar{D}_i = \tilde{D}_i$. از آنجا که $\{\bar{A}_i,\ \bar{B}_i, \bar{C}_i,\ \bar{D}_i\}$ با تبدیل تشابهی از $\{\tilde{A}_i,\ \tilde{B}_i, \tilde{C}_i, \tilde{D}_i\}$ بدست می‌آید، $\{\bar{A}_i,\ \bar{B}_i, \bar{C}_i,\ \bar{D}_i\}$ نیز یک تحقق S_i است. به علاوه $Q\bar{A}_i + \bar{A}_i^T Q = -\left(R_i^{-1} R\right)^T R_i^{-1} R < 0$.

وجود تابع لیاپانوف مشترک برای همه $S_i\left(s\right)$ ها، پایداری نمایی سیستم کلیدزنی را تضمین می‌نماید. همچنین برای هر سیگنال کلیدزنی بردار حالت x محدود است.

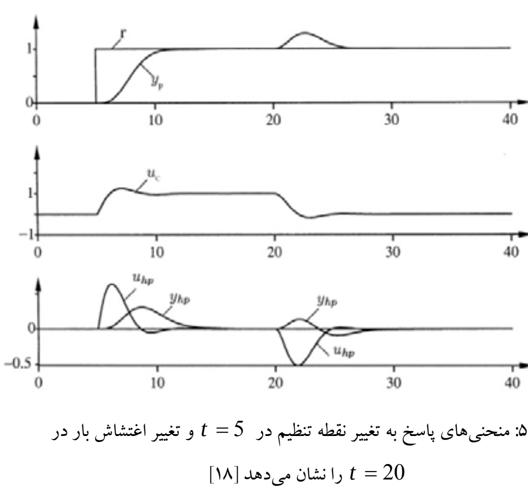
۴- طراحی سرپرست

سرپرست در بالاترین سطح قرار گرفته و از روی ورودی و خروجی‌های سیستم لزوم کلیدزنی را تشخیص داده و تصمیم می‌گیرد کدام کنترلگر در حلقه قرار گیرد [۶]. در کنترل با سرپرستی، کلیدزنیِ مبتنی بر منطق، جایگزین کنترل تطبیقیِ کلاسیک شده است. در این مقاله از سرپرست تشخیص ورودی خارجی استفاده شده است.

سرپرست، وقوعِ نویز، اغتشاش و ورودی مرجع را تشخیص می‌دهد و کنترل کننده مربوطه را در حلقه فیدبک قرار می‌دهد. برای تشخیص تغییرات اغتشاش بار d و نقطه تنظیم، r، سیگنال کنترلی u_C و خروجی فرایند y_P از یک فیلتر بالا گذر عبور داده می‌شوند و به ترتیب u_{hp} و y_{hp} بدست می‌آید. شکل ۵ نشان می‌دهد که بعد از تغییر اغتشاش بار، y_P, u_C در جهت‌های مخالف حرکت می‌کنند، در حالی که بعد از تغییر نقطه تنظیم در جهت یکسان حرکت می‌کنند. فرض می‌شود فرآیند مینیمم فاز بوده و بهره استاتیک مثبت (منفی) دارد یعنی $\lim_{s\to 0} H_P\left(s\right)>0$ ($\lim_{s\to 0} H_P\left(s\right)<0$). اگر دامنه $\left|y_{hp}\right|$ و $\left|u_{hp}\right|$ از حد آستانه مشخصی بیشتر شود، یکی از شرایط زیر رخ خواهد داد:

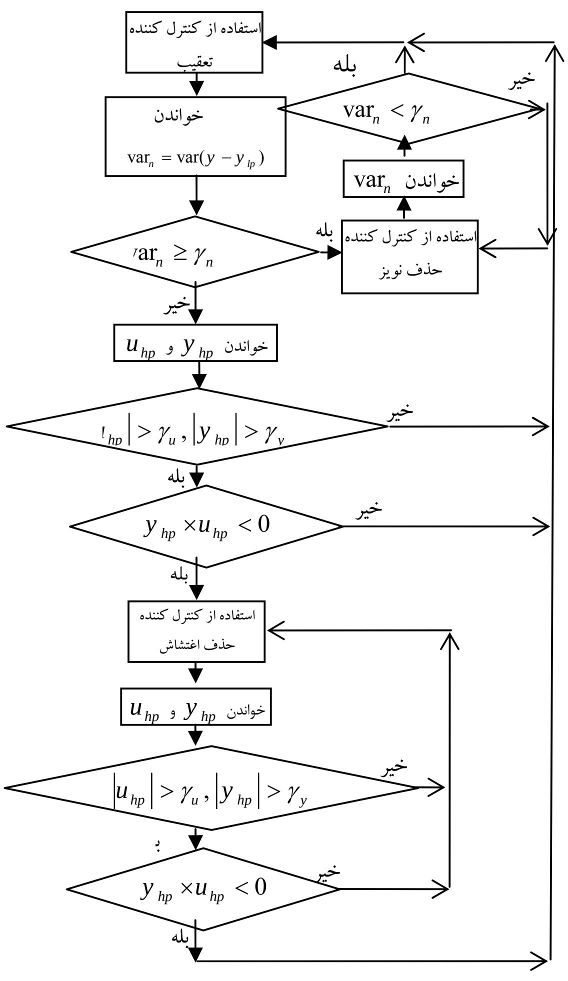
اگر $y_{hp}u_{hp}>0$، آنگاه نقطه تنظیم (اغتشاش بار) تغییر کرده است.

اگر ، آنگاه اغتشاش بار (نقطه تنظیم) تغییر کرده است [۱۸].



شکل ۵: منحنی‌های پاسخ به تغییر نقطه تنظیم در $t=5$ و تغییر اغتشاش بار در $t=20$ را نشان می‌دهد [۱۸]

با فرض اینکه نویز اندازه گیری منحصرا فرکانس‌های بالا را در بر دارد، برای تشخیص نویز اندازه گیری با واریانس بالا، خطای تعقیب، y، از یک فیلتر پایین گذر عبور داده می‌شود و y_{lp} بدست می‌آید. در این قاعده از این ایده استفاده می‌شود که $y-y_{lp}$، تخمینی از نویز اندازه‌گیری وارده شده بر خروجی سیستم را می‌دهد. با محاسبه واریانس پنجره‌ای از آخرین نویزهای تخمین زده شده می‌توان تصمیم گیری کرد. اگر واریانس نویز از مقدار از پیش تعیین شده‌ای بیشتر بود، نویز اندازه گیری وارد شده و بایستی کنترل کننده حذف نویز فعال شود. شرط قطع استفاده از کنترل کننده حذف نویز، کم شدن دوباره واریانس نویز است. شکل ۶، الگوریتم انتخاب کنترل کننده توسط سرپرست را نشان می‌دهد.



شکل ۶: الگوریتم انتخاب کنترل کننده توسط سرپرست

۵- ارزیابی عملکرد H_2 و H_∞ سیستم کلیدزنی

سیستم کلیدزنی خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = A_\sigma x + B_\sigma w$$
$$z_\infty = C_{\infty\sigma} x + D_{\infty\sigma} w \,,\; z_2 = C_{2\sigma} x \qquad (۲۱)$$

$L_{2,T}$، بیانگر مجموعه توابع $f\,(.)$ است به طوری که

$$\|f\|_{2,T} := \left(\int_0^T f'(t) f(t) dt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

بهره ریشه میانگین مربعات، $g_{\infty_S}(T)$، سیستم کلیدزنی (۲۱) روی مجموعه سیگنال‌های کلیدزنی مجاز σ با رابطه (۲۲) تعریف می‌شود [۱۹]:

$$g_{\infty_S}(T) := \qquad (۲۲)$$
$$\inf_{\gamma \ge 0}\left\{\gamma \mid \|z_\infty\|_{2,T} \le \gamma \|w\|_{2,T} \,,\; \forall w \in L_{2,T} \,, \forall \sigma\right\}$$

که z_∞، خروجی سیستم کلیدزنی مربوط به ورودی w و سیگنال کلیدزنی σ و بازای شرط اولیه $x(0) = 0$ می‌باشد. از آنجا که برای سیستم‌های خطی غیرکلیدزنی، $\lim_{T\to\infty} g_\infty(T)$، همان نرم H_∞ تابع تبدیل از ورودی w به خروجی z_∞ است [۲۰]، از بهره $\underset{w,\sigma}{Sup} \frac{\|z_\infty\|_{2,T}}{\|w\|_{2,T}}$ برای ارزیابی عملکرد H_∞ سیستم کلیدزنی می‌توان استفاده نمود [۱۹].

تعریف۱: به طور مشابه، بهره $g_{2_S}(T)$ سیستم کلیدزنی (۲۱) روی مجموعه سیگنال‌های کلیدزنی مجاز σ با رابطه (۲۳) تعریف می‌کنیم:

$$g_{2_S}(T) := \qquad (۲۳)$$
$$\inf_{\nu \ge 0}\left\{\nu \mid \underset{t\in[0,T]}{Sup}|z_2| \le \nu \|w\|_{2,T} \,,\; \forall w \in L_{2,T} \,, \forall \sigma\right\}$$

که z_2، خروجی سیستم کلیدزنی مربوط به ورودی w و سیگنال کلیدزنی σ و بازای شرط اولیه $x(0) = 0$ می‌باشد. از آنجا که برای سیستم‌های خطی غیرکلیدزنی، $\lim_{T\to\infty} g_2(T)$، همان حد بالای نرم H_2 تابع تبدیل از ورودی w به خروجی z_2 است [۲۰]، در این مقاله از بهره $\underset{w,\sigma}{Sup} \frac{\|z_2\|_{\infty,T}}{\|w\|_{2,T}}$ برای ارزیابی عملکرد H_2 سیستم کلیدزنی استفاده می‌کنیم.

۶- شبیه سازی

به منظور نشان دادن قابلیت کلیدزنی در کاهش محافظه کاری و بهبود عملکرد کنترل با اهداف چندگانه، روش پیشنهادی این مقاله به دو سیستم نمونه اعمال گردیده است.

مثال ۱: روش پیشنهادی به مدل دینامیکی زاویه چرخش هواپیما [۲۱ ص ۳۸۱] که در [۱۶] نیز استفاده شده اعمال گردیده است که دارای تابع تبدیل زیر می‌باشد:

$$H_P(s) = \frac{-1000}{s(s+0.875)(s+50)}$$

در این مثال فرض شده است که نویز اندازه گیری سفید با واریانس بزرگ در بازه زمانی $t \in [18,\ 40]$ به سیستم وارد می‌شود و ورودی مرجع پالس مربعی با دوره تناوب $20s$ است. هدف طراحی، حذف نویز و پاسخ کند در حضور نویز و تعقیب سریع ورودی مرجع در سایر زمانهاست. این یک مساله چندمنظوره با دو معیار متضاد می‌باشد زیرا اگر کنترل کننده ای پهنای باند حلقه بسته کوچکی داشته باشد، به نویز حساس نیست اما پاسخ کندی را نمایش می‌دهد و اگر کنترل کننده ای پهنای باند بزرگی داشته باشد و در نتیجه سریع باشد خیلی حساس به نویز می گردد.

فرایند فوق پایدار مجانبی نمی‌باشد و برای یافتن تحقق مناسب کنترل کننده از مطالب بخش ۳ بهره گرفته می‌شود. تحقق فضای حالت زیر برای مدل دینامیکی زاویه چرخش هواپیما انتخاب شده است:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -50.875 & -43.75 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1000 & 0 \end{bmatrix}}_{A_P} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_P} u$$

$$y_P = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_P} x$$

با انتخاب این تحقق فضای حالت به راحتی می‌توان تحقیق کرد:

$$\dot{y}_P = \begin{bmatrix} 0 & -1000 & 0 \end{bmatrix} x$$

از آنجا که $u = u_C + d$ و $w = \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}$ داریم:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -50.875 & -43.75 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1000 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_u} u_C + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_w} w$$

برای خطای تعقیب $y = r - n - y_P$، می‌توان نوشت:

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{C} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{D_w} w$$

برای جلوگیری از افزایش بیش از حد سیگنال کنترلی و تعقیب ورودی مرجع، کنترل کننده K_{H_∞} با کمینه سازی $\|T_{w_\infty \to z_\infty}\|_\infty$ طراحی می گردد که $w_\infty = r$ و z_∞ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$z_\infty = \begin{bmatrix}\tilde{y}\\ u_C\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & 100\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{C_{z_\infty}}\begin{bmatrix}x\\ x_w\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{D_{z_\infty u}}u_C + \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{D_{z_\infty w}}w$$

که $\tilde{y}$، خطای تعقیب وزن‌دهی شده است. تابع وزنی به صورت $W = \frac{s+100}{s+0.001}$ انتخاب شده است. کنترل کننده K_{H_∞} مطابق زیر بدست آمده است:

$$K_{H_\infty} = \frac{-3.6548\times10^{-4}\left(s+9.2879\times10^{8}\right)(s+50)(s+0.99)(s+0.41)}{\left(s^2\text{-}79.3s+1843.4\right)\left(s+1.7299\times10^{4}\right)\left(s+9.57\times10^{-4}\right)}$$

برای داشتن عملکرد مقاوم‌تر نسبت به نویز اندازه گیری، کنترل کننده K_{H_2} با استفاده از LQG/LQR طراحی می‌شود. تابع هدف مورد نظر

$$J = E\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(y_P^2(t)+\dot{y}_P^2(t)+\rho^2u_C^2(t)\right)dt\right\}$$

است. با فرض اینکه n فرایند نویز سفید باشد و $E\left(n(t)n(\tau)\right) = \mu\delta(t-\tau)$ داریم:

$$J = E\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(z_2(t)^T\, z_2(t)\right)dt\right\} = \left\|T_{w_2\to z_2}\right\|_2^2$$

که $w_2 = \begin{bmatrix}d\\ n\\ \sqrt{\mu}\end{bmatrix}$ و $z_2 = \begin{bmatrix}y_P\\ \dot{y}_P\\ \rho u_C\end{bmatrix}$ به بیان دیگر

$$z_2 = \begin{bmatrix}y_P\\ \dot{y}_P\\ \rho u_C\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1000 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{C_{z_2}}\begin{bmatrix}x\\ x_w\end{bmatrix}x + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \rho\end{bmatrix}}_{D_{z_2u}}u_C$$

کنترل کننده K_{H_2}، $\left\|T_{w_2\to z_2}\right\|_2$ را کمینه می‌سازد و به صورت زیر بدست می‌آید:

$$K_{H_2} = \frac{-5.5181(s+100.06)(s+50.02)(s+1.26)}{\left(s^2\text{-}16.86s+113.06\right)(s+50.05)(s+100)}$$

منحنی‌های شکل ۷ از چپ به ترتیب پاسخ حلقه بسته کنترل کننده‌های K_{H_∞} و K_{H_2} را نمایش می‌دهند. منحنی‌های بالا خروجی فرایند، y_P، و منحنی‌های پایین خطای تعقیب، $r-y_P$، را نشان می‌دهند. همانطور که مشاهده می‌گردد کنترل کننده K_{H_∞} از K_{H_2} سریع‌تر است اما به نویز حساس‌تر می‌باشد.

در این مثال فرض بر این است که در لحظات کلیدزنی مقدار متغیرهای حالت ثابت می‌باشد. با استفاده از مطالب بخش ۳، تحقق کنترل کننده‌ها که تضمین کننده پایداری نمایی تحت کلیدزنی دلخواه باشد، بدست آمده است. ابتدا ماتریس‌های $A_E, B_E, C_E, D_E, F_E, G_E$ از رابطه (۱۵) انتخاب شده‌اند و $\{A_E + D_E C_E, B_E, C_E\}$ و $\{A_E - B_E F_E, D_E - B_E G_E, F_E, G_E\}$ تحقق پایدارپذیر و آشکارپذیر $K_k(s) = K_{H_2}(s)$ و $H_P(s)$ می‌باشند. توابع تبدیل X_P, Y_P, X_C, Y_C و با استفاده از رابطه (۱۶) توابع تبدیل $\{S_{H_2}, S_{H_\infty}\}$ محاسبه گردیده‌اند. همانطور که قبلا اشاره گردید $K_{H_2} = X_C^{-1}Y_C$ و $H_P(s) = X_P^{-1}Y_P$ از این رو $S_{H_2} = 0$. تحقق مینیمال $\{\bar{A}_\infty, \bar{B}_\infty, \bar{C}_\infty\}$ برای S_{H_∞} و تحقق بدیهی $\{\bar{A}_\infty, 0, \bar{C}_\infty\}$ برای S_{H_2} انتخاب شده است. دو تحقق $\bar{A}_\infty$ یکسان دارند و رابطه (۲۰) بازای $Q = Q_2 = Q_\infty$ برقرار می‌باشد. بدین ترتیب سیستم حلقه بسته کلیدزنی پایدار نمایی است.

منحنی‌های سمت راست در شکل ۸، پاسخ حلقه بسته کنترل کننده کلیدزنی $K_{switching}$ را نشان می‌دهند. سرپرست تشخیص ورودی خارجی معرفی شده در بخش ۴، حضور نویز اندازه گیری واریانس بالا را در بازه زمانی $t\in[18.41 \quad 40.37]$ تشخیص می‌دهد. بنابراین از عملکرد تعقیب ورودی مرجع کنترل کننده K_{H_∞} در حالت عادی (عدم حضور نویز اندازه‌گیری) و از حذف نویز خوب کنترل کننده K_{H_2} در حضور نویز اندازه‌گیری در محدوده زمانی $t\in[18.41 \quad 40.37]$ استفاده شده است. منحنی‌های سمت چپ شکل ۸ عملکرد تک کنترل کننده چندمنظوره متداول K_{H_2/H_∞} که $\left\|T_{w_2\to z_2}\right\|_2$ را کمینه می‌کند، در حالی که $\left\|T_{w_\infty\to z_\infty}\right\|_\infty \le \gamma$ را نشان می‌دهد. این کنترل کننده با استفاده از نامساوی‌های ماتریسی خطی به صورت زیر طراحی شده است.

$$K_{H_2/H_\infty} = \frac{\text{-}1.277\times10^3(s+50)\left(s^2\text{-}7.74s+25.41\right)}{\left(s^2\text{-}47.02s+1583.1\right)(s+0.001)(s+62.84)}$$

در شکل ۸ منحنی‌های بالا خروجی فرایند، y_P، و منحنی‌های پایین خطای تعقیب، $r-y_P$، را نشان می‌دهند.

بلوک دیاگرام سیستم حلقه بسته با کنترل کننده کلیدزنی با سرپرستی در شکل ۹ نشان داده شده است.

مقایسه منحنی‌ها نشان می‌دهد که با کلیدزنی میان کنترل کننده‌ها محافظه کاری کاهش یافته و زمانی که نویز به سیستم اعمال نمی‌شود، از سرعت تعقیب بالای کنترل کننده K_{H_∞} و در حضور نویز از ویژگی حذف نویز کنترل کننده K_{H_2} بهره گرفته شده است. بدین ترتیب با

استفاده از کلیدزنی به نحو بهتری می‌توان به هر دو هدف طراحی دست یافت.

همانگونه که در بخش ۵ بیان شد، برای کمی نمودن عملکرد کنترلگر کلیدزنی در کمینه سازی $\|T_{w_2\to z_2}\|_2$، از $\sup_w \frac{\|z_2\|_\infty}{\|w_2\|_2}$، به عنوان شاخص عملکرد H_2 و برای کمی نمودن عملکرد کنترلگر کلیدزنی در کمینه سازی $\|T_{w_\infty\to z_\infty}\|_\infty$، از $\sup_w \frac{\|z_\infty\|_2}{\|w_\infty\|_2}$، به عنوان شاخص عملکرد H_∞، استفاده می‌شود. با استفاده از جدول ۱ می‌توان دریافت که کنترل کننده $K_{switching}$ پس از کنترل کننده K_{H_2} با داشتن کمترین مقدار $\sup_w \frac{\|z_2\|_\infty}{\|w_2\|_2}$ بهترین عملکرد حذف نویز و پس از کنترل کننده های K_{H_∞} و K_{H_2/H_∞} با داشتن کمترین مقدار $\sup_w \frac{\|z_\infty\|_2}{\|w_\infty\|_2}$ بهترین عملکرد تعقیب را دارد. همچنین مقایسه مقادیر $\sup_w \frac{\|r-y\|_2}{\|w_\infty\|_2}$ نشان می‌دهد کنترل کننده $K_{switching}$ بعد از کنترل کننده K_{H_∞} بهترین عملکرد تعقیب را دارا می‌باشد.

جدول ۱: مقایسه عملکرد کنترل کننده های مختلف مثال ۱

	K_{H_2}	K_{H_∞}	K_{H_2/H_∞}	$K_{switching}$
$\sup_w \frac{\|z_2\|_\infty}{\|w_2\|_2}$	166.07	8673.26	8278.41	318.89
$\sup_w \frac{\|z_\infty\|_2}{\|w_\infty\|_2}$	60.1	6.37	6.39	31.33
$\sup_w \frac{\|r-y\|_2}{\|w_\infty\|_2}$	0.3	0.17	0.4	0.22

مثال ۲: روش پیشنهادی به مدل دینامیکی سیستم جرم/ فنر/ دمپر [۲۲ ص ۵۸ و ۲۸۰] اعمال گردیده است که با معادلات دیفرانسیل زیر توصیف می‌شود:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{b_1+b_2}{m_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$y_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x,\ y = y_P + n$$

که $k_1 = 1, k_2 = 4, b_1 = 0.2, b_2 = 0.1, m_1 = 1$ و $m_2 = 2$ و F_1 نیروی کنترل، F_2 نیروی اغتشاش و n نویز اندازه گیری می‌باشد. در این مثال فرض شده است که اغتشاش پله F_2 در بازه زمانی $t \in [10,\ 25]$ و نویز اندازه گیری سفید n در بازه زمانی $t \in [70,\ 85]$ به سیستم وارد می‌شود. هدف طراحی قانون کنترلی است که تاثیر نیروی اغتشاش F_2 و نویز اندازه گیری n را کمینه سازد. طراحی کنترل کننده‌ها مشابه مثال قبل است. کنترل کننده K_{H_∞}، $\|T_{w_\infty=F_2\to z_\infty=y_P}\|_\infty$ و کنترل کننده K_{H_2}، $\left\|T_{w_2=n\to z_2=\begin{bmatrix} y \\ F_1 \end{bmatrix}}\right\|_2$ را کمینه می‌سازد و کنترل کننده چندمنظوره متداول K_{H_2/H_∞}، $\|T_{n\to z_2}\|_2$ را کمینه می‌کند، در حالی که $\|T_{F_2\to z_\infty}\|_\infty \le \gamma$. منحنی‌های شکل ۱۰ از چپ به ترتیب پاسخ حلقه بسته کنترل کننده‌های K_{H_∞} و K_{H_2} را نمایش می‌دهند. در این مثال فرض بر این است که در لحظات کلیدزنی مقدار متغیرهای حالت ثابت می‌باشد. تحقق کنترل کننده‌ها مشابه مثال قبل محاسبه شده است. منحنی‌های شکل ۱۱ از چپ به ترتیب پاسخ حلقه بسته کنترل کننده‌های $K_{switching}$ و K_{H_2/H_∞} را نمایش می‌دهند.کنترل کننده $K_{switching}$ در حضور اغتشاش، از حذف اغتشاش کنترل کننده K_{H_∞} و در حضور نویز از ویژگی حذف نویز کنترل کننده K_{H_2} بهره گرفته است. بدین ترتیب با استفاده از کلیدزنی به نحو بهتری می‌توان به هر دو هدف طراحی دست یافت. با استفاده از جدول ۲ می‌توان دریافت که کنترل کننده $K_{switching}$ پس از کنترل کننده K_{H_2} با داشتن کمترین مقدار $\sup_w \frac{\|z_2\|_\infty}{\|w_2\|_2}$ بهترین عملکرد حذف نویز و پس از کنترل کننده های K_{H_∞} و K_{H_2/H_∞} با داشتن کمترین مقدار $\sup_w \frac{\|z_\infty\|_2}{\|w_\infty\|_2}$ بهترین عملکرد حذف اغتشاش را دارد.

جدول ۲: مقایسه عملکرد کنترل کننده های مختلف مثال ۲

	K_{H_2}	K_{H_∞}	K_{H_2/H_∞}	$K_{switching}$
$\sup_w \frac{\|z_2\|_\infty}{\|w_2\|_2}$	0.0285	0.0504	0.0432	0.0294
$\sup_w \frac{\|z_\infty\|_2}{\|w_\infty\|_2}$	0.0594	0.0393	0.0396	0.0407

۸- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

از آنجا که رویکرد متداول کنترل چندمنظوره، طراحی یک تک کنترل‌کننده است که اهداف مختلف طراحی را تامین کند، طراحی

چنین کنترل‌کننده‌ای نیاز به مصالحه میان اهداف مغایر دارد و در بسیاری موارد سیستم کنترلی رفتار مطلوب را به دست نمی‌دهد. در این مقاله رویکرد جدید طراحی کنترل چندمنظوره مبتنی بر کلیدزنی میان کنترل‌کننده چندگانه و باسرپرستی معرفی گردیده است. کنترل‌کننده چندگانه شامل چند کنترل‌کننده است که هر یک جهت برآوردن دسته‌ای از اهداف مرتبط مانند ردیابی ورودی مرجع یا حذف نویز اندازه‌گیری و یا حذف اغتشاش توسط LMI طراحی شده‌اند. برای تضمین پایداری سیستم حلقه بسته با وجود کلیدزنی و تغییر ساختار کنترل‌کننده‌ها، تحقق مناسبی از کنترل‌کننده‌ها انتخاب گردیده است. با توجه به عملکرد و رفتار سیستم یکی از کنترل کننده‌های موجود توسط یک سیستم بالادستی تحت عنوان «سرپرست» انتخاب و در حلقه قرار می‌گیرد. منطق سرپرست در تشخیص لزوم کلیدزنی و انتخاب کنترل کننده بیان شده است. شبیه سازی‌ها نشان می‌دهد کنترل‌کننده کلیدزنی در محدوده زمانی که یک کنترل کننده در حلقه قرار می‌گیرد، ویژگی-های آنرا نمایش می‌دهد و محافظه‌کاری و تضعیف عملکرد ناشی از در نظر گرفتن همزمان همه اهداف کنترلی در طراحی یک کنترل‌کننده واحد را از بین می‌برد و به بهبود قابل ملاحظه در عملکرد کنترل کننده می‌انجامد.

در روش ارائه شده در این مقاله جهت تضمین پایداری تحت کلیدزنی، نامعینی‌های مدل فرایند در نظر گرفته نشده و در محدوده‌ای که بتوان مدل فرایند را ثابت فرض کرد، قابل استفاده می‌باشد. همچنین پایداری تحت کلیدزنی با فرض پایداری زیرسیستم‌ها تضمین شده است و چنانچه به دلیل نامعینی در مدل فرایند سیستم حلقه بسته ناپایدار شود، اثبات پایداری دیگر برقرار نیست. بنابراین از آنجا که یکی از انگیزه‌های اصلی استفاده از کنترل کننده H_∞ رسیدن به قوام در پایداری و عملکرد است تضمین پایداری حلقه بسته با وجود نامعینی مدل فرایند و ناپایداری زیرسیستم‌ها می‌تواند به عنوان مساله باز در آینده مورد بررسی و مطالعه قرار بگیرد.

مراجع

[1] Boyd S., Barratt, C., *Linear Controller Design: Limits of Performance*, New Jersey: Prentice-Hall, 1991.

[2] Scherer, C., Gahinet, P, Chilali, M., 1997, "Multiobjective output feedback control via LMI optimization", *IEEE Transaction on Automatic Control*, 42, 7, 896-911.

[3] Khargonekar, P.P., Rotea, M.A., 1991, "Mixed H2/H∞ control: a convex optimization approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39, 824-837.

[4] Sun, Z., Ge, S.S., 2005, "Analysis and synthesis of switched linear control systems", *Automatica*, 41, 181-195.

[5] Feuer, A., Goodween, G.C., Saldago, M., 1997, "Potential benefits of hybrid control for linear time invariant plants", *Proceedings of American Control Conference,* New Mexico, USA, 2790-2794.

[6] McClamroch, N.H., Kalmanovsky, I., 2000, "Performance benefits of hybrid control design for linear and nonlinear systems", *Proceedings of IEEE,* 88, 7, 1083-1096.

[7] Morse, S., Control using logic-based switching, in A. Isidori (Ed.), Trends in Control: An European perspective, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 69-113, 1995.

[8] Hespanha, J.P., 1999, "Stabilization of nonholonomic integrators via logic-based switching", *Automatica*, 35, 385-393.

[9] Liberzon, D., *Switching in systems and control. Systems and control: Foundations and applications*, Boston, MA: Birkhںuser, 2003.

[10] Santarelli, K.R., Dahleh, M.A., 2008, "Comparison of a switching controller to two LTI controllers for a class of LTI plants", *Proceedings of American Control Conference,* Seattle, Washington, 4640-4646.

[11] Kogiso, K., Hirata, K., 2004, "Controller switching strategies for constrained mechanical systems with application to the remote control over networks", Proceedings of IEEE International Conference on Control Applications, 1, 480-484.

[12] Zheng, K., Lee, A.H, Bentsman, J., Krein, P.T., 2006, "High performance robust linear controller synthesis for an induction motor using a multi-objective hybrid control strategy", *Nonlinear Analysis*, 65, 2061-2081.

[13] Essounbouli, N., Manamanni, N., Hamzaoui, A., Zaytoon, J., 2006, "Synthesis of switching controllers: A fuzzy supervisor approach", *Nonlinear Analysis,* 65, 1689–1704.

[14] DeCarlo, R.A., Zak, S.H., Matthews, G.P., 1988, "Variable structure control of non-linear multivariable systems: A tutorial," *Proceedings of the IEEE,* 76, 3, 212–232.

[15] Jamshidi, F., Fakharian, A., Beheshti, M.T.H., 2010, "Fuzzy supervisor approach on logic based switching H2/H∞", *Proceedings of the Institution of*

Mechanical Engineers, Part I, Journal of Systems and Control Engineering, 224, 1, 11-19.

[16] Hespanha, J.P., Morse, A.S., 2002, "Switching between stabilizing controllers", *Automatica*," 38, 1905-1917.

[17] Youla, D.C., Jabr, H.A., Bongiorno, J.J., 1976, "Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers-part II. the multivariable case", *IEEE Transactions on Automatic & Control*, 21, 319-338.

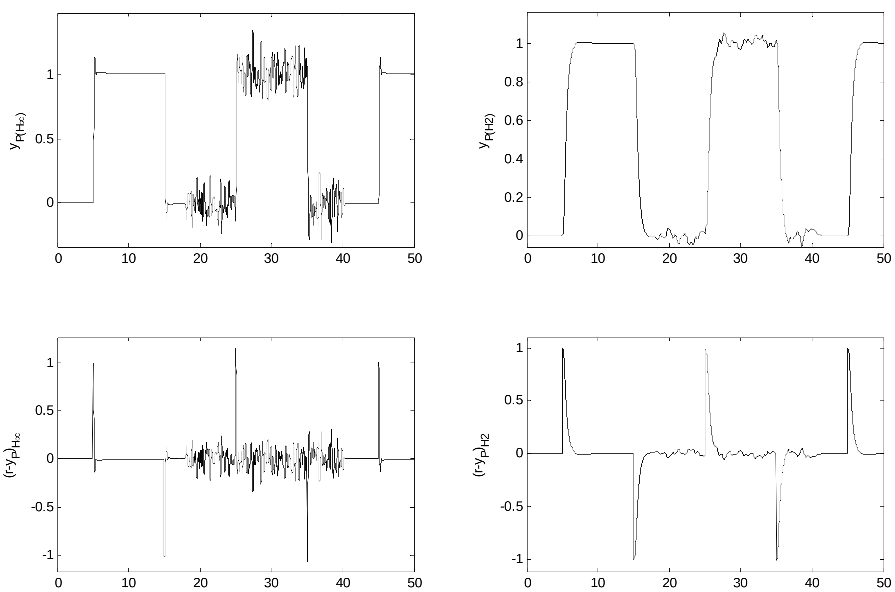
[18] HaKgglund, T., Astrom, J.K., 2000, "Supervision of [1] adaptive control algorithms", *Automatica*, 36, 1171-1180.

[19] Margaliot, M., Hespanha, J.P., 2008, "Root-mean-square gains of switched linear systems: A variational approach", *Automatica,* 44, 2398-2402.

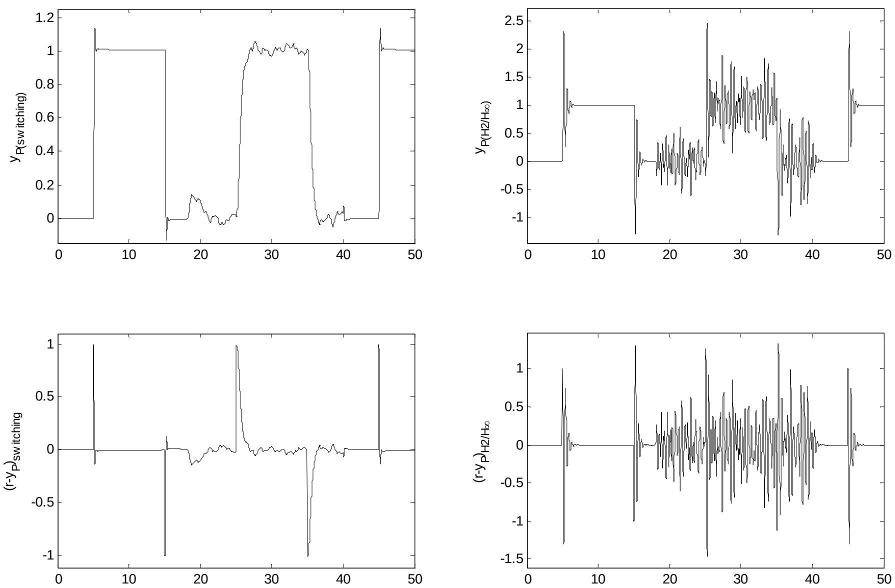
[20] Doyl, J., Francis, B., Tannenbaum, A., *Feedback Control Theory*. Macmillan Publishing Co., 1990.

[21] Vegte, J.V., *Feedback Control Systems*. New Jersey: Prentice Hall, 3th edition, 1994.

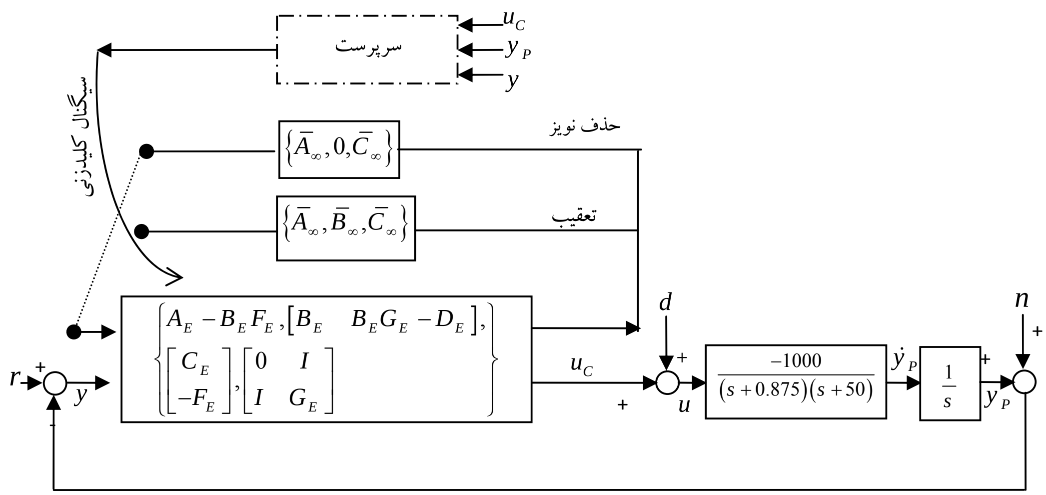
[22] Zhou, K., *Essentials of Robust Control*. New Jersey: Prentice Hall, 1998.



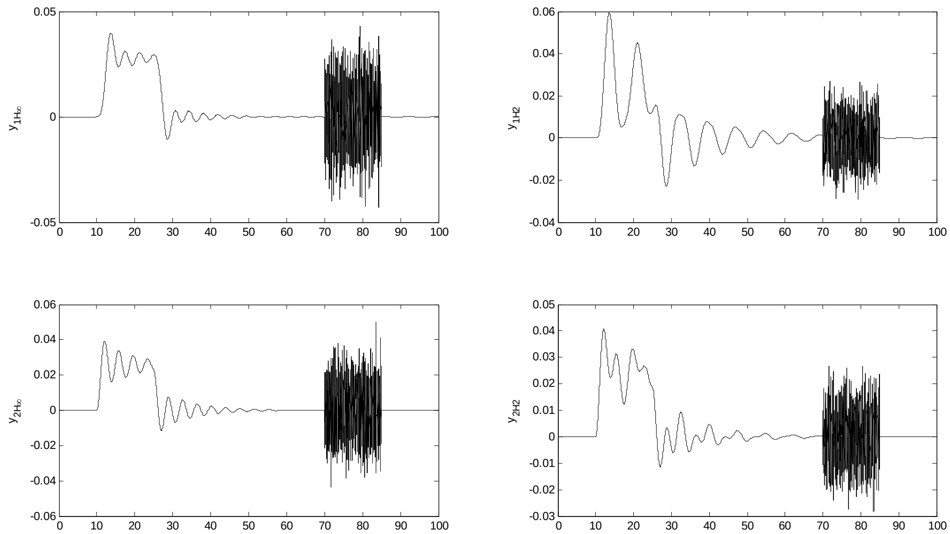
شکل ۷: به ترتیب از سمت راست، پاسخ حلقه بسته کنترل کننده‌های K_{H_2} و K_{H_∞} منحنی بالا خروجی y_P و منحنی های پایین خطای تعقیب $r-y_P$ مثال ۱



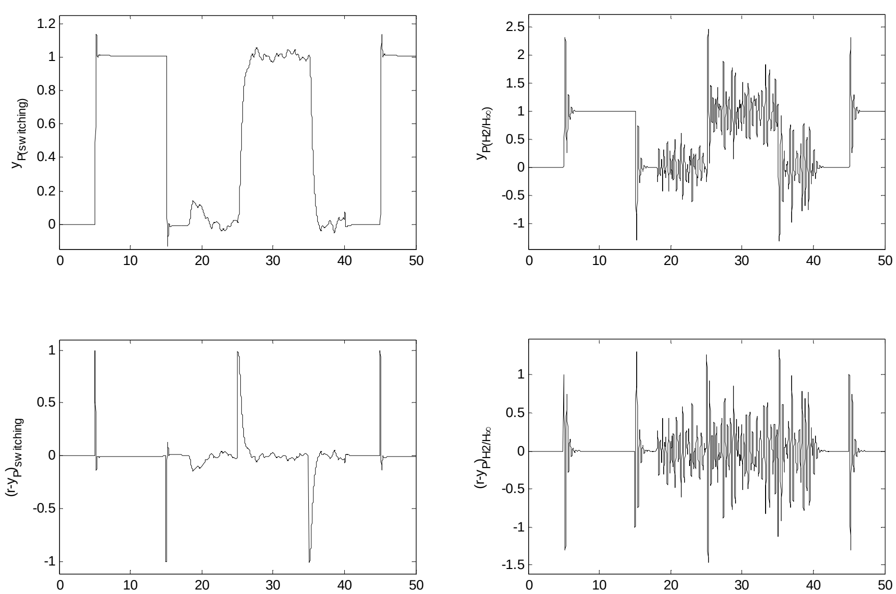
شکل ۸: پاسخ حلقه بسته کنترل کننده K_{H_2/H_∞} و کنترل کننده کلیدزنی با سرپرستی $K_{switching}$ منحنی بالا خروجی y_P و منحنی های پایین خطای تعقیب $r-y_P$ مثال ۱



شکل ۹: بلوک دیاگرام سیستم حلقه بسته با کنترل کننده کلیدزنی با سرپرست مثال ۱



شکل ۱۰: پاسخ حلقه بسته کنترل کننده‌های K_{H_2} و K_{H_∞} مثال ۲



شکل ۱۱: پاسخ حلقه بسته کنترل کننده K_{H_2/H_∞} و کنترل کننده کلیدزنی با سرپرستی $K_{switching}$ مثال ۲

مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۴، شماره ۳، پاییز ۱۳۸۹، صفحه ۲۸-۱۵

معرفی سیستم فازی شبه چند جمله‌ای تاکاگی-سوگنو-کانگ با کاربرد در شناسایی سیستم و کلاس بندی الگو

آرش شریفی[۱]، مهدی علیاری شوره‌دلی[۲]، محمد تشنه‌لب[۳]

[۱] مربی، گروه کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، a.sharifi@srbiau.ac.ir

[۲] استادیار، گروه مکاترونیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، m.aliyari@eetd.kntu.ac.ir

[۳] دانشیار، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، teshnehlab@eetd.kntu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۹/۶/۲۷، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۹/۹/۱۱)

چکیده: در این مقاله به معرفی ساختاری نوین از سیستم فازی تاکاگی-سوگنو-کانگ (*TSK*) که دارای بخش استخراج ویژگی در قسمت ورودی می‌باشد، می‌پردازیم. روش پیشنهادی تحت عنوان *Semi-Polynomial data Mapping Fuzzy Inference System* و به اختصار (*SPMFIS*) معرفی می‌شود. در روش پیشنهادی از یک نگاشت داده شبه چند جمله‌ای به منظور تبدیل ورودیهای اصلی به ورودیهای جدید با ابعاد کاهش یافته استفاده می‌شود. در گام بعد خروجی حاصل از نگاشت داده شبه چند جمله‌ای به عنوان ورودی سیستم فازی که در این مقاله از شبکه *Adaptive Network Based Fuzzy Inference System (ANFIS)* بدین منظور استفاده شده است به کار می‌رود. به منظور آموزش پارامترهای شبکه *ANFIS* و بخش نگاشت داده شبه چند جمله‌ای، از الگوریتم گرادیان نزولی استفاده شده است. همچنین به منظور بررسی کارایی روش مطرح شده، کاربرد آن در کلاس بندی چندین مجموعه داده استاندارد، شناسایی سیستم و پیش‌بینی سری زمانی مورد بررسی و آزمایش قرار گرفته است. نتایج حاصل از این شبیه‌سازی‌ها دلالت بر کارایی بالای روش مطرح شده در برابر روشهای مرسوم شناسایی و کلاس بندی دارد.

کلمات کلیدی: سیستم فازی *TSK*، کاهش ابعاد، الگوریتم گرادیان نزولی، کلاس‌بندی الگو، شناسایی سیستم و پیش‌بینی سریهای زمانی.

Semi-polynomial Takagi-Sugeno-Kang Type Fuzzy System for System Identification and Pattern Classification

A. Sharifi, M. Aliyari Shoorehdeli, M. Teshnehlab

Abstract: In this study a new type of Takagi-Sugeno-Kang (TSK) type fuzzy system with dimension reduction section at the input stage called Semi-polynomial data Mapping Fuzzy Inference System (SPMFIS) is proposed. In the proposed method a semi-polynomial feature map is used to transform the input variables to new extracted features with low dimensions. At the next step, these new features are used as the input vector of ANFIS structure. Also gradient descent algorithm is chosen for training parameters of ANFIS and SPM parts of the proposed method. In order to evaluate the capability of the proposed method, its applications in classification of some different benchmark data sets, system identification, and time series prediction have been studied. The results show that the proposed method performs better than the conventional models in classification, identification and time series prediction.

Keywords: TSK type fuzzy system, gradient descent algorithm, pattern classification, system identification and time series prediction.

۱ – مقدمه

شبکه های عصبی و سیستم‌های فازی به عنوان تقریب‌گرهای عمومی شناخته شده که می‌توانند هر تابع غیر خطی داده شده را به شرط وجود تعداد کافی از نرون در لایه میانی و قواعد فازی با دقت مورد نظر تخمین بزنند [۵۲، ۵۳]. مطالعات اخیر در زمینه شبکه‌های عصبی و سیستم‌های فازی نشان دهنده این مساله است که ترکیب این دو روش در زمینه شناسایی سیستم‌های غیر خطی بسیار موثر می‌باشد.

در زمان طراحی یک سیستم فازی، استفاده از روش جدول جستجو به منظور طراحی و استخراج قوانین یک روش معمول می‌باشد که روشی بسیار زمان‌بر است، خصوصا زمانی که تعداد ورودی‌ها و توابع تعلق در نظر گرفته شده برای هر ورودی زیاد باشند. دلیل این امر رشد نمایی تعداد قوانین فازی در این حالت می‌باشد. یک مجموعه قانون فازی بزرگ سبب پر شدن سریع حافظه سیستم شده و سیستم فازی متناظر به منظور پیاده سازی با مشکلات فراوان مواجه خواهد شد. رهیافت‌های متعددی به منظور طراحی مناسب سیستم فازی معرفی شده‌اند [۷-۱]. برخی از محققین به بررسی طراحی خودکار ساختمان یک سیستم فازی با استفاده از روشهای جستجوی تابو [۸]، الگوریتم ژنتیک [۲، ۵، ۶]، برنامه ریزی تکاملی [۴] و غیره پرداخته اند. تحقیقاتی نیز در زمینه افراز فضای ورودی به منظور تخمین قواعد و پارامترهای یک سیستم فازی منفرد انجام شده است [۱۷، ۱۸].

در حالت کلی اگر تعداد ورودی‌های یک سیستم فازی n و تعداد توابع تعلق در نظر گرفته شده برای هر ورودی m باشد، تعداد کل قواعد فازی ایجاد شده برابر با m^n می‌باشد. مشاهده می‌شود که تعداد قوانین سیستم فازی به صورت نمایی بر اساس تعداد متغیرهای ورودی رشد خواهد کرد. این مشکل در زمینه سیستم‌های فازی در اصطلاح تحت عنوان *Curse of Dimensionality (COD)* شناخته می‌شود. مساله *COD* یک مشکل حل نشده در زمینه سیستم فازی و عصبی–فازی می‌باشد و کلیه راهکارهای ارائه شده هرکدام بخشی از مشکلات موجود در این زمینه را برطرف نموده‌اند [۱۹]. به عنوان یک راهکار و به منظور غلبه نسبی بر این مشکل، *Brown* [۱۶] پیشنهاد داده است تا چندین سیستم فازی با ابعاد کوچک در یک ساختار سلسله مراتبی مرتب شوند. بر این اساس رشد قوانین یک رشد خطی بر اساس ورودی در برابر رشد نمایی متداول خواهد شد. این روش ایده اصلی سیستم‌های فازی سلسله مراتبی می‌باشد [۲۳]. همچنین ثابت شده است که ساختارهای سلسله مراتبی فازی نیز شناساگرهای عمومی می‌باشند [۲۴، ۲۵]. برخی از مشکلات موجود در زمینه طراحی سیستم‌های فازی توسط محققین در شاخه سیستم‌های فازی سلسله مراتبی حل شده است [۱۶–۸] و [۲۲–۲۰].

رهیافت دیگر به منظور غلبه بر مشکل *COD*، کاهش ابعاد داده ورودی به یک تعداد قابل قبول به لحاظ محاسباتی در گام اول و استفاده از این داده کاهش یافته به عنوان ورودی سیستم فازی در گام دوم می‌باشد [۵۱–۴۸]. در بسیاری از موارد این دو گام به صورت دو مرحله مجزا از یکدیگر و بر اساس معیارهای مختلف انجام می‌شود که یکسان نبودن معیار کاهش ابعاد و روش طراحی سیستم فازی سبب می‌شود تا این روش‌ها کارایی مناسبی را نداشته باشند. عموم روشهای استخراج ویژگی موجود به عنوان یک روش پیش پردازش بر روی داده‌های موجود اعمال شده و در گام بعدی دادهای استخراج شده به عنوان ورودی‌های سیستم کلاس بندی و شناساگر مورد استفاده قرار می‌گیرند. این امر سبب می‌شود که ویژگیهای استخراج شده بر اساس خصوصیات شبکه آموزش پذیر نبوده و با توجه به غیر قابل تغییر بودن این ویژگی-های استخراج شده کارایی شبکه‌های استفاده شده محدود شود.

این مقاله سعی در تلفیق دو مرحله مطروحه و یکپارچه نمودن آنها تحت یک ساختار را دارد. این ساختار جدید تحت عنوان *SPMFIS* معرفی می‌شود. در روش معرفی شده یک نگاشت داده شبه چند جمله‌ای (*SPM*) در بخش ورودی سیستم فازی قرار گرفته که وظیفه کاهش ابعاد داده ورودی به یک اندازه قابل قبول را بر عهده دارد. همچنین به منظور آموزش پارامترهای ساختار *ANFIS* [۲۶] که به عنوان سیستم فازی مورد استفاده قرار گرفته و نیز پارامترهای بخش *SPM*، الگوریتم آموزشی مبتنی بر گرادیان نزولی مطرح می‌شود. الگوریتم آموزشی گرادیان نزولی از جمله روشهای متداول در آموزش شبکه‌های عصبی و عصبی–فازی می‌باشد که به سبب سادگی محاسبات و پیاده سازی و سرعت مناسب به عنوان روش آموزش در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است. نکته مهم در این میان معیار یکسان آموزش برای هر دو بخش *ANFIS* و *SPM* می‌باشد که سبب حصول کارایی بالا در روش مطرح شده به منظور استخراج ورودی‌های جدید و شناسایی حاصل از شبکه *ANFIS* می‌شود. این کارایی با آموزش هدفمند و با مربی برای بخش کاهش بعد از نوآوری‌های این نوشتار می‌باشد.

این مقاله بدین صورت سازماندهی شده است، سیستم استنتاج فازی *TSK* و ساختار *ANFIS* در بخش ۲ معرفی می‌شوند. مفهوم *SPM* در بخش ۳ بررسی می‌شود. ساختار شبکه *SPMFIS* و روش آموزش بر پایه گرادیان نزولی در بخش ۴ مطرح می‌شوند. شبیه سازی و نتایج در

بخش ۵ انجام خواهد شد و در پایان در بخش ۶ نتیجه گیری‌های نهایی بیان خواهند شد.

۲- مفاهیم اولیه

در این بخش به معرفی مفاهیم اولیه سیستم فازی *TSK* و ساختار شبکه *ANFIS* پرداخته شده و موارد مرتبط با این دو مفهوم در زمینه سیستم‌های فازی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۲-۱ سیستم استنتاج فازی TSK

سیستم‌های استنتاج فازی از مجموعه‌ای از قواعد اگر-آنگاه فازی تشکیل شده‌اند. یک مدل فازی *TSK* به فرم زیر می‌باشد [۲۷]:

R_j : if x_1 is A_{1j} and x_2 is A_{2j} and … and x_n is A_{nj}
Then $y = g_j(x_1,x_2,\dots,x_n)$ $(j=1,2,\dots,R)$

که در رابطه فوق، n تعداد متغیرهای ورودی، R تعداد قواعد فازی، A_{ij} مجموعه فازی متناظر با i-امین متغیر ورودی برای j-امین قانون فازی و g_j یک تابع ثابت از x_i می‌باشد که معمولا دارای یک فرم خطی ساده به صورت $g_j\ (x_1,x_2,\dots,x_n) = q_0+ q_1x_1+\dots+ q_nx_n$ می‌باشد. خروجی نهایی سیستم فازی فوق به صورت زیر قابل بیان است:

$$y=\frac{\sum_{j=1}^{R} g_j(\cdot)T_{i=1}^{m_j}\mu_{ij}(x_i)}{\sum_{j=1}^{R} T_{i=1}^{m_j}\mu_{ij}(x_i)} \qquad (۱)$$

که در آن u_{ij} تابع تعلق برای مجموعه فازی A_{ij} است، m_j $(1\le m_j\le n)$ تعداد متغیرهای ورودی در بخش مقدم قوانین فازی است و T یک عملگر *T-norm* فازی می‌باشد. سیستم فازی *TSK* یک سیستم منفرد فازی می‌باشد. افراز فضای ورودی با استفاده از روشهای خوشه بندی، شبکه‌بندی و غیره به منظور کارایی بهتر سیستم فازی امری لازم و ضروری می‌باشد [۱۷]. همچنین برخی روشهای تطبیق پذیر به منظور تخمین شکل و تعداد توابع تعلق در بخش مقدم و پارامترهای آزاد در بخش تالی سیستم فازی مطرح شده‌اند [۷، ۱۸، ۲۸].

۲-۲ ساختار ANFIS

شبکه‌های عصبی و سیستم‌های فازی [۲۹] تخمین گرهای مستقل از مدل می‌باشند و قابلیت‌های مشابهی را در برخورد با عدم قطعیت‌ها و نویز از خود نشان می‌دهند. لذا امکان تبدیل کردن سیستم استنتاج فازی به فرم یک شبکه آموزش پذیر وجود دارد. شبکه‌ای که از این طریق به دست می‌آید می‌تواند روشهای یادگیری شبکه‌های عصبی را به منظور آموزش پارامترهای خود به کار گیرد. به‌علاوه ساختار حاصل از این طریق به صورت یک سیستم جعبه سیاه باقی نمانده و با توجه به قابلیت تفسیر پذیری سیستم‌های فازی مزایای بیشتری خواهد داشت و نتیجه نهایی به فرم قواعد زبانی قابل بیان خواهد بود [۳۰].

همانند سیستم‌های فازی، ساختار *ANFIS* نیز از دو بخش تشکیل شده است. بخش نخست مقدم و بخش دوم تالی نامیده می‌شود که این دو بخش توسط قواعد فازی در فرم یک شبکه به یکدیگر متصل می‌شوند. شکل (۱) ساختار یک شبکه *ANFIS* را در پنج لایه نمایش می‌دهد، که در آن لایه اول عمل فازی‌سازی را انجام می‌دهد، لایه دوم عمل *T-norm* فازی را برای بخش مقدم قواعد فازی انجام می‌دهد، لایه سوم به منظور نرمال‌سازی به کار می‌رود، لایه چهارم بخش تالی قواعد فازی را ایجاد می‌نماید و در نهایت لایه پنجم خروجی نهایی سیستم را محاسبه می‌کند. روابط پیش‌خور برای ساختار شبکه نمایش داده شده در شکل (۱) به شرح زیر می‌باشند:

$$w_{jk}=\mu_{M_j^1}(x_1)\cdot\mu_{M_k^2}(x_2), \qquad j,k=1,2,\dots,m \qquad (۲)$$

$$\overline{w}_{jk}=\frac{w_{jk}}{\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m} w_{i_1i_2}}, \qquad j,k=1,2,\dots,m \qquad (۳)$$

$$f_{jk}=q_{0,jk}+q_{1,jk}\cdot x_1+q_{2,jk}\cdot x_2 \qquad (۴)$$

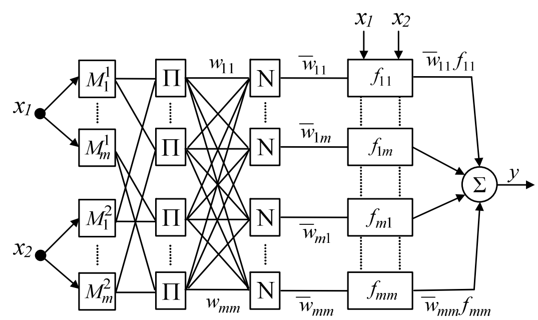
که در روابط فوق m نشان دهنده تعداد توابع تعلق برای هر متغیر ورودی بوده و $\{q_0,q_1,q_2\}$ اعداد حقیقی متناظر با وزنهای خطی در بخش تالی سیستم *ANFIS* می‌باشند. خروجی نهایی y شبکه *ANFIS* به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$y=\frac{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} f_{jk}\mu_{M_j^1}(x_1)\mu_{M_k^2}(x_2)}{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\mu_{M_j^1}(x_1)\mu_{M_k^2}(x_2)}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} f_{jk}\overline{w}_{jk} \qquad (۵)$$

به منظور مدل‌سازی سیستم‌های غیر خطی پیچیده، مدل *ANFIS* فضای ورودی را به بخش‌های مختلفی افراز می‌نماید به عبارتی فضای ورودی به نواحی محلی فراوانی تقسیم می‌شود [۱۷]. شبکه *ANFIS* از توابع تعلق فازی بمنظور تقسیم هر بعد ورودی استفاده می‌نماید. این توابع تعلق با یکدیگر همپوشانی دارند، به عبارتی یک ورودی منفرد سبب فعال شدن همزمان حداقل دو تابع تعلق خواهد شد. قابلیت شبکه *ANFIS* به تعداد توابع تعلق در نظر گرفته شده برای هر بعد ورودی وابسته است. معمولا توابع تعلق استفاده شده توابع زنگی شکل گوسی با میزان بیشینه برابر با یک و کمینه برابر با صفر می‌باشند که به فرم زیر قابل تعریف می‌باشند.

$$\mu_{M_i}(x)=\exp\left\{-\left(\frac{x-\bar{x}_i}{\sigma_i}\right)^2\right\} \qquad (۶)$$

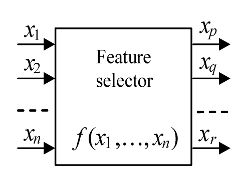
که در رابطه فوق $\{\bar{x}_i,\sigma_i\}$ پارامترهای توابع تعلق هستند که بر روی شکل آن تاثیر می‌گذارند.



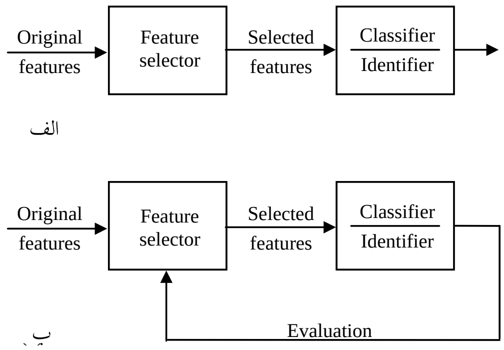
شکل ۱: ساختار شبکه *ANFIS* دارای دو ورودی

۳- نگاشت داده شبه چند جمله‌ای

یافتن فرم نمایش با ابعاد پایین از یک داده با ابعاد بالا اولین گام در بازشناسی الگو و شناسایی سیستم می‌باشد. استفاده از داده‌های با بعد کمتر سبب می‌شود تا کلاس‌بندی و شناسایی سریع‌تر و مقاوم‌تر انجام شوند [۳۱]. از همین رو روشهای کاهش ابعاد مختلفی تا کنون معرفی شده‌اند [۳۵-۳۱]. با داشتن مجموعه‌ای از متغیرهای ورودی، کاهش ابعاد به دو صورت کلی می‌تواند انجام شود. اولین روش شناسایی متغیرهایی است که در کلاس‌بندی و یا شناسایی بی‌تاثیر یا بسیار کم تاثیر می‌باشند. از همین رو این عمل مشابه با یافتن تعداد r متغیر از مجموع n متغیر موجود می‌باشد. این روش در اصطلاح انتخاب ویژگی نامیده می‌شود (شکل (۲)). روش انتخاب ویژگی در کاربردهای بسیاری مورد استفاده قرار گرفته است، همانند دسته بندی خودکار متن [۳۶] و نمایه‌بندی داده‌ها [۳۷]. در حالت کلی روشهای انتخاب ویژگی به دو دسته اصلی تقسیم می‌شوند: روشهای فیلتر و روشهای بسته بندی که دیاگرام آنها در شکل‌های (۳)-الف و (۳)-ب نمایش داده شده است [۳۸].

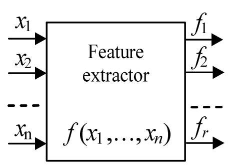


شکل ۲: کاهش ابعاد با استفاده از روش انتخاب ویژگی



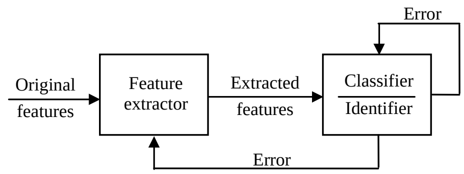
شکل ۳: مقایسه میان روشهای الف) فیلتر و ب) بسته بندی در انتخاب ویژگی

رهیافت دوم به منظور کاهش ابعاد داده، یافتن تبدیلی از n متغیر ورودی به تعداد r متغیر خروجی می‌باشد. این روش در اصطلاح انتخاب ویژگی در فضای تبدیل و یا به اختصار استخراج ویژگی نامیده می‌شود (شکل (۴)). این تبدیل می‌تواند به صورت خطی و یا غیر خطی از ویژگیهای اولیه باشد و ممکن است با مربی و یا بدون مربی انجام شود [۳۹].



شکل ۴: کاهش ابعاد با استفاده از روش استخراج ویژگی

این مقاله یک ساختار *ANFIS* با یک استخراج کننده ویژگی در بخش ورودی که *SPM* نامیده می‌شود را معرفی می‌نماید. دیاگرام کلی این روش در شکل (۵) نمایش داده شده است. در روش پیشنهادی از یک نگاشت داده شبه چند جمله‌ای به منظور تبدیل ورودیهای اصلی به ورودیهای جدید با ابعاد کاهش یافته استفاده می‌شود. در گام بعد خروجی حاصل از نگاشت داده شبه چند جمله‌ای به عنوان ورودی سیستم فازی که در این مقاله شبکه *ANFIS* در نظر گرفته شده است مورد استفاده قرار می‌گیرند. در روش مطرح شده، کاهش ابعاد و کلاس‌بندی/شناسایی به صورت همزمان و با یک معیار کارایی یکسان انجام می‌شود. در این روش شبکه *ANFIS* در ادامه بخش استخراج ویژگی قرار می‌گیرد تا مشکلات موجود در روشهای منفصل استخراج ویژگی که در بخش مقدمه به آنها اشاره شد را برطرف نماید.



شکل ۵: شمای کلی روش مطرح شده

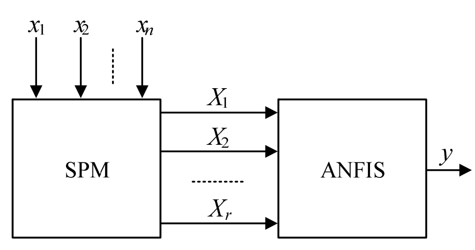
در روش مطرح شده، بلوک استخراج ویژگی (*SPM*) بردار ورودی *n* بعدی $\vec{\mathbf{x}}=\{x_1,...,x_n\}$ را به یک بردار ویژگی جدید *r* بعدی $\vec{\mathbf{X}}=\{X_1,...,X_r\}$ تبدیل می‌نماید. معادله زیر به فرم یک شبه چند جمله‌ای برای این منظور استفاده می‌شود:

$$X_j = a_1^j x_1^{p_1^j} + a_2^j x_2^{p_2^j} + ... + a_n^j x_n^{p_n^j}, \quad j=1,2,...,r \qquad (۷)$$

که در رابطه فوق *r* نشان دهنده تعداد ویژگیهای تبدیل شده، X_j $(j=1,..,r)$ نشان دهنده ویژگی جدید $(r \le n)$ و متغیرهای $a_1,..,a_n$ و $p_1,...,p_n$ اعداد حقیقی هستند. قابل ذکر است که بردار ورودی $\vec{\mathbf{x}}$ می‌باید در بازه $[l_1, l_2]$ که در آن $0<l_1<l_2<+\infty$ می‌باشد، نرمال شود.

۴- ساختار SPMFIS و روش آموزش

در این بخش ساختار *SPMFIS* و روش آموزش بر اساس الگوریتم گرادیان نزولی مطرح می‌شود. همانطور که قبلا اشاره شد، *SPMFIS* ساختار جدیدی از شبکه *ANFIS* می‌باشد که از روش نگاشت داده شبه چند جمله‌ای به منظور استخراج ویژگی در بخش ورودی آن استفاده شده است. داده با ابعاد بالا به عنوان ورودی بلوک *SPM* استفاده شده و خروجی آن به عنوان بردار ورودی شبکه *ANFIS* استفاده می‌شود. شکل (۶) شمای کلی *SPMFIS* با تعداد *n* متغیر ورودی $x_1,...,x_n$ و تعداد *r* ویژگی تبدیل شده $X_1,...,X_r$ را نشان می‌دهد.



شکل۶: ساختار کلی شبکه *SPMFIS*

معادلات پیش‌خور برای یک شبکه *ANFIS* با تعداد *r* متغیر ورودی و تعداد *m* تابع تعلق برای هر ورودی به صورت زیر قابل بیان است:

$$w_{i_1 i_2 ... i_r} = \mu_{M_{i_1}^1}(X_1)\cdot\mu_{M_{i_2}^2}(X_2)\cdot...\cdot\mu_{M_{i_r}^r}(X_r) \qquad (۸)$$

$$\overline{w}_{i_1 i_2 ... i_r} = \frac{w_{i_1 i_2 ... i_r}}{\sum_{j_1=1}^{m}\sum_{j_2=1}^{m}...\sum_{j_r=1}^{m} w_{j_1 j_2 ... j_r}} \qquad (۹)$$

$$f_{i_1 i_2 ... i_r} = q_{0,i_1 i_2 ... i_r} + \sum_{j=1}^{r} q_{j,i_1 i_2 ... i_r} X_j \qquad (۱۰)$$

که در روابط بالا $i_k=1,...,m$ و اندیس‌های موجود در $\mu_{M_{i_k}^k}(X_k)$ بیان می‌کنند که این i_k-امین خروجی تابع تعلق برای *k*-امین متغیر ورودی است. همچنین اندیس‌های موجود در $q_{k,i_1 i_2 ... i_r}$ نشان می‌دهند که این *k*-امین وزن خطی برای $i_1 i_2 ... i_r$-امین قانون فازی می‌باشد. در این حالت خروجی نهایی شبکه *ANFIS* به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$y = \frac{\sum_{j_1=1}^{m}\sum_{j_2=1}^{m}...\sum_{j_r=1}^{m} w_{j_1 j_2 ... j_r} f_{j_1 j_2 ... j_r}}{\sum_{j_1=1}^{m}\sum_{j_2=1}^{m}...\sum_{j_r=1}^{m} w_{j_1 j_2 ... j_r}} \qquad (۱۱)$$

با در نظر گرفتن y^* به عنوان مقدار هدف و *y* به عنوان خروجی شبکه *ANFIS*، معیار ارزیابی به صورت زیر قابل تعریف می‌باشد:

$$E_1 = \frac{1}{2}(y^* - y)^2 = \frac{1}{2}e^2 \qquad (۱۲)$$

الگوریتم نهایی آموزش شبکه *ANFIS* با تعداد *r* متغیر ورودی و تعداد *m* تابع تعلق برای هر ورودی در زیر خلاصه شده است:

$$\Delta q_{j,i_1 i_2 ... i_r} = -\eta_{FIS}\frac{\partial E_1}{\partial q_{j,i_1 i_2 ... i_r}} = \eta_{FIS}\, e\, \overline{w}_{i_1 i_2 ... i_r} x_j \qquad (۱۳)$$

$$\Delta q_{0,i_1 i_2 ... i_r} = -\eta_{FIS}\frac{\partial E_1}{\partial q_{0,i_1 i_2 ... i_r}} = \eta_{FIS}\, e\, \overline{w}_{i_1 i_2 ... i_r} \qquad (۱۴)$$

$$\Delta \overline{x}_{M_{i_k}^j} = -\eta_{FIS}\frac{\partial E_1}{\partial \overline{x}_{M_{i_k}^j}} = \eta_{FIS}\, e.\frac{\partial y}{\partial \overline{x}_{M_{i_k}^j}} \qquad (۱۵)$$

$$\Delta \sigma_{M_{i_k}^j} = -\eta_{FIS}\frac{\partial E_1}{\partial \sigma_{M_{i_k}^j}} = \eta_{FIS}\, e.\frac{\partial y}{\partial \sigma_{M_{i_k}^j}} \qquad (۱۶)$$

که در روابط فوق $j=1,...,r$ ، $i_k=1,...,m$ و η_{FIS} نرخ آموزش بخش *ANFIS* از ساختار *SPMFIS* می‌باشد که از بازه [۰،۱] انتخاب می‌شود.

معادلات پس‌خور و روش به روز رسانی پارامترهای بخش *SPM* از ساختار *SPMFIS* در ذیل آورده شده است:

$$\Delta a_i^j = -\eta_{SPM}\frac{\partial E_1}{\partial a_i^j} = -\eta_{SPM}\frac{\partial E_1}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial X_j}.\frac{\partial X_j}{\partial a_i^j} \qquad (۱۷)$$

$$\Delta p_i^j = -\eta_{SPM}\frac{\partial E_1}{\partial p_i^j} = -\eta_{SPM}\frac{\partial E_1}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial X_j}.\frac{\partial X_j}{\partial p_i^j} \qquad (۱۸)$$

که در روابط فوق $i=1,2,...,n$ و $j=1,2,...,r$ به ترتیب نشان دهنده متغیرهای ورودی و ویژگیهای استخراج شده می‌باشند. در

معادلات فوق، η_{SPM} نشان دهنده نرخ آموزش برای بخش *SPM* از ساختار *SPMFIS* می‌باشد که از بازه [۰،۱] انتخاب می‌شود. معادلات نهایی مربوط به آموزش پارامترهای این بخش به شرح زیر می‌باشند:

$$\Delta a_i^j = e\,\eta_{SPM}\, S\left(x_i^{p_i^j}\right) \quad (۱۹)$$

$$\Delta p_i^j = e\,\eta_{SPM}\, S\left(a_i^j x_i^{p_i^j}\right)\ln\left(x_i\right) \quad (۲۰)$$

که در روابط فوق:

$$S = \frac{\partial y}{\partial X_j} \quad (۲۱)$$

قابل ذکر است که در رابطه (۲۰)، عبارت *ln(.)* نمایانگر عملگر لگاریتم طبیعی می‌باشد.

۵- شبیه سازی و نتایج

در این بخش کارایی روش معرفی شده با روشهای متداولی از قبیل شبکه‌های عصبی چند لایه[1]، شبکه عصبی چند لایه به همراه کاهش ویژگی با استفاده از آنالیز مولفه پایه[2]، شبکه های پایه شعاعی[3] و شبکه *ANFIS* در کلاس بندی چندین مجموعه داده استاندارد، شناسایی سیستم و پیش بینی سری زمانی آشوبناک مکی-گلاس مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۵-۱- کلاس‌بندی الگو

در این بخش به منظور بررسی قابلیت کلاس بندی سیستم معرفی شده، کاربرد آن در کلاس بندی چندین مجموعه داده مورد بررسی قرار گرفته است. مجموعه داده‌های استفاده شده برای این منظور از منابع یادگیری ماشین *UCI* گرفته شده‌اند [۴۰] که هر مجموعه داده دارای مقادیر پیوسته و صحیح می‌باشد. این مجموعه شامل داده‌های *Iris*, *Wine*, *Pima-Indians diabetic* و *Statlog heart* می‌باشد. جدول (۱) مشخصات این چهار مجموعه داده را نمایش می‌دهد. از آنجا که در این مجموعه داده‌ها هیچ داده آزمونی مشخص نشده است، در این مقاله از روش ۱۰-تاکردن داده‌ها[4] به منظور بررسی کارآیی روش مطرح شده استفاده می‌شود، بدین ترتیب که هر مجموعه داده به ۱۰ بخش تقسیم شده و در هر اجرا یکی از زیر دسته‌ها به عنوان داده آزمون استفاده شده و این عمل ۱۰ بار تکرار می‌شود.

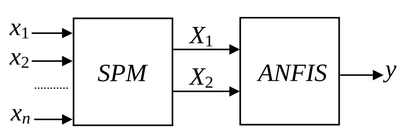
جدول ۱: مشخصات مجموعه داده‌های استفاده شده

Data set	# Pattern	# Attributes	# Class
Iris	150	4	3
Pima Indians	768	8	2
Wine	178	13	3
Statlog heart	270	13	2

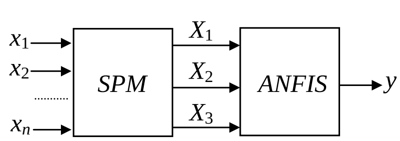
از آنجاکه نتایج شبکه *ANFIS* برای داده‌هایی با ابعاد بیش از شش متغیر ورودی به علت افزایش تعداد قوانین فازی مناسب نمی‌باشد، برای داده‌های *Wine, Pima-Indians diabetic* و *Statlog heart*، روش آنالیز مولفه پایه [۴۳-۴۱] در پیش پردازش اولیه و به منظور استخراج ویژگی به تعداد شش عدد مورد استفاده قرار می‌گیرد.

برای مجموعه داده *Iris*، ساختار شبکه *SPMFIS* در شکل (۷) نمایش داده شده است. همانطور که دیده می‌شود ساختار فوق تعداد *n* ویژگی اولیه را دریافت کرده و آن را به دو ویژگی جدید تبدیل می‌نماید. ساختار شبکه *ANFIS* استفاده شده نیز شامل دو متغیر ورودی می‌باشد که برای هر ورودی تعداد دو تابع تعلق در نظر گرفته شده است. بر همین اساس مجموع کل قوانین فازی در این ساختار برابر با چهار قانون فازی می‌باشد.

برای داده‌های *Wine, Pima-Indians diabetic* و *Statlog heart* علاوه بر ساختار نمایش داده شده در شکل (۷)، ساختاری دیگر با تعداد سه ویژگی استخراج شده مورد استفاده قرار گرفته است که در شکل (۸) نمایش داده شده است. در این ساختار شبکه *ANFIS* استفاده شده دارای سه متغیر ورودی و برای هر ورودی تعداد دو تابع تعلق می‌باشد و کل تعداد قوانین فازی در این حالت برابر با هشت قانون فازی می‌باشد.



شکل۷: ساختار شبکه *SPMFIS* با دو ویژگی تبدیل یافته



شکل۸: ساختار شبکه *SPMFIS* با سه ویژگی تبدیل یافته

همانطور که اشاره شد در این بخش به منظور مقایسه توانایی روش مطرح شده در، روش پیشنهادی با شبکه‌های *MLP*، *RBF* و

[1] Multi Layer Perceptron (MLP)
[2] Principal Component Analysis (PCA)
[3] Radial Basis Function (RBF)
[4] 10-Fold Cross Validation

ANFIS مورد مقایسه قرار گرفته است. شبکه عصبی *MLP* از مجموعه‌ای از نورون‌ها در یک ساختار لایه‌ای تشکیل شده است که هر لایه دارای یک تابع فعال سازی به صورت خطی و یا غیر خطی می‌باشد. تعداد نورون‌ها در هر لایه، تعداد کلی لایه‌های شبکه و نوع توابع فعال سازی استفاده شده در هر لایه تعیین کننده قابلیت کلی شبکه *MLP* می‌باشند.

شبکه *RBF* به عنوان یک شبکه دو لایه در نظر گرفته می‌شود که نورون‌های لایه اول عموما از نوع گوسی بوده و لایه دوم یک لایه خطی می‌باشد که به منظور ایجاد خروجی نهایی در نظر گرفته می‌شود.

برای تمامی مجموعه دادها، ساختار شبکه *MLP* استفاده شده شامل سه لایه می‌باشد که توابع فعال سازی لایه‌های اول و دوم به صورت سیگموئید دو قطبی و لایه سوم دارای تابع فعال سازی خطی می‌باشد. تعداد نورون‌های استفاده شده در لایه‌های مختلف شبکه عصبی و نیز لایه اول شبکه *RBF* برای هر مجموعه داده به صورت تجربی به دست آمده است. قابل ذکر است که استفاده از تعداد بیشتر نورون در ساختارهای *MLP* و *RBF* پاسخ‌های بهتری را ایجاد نکرده و در برخی موارد موجب بدتر شدن پاسخ‌های حاصل می‌گردید.

در شبیه سازی‌های مختلف برای مجموعه داده‌های استفاده شده، دقت کلاس‌بندی برای داده‌های آموزش و آزمون مورد بررسی قرار گرفته است. برای دو مجموعه داده *Pima-Indians diabetic* و *Statlog heart* علاوه بر معیار دقت کلاس‌بندی، از دو معیار حساسیت[1] و اختصاصی بودن[2] نیز استفاده شده است [۴۴]. معیار حساسیت (یادآوری) نشان دهنده نسبتی از حالات مثبت است که به همین عنوان شناخته شده‌اند و معیار اختصاصی بودن نشان دهنده نسبتی از حالات منفی است که درست تشخیص داده شده‌اند. این دو معیار به صورت زیر قابل تعریف هستند:

$$Sensitivity = \frac{TP}{TP + FN} \qquad (۲۲)$$

$$Specificity = \frac{TN}{TN + FP} \qquad (۲۳)$$

که در روابط فوق، یک حالت غیر نرمال درست تعیین شده به نام (*TP*) نامیده می‌شود، یک تشخیص نادرست از یک وضعیت غیر نرمال به نام (*FN*) نامیده می‌شود، یک تشخیص نادرست از یک حالت نرمال (*FP*) نامیده می‌شود و در نهایت یک حالت نرمال درست تشخیص داده شده (*TN*) خوانده می‌شود..

همانطور که اشاره شد در شبیه‌سازی های انجام شده، از روش ۱۰-تا کردن[3] داده‌ها استفاده شده است. میانگین نتایج دقت کلاس‌بندی برای داده‌های آموزش و آزمون برای مجموعه داده‌های *Iris* و *Wine* به ترتیب در جداول (۲) و (۳) نمایش داده شده است. در این جداول *Structure* نشان دهنده ساختار شبکه *MLP*، تعداد نرون‌های شبکه *RBF* و تعداد قواعد فازی برای ساختارهای *ANFIS* و *SPMFIS* می‌باشد. همچنین *Parameter* نشان دهنده تعداد کل پارامترهای آموزش پذیر در ساختارهای استفاده شده بوده و $SPMFIS^2$ و $SPMFIS^3$ به ترتیب نشان دهنده ساختارهای *SPMFIS* با تعداد دو و سه ویژگی استخراج شده می‌باشند. در این حالت برای مجموعه داده *Iris* نرخ‌های آموزش η_{FIS} و η_{SPM} به ترتیب برابر با ۰.۱۵ و ۰.۰۵ و برای مجموعه داده *Wine* برابر با ۰.۱ و ۰.۰۵ انتخاب شده‌اند.

جدول ۲: میانگین نتایج صحت کلاس‌بندی برای داده‌های *Iris*

Network	MLP	RBF	ANFIS	$SPMFIS^2$
Train	94.08	94.25	97.33	97.00
Test	91.67	92.00	94.67	95.67
Epoch	1000	500	100	100
Structure	4-4-1	15	16	4
Parameter	45	90	96	36

جدول ۳: میانگین نتایج صحت کلاس‌بندی برای داده‌های *Wine*

Network	MLP	RBF	ANFIS	$SPMFIS^2$	$SPMFIS^3$
Train	96.15	96.59	97.33	97.56	98.22
Test	90.70	90.47	92.79	93.26	94.19
Epoch	1000	500	100	100	100
Structure	5-7-1	15	64	4	8
Parameter	85	120	472	44	80

میانگین نتایج دقت کلاس‌بندی، معیارهای حساسیت و اختصاصی بودن برای داده‌های آموزش و آزمون *Pima-Indians diabetic* و *Statlog heart* به ترتیب در جداول (۴) و (۵) نمایش داده شده است. در این حالت برای مجموعه داده *Pima-Indians diabetic* نرخ‌های آموزش η_{FIS} و η_{SPM} به ترتیب برابر با ۰.۱ و ۰.۰۳ و برای مجموعه داده *Statlog heart* برابر با ۰.۱۵ و ۰.۰۷ انتخاب شده‌اند.

[1] Sensitivity
[2] Specificity
[3] 10-fold cross validation

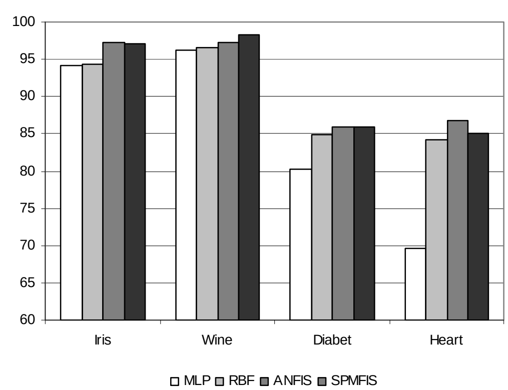
جدول ۴: میانگین نتایج حاصل برای داده‌های *Pima-Indians diabetic*

Network	MLP	RBF	ANFIS	SPMFIS^2	SPMFIS^3
Train	80.27	84.85	85.91	85.74	85.97
Test	78.24	82.50	81.99	82.94	85.29
Spec.	70.53	70.04	74.90	73.22	75.74
Sens.	87.32	95.92	93.14	94.72	94.05
Epoch	1500	1000	200	100	100
Structure	7-10-1	30	64	4	8
Parameter	140	240	472	44	80

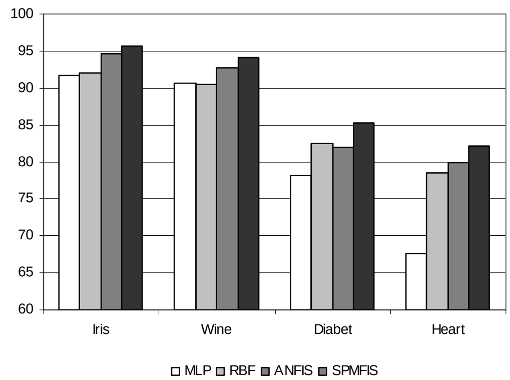
جدول ۵: میانگین نتایج حاصل برای داده‌های *Statlog heart*

Network	MLP	RBF	ANFIS	SPMFIS^2	SPMFIS^3
Train	69.61	84.29	86.80	84.48	85.07
Test	67.61	78.51	80.00	81.79	82.09
Spec.	55.75	79.33	78.25	81.00	80.83
Sens.	79.80	88.53	90.60	86.07	86.47
Epoch	1000	500	100	100	100
Structure	5-7-1	20	64	4	8
Parameter	85	160	472	44	80

شکل‌های (۹) و (۱۰) مقادیر میانگین صحت کلاس‌بندی داده *Iris* با استفاده از شبکه *SPMFIS^2* و نتایج حاصل از داده‌های *Wine,* *Pima-Indians diabetic* و *Statlog heart* را با استفاده از ساختار *SPMFIS^3* برای داده‌های آموزش و آزمون نشان می‌دهند.



شکل۹: میانگین صحت کلاس‌بندی برای داده‌های آموزش



شکل۱۰: میانگین صحت کلاس‌بندی برای داده‌های آزمون

در پایان مثال‌هایی از شبه جملات ایجاد شده در بخش استخراج ویژگی و پس از طی فرآیند یادگیری برای داده‌های کلاس بندی با استفاده از ساختار *SPMFIS^2* در جدول (۶) نمایش داده شده‌اند.

جدول ۶: نمونه شبه جملات ایجاد شده در مسائل کلاس بندی

Dataset		Produced Semi-Polynomial
Iris	X_1	$2.30\, x_1^{2.00} + 0.53\, x_2^{1.99} + 0.31 x_3^{1.54} + 0.09\, x_4^{1.24}$
	X_2	$-0.07\, x_1^{1.26} - 0.29\, x_2^{0.31} + 1.10 x_3^{0.95} - 0.41\, x_4^{-0.04}$
Wine	X_1	$3.02\, x_1^{0.88} - 1.91\, x_2^{1.57} + 0.23 x_3^{0.49} - 0.60\, x_4^{1.03} - 0.28\, x_5^{-0.30} - 1.28\, x_6^{1.19}$
	X_2	$-1.16\, x_1^{0.57} - 1.49\, x_2^{1.04} + 0.15 x_3^{0.62} - 0.02\, x_4^{1.46} + 0.30\, x_5^{0.37} + 1.04\, x_6^{0.16}$
Pima	X_1	$2.18\, x_1^{1.56} + 1.14\, x_2^{1.21} + 0.21 x_3^{2.24} - 1.27\, x_4^{1.44} + 0.54\, x_5^{2.19} + 1.26\, x_6^{2.18}$
	X_2	$0.93\, x_1^{1.61} + 1.34\, x_2^{1.16} - 0.85 x_3^{1.51} - 0.06\, x_4^{2.04} - 0.22\, x_5^{0.98} + 0.19\, x_6^{1.36}$
Statlog	X_1	$1.83\, x_1^{1.13} + 0.25\, x_2^{1.13} - 0.89 x_3^{0.35} - 0.27\, x_4^{0.80} - 0.17\, x_5^{1.30} - 0.39\, x_6^{1.36}$
	X_2	$1.63\, x_1^{1.29} + 0.76\, x_2^{1.32} + 0.27 x_3^{1.02} - 1.02\, x_4^{1.14} - 0.62\, x_5^{0.01} + 0.04\, x_6^{1.84}$

۵-۲- شناسایی سیستم

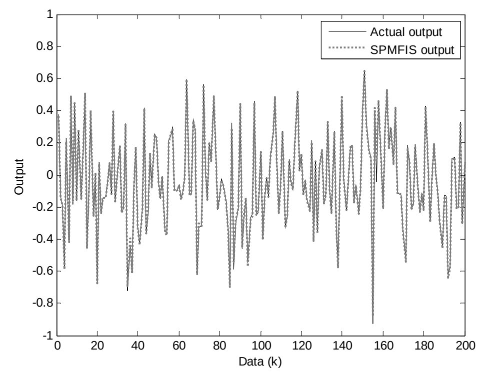
اولین مدل استفاده شده به منظور بررسی توانایی شناسایی روش مطروحه دارای معادله‌ای به فرم زیر می‌باشد [۴۵]:

$$y(t+1) = 0.4\,y(t) - 0.09\,y(t-1) - 0.1u(t-1) + 0.3u(t) + 0.05\,y(t)u(t) + 0.03\,y(t-1)u(t-1) \qquad (۲۴)$$

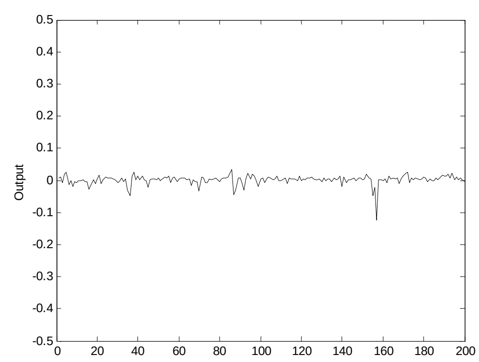
سیگنال ورودی $u(k)$، $k=0,1,\ldots,399$، یک نویز سفید گوسی با میانگین صفر و واریانس ۱.۰ می‌باشد. اولین ۲۰۰ داده موجود به عنوان داده‌های آموزش مورد استفاده قرار گرفته‌اند و بقیه داده‌ها به عنوان داده‌های آزمون استفاده شده‌اند. بردار ورودی ساختار *SPMFIS* در این حالت به صورت $x=[y(t), y(t-1), u(t), u(t-1)]$ می‌باشد. ساختار

شبکه استفاده شده در شکل(۷) نمایش داده شده است. برای شناسایی این مدل ۱۰ اجرای مستقل انجام شده است. خروجی مدل، خروجی حقیقی و خروجی خطای داده‌های آزمون به ترتیب در شکل‌های (۱۱) و (۱۲) نشان داده شده‌اند. نتایج میانگین خطای *MSE (Mean Square Error)* برای داده‌های آموزش و آزمون در ۱۰ اجرای مستقل در جدول (۷) نشان داده شده‌اند. در این حالت نرخ‌های آموزش η_{FIS} و η_{SPM} به ترتیب برابر با ۰.۲ و ۰.۲ انتخاب شده‌اند.

قابل ذکر است که در کلیه مسائل شناسایی سیستم در روش استفاده از شبکه عصبی چند لایه به همراه کاهش ویژگی با استفاده از آنالیز مولفه پایه، تعداد ویژگیهای استخراج شده برابر با سه ویژگی در نظر گرفته شده است.



شکل۱۱: خروجی واقعی و خروجی مدل برای داده‌های آزمون (مدل ۱)



شکل۱۲: خطای خروجی مدل برای داده‌های آزمون (مدل ۱)

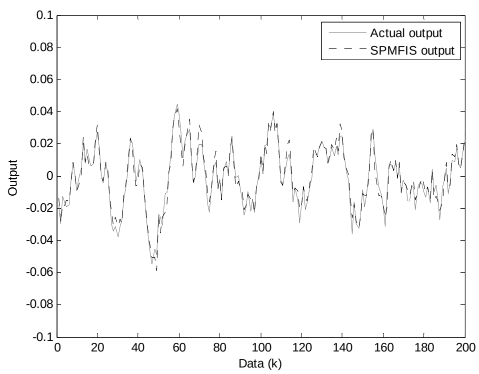
جدول ۷: مقایسه میان نتایج حاصل از روشهای مختلف برای مدل ۱

Network	e Train	e Test	Epoch	Structure	Parameter
MLP	2.93e-2	2.82e-2	1000	5-8-1	82
PCA-MLP	3.47e-3	5.29e-3	1000	3-5-1	38
RBF	1.06e-3	1.95e-3	500	20	120
ANFIS	2.98e-4	4.63e-3	100	16	96
SPMFIS^2	3.05e-4	4.13e-4	100	4	36

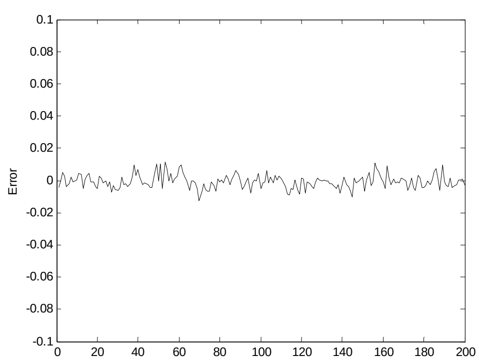
دومین مدل استفاده شده به منظور شناسایی دارای معادله‌ای به فرم زیر می‌باشد [۴۶]:

$$\begin{aligned} y(t+1) &= 2.627771\ y(t) - 2.333261\ y(t-1) \\ &+ 0.697676\ y(t-2) + 0.017203\ u(k) \\ &- 0.030862\ u(k-1) + 0.014086\ u(k-2) \end{aligned} \quad (۲۵)$$

در این حالت تعداد ۴۰۰ نمونه داده با استفاده از سیگنال تصادفی $u(k)$ (در بازه ۱- تا ۱) تولید شده‌اند. در این بخش ۲۰۰ داده اول به عنوان داده آموزش استفاده شده و ۲۰۰ نمونه باقیمانده به عنوان داده آزمون استفاده می‌شوند. در این مدل بردار ورودی به ساختار *SPMFIS* به صورت $x=[y(t), y(t\text{-}1), y(t\text{-}2), u(t), u(t\text{-}1), u(t\text{-}2)]$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین از دو ساختار *SPMFIS^2* و *SPMFIS^3* که در شکل‌های (۷) و (۸) نمایش داده شده‌اند استفاده شده است. در این حالت نیز ۱۰ اجرای مستقل انجام شده است. نتایج حاصل از خروجی مدل، خروجی واقعی سیستم و خطای حاصل از شناسایی مدل برای ساختار *SPMFIS^3* در شکل‌های (۱۳) و (۱۴) نمایش داده شده‌اند. میانگین نتایج خطای *MSE* حاصل از اعمال روشهای مختلف شناسایی برای مدل ۲ در جدول (۸) نمایش داده شده است. در این حالت نرخ-های آموزش η_{FIS} و η_{SPM} به ترتیب برابر با ۰.۲ و ۰.۱ انتخاب شده‌اند.



شکل۱۳: خروجی واقعی و خروجی مدل برای داده‌های آزمون (مدل ۲)



شکل۱۴: خطای خروجی مدل برای داده‌های آزمون (مدل ۲)

جدول ۸: مقایسه میان نتایج حاصل از روشهای مختلف برای مدل ۲

Network	e Train	e Test	Epoch	Structure	Parameter
MLP	1.71e-3	1.83e-3	1500	8-12-1	177
PCA-MLP	2.82e-4	3.21e-4	1500	5-7-1	70
RBF	1.46e-4	1.74e-4	1000	25	200
ANFIS	9.90e-5	1.17e-4	100	64	472
SPMFIS^2	8.75e-5	7.57e-5	100	4	44
SPMFIS^3	7.19e-5	5.40e-5	100	8	80

سومین مدل مطرح شده در این بخش یک تابع غیر خطی با معادلات زیر می‌باشد [۴۷]

$$y_{k+1} = f(y_k, y_{k-1}, y_{k-2}, u_k, u_{k-1}) \quad (۲۶)$$

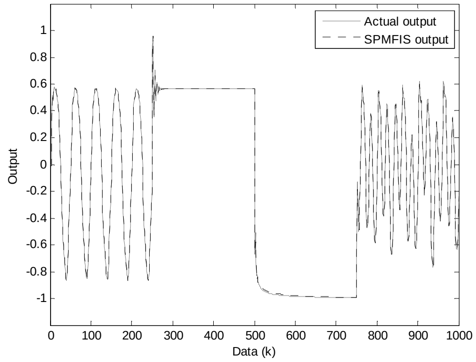
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{x_1 x_2 x_3 x_5 (x_3 - 1) + x_4}{1 + x_2^2 + x_3^2}$$

(۲۷)

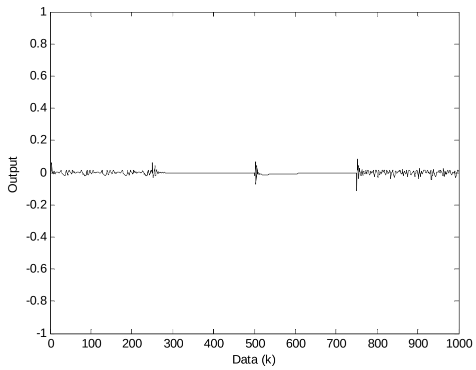
$$u_k = \begin{cases} \sin(\frac{\pi k}{25}) & 0 < k < 250 \\ +1.0 & 250 \le k < 500 \\ -1.0 & 500 \le k < 750 \\ 0.3\sin(\frac{\pi k}{25}) + 0.1\sin(\frac{\pi k}{32}) + 0.6\sin(\frac{\pi k}{10}) & \\ & 750 \le k < 1000 \end{cases}$$

در این حالت ۱۰۰۰ نمونه داده تولید شده‌اند که همگی به عنوان داده آموزش مورد استفاده قرار گرفته‌اند. بردار ورودی به ساختار *SPMFIS* برای مدل مطرح شده به صورت $x=[y(t), y(t-1), y(t-2), u(t), u(t-1)]$ در نظر گرفته می‌شود. ساختار *SPMFIS* با تعداد دو و سه ویژگی استخراج شده به ترتیب در شکل‌های (۷) و (۸) نمایش داده شده‌اند.

در این حالت نیز ۱۰ اجرای مستقل انجام پذیرفته است که نتایج حاصل از خروجی مدل و خروجی واقعی برای داده‌های آموزش و خطای حاصل از شناسایی مدل با داده‌های آموزش در شکل‌های (۱۵) و (۱۶) نمایش داده شده است. به علاوه میانگین نتایج خطای *MSE* در ۱۰ اجرای مختلف با استفاده از روشهای شناسایی گوناگون برای داده آموزش در جدول (۹) نمایش داده شده‌اند. در این حالت نرخ‌های آموزش η_{FIS} و η_{SPM} به ترتیب برابر با ۰.۱ و ۰.۱ انتخاب شده‌اند.



شکل۱۵: خروجی واقعی و خروجی مدل برای داده‌های آموزش (مدل ۳)



شکل۱۶: خطای خروجی مدل برای داده‌های آموزش (مدل ۳)

جدول ۹: مقایسه میان نتایج حاصل از روشهای مختلف برای مدل ۳

Network	e Train	Epoch	Structure	Parameter
MLP	7.71e-3	1000	7-10-1	133
PCA-MLP	2.85e-3	1000	4-7-1	59
RBF	4.82e-4	500	25	175
ANFIS	6.30e-4	100	32	212
SPMFIS^2	4.15e-4	100	4	40
SPMFIS^3	2.79e-4	100	8	74

در پایان مثال‌هایی از شبه جملات ایجاد شده در بخش استخراج ویژگی و پس از طی فرآیند یادگیری برای سیستم های شناسایی شده با استفاده از ساختار *SPMFIS^2* در جدول (۱۰) نمایش داده شده‌اند.

جدول ۱۰: نمونه شبه جملات ایجاد شده در مسائل شناسایی سیستم

Dataset		Produced Semi-Polynomial
Plant-1	X_1	$-0.69\,x_1^{1.28} + 0.87\,x_2^{0.10} - 0.87x_3^{0.99} + 0.31\,x_4^{1.47}$
	X_2	$0.09\,x_1^{1.93} - 0.04\,x_2^{1.05} + 1.51x_3^{1.41} - 0.57\,x_4^{0.38}$
Plant-2	X_1	$2.18\,x_1^{1.56} + 1.14\,x_2^{1.21} + 0.21x_3^{2.24} - 1.27\,x_4^{1.44} + 0.54\,x_5^{2.19} + 1.26\,x_6^{2.18}$
	X_2	$0.93\,x_1^{1.60} + 1.34\,x_2^{1.16} - 0.85x_3^{1.51} - 0.06\,x_4^{2.04} - 0.22\,x_5^{0.98} + 0.19\,x_6^{1.36}$
Plant-3	X_1	$0.38\,x_1^{-0.31} + 0.52\,x_2^{0.63} + 0.13x_3^{1.79} - 1.75\,x_4^{0.82} + 0.16\,x_5^{0.69}$
	X_2	$-0.47\,x_1^{0.66} + 0.11\,x_2^{0.17} - 0.48x_3^{1.86} - 0.22\,x_4^{1.87} + 0.25\,x_5^{0.98}$

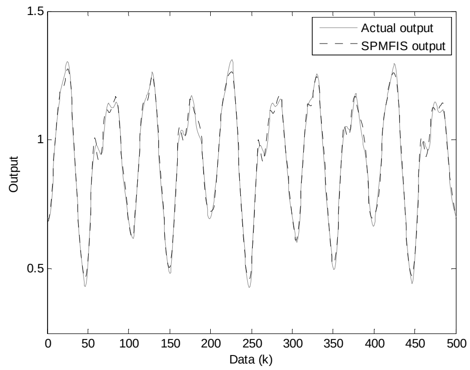
۵-۳- پیش‌بینی سری زمانی مکی-گلاس

سری زمانی آشوبناک مکی-گلاس به عنوان تابع آزمون در بسیاری از مقالات و پژوهشها به منظور بررسی کارایی روشهای معرفی شده مورد استفاده قرار گرفته است. سری زمانی آشوبناک مکی-گلاس با استفاده از معادله دیفرانسیل زیر تولید می‌شود:

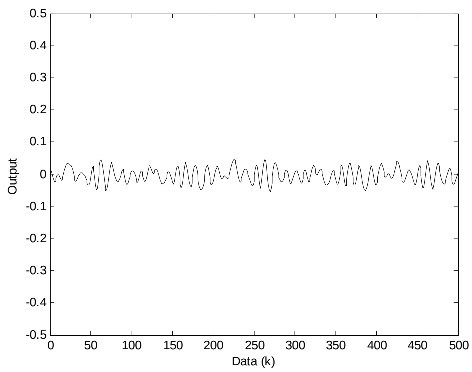
$$\frac{dx\,(t)}{dt} = \frac{ax\,(t-\tau)}{1 + x^{10}\,(t-\tau)} - bx\,(t) \qquad (۲۸)$$

که در رابطه فوق a=0.2 و b=1 می‌باشند. در حالتی که مقدار τ>17 باشد معادله فوق رفتار آشوبناک از خود نشان می‌دهد. در شبیه سازی‌های انجام شده در این مقاله این مقدار برابر با ۳۰ در نظر گرفته شده است. در این مطالعه هدف پیش‌بینی مقدار $x(t+6)$ با استفاده از متغیرهای $x(t-30)$, $x(t-24)$, $x(t-18)$, $x(t-12)$, $x(t-6)$ و $x(t)$ می‌باشد. بر همین اساس این مساله را می‌توان به صورت یک نگاشت ۶-ورودی به ۱-خروجی در نظر گرفت.

۱۰۰۰ نمونه داده در این شبیه‌سازی استفاده شده است. ۵۰۰ نمونه اول به عنوان داده آموزش و ۵۰۰ نمونه باقیمانده به عنوان داده‌های آزمون مورد بررسی قرار گرفته‌اند. ساختار شبکه‌های *SPMFIS* استفاده شده با تعداد دو و سه ویژگی استخراج شده به ترتیب در شکل‌های (۷) و (۸) نمایش داده شده‌اند. خروجی مدل، خروجی واقعی و خطای حاصل از مدل در شناسایی داده‌های آزمون در شکل‌های (۱۷) و (۱۸) نشان داده شده‌اند. در این شبیه سازی نیز ۱۰ اجرای مختلف صورت گرفته است که میانگین نتایج خطای *MSE* در مقایسه با سایر روشها در جدول (۱۱) نشان داده است. در این حالت نرخ‌های آموزش η_{FIS} و η_{SPM} به ترتیب برابر با ۰.۱ و ۰.۱ انتخاب شده‌اند.



شکل۱۷: خروجی واقعی و خروجی مدل برای داده‌های آزمون (مکی-گلاس)



شکل۱۸: خطای خروجی مدل برای داده‌های آزمون (مکی-گلاس)

جدول ۱۱: مقایسه میان نتایج حاصل از روشهای مختلف برای پیش‌بینی سری زمانی مکی-گلاس

Network	e Train	e Test	Epoch	Structure	Parameter
MLP	1.45e-2	1.27e-2	1500	8-12-1	177
PCA-MLP	7.23e-3	1.06e-2	1500	5-7-1	70
RBF	3.62e-3	3.59e-3	1000	30	240
ANFIS	1.21e-3	1.36e-3	100	64	472
$SPMFIS^2$	1.92e-3	1.89e-3	100	4	44
$SPMFIS^3$	1.59e-3	1.47e-3	100	8	80

در پایان مثالی از شبه جملات ایجاد شده در بخش استخراج ویژگی و پس از طی فرآیند یادگیری برای پیش‌بینی سری زمانی آشوبناک مکی=گلاس با استفاده از ساختار $SPMFIS^2$ در جدول (۱۲) نمایش داده شده است.

جدول ۱۲: نمونه شبه جملات ایجاد شده در مسئله پیش‌بینی سری زمانی مکی-گلاس

Dataset		Produced Semi-Polynomial
Mackey-Glass	X_1	$0.39\,x_1^{0.53} - 0.49\,x_2^{-0.03} - 0.97x_3^{0.61} + 0.47\,x_4^{1.20} - 0.70\,x_5^{1.58} - 1.00\,x_6^{0.55}$
	X_2	$0.92\,x_1^{0.05} + 0.02\,x_2^{1.40} - 0.90x_3^{1.73} - 1.11\,x_4^{1.27} - 0.09\,x_5^{1.08} - 0.01\,x_6^{1.31}$

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله ساختار شبکه *SPMFIS* معرفی شد و کاربرد آن در کلاس‌بندی الگو، شناسایی سیستم و پیش‌بینی سری زمانی مورد بررسی قرار گرفت. در روش مطرح شده، نگاشت داده شبه چند جمله‌ای به منظور کاهش ابعاد داده ورودی و استخراج ویژگی در بخش ورودی شبکه *ANFIS* قرار می‌گیرد. همچنین به منظور آموزش پارامترهای شبکه *ANFIS* و نیز پارامترهای بخش *SPM* روش آموزش بر پایه الگوریتم گرادیان نزولی مطرح شد. یکی از مهمترین مزایای استفاده از ساختار *SPMFIS* در برابر روشهای متداول سیستم‌های فازی منفرد، کاهش بسیار زیاد تعداد قوانین فازی می‌باشد که این امر تاثیر بسیار زیادی در میزان حافظه و زمان مورد نیاز برای پیاده سازی ساختار مورد نظر داشته و علاوه بر این قابلیت تفسیرپذیری در سیستم فازی را به سبب وجود کمترین تعداد ممکن از قوانین تا حد بالایی حفظ می‌نماید. به علاوه، با وجود کاهش بسیار محسوس در تعداد قوانین، کارایی شبکه معرفی شده در برابر سیستم فازی *ANFIS* تا حد بالایی حفظ می‌شود. تعداد قواعد و پارامترهای سیستم فازی برای سیستم‌هایی با تعداد ورودی بالا به شدت زیاد شده که حتی امکان مدیریت و پیاده سازی را از این مجموعه قوانین سلب می‌نماید که این امر سبب عملکرد کند و کاهش سرعت همگرایی در زمان آموزش سیستم فازی خواهد شد. نتایج حاصل نشان می‌دهد که سیستم فازی مطرح شده کارایی بسیار مناسبی در برابر روشهای متداول از قبیل شبکه‌های *MLP*، شبکه‌های *RBF* و ساختار *ANFIS* در کلاس‌بندی، شناسایی و پیش‌بینی دارد. به عنوان یک رویکرد به منظور بهینه سازی عملکرد روش مطرح شده، ارائه راهکاری به منظور انتخاب خودکار تعداد ویژگیهای استخراج شده و نیز استفاده از سایر تقریب‌زن‌ها در بخش دوم از ساختار *SPM* می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد.

مراجع

[1] Gan Q, Harris CJ, “Fuzzy local linearization and logic basis function expansion in nonlinear system modeling”, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B, Cybern.*, 1999, Vol. 29, No. 4, pp. 559–565.

[2] Shi Y, Eberhart R, Chen Y, “Implementation of evolutionary fuzzy systems”, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 1999, Vol. 7, No. 2, pp. 109–119.

[3] Lin CK, Wang SD, “Fuzzy system identification using an adaptive learning rule with terminal attractors”, *J. Fuzzy Sets Syst.*, 1999, pp. 343–352.

[4] Kang SJ, Woo CH, Hwang HS, Woo KB, “Evolutionary design of fuzzy rule base for nonlinear system modeling and control”, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 2000, Vol. 8, No. 1, pp. 37–45.

[5] Huang YP, Wang SF, “Designing a fuzzy model by adaptive macroevolution genetic algorithms”, *Fuzzy Sets Syst.*, 2000, Vol. 113, pp. 367–379.

[6] Wu TP, Chen SM, “A new method for constructing membership functions and fuzzy rules from training examples”, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B, Cybern.*, 1999, Vol. 29, No. 1, pp. 25–40, Feb. 1999.

[7] Abraham A, “EvoNF: A framework for optimization of fuzzy inference systems using neural network learning and evolutionary computation”, *In Proc. of the 17th IEEE Int. Symp. Intelligent Control*, 2002, pp. 327–332.

[8] Denna M, Mauri G, Zanaboni AM, “Learning fuzzy rules with tabu search-an application to control”, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 1999, Vol. 7, No. 2, pp. 295–318.

[9] Raju GV, Zhou J, “Adaptive hierarchical fuzzy controller”, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, 1993, Vol. 23, No. 4, pp. 973–980.

[10] Wang LX, “Analysis and design of hierarchical fuzzy systems”, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 1999, Vol. 7, No. 5, pp. 617–624.

[11] Fern´andez A, Del Jesus MJ, Herrera F, “Analysing the Hierarchical Fuzzy Rule Based Classification Systems with Genetic Rule Selection”, *In Proc. of the Fourth International Workshop on Genetic and Evolutionary Fuzzy Systems*, 2010, pp. 69-74.

[12] Huwendiek O, Brockmann W, “Function approximation with decomposed fuzzy systems”, *Fuzzy Sets Syst.*, 1999, Vol. 101, pp. 273–286.

[13] Wang D, Zeng XJ, Keane JA, “Intermediate Variable Normalization for Gradient Descent Learning for Hierarchical Fuzzy System”, *IEEE Trans On Fuzzy Systems*, 2009, Vol. 17, No. 2, pp. 468-476.

[14] Rainer H, “Rule generation for hierarchical fuzzy systems”, *In Proc. of Annu. Conf. North American Fuzzy Information Processing*, 1997, pp. 444–449.

[15] Masmoudi NK, Rekik C, DJemel M, Derbel N, “Optimal Control for Discrete Large Scale Nonlinear Systems using Hierarchical Fuzzy Systems”, *In Proc. of the Second International Conference on Machine Learning and Computing*, 2010.

[16] Brown M, Bossley KM, Mills DJ, Harris CJ, "High dimensional neurofuzzy systems: Overcoming the curse of dimensionality", *In Proc. of the 4th Int. Conf. Fuzzy Systems*, 1995, pp. 2139–2146.

[17] Babuska R, "Fuzzy modeling and identification", Ph.D. dissertation, Univ. Delft, Delft, The Netherlands, 1996.

[18] Angelov P, Filev D, "An approach to online identification of Takagi–Sugeno fuzzy models", *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B, Cybern.*, 2004, Vol. 34, No. 1, pp. 484–498.

[19] Abraham A, "Adaptation of Fuzzy Inference System Using Neural Learning, Fuzzy System Engineering: Theory and Practice", Springer-Verlag, 2005, Ch. 3, pp. 53–83.

[20] Duan JC, Chung FL, "Multilevel fuzzy relational systems: Structure and identification", *Soft Comput.*, 2002, Vol. 6, pp. 71–86.

[21] Joo MG, Lee JS, "A class of hierarchical fuzzy systems with constraints on the fuzzy rules" , *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 2005, Vol. 13, No. 2, pp. 194–203.

[22] Paulo S, "Clustering and hierarchization of fuzzy systems", *Soft Comput. J.*, 2005, Vol. 9, No. 10, pp. 715–731.

[23] Chen MY, Linkensm DA, "A systematic neuro-fuzzy modeling framework with application to material property prediction", *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B*, 2001, Vol.31, 781-790.

[24] Wang LX, "Universal approximation by hierarchical fuzzy systems", *Fuzzy Sets Syst.*, 1998, Vol. 93, pp. 223–230.

[25] Lee ML, Chung HY, Yu FM, "Modeling of hierarchical fuzzy systems", *Fuzzy sets and systems*, 2003, Vol. 138, pp. 343-361.

[26] Jang JR, "ANFIS: Adaptive Network-Based Fuzzy Inference System", *IEEE Trans. Sys.,Man and Cybernetics*., 1993, Vol. 23, No.3.

[27] Takagi T, Sugeno M, "Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control", *IEEE Trans. Syst. Man, Cybern*., 1985, Vol. SMC-15, No. 1, pp. 116–132.

[28] Kasabov N, Song Q, "DENFIS: Dynamic, evolving neural-fuzzy inference system and its application for time-series prediction", *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 2002, Vol. 10, No. 1, pp. 144–154.

[29] Yager RR, Zadeh LA, "Fuzzy Sets Neural Networks, and Soft Computing", Van Nostrand Reinhold, 1994.

[30] Kumar M, Garg DP, "Intelligent Learning of Fuzzy Logic Controllers via Neural Network and Genetic Algorithm", *In Proc. of JUSFA*, 2004, 19-21.

[31] He X, Yan S, Hu Y, Niyogi P, Zhang H, "Face recognition using laplacianfaces", *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 2005, Vol. 27, No. 3, pp. 328–340.

[32] Belhumeur PN, Hespanha JP, Kriegman DJ, "Fisherfaces: recognition using class specific linear projection", *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 1997, Vol. 19, No. 7, pp. 711–720.

[33] Li H, Jiang T, Zhang K, "Efficient and robust feature extraction by maximum margin criterion", *IEEE Trans. Neural Networks*, 2006, Vol. 17, No. 1, pp. 157–165.

[34] Turk M, Pentland A, "Face recognition using eigenfaces", *In Proc. of the Computer Vision and Pattern Recognition*, 1991.

[35] Yang J, Frangi AF, Yang YJ, Zhang D, Jin Z, "KPCA plus LDA: A complete kernel fisher discriminant framework for feature extraction and recognition", *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 2005, Vol. 27, No. 2, pp. 230–244.

[36] Yang Y, Pedersen JO, "A comparative study on feature selection", *In Proc. of ACM International Conference on Research and Development in Information Retrieval*, 1999, pp. 42–49.

[37] Mao J, Jain AK, "Artificial neural networks for feature selection and multivariate data projection", *IEEE Trans. Neural Networks*, 2005, Vol. 6, No. 2, pp. 296–317.

[38] Kohavi R, John GH, "Wrappers for feature subset selection", *Artif. Intell*. 1997, Vol. 97, pp. 273–324.

[39] Webb AR, "*Statistical Pattern Recognition*", Second edition. John Wiley & Sons, 2002.

[40] Hettich S, Blake CL, Merz CJ, UCI repository of machine learning databases. Available at http://www.ics.uci.edu/~mlearn/MLRepository.html, 1998.

[41] Duda RO, Hart PE, Stork DG, "*Pattern Classification*", Second edition. John Wiley & Sons, 2001.

[42] Fukunaga K, "*Introduction to Statistical Pattern Recognition*", Second edition. Academic Press, 1990.

[43] Kim J, Chung J, "Reduction of Dimension of HMM parameters using ICA and PCA in MLLR Framework for Speaker Adaptation," Eurospeech, Geneva, 2003.

[44] Altman DG, "Diagnostic tests. 1: Sensitivity and specificeity," Bland JM, 1994, p. 1552.

[45] Sakaguchi A, Yamamoto T, "A study on system identification using GA and GMDH network", *In Proc. of the 29th Annual Conference of Inductrial Electronic Society, IECON*, 2003.

[46] Pham DT, Karaboga D, "Training elman and jordan networks for system identification using genetic algorithms", *Artif. Intell. Eng.*, 1999, Vol. 13, pp. 107–117.

[47] Narendra KS, Parthasarathy K, "Identification and control of dynamical system using neural networks",

IEEE Trans. Neural Networks, 1990, Vol. 1, pp. 4–27.

[48] He X, Yan S, Hu Y, Niyogi P, Zhang H, “Face recognition using laplacianfaces,” *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 2005, Vol. 27(3), pp. 328–340.

[49] Belhumeur PN, Hespanha JP, Kriegman DJ, “Fisherfaces: recognition using class specific linear projection,” *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 1997, Vol. 19(7), pp. 711–720.

[50] Li H, Jiang T, Zhang K, “Efficient and robust feature extraction by maximum margin criterion,” *IEEE Trans. Neural Networks*, 2006, Vol. 17(1), pp. 157–165.

[51] Yang J, Frangi AF, Yang JY, Zhang D, Jin Z, “KPCA plus LDA: A complete kernel fisher discriminant framework for feature extraction and recognition,” *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 2005, Vol. 27(2), pp. 230–244.

[52] Hornik K, Stinchombe M, White H, “Multilayer feedforward networks are universal approximators,” *IEEE Trans. Neural Computation*, 1996, Vol. 7(3), pp. 776–781.

[53] Kosko B, “Fuzzy systems as universal approximators,” *IEEE Trans. Computers*, 1994, Vol. 43, pp 1329.

مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۴، شماره ۳، پاییز ۱۳۸۹، صفحه ۳۵-۲۹

نگرش نوین به هندسهٔ تعقیب و گریز با الهام از هدایت ناوبری تناسبی

جعفر حیرانی نوبری

استادیار، دانشکدهٔ مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، nobari@eetd.kntu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۹/۷/۲، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۹/۹/۱۲)

چکیده: با الهام از قانون هدایت متناسب، معادلات حاکم بر هندسهٔ تعقیب و گریز بین تعقیب کننده، موشک، و تعقیب شونده، هدف، در حالت کلی فضای سه بعدی بدست می آیند. این الهام در دستگاهی که برای نوشتن معادلات انتخاب نموده ایم خود را نشان داده است. چنانچه معادلات هندسهٔ درگیری در دستگاههای دیگر نوشته شوند، پیچیدگی آنها عموماً منجر به مشکل شدن تحلیل چه به لحاظ کمی و چه به لحاظ کیفی می‌گردد. وقتی این معادلات در دستگاهی که ما آنرا دستگاه خط دید نامیده‌ایم، نوشته شوند، آنچنان ساده و گویاتر خواهند شد که هم برای تحلیل، ابزاری برنده بدست می‌دهند و هم برای پیشنهاد روشهای پیشرفته‌تر در هدایت تعقیب، می‌توانند راهگشا باشند. بخصوص این مهم در تحلیل و دلالت روش PN بسیار جلوه می‌کند که اهم نتایج آمده است..

کلمات کلیدی: تعقیب و گریز ، ناوبری تناسب، صفحهٔ درگیری ، خط دید.

New Insight in the Pursue-Escape Geometry by the Inspiration of PN Guidance

Jafar Heyrani Nobari

Abstract: By the inspiration of PN guidance law, the equations of the pursue-escape geometry in the general form of the three dimensional space, are derived. This inspiration shows itself in the coordination which is selected for deriving the equations. Whenever these equations are derived in the other coordination, the complexity causes the difficulty of the analysis and the insight. When the equations are derived in the coordination which we name the LOS coordination, these are became so easy and expressive that give skilled tools for analysis and can open the ways for proposal of the modern guidance law. In particular, this issue display in the analysis and the reasoning of the PN guidance law which the important results were given.

Keywords: Pursue-escape, Proportional Navigation, Surface of Confront

$\underline{\omega}_{LI}$ سرعت دورانی دستگاه خط دید نسبت به اینرسی، ${}^{L}\underline{v}_t$ بیانِ سرعت هدف نسبت به اینرسی در دستگاه خط دید

${}^{L}\underline{v}_m$ بیانِ سرعت موشک نسبت به اینرسی در دستگاه خط دید، $P_L\,\underline{r}$ مشتق نسبت به زمانِ بردارِ مربوطه از دیدِ دستگاهِ خط دید

$P\,{}^{L}\underline{r}$ مشتق نسبت به زمانِ مؤلفه‌های بردارِ مربوطه که در دستگاه خط دید بیان شده است

۱ – مقدمه

ایدهٔ اصلی روش ناوبری تناسبی، سعی در صفر نگه داشتن سرعت دوران خط دید است. درک آنچه با اعمال این ایده در سناریوی درگیری بین تعقیب شونده (هدف) و تعقیب کننده (موشک) صورت میپذیرد، از اهمیت زیادی برخوردار است. این اهمیت هم برای کسانی است که می‌خواهند از این روش در هدایت استفاده کنند و هم برای کسانی که میخواهند مزایای این هدایت را بررسی کرده و احیاناً ایدهٔ جدیدی ارائه کنند.

نویسنده عهده دار مکاتبات: جعفر حیرانی نوبری

عموماً معادلاتِ درگیری بگونه ای بدست می‌آیند که درک عمیق آنچه اتفاق می‌افتد، مشکل می‌گردد [۱] و یا آنقدر ساده سازی افراطی صورت می‌پذیرد که نتایج، در رابطه با حالتِ کلی، مشکوک جلوه می‌کند [۲] و یا ممکن است نتایج حاصله در صفحه با آنچه واقعاً در فضا اتفاق می‌افتد دارای یک ارتباط شفاف به نظر نرسند [۳]. هنگامیکه بخواهیم مسئله را در ۳بُعد به صورت کاربردی‌تر دنبال کنیم و هندسهٔ درگیری را مستقل از نوع الگوریتم هدایت پیگیری کنیم، این موضوع مهم‌تر می‌شود. در بسیاری از مراجعی که به هدایت PN پرداخته‌اند تنها بررسی یک حالت خاصی از آن مد نظر قرار گرفته است و کمتر یک هندسهٔ کلی برای درگیری و رسیدن به پارامترهای آن مشاهده می‌شود.

تا جاییکه جستجوهای نگارنده تا زمان رسیدن به نتایج این نوشته، عاید نموده، [۲] اولین مقالهٔ منتشر شده‌ای است که در آن رسماً هدایت PN و بصورتی کاملاً کیفی بیان گشته است. در [۴] این بیان به فضای سه بعدی تعمیم داده شده است و از مختصاتِ مسیر موشک استفاده شده است. [۵] نیز اساس کار را بر مبانی [۴] گذارده و سعی نموده تا با نگاه لیاپانوف رفتارسنجی کند که بدلیل آکنده بودن از عبارات مثلثاتی زوایای متعدد از پیچیدگی رنج می‌برد. در [۶] هر چند یک محور را در راستای خط دید گرفته ولی چون در ادامه فقط به پایان درگیری متمرکز شده، سرعت هدف را صفر گرفته و لذا موضوع از حالت کلی خارج گردیده است. در [۷] هرچند به تحلیل دو بعدی بسنده شده ولی چون بیان در مختصات اینرسی است باز هم عبارات مفصل مثلثاتی پیش آمده است. [۸] نیز بطور مشابه کار کرده با این تفاوت که سعی کرده حل بسته ارائه کند. در [۹] بطور مشابه آغاز گردیده ولی سعی در حل بر اساس "زمانِ رفتن"(t_{go}) شده است. [۱۰] نیز مشابه است با این تفاوت که با ثابت گرفتن سرعت موشک و ایدهٔ انقباض، تابع تبدیل بدست آورده است. [۱۱] مختصات قطبی را در صفحه پیش گرفته و روش‌های بهینه را برای حلقهٔ هدایت بر همین اساس ارائه نموده است. [۱۲] نیز دو بعدیِ دکارتی است ولی با فرض هدف بدون مانور حل بهینهٔ ساده و برای هدف با مانور نیز حل بهینهٔ مفصلی ارائه نموده است. [۱] و [۱۳] مختصات کروی را مبنای کار قرار داده‌اند و لذا معادلات درگیری نسبتاً پیچیده شده است. [۱۴] نیز سعی کرده به غیر از حرکت در صفحه، در فضا نیز معادلات درگیری را ارائه کند ولی چون هنوز مبنا را بیان در دستگاه مرجع قرار داده، نمی‌تواند به عبارات ساده‌ای دست یابد.

در اینجا، درست است که از PN الهام گرفته شده و در نتیجه مختصات چسبیده به خط دید، پیش کشیده شده است، ولی نهایتاً نگرشِ هندسی نسبتاً نوینی به کل موضوع درگیری ارائه شده است. از همه مهمتر تحلیلِ کیفی است که بر اساس معادلات ساده ولی کاملی که بدست‌آمده و بکمک مفهوم صفحهٔ فاز و متغیرهای حالت، برای امکان‌سنجیِ برخورد ارائه گردیده است.

در این مقاله ابتدا در بخش۲ ایدهٔ اصلی و فقط معادلات اساسی که ما را به ایجاد مختصات چسبیده به خط دید تشویق می‌کند، در صفحه، ارائه می‌گردد و در بخش۳ مختصات خط دید در فضا دقیقاً تعریف می‌گردد. سپس در بخش۴ معادلاتِ درگیری بر حسبِ شتاب‌ها و معادلات حالت کلی در این مختصات به دست آمده و ارائه می‌گردد. آنگاه در بخش۵ معادلات هندسهٔ درگیری مستقل از سرعت‌ها داده می‌شوند. در بخش۶ با توجه به معادلات به دست آمده، شرح کیفی برای درک آنها ارائه می‌شود. سپس در بخش۷، چراییِ قانون هدایت ناوبری تناسبی و اعمال آن به معادلات به دست آمده، آورده شده است.

۲- ایدهٔ اصلی مختصات چسبیده به خط دید در صفحه

ابتدا حالت سادهٔ حرکت در صفحه را طبق شکل۱ مورد بررسی قرار می‌دهیم. یک محورِ مختصاتِ خط دید در امتداد خط دید لحاظ می‌گردد. محور دیگر نیز طبیعتاً عمود بر آن خواهد بود. در شکل۱ مولفه های سرعت هدف و موشک نسبت به مختصات اینرسی(مرجع)، در مختصات خط دید، به نمایش گذاشته شده‌اند. ضمناً شرایط تحول یافته، پس از یک فاصلهٔ زمانی کوچک نیز در شکل به نمایش در آمده است که در آن تغییرات زاویهٔ خط دید و تغییرات فاصلهٔ موشک و هدف نیز دیده می‌شوند. به این ترتیب روابط زیر قابل استنتاج است:

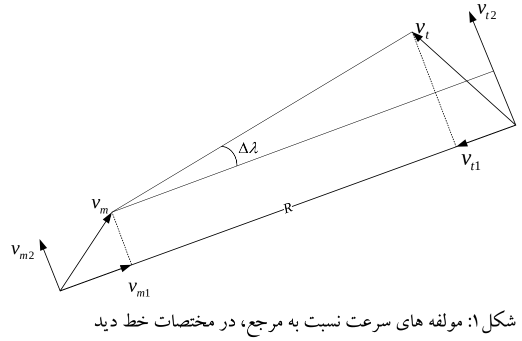
$$\tan \Delta\lambda = \frac{(v_{t2} - v_{m2})\Delta t}{R - (v_{t1} - v_{m1})\Delta t} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta t \to 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\lambda \quad \to \quad \frac{(v_{t2} - v_{m2})\Delta t}{R} \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\lambda} = \frac{(v_{t2} - v_{m2})}{R} \qquad (1)$$

از طرف دیگر برای سرعت نزدیک شوندگی داریم:

$$v_c \triangleq \dot{R} = v_{t1} - v_{m1} \qquad (2)$$



شکل۱: مولفه های سرعت نسبت به مرجع، در مختصات خط دید

به این ترتیب اگر سرعت هدف و موشک در راستای عمود بر خط دید (راستای ۱) با هم مساوی باشد، هیچ اصلاحی برای سرعت موشک در این راستا لازم نخواهد بود و به این ترتیب سرعت تغییرات زاویهٔ خط دید، صفر خواهد بود. حال چون اساس روش ناوبری تناسبی این است که سعی میکند تا این زاویه ثابت بماند، لذا حالتی را که بردار سرعت موشک در چنین راستایی قرار گیرد که زاویهٔ خط دید، نیازی به تغییر ندارد را ، جهت ایده‌ال بردار سرعت موشک می‌داند و هر انحرافی از این حالت را انحرافِ بردار سرعت موشک از حالت ایده‌ال تلقی کرده و آنرا خطای نشانه‌روی می‌نامد[۱] [۲] .

$$\theta_{v_m}(Ideal) = \sin^{-1}\left(\frac{v_{t2}}{v_m}\right) \qquad (3)$$

$$\theta_{v_m} = \sin^{-1}\left(\frac{v_{m2}}{v_m}\right) \qquad (4)$$

$$HAE \triangleq \theta_{v_m}(Ideal) - \theta_{v_m} \qquad (5)$$

۳- مختصات خط دید در فضا

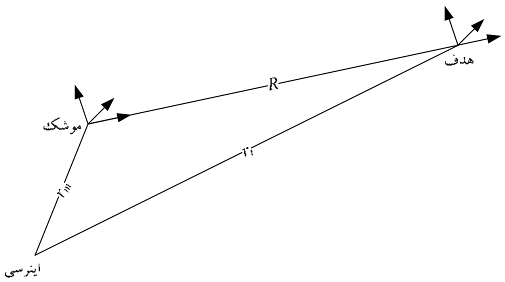
در این بخش مختصات خط دید به حالت کلی در فضا تعمیم داده می‌شود. محور ۱ را دوباره روی خط دید گذارده(مطابق شکل۲) ولی دو محور دیگر فعلاً آزاد در نظر گرفته می‌شوند. لذا سرعت چرخش مختصات خط دید نسبت به مختصات اینرسی را آزاد گرفته و مؤلفه‌های آنرا در همان دستگاه خط دید، بصورت زیر بیان می‌کنیم:

$${}^L(\omega_{LI}) = [p \quad q \quad r]^T$$

در ادامه شکل۲ را در نظر گرفته، از بردارهای مکان‌های نسبی آغاز نموده و به ارتباط سرعت چرخش خط دید و سرعتهای نسبی هدف و موشک پرداخته تا به روابط مشابه ۱ و ۲ ی مشابهِ فرض ۲بعدی منجر گردند.

$$\underline{r}_t = \underline{r}_m + \underline{R} \qquad \Rightarrow$$

$$\underline{r}_t^{\,L} = \underline{r}_m^{\,L} + \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (7)$$



شکل۲: تعمیم مختصات خط دید به حالت کلی در فضا

بنابراین با توجه به تعریف سرعت داریم:

$${}^L\underline{v}_t = {}^L\left(P_I\,\underline{r}_t\right) = {}^L\left(P_L\,\underline{r}_t\right) + {}^L\underline{\omega}_{LI} \times {}^L\underline{r}_t =$$
$${}^L\underline{v}_t = P\;{}^L\underline{r}_t + {}^L\underline{\omega}_{LI} \times {}^L\underline{r}_t \qquad (8)$$

و به همین ترتیب

$${}^L\underline{v}_m = {}^L\left(P_I\,\underline{r}_m\right) = {}^L\left(P_L\,\underline{r}_m\right) + {}^L\underline{\omega}_{LI} \times {}^L\underline{r}_m =$$
$${}^L\underline{v}_m = P\;{}^L\underline{r}_m + {}^L\underline{\omega}_{LI} \times {}^L\underline{r}_m \qquad (9)$$

حال با جاگذاری ۷ در ۸، داریم:

$${}^L\underline{v}_t = P\left({}^L\underline{r}_m + \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + {}^L\underline{\omega}_{LI} \times \left({}^L\underline{r}_m + \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$
$$= {}^L\underline{v}_m + \begin{bmatrix} \dot{R} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

و به این ترتیب برای سرعت نسبی هدف و موشک بدست می‌آید:

$${}^L\underline{v}_t - {}^L\underline{v}_m = \begin{bmatrix} v_{t1} - v_{m1} \\ v_{t2} - v_{m2} \\ v_{t3} - v_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{R} & (11) \\ r\,R & (12) \\ -q\,R & (13) \end{bmatrix} (14)$$

حال توجه کنید که رابطهٔ ۱۱ همان رابطهٔ ۲ است که انتظار هم داشتیم. اما رابطه‌های ۱۲ و ۱۳ هر یک مشابه رابطهٔ ۱ هستند که گویا با آمدن در فضا، سرعت چرخش خط دید به دو مؤلفه تقسیم شده است. از طرف دیگر می‌بینید که p نیز فعلاً آزاد است و هنوز به هیچ چیز مربوط نیست. اما همین p هست که تعیین می‌کند، چه مقدار از سرعت چرخش خط دید در ۱۲ ظاهر شود و چه مقدارِ آن در ۱۳ که این بدلیل همان درجهٔ آزادی است که در ابتدای همین بخش اشاره گردید.

[۱] Head Angle Error

حال، اگر علاقمند باشیم که سرعت چرخش خط دید در یک متغیر خلاصه شود و نه در دو متغیر، از درجهٔ آزادی مزبور استفاده نموده و q را متحد با صفر در نظر گرفته و به این ترتیب تکلیف دو محور عمود بر خط دید که در مختصات خط دید هنوز مشخص نبودند، تعیین می‌گردند.

تعبیر هندسی و فیزیکی این انتخاب: وضعیت در صفحه را دوباره بخاطر آورید، خط دید همواره در آن صفحه می‌چرخید و باقی می‌ماند و بردار سرعت چرخش خط دید نیز، همواره بر آن صفحه عمود بود. در حالت کلی فضایی نیز در هر لحظه، چنین صفحه‌ای وجود دارد، یعنی، صفحه‌ای هست که بردار سرعت چرخش خط دید بر آن عمود است. به همین دلیل محور۲ی مختصات خط دید را طوری انتخاب می‌کنیم که با محور۱ ، این صفحه را تشکیل دهند. این صفحه را از این پس صفحهٔ درگیری می‌نامیم. به این ترتیب r همان سرعت لحظه‌ای چرخش خط دید ($\dot{\lambda}$) در فضا خواهد شد با این تفاوت که حالا در فضا صفحهٔ درگیری در حال چرخش است و دیگر ثابت نیست و p سرعت لحظه ای چرخش همین صفحه خواهد بود. به عبارت دیگر بردار چرخش خط دید که بیانش در دستگاه خط دید به صورت $(0\ ,\ 0\ ,\ r=\dot{\lambda})$ است، در فضا با سرعت p در حال چرخش خواهد بود. توجه کنید که به این ترتیب محور۳ی مختصات خط دید نیز همواره منطبق بر بردار سرعت چرخش خط دید است.

توجه کنید که با صفر گذاردن q ، مؤلفهٔ سوم سرعتهای هدف و موشک همواره با هم مساوی خواهند ماند و این را انتظار داشتیم چون قرار نیست در این صفحه چرخشی صورت گیرد. به این ترتیب می‌توان نتایج این انتخاب را به صورت سه رابطهٔ زیر خلاصه کرد:

$$\dot{R} = v_{t1} - v_{m1} \qquad (15)$$

$$r = \dot{\lambda} = \frac{v_{t2} - v_{m2}}{R} \qquad (16)$$

$$v_{t3} \equiv v_{m3} \qquad (17)$$

۴- معادلات شتابها و معادلات حالت کلی در مختصات خط دید

در این قسمت نیز ابتدا معادلات شتابها را بر حسب مؤلفه های سرعتها، بیان شده در مختصات خط دید، به طور کلی بدست می‌آوریم. ابتدا شتاب هدف:

$$\begin{aligned}
{}^{L}\underline{a}_t &= {}^{L}\left(P_I\,\underline{v}_t\right) = \\
&{}^{L}\left(P_L\,\underline{v}_t\right) + {}^{L}\underline{\omega}_{LI} \times {}^{L}\underline{v}_t = \\
&P\ {}^{L}\underline{v}_t + {}^{L}\underline{\omega}_{LI} \times {}^{L}\underline{v}_t = \\
&\begin{bmatrix}\dot{v}_{t1}\\ \dot{v}_{t2}\\ \dot{v}_{t3}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}v_{t1}\\ v_{t2}\\ v_{t3}\end{bmatrix} =
\end{aligned}$$

$${}^{L}\underline{a}_t = \begin{bmatrix}a_{t1}\\ a_{t2}\\ a_{t3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot{v}_{t1} + (v_{t3}q - v_{t2}r) & (18)\\ \dot{v}_{t2} + (v_{t1}r - v_{t3}p) & (19)\\ \dot{v}_{t3} + (v_{t2}p - v_{t1}q) & (20)\end{bmatrix}$$

و به طور مشابه برای شتاب موشک نیز داریم:

$${}^{L}\underline{a}_m = \begin{bmatrix}a_{m1}\\ a_{m2}\\ a_{m3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot{v}_{m1} + (v_{m3}q - v_{m2}r) & (21)\\ \dot{v}_{m2} + (v_{m1}r - v_{m3}p) & (22)\\ \dot{v}_{m3} + (v_{m2}p - v_{m1}q) & (23)\end{bmatrix}$$

حال با توجه به اینکه دستگاه مختصات خط دید را طوری تعریف کردیم که $q=0$ شود، عبارت‌های بالا به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$a_{t1} = \dot{v}_{t1} - v_{t2}r \qquad (24)$$

$$a_{t2} = \dot{v}_{t2} + (v_{t1}r - v_{t3}p) \qquad (25)$$

$$a_{t3} = \dot{v}_{t3} + v_{t2}p \qquad (26)$$

$$a_{m1} = \dot{v}_{m1} - v_{m2}r \qquad (27)$$

$$a_{m2} = \dot{v}_{m2} + (v_{m1}r - v_{m3}p) \qquad (28)$$

$$a_{m3} = \dot{v}_{m3} + v_{m2}p \qquad (29)$$

عبارتهای بدست آمدهٔ ۲۴ تا ۲۹ عبارتهایی خواهند بود که برای بدست آوردن معادلات حالت در مختصات خط دید در روش ناوبری تناسبی و یا در هر روش هدایتی دیگری می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. در ادامه عناصر اصلی سیستم درگیری را مرور کرده و یادآوری می‌کنیم.

شتاب هدف در هر لحظه، ورودی سیستم درگیری تلقی می‌شود و لذا در معادلات ۲۴ تا ۲۶ سه مؤلفهٔ شتاب هدف ورودی محسوب می‌شوند و سه مؤلفهٔ سرعت هدف، سه حالت سیستم درگیری‌اند که با انتگرالگیری بدست می‌آیند. اما چنانچه توجه دارید، r و p نیز باید تعیین گردند که کمی جلوتر نحوهٔ بدست آوردن آنها نیز شرح داده خواهد شد.

حال توجه می‌کنیم که در حقیقت، هر روش یا قانون هدایت، باید شتاب موشک را بر حسب متغیرهای حالت دیگر و شتاب هدف، بیان

کند. پس سه مؤلفهٔ شتاب موشک نیز در معادلات ۲۷ تا ۲۹ توسط قانون هدایت معلوم خواهند شد و نوعی ورودی به این معادلات حالت تلقی می‌شوند که سه مؤلفهٔ سرعت موشک حالتهای آن خواهند بود. اما باز هم این وقتی صحیح است که r و p نیز معلوم باشند.

r نیز همواره از معادلهٔ ۱۶ و ۱۵ بر حسب مؤلفه های سرعتها بدست می‌آید و لذا مشکلی نخواهد بود. برای محاسبهٔ p ، دو معادلهٔ ۲۹ و۲۶ را از هم کم می‌کنیم و با توجه به رابطهٔ ۱۷ بدست می‌آید:

$$p = \frac{a_{t3} - a_{m3}}{v_{t2} - v_{m2}} = \frac{a_{t3} - a_{m3}}{R\, r} \qquad (30)$$

حال می‌توان معادلات حالت سیستم درگیری، در مختصات خط دید را برای هر قانون هدایت دلخواه به صورت زیر نوشت:

$$\dot{v}_{t1} = v_{t2} r + a_{t1} \qquad (31)$$
$$\dot{v}_{t2} = -v_{t1} r + v_{t3}\, p + a_{t2} \qquad (32)$$
$$\dot{v}_{t3} = -v_{t2}\, p + a_{t3} \qquad (33)$$
$$\dot{v}_{m1} = v_{m2} r + a_{m1}(GL) \qquad (34)$$
$$\dot{v}_{m2} = -v_{m1} r + v_{m3}\, p + a_{m2}(GL) \qquad (35)$$
$$\dot{v}_{m3} = -v_{m2}\, p + a_{m3}(GL) \qquad (36)$$

$$\dot{R} = v_{t1} - v_{m1} \qquad (37)$$
$$r = \frac{v_{t2} - v_{m2}}{R} \qquad (38)$$
$$p = \frac{a_{t3} - a_{m3}}{R\, r} \qquad (39)$$

که در آن $a_{mi}(GL)$ مؤلفه‌های شتاب موشک طبق دستور اعمالی توسط قانون هدایت است.

۵- معادلات هندسهٔ درگیری مستقل از سرعت‌ها

حال در ادامه سعی خواهد شد، معادلات حالت موقعیت نسبی موشک-هدف که مسئلهٔ اصلی درگیری است، بدست آید. ابتدا توجه کنید که از کم کردن ۳۴ از ۳۱ بدست می‌آید:

$$\ddot{R} = (v_{t2} - v_{m2})\, r + a_{t1} - a_{m1}$$
$$\mapsto \qquad \ddot{R} = r^2 R + a_{t1} - a_{m1} \qquad (40)$$

دینامیک خطای $v_{t2} - v_{m2}$ را نیز بگونهٔ مشابه با کم کردن ۳۵ از ۳۲ بدست آورده که به معادلهٔ حالت r خواهد رسید:

$$\dot{v}_{t2} - \dot{v}_{m2} = -(v_{t1} - v_{m1}) r + a_{t2} - a_{m2} \Rightarrow$$
$$\frac{d}{dt}(R\, r) = -\dot{R}\, r + a_{t2} - a_{m2} \quad \Rightarrow$$
$$\dot{r}\, R = -2\dot{R}\, r + a_{t2} - a_{m2}$$
$$\dot{r} = \left(-2\frac{\dot{R}}{R}\right) r + \frac{a_{t2} - a_{m2}}{R} \qquad (41)$$

در محور سوم چون همواره داریم: $v_{m3} = v_{t3}$ لذا معادلهٔ حالتی را نتیجه نداده بلکه فقط همان رابطهٔ ۳۹ بدست خواهد آمد.

به این ترتیب می‌توان مشخصات نسبی هدف و موشک را همراه با مشخصه‌های مختصات خط دید، در روابط زیر خلاصه نمود. به عبارت بهتر روابط ۳۱ تا ۳۹ به نوعی در روابط زیر خلاصه شده اند،

$$\ddot{R} = r^2 R + (a_{t1} - a_{m1})$$
$$\dot{r} = \left(-2\frac{\dot{R}}{R}\right) r + \frac{(a_{t2} - a_{m2})}{R} \qquad (42)$$
$$p = \frac{(a_{t3} - a_{m3})}{R\, r}$$

به طوریکه می‌توان ابتدا اینها را حل کرد و در صورت نیاز به سرعتهای هدف و موشک بقیهٔ روابط ۳۱ تا ۳۶ را حل نمود.

شتابهای راستای ۱ ، ۲ و ۳ را بترتیب شتاب طولی، شتاب جانبی در صفحهٔ درگیری (شتاب جانبی درگیری) و شتاب جانبی عمود بر صفحهٔ درگیری (شتاب بیرون درگیری) می‌نامیم.

۶- درک کیفی معادلات درگیری

درک کیفی روابط ۴۲ از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. توجه کنید که تمامی آنچه به درگیری در فضای سه بعدی مربوط است، بی‌هیچ تقریبی به سه متغیر خلاصه شده است. **یکی** فاصلهٔ دید، **دوم** سرعت چرخش خط دید و **سوم** سرعت چرخش صفحهٔ درگیری. به علاوه روشن است که آنچه به "گرفتن" (موشک هدف را)، مربوط است، فقط به دو متغیر اول و به دو معادلهٔ اول بر می‌گردد و به معادلهٔ سوم ربطی ندارد.

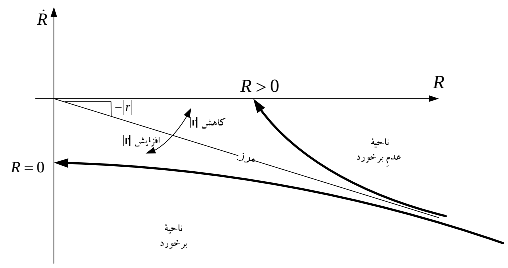
ابتدا بنگرید که اگر در معادلهٔ اول، r را موقتاً ثابت بگیرید، معادلهٔ اول، القاگر یک سیستم با دو قطب متقارن یکی پایدار و دیگری ناپایدار با اندازهٔ $|r|$ است که برآیند شتابهای طولی، ورودی سیستم محسوب می‌گردد. حال چنانچه متوسط این ورودی را قابل صرف نظر بگیرید، بازای شرایط اولیهٔ درگیریِ گوناگون، مسیرهای حالت در صفحهٔ فاز به دو گونهٔ اساسی که در شکل۳ نمایش داده شده است، تفکیک

می‌گردند. توجه داریم که معمولاً شرایط اولیهٔ شروع درگیری به صورت زیر است:

$$R(0) = R_0 > 0 \quad , \qquad -\dot{R}(0) = V_{cl}(0) > 0 \quad (43)$$

یعنی هدف جلوی روی موشک است و موشک بگونه‌ای پرتاب می‌شود که موشک در حال نزدیک شدن به هدف است و لذا شرایط اولیهٔ درگیری از ربع چهارم است.

همانگونه که در شکل۳ نیز آمده، روشن است که هر قدر $|r|$ کوچکتر گردد، شرایط اولیه‌ای که شروع از آنها به برخورد($R = 0$) منجر می‌شود، وسیعتر می‌گردد.



شکل۳: مسیرهای حالت در صفحهٔ فاز بازای شرایط اولیهٔ درگیری گوناگون

هدایت ناوبری تناسبی نیز بطور طبیعی بر همین اصل استوار است و لذا تمام سعی خود را روی کوچک و یا صفر کردن $|r|$ متمرکز می‌کند. به این ترتیب همواره شرایط موجود بگونه‌ای تغییر داده می‌شود که اگر داخل ناحیهٔ برخورد نیستیم، با وسیعتر شدن این ناحیه، احتمال اینکه در ناحیهٔ برخورد قرار گیریم، بیشتر شده و اگر هم که داخل ناحیهٔ برخورد هستیم، احتمال خروج از این ناحیه را هر چه کمتر کند.

این هدف(کوچک و یا صفر نمودن $|r|$) نیز به معادلهٔ دوم درگیری مربوط است که در ادامه به بررسی آن می‌پردازیم.

معادلهٔ دوم برای ورودی صفر، ناپایدار است چرا که چنانچه پیش از این نیز اشاره شد، عموماً شرایط اولیهٔ درگیری بگونه‌ای است که $\dot{R}$ منفی بوده وشرایط به صورت نزدیک شوندگی است و لذا قطب این سیستم، سمت راست است و این یعنی r از هر $r(0)$ که شروع کند، افزایش یافته و به صفر میل نخواهد نمود. بالاتر دیدیم که این برای معادلهٔ اول به این معنی است که مسیر حالت عدم برخورد در شکل۳ طی خواهد شد، بطوریکه هیچگاه به $R=0$ نخواهیم رسید و لذا برخورد صورت نمی‌پذیرد. به این ترتیب خواهیم دید که دستور هدایت ناوبری تناسبی که در قسمت بعد بررسی می‌گردد، برای پایدارسازی این معادله یک پیشنهاد کاملاً طبیعی است.

۷- بدست آوردن معادلات برای هدایت ناوبری تناسبی

دستور هدایت ناوبری تناسبی می‌خواهد که شتاب عمود بر خط دید موشک بصورت زیر باشد:

$$a_c = N \cdot \dot{\underline{\lambda}} \times \underline{V}_{cl} \quad \mapsto \qquad (44)$$

$$^{L}a_c = N \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\dot{R} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -N\,\dot{R}\,r \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (45)$$

و برای شتاب در راستای خط دید دستوری ندارد. مشاهده می‌کنید که این دستور در مختصات خط دید بسیار ساده بیان میشود:

$$a_{m2} = -N\,\dot{R}\,r \qquad (46)$$
$$a_{m3} = 0 \qquad (47)$$

با جاگذاری ۴۶ در ۴۳ بدست می آید:

$$\dot{r} = \left(-2\frac{\dot{R}}{R}\right) r + \frac{(a_{t2} + N\,\dot{R}\,r)}{R} \quad \Rightarrow$$
$$\dot{r} = \left((N-2)\frac{\dot{R}}{R}\right) r + \frac{a_{t2}}{R} \qquad (48)$$

توجه دارید که حالا برای $N \geq 2$ سیستم از ناپایداری ذاتی بیرون آمده و میتوان به برخورد امیدوار بود. اما برای $N=2$ هنوز سیستم به لحاظ ورودی-خروجی ناپایدار است ولی برای $N>2$ سیستم به لحاظ ورودی-خروجی نیز پایدار شده و قطب آن سمت چپ قرار خواهد گرفت. ضمناً توجه کنید که a_{t2} یک ورودی آزاد تلقی میشود که به مانور هدف بستگی دارد.

در ادامه توجه کنید که با جاگذاری ۴۷ ، برای p نیز خواهیم داشت:

$$p = \frac{a_{t3}}{R\,r} \qquad (49)$$

دستور۴۵ برای a_{m2} نیز 0 را پیشنهاد می‌دهد، لذا اگر فرض کنیم که دقیقاً از این دستور پیروی شود، برای R نیز خواهیم داشت:

$$\ddot{R} = r^2\,R + a_{t1} \qquad (50)$$

۸- نتایج و پیشنهادات

با ابتکاری که در تعریف دستگاهها صورت پذیرفت و بویژه مفهوم صفحهٔ درگیری که در اینجا برای اولین بار تعریف گردید، نوع نگرشی

ایجاد گردید که مشکل اساسی در تحلیل دینامیک درگیری در فضای سه بعدی حل گردید.

درست است که در ابتدا، برای رسیدن به این تحلیل، از روش هدایت تناسبی الهام گرفته شد، ولی آنچه برای معادلات حاکم بر هندسهٔ درگیری بدست آمد، عام بوده و مستقل از روش هدایتی است.

با این معادلات، برای حالت کلی فضایی، شرط برخورد مربوط به روش تناسبی کاملاً اثبات گردید.

با این نگرش نوین، امکان تحلیل در مورد شرایط برخورد و یا گریز روی اهداف با مانورهای گوناگون و تعقیب‌گر با روشهای گوناگون هدایتی، بصورت کاملاً تحلیلی و کلی بوجود آمده است که از اهمیت فوق العاده ای برخوردار است.

امکان ارائهٔ روشهای دیگر هدایتی برای درگیری مؤثرتر و ارزیابی آنها بوجود آمده است.

امکان تحلیل هر چه ساده تر سیستمهای هدایت و کنترلی موجود و حتی شاید طراحی سیستمهای جدید، بدون استفاده از شبیه سازیهای پیچیده بوجود آمده است.

والحمدلله رب العالمین.

مراجع

[1] Ciann-Dong; Yang chi-ching, "Analytical solution of 3D true proportional navigation", Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions, on, vol. 32 Issue 4, Oct. 1996, p1509 -1522

[2] Yuan C. L., "Homing and Navigation Courses of Automatic Target-Seeking Devices", Journal of Applied Physics, vol. 19 Dec 1948, p1122-1128

[3] Zarchan P., "Tactical and Strategic Missile Guidance", Published by AIAA Inc., 4th Edition 2002.

[4] Adler, Fred P., "Missile Guidance by Three-Dimensional Proportional Navigation", Journal of Applied Physics, May 1956.

[5] Seong-Ho Song; In-Joong Ha, "A Lyapunov-like approach to performance analysis of 3-dimensional pure PNG laws", Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, vol. 30 Issue 1, Jan. 1994 p238 -248

[6] Murtaugh; Stephen A., "Fundamentals of proportional navigation, Spectrum, IEEE, Dec 1966.

[7] Ghose D., "On the generalization of true proportional navigation", Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, vol. 30 Issue 2, April 1994, p545-555

[8] Becker K., "Closed-form solution of pure proportional navigation", Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, vol. 26 Issue 3, May 1990 p526 -533

[9] Shukla, U.S.; Mahapatra, P.R., "Generalized linear solution of proportional navigation", Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, vol 24 Issue 3, May 1988 p231 -238

[10] Jianwei Wang; Xueshu Xie, "A derivation of pure proportional navigation", American Control Conference, Proceedings of the 1999, vol. 6, 2-4 June 1999, p3758-3759

[11] Ciann-Dong Yang; Fei-Bin Hsiao; Fang-Bo Yeh, "Generalized guidance law for homing missiles", Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, vol. 25 Issue 2, March 1989 p197 -212

[12] Pin-Jar Yuan, "Optimal guidance of proportional navigation", Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, vol. 33 Issue 3, July 1997 p1007 -1012

[13] Siouris G. M., "Missile Guidance and Control Systems", Springer-Verlog Publisher, 2004.

[14] Yanushevsky R., "Modern Missile Guidance", Taylor & Francis group, LLC, 2008.

مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۴، شماره ۳، پاییز ۱۳۸۹، صفحه ۴۶-۳۶

طراحی یک کنترلگر بازخورد خروجی پویای غیرمتمرکز مقاوم از مرتبه‌ی ثابت برای سامانه‌های مقیاس وسیع با عدم قطعیت غیرخطی

مهدی سجودی[۱]، وحید جوهری مجد[۲]

[۱] دانشجوی دکتری، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر ، گروه مهندسی کنترل.

[۲] دانشیار، دانشگاه تربیت مدرس، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، گروه مهندسی کنترل، پیام‌نگار: majd@modares.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۹/۸/۱۲، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۹/۹/۲۰)

چکیده: هدف این نوشتار ارائه یک روش کنترلی مبتنی بر نابرابری‌های ماتریسی خطی برای پایدارسازی مقاوم غیرمتمرکز غیرشکننده با مرتبه دلخواه ثابت برای سامانه‌های متشکل از زیرسامانه‌هایی با پویایی خطی و دارای عدم‌قطعیت و با اتصالات غیر خطی با قیود مربعی می‌باشد. این روش از ساختار بازخورد خروجی پویای خطی عمومی به‌همراه عدم‌قطعیت در پارامترها بهره می‌گیرد. در این طراحی درجه قوام بیشینه‌ی سامانه حلقه بسته با حل مسئله‌ی بهینه سازی تحت شرایط پایداری که به‌صورت نابرابری‌های ماتریسی خطی بیان شده است بدست می‌آید و سپس پارامترهای کنترلگر مرتبه ثابت از روی نتایج محاسبه می‌شود. در نهایت، یک مثال عددی قابل مقایسه با کارهای اخیر، برای نشان دادن قابلیت اجرا و اعمال روش و همچنین نشان دادن اثربخشی و بهبود صورت پذیرفته، آورده می-شود.

کلمات کلیدی: بازخورد خروجی پویا، سامانه‌های مقیاس وسیع ، کنترلگر غیر شکننده ، کنترلگر مرتبه ثابت، نابرابری‌های ماتریسی خطی.

A Fixed-Order Robust Decentralized Dynamic Output Feedback Controller Design for Large Scale Systems with Nonlinear Uncertainty

Mahdi Sojoodi, Vahid Johari Majd

Abstract: The objective of this paper is to propose a fixed-order non-fragile dynamic output control scheme within the LMI framework for robust decentralized stabilization of systems composed of linear dynamic subsystems coupled by static nonlinear interconnections satisfying quadratic constraints. The procedure utilizes the general linear dynamic feedback structure in presence of parameter uncertainty. In this design, the maximum robustness degree of the closed loop system is obtained through solving the optimization problem under stabilizing conditions given in the form of LMIs, and then the fixed order controller parameters are calculated based on the obtained results. A numerical example illustrates the applicability and effectiveness of the method.

Keywords: Output dynamic feedback, large scale systems, non-fragile controller, fixed-order controller, linear matrix inequality (LMI).

۱- مقدمه

با ظهور ابزار قدرتمند بهینه سازی محدب با استفاده از نابرابری‌های ماتریسی خطی [۱]، حل مسائل طراحی کنترلگر در قالب نابرابری‌های ماتریسی خطی بسیار جذابیت پیدا کرد. با توجه به اینکه بدست آوردن شرط لازم و کافی در طراحی بازخورد خروجی با استفاده از روشهای بهینه سازی محدب به مسئله‌ای غیرمحدب منجر می‌شود [۲-۳]، پژوهشگران بدنبال ارائه روش‌های ابتکاری برای امکان ساده سازی این مسائل با روشهای مختلف برای حل توسط ابزار نابرابری‌های ماتریسی خطی هستند. مشکل غیر محدب بودن مسائل، با بکارگیری قیود

ساختاری اطلاعات غیرمتمرکز در طراحی کنترلگر بسیار بیشتر نیز می‌گردد [۴–۵]. در سالهای اخیر پیشرفت‌های زیادی در راستای ارائه روش‌های کنترل پیشرفته در جهت طراحی غیرمتمرکز برای سامانه‌های بهم‌پیوسته (Interconnected) حاصل شده است و ایده‌ها و نتایج جدید بسیاری در این حوزه ارائه شده است. در این میان طراحی کنترلگرهای H_2 و H_∞ با استفاده از نابرابری‌های ماتریسی خطی برای سامانه‌هائی با ابعاد وسیع مورد توجه تعداد زیادی از پژوهشگران قرار گرفته است [۶]. پس از ارائه نتایج اولیه در [۷]، مقالات بسیاری [۸–۱۰] برای نشان دادن بهبود حاصل شده و تبدیل مسئله غیرمحدب به محدب با استفاده از روشهای ابتکاری متفاوت برای سامانه‌های مختلف ارائه شده است. ساختار مقیاس وسیع در کاربردهای مهم و پیچیده‌ی مانند سامانه‌های قدرت، ساختارهای وسیع و شبکه‌های رایانه‌ای قابل مشاهده است [۱۱–۱۳]. برخی از کارهای مهم صورت گرفته در این حوزه، به طراحی کنترلگر غیرمتمرکز بطور صریح یا ضمنی، برای پایدارسازی کل سامانه در حضور بازخوردهای محلی زیرسامانه‌ها و تغییرات پیکره‌بندی در اتصالات زیرسامانه‌ها پرداخته‌اند [۱۴–۱۶].

در [۸]، سامانه‌های خطی به‌صورت توأمان با ساختار بهم پیوسته غیرخطی مد نظر قرار گرفته است. از آنجا که در اغلب کاربردهای عملی می‌توان زیرسامانه‌ها را حول نقاط کار با یکسری عدم‌قطعیت حول این نقاط، خطی در نظر گرفت، این مدل از اهمیت بالائی برخوردار است. همچنین با توجه به اینکه در بسیاری از مسائل عملی، اتصالات بین زیر سامانه‌ها دارای ساختارهای ناشناخته و غیرخطی هستند و تنها کران‌هایی از آنها معلوم است، جذابیت این مدل دوچندان می‌شود. همچنین این ساختار امکان بیشینه‌سازی کران روی اتصالات و عدم قطعیت‌ها را فراهم می‌نماید. با توجه به مزایای ساختار مدل ارائه شده در [۸]، بسیاری از مقالات، آن را به عنوان مدل پایه مورد استفاده قرار داده‌اند.

پایدارسازی ساختار مدل ارائه شده، در [۸] بوسیله بازخورد حالت صورت گرفته است. این ساختار مدل در [۱۷] توسط یک بازخورد حالت تخمین زده شده غیرمتمرکز بر پایه‌ی رویتگر طراحی شده برای هر زیرسامانه کنترل گردیده است. همچنین ساختار مدل در [۹و۱۸–۱۹] توسط بازخورد خروجی با رویتگر لون برگر کنترل شده است. روش ارائه شده در [۱۹] با حذف یک سری از شروط ارائه شده در [۹] به ارائه یک روش جدید برای دسته وسیع‌تری از سامانه‌ها پرداخته است. همچنین در [۲۰]، ساختار مدل ارائه شده در [8] با بازخورد خروجی پویای هم مرتبه با سامانه (مرتبه کامل) کنترل شده است. در [۲۱] کنترل مقاوم غیرمتمرکز با رویکرد بازخورد خروجی مرتبه کامل برای دسته‌ای از سامانه‌های با اتصالات داخلی غیرخطی نمواً خطی ارائه شده و نتایج حاصل از آن بر روی یک فرآیند تانک چهارتائی تحت آزمون قرار گرفته است.

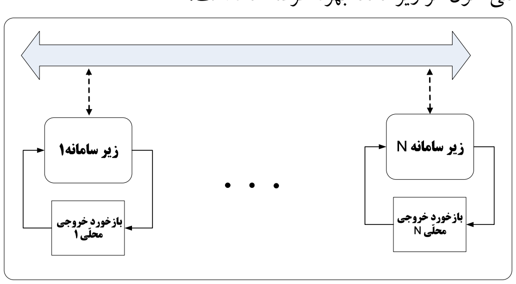
با توجه به بررسی‌های انجام شده و مطالعات صورت گرفته، در زمینه کنترل مرتبه ثابت ساختار مدل [8] و همچنین در نظر گرفتن عدم‌قطعیت در پارامترهای کنترلگر به منظور طراحی کنترلگر غیرشکننده تحقیق و پژوهشی مشاهده نگردید. اهمیت بسیار زیاد طراحی کنترلگر مرتبه ثابت و غیرشکننده انگیزه انجام این تحقیق بود.

هدف این مقاله ارائه یک روش مبتنی بر نابرابری‌های ماتریسی خطی برای طراحی بازخورد خروجی پویای غیرشکننده با مرتبه ثابت دلخواه برای هر زیرسامانه برای پایدارسازی مقاوم غیرمتمرکز سامانه‌های بهم پیوسته است. برای این منظور بازخورد خروجی خطی پویای غیرمتمرکز غیرشکننده با ساختاری بسیار عمومی و با مرتبه دلخواه ثابت به ساختار مدل پایه ارائه شده در [۸] اعمال گردیده است. در این طراحی درجه قوام بیشینه‌ی سامانه حلقه بسته با حل مسئله‌ی بهینه سازی تحت شرایط پایداری که به‌صورت نابرابری‌های ماتریسی خطی بیان شده است بدست می‌آید و سپس پارامترهای کنترلگر مرتبه ثابت از روی نتایج محاسبه می‌شود.

ساختار این مقاله به‌صورت زیر است: در بخش دوم به بیان مسئله و مقدمات لازم برای طراحی پرداخته شده است. نتایج اصلی کار تحت دو قضیه در بخش سوم بیان شده است و بخش چهارم به ارائه یک مثال عددی برای تشریح قابلیت اعمال روش طراحی اختصاص یافته است. در نهایت در بخش پنجم نتیجه‌گیری مقاله ارائه شده است.

۲- تعریف مساله

سامانه غیرخطی به هم پیوسته متشکل از تعداد محدود N زیرسامانه مطابق شکل ۱ مفروض است که در آن زیرسامانه‌ها دارای ارتباطات داخلی (که در شکل زیر با خط‌چین‌های دوطرفه نمایش داده شده است) با یکدیگر بوده و برای پایداری کلّ سامانه از باز خوردهای محلی حول هر زیرسامانه بهره گرفته شده است.



شکل ۱: سامانه غیرخطی به هم پیوسته متشکل از تعداد N زیرسامانه با بازخورد خروجی پویای غیرمتمرکز

معادلات هریک از زیرسامانه‌های سامانه غیرخطی به هم پیوسته به‌صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_{pi} = A_{ii}x_{pi} + B_i u_i + h_i(t,x_p)\\
&h_i(t,x_p) = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} A_{ij}x_{pj} + \bar{h}_i(t,x_p) \qquad (۱)\\
&y_i = C_i x_{pi}, \qquad i = 1,\cdots,N
\end{aligned}$$

که در آن $x_{pi}\in\Re^{n_i}$ ، $u_i\in\Re^{m_i}$ و $y_i\in\Re^{p_i}$ به ترتیب بردارهای حالت، ورودی و خروجی زیر سامانه iام جایی‌که $\sum_{i=1}^{N} n_i = n$، $x_p = \begin{bmatrix} x_{p1}^T & x_{p2}^T & \cdots & x_{pN}^T \end{bmatrix}^T$ بردار حالت کل سامانه بهم‌پیوسته، A_{ii} ، A_{ij} ، B_i و C_i ماتریس‌هایی با ابعاد مناسب، و $\bar{h}_i(t,x_p)$ حاوی تمام ترم‌های غیرخطّی و عدم‌قطعیت موجود در هر زیرسامانه فرض گردیده است و فرض شده است که $h_i(t,x_p):\Re^{n+1}\to\Re^{n_i}$ یک تابع برداری تکه‌ای خطی نسبت به هر دو آرگومان t, x_p است و در حوزه پیوستگی خود نابرابری مربعی زیر را برآورده می‌سازد:

$$h_i(t,x_p)^T h_i(t,x_p) \le \bar{\alpha}_i^2 x_p^T \bar{H}_i^T \bar{H}_i x_p,\; i = 1,\ldots,N\,. \qquad (۲)$$

در رابطه بالا $\bar{H}_i$ ماتریس‌های با ابعاد $v_i\times n$ و معلوم هستند و $\bar{\alpha}_i > 0$ کران هایی هستند که می توانند بسته به مسئله معلوم فرض شوند و یا اینکه هدف مسئله پیدا کردن مقدار بیشینه‌ی آنها ضمن حفظ پایداری سامانه حلقه بسته‌ی کلّ باشد [8 و9].

می‌توان سامانه کلّی بهم پیوسته را به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} \dot{x}_p = Ax_p + Bu + h(t,x_p)\\ y = Cx_p \end{cases} \qquad (۳)$$

که در آن $u = \begin{bmatrix} u_1^T & \cdots & u_N^T \end{bmatrix}^T$، $\sum_{i=1}^{N} m_i = m$ و $y = \begin{bmatrix} y_1^T & \cdots & y_N^T \end{bmatrix}^T$ و $\sum_{i=1}^{N} p_i = p$ به ترتیب بردارهای ورودی و خروجی سامانه بهم‌پیوسته هستند. $A = diag(A_{11},A_{22},\cdots,A_{NN})$، $B = diag(B_1,B_2,\cdots,B_N)$، $C = diag(C_1,C_2,\cdots,C_N)$ بوده و $h(t,x_p) = \begin{bmatrix} h_1(t,x_p)^T & \cdots & h_N(t,x_p)^T \end{bmatrix}^T$ تابع ارتباطات داخلی (غیرخطی) کل سامانه بهم پیوسته است.

حال $\bar{H}^T = \begin{bmatrix} \bar{H}_1^T & \cdots & \bar{H}_N^T \end{bmatrix}$ و $\bar{\Gamma} = diag(\bar{\gamma}_1 I_{v_1},\ldots,\bar{\gamma}_N I_{v_N})$ را در نظر بگیرید که $\bar{H}_i$ها برای $i = 1,\ldots,N$ در (۲) تعریف شده‌اند. با تعریف $\bar{\gamma}_i = \bar{\alpha}_i^{-2}$ (I_{v_i} ماتریس واحد $v_i\times v_i$)، همواره می‌توان ماتریس‌های H و Γ را چنان یافت که [9]:

$$h(t,x_p)^T h(t,x_p) \le x_p^T \bar{H}^T \bar{\Gamma}^{-1} \bar{H} x_p \le x_p^T H^T \Gamma^{-1} H x_p \qquad (۴)$$

که در آن $H = diag(H_1,H_2,\cdots,H_N)$، ماتریس‌های H_i به ابعاد $v_i\times n_i$، و $\Gamma = diag(\gamma_1 I_{v_1},\ldots,\gamma_N I_{v_N})$ با $\gamma_i > 0$ و $\alpha_i = \gamma_i^{-1/2}$ هستند. همانطور که در [9] اثبات گردیده است، برای برقراری رابطه (۴)، کافیست رابطه زیر برقرار باشد:

$$\lambda_{\max}(\bar{H}^T\bar{H})\min_i \bar{\gamma}_i \le \max_i \gamma_i \min_i \lambda_{\min}(H_i^T H_i) \qquad (۵)$$

در این مقاله، بدنبال طراحی کنترلگر بازخورد خروجی پویای شکننده و غیر شکننده با مرتبه ثابت دلخواه داده شده‌ی n_c برای کنترلگر کلی برای سامانه داده شده در (۳) هستیم تا به‌صورت غیرمتمرکز و تنها با استفاده از اطلاعات خروجیِ زیرسامانه‌ها ، کلّ سامانه را کنترل نمائیم. در این طراحی مرتبه کنترلگر زیر سیستم i–ام مقدار دلخواه n_{ci} می باشد به‌طوری‌که $\sum_{i=1}^{N} n_{ci} = n_c$.

ساختار مدل کنترلگر بازخورد خروجی پویای معمولی و نیز غیرشکننده را به ترتیب به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y\\ u = C_c x_c + D_c y,\;\; x_c(0) = 0 \end{cases} \qquad (۶)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_c = (A_c + \Delta A_c)x_c + (B_c + \Delta B_c)y\\ u = (C_c + \Delta C_c)x_c + (D_c + \Delta D_c)y,\;\; x_c(0) = 0 \end{cases} \qquad (۷)$$

که در آن $x_c\in\Re^{n_c}$ حالات کنترلگر کلّی‌است، و $x_c = \begin{bmatrix} x_{c1} & \cdots & x_{cN} \end{bmatrix}^T$ ، $x_{ci}\in\Re^{n_{ci}}$ می‌باشد. همچنین $A_c = diag\begin{pmatrix} A_{c1} & \cdots & A_{cN} \end{pmatrix}$ ، $B_c = diag\begin{pmatrix} B_{c1} & \cdots & B_{cN} \end{pmatrix}$ ، $C_c = diag\begin{pmatrix} C_{c1} & \cdots & C_{cN} \end{pmatrix}$ و $D_c = diag\begin{pmatrix} D_{c1} & \cdots & D_{cN} \end{pmatrix}$ بوده که A_{ci} ، B_{ci} ، C_{ci} و D_{ci} پارامترهای کنترلگر هریک از زیرسامانه‌ها می‌باشند و:

$$\|\Delta A_c\| \le \delta_{A_c},\ \|\Delta B_c\| \le \delta_{B_c},\ \|\Delta C_c\| \le \delta_{C_c} \text{ و } \|\Delta D_c\| \le \delta_{D_c} \qquad (۸)$$

عدم قطعیت‌هایی با کران نرم معلوم هستند.

با در نظر گرفتن کنترلگر (۶) و سامانه (۳) به‌صورت توأم، سامانه حلقه بسته را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{A}x + \begin{bmatrix} h(t,x_p)\\ 0 \end{bmatrix}\\ y = \bar{C}x \end{cases} \qquad (۹)$$

که در آن $x = \begin{bmatrix} x_{p1}^T & x_{c1}^T & \cdots & x_{pN}^T & x_{cN}^T \end{bmatrix}$ ، $\bar{A} = diag\begin{pmatrix} \bar{A}_1 & \cdots & \bar{A}_N \end{pmatrix}$ ، $\bar{C} = diag\begin{pmatrix} \bar{C}_1 & \cdots & \bar{C}_N \end{pmatrix}$ ، $\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i + B_i D_{ci} C_i & B_i C_{ci}\\ B_{ci} C_i & A_{ci} \end{bmatrix}$ و $\bar{C}_i = \begin{bmatrix} C_i \vdots 0 \end{bmatrix}$ می‌باشد.

تعریف ۱: دسته H_α**:** برای هر $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_N \end{bmatrix}^T$ و Ξ معلوم، H_α دسته‌ای از توابع تکه‌ای– پیوسته است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_\alpha = \begin{Bmatrix} h(t,x_p) \,\big|\, h\in\Re^n, h^T h \le x_p^T \Xi^T \alpha^T \alpha \Xi x_p\\ \text{in the domains of continuity} \end{Bmatrix} \qquad (۱۰)$$

تعریف فوق ایجاب می‌کند که $h(t,0)=0$ باشد و این شرط الزام می‌کند که $x=0$ بعنوان نقطه تعادل سامانه (۹) باشد.

تعریف ۲: پایداری مقاوم از درجه $\alpha=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_N\end{bmatrix}^T$: سامانه (۹) با عدم‌قطعیت غیرخطی کراندار ارائه شده در (۴)، پایدار مقاوم از درجه برداری α گفته می‌شود، اگر نقطه تعادل $x=0$، برای تمام $h(t,x_p)\in H_\alpha$ پایدار مجانبی سراسری باشد.

تعریف‌های ۱ و ۲ توسعه یافته تعریف‌های ارائه شده در [8] به‌صورت برداری می‌باشند.

مطابق [۸ و ۲۰]، سامانه حلقه بسته (۹) را به‌صورت مقاوم با درجه $\alpha=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_N\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1/\sqrt{\gamma_1} & \cdots & 1/\sqrt{\gamma_N}\end{bmatrix}^T$ پایدار گویند اگر این سامانه برای تمام $h(t,x_p)$ هائی که در رابطه (۴) صدق می‌کند به‌صورت مجانبی سراسری پایدار باشد. با بیشینه کردن α همزمان با پایدارسازی بخش خطی (۳)، خطای مجاز برای اتصالات داخلی غیرخطی و عدم قطعیت‌های مجاز نیز بیشینه می‌شود.

لم ۱ [4]**: رَوند S (*S-procedure*)** ماتریس‌های متقارن $T_0,\ldots,T_p\in\Re^{n\times n}$ مفروض هستند. شرایط زیر روی $T_0,\ldots,T_p$ در نظر گرفته می‌شوند:

$$\zeta^T T_0\zeta>0\quad \forall\zeta\neq 0\text{ ,بطوریکه } \zeta^T T_i\zeta\geq 0,\ i=1,\ldots,p \tag{۱۱}$$

حال در صورتیکه $\tau_1\geq 0,\ldots,\tau_p\geq 0$ هائی وجود داشته باشند، که رابطه:

$$T_0-\sum_{i=1}^{p}\tau_i T_i>0 \tag{۱۲}$$

برقرار باشد، آنگاه رابطه (۱۱) برقرار خواهد بود [4].

۳- نتایج اصلی کار

در این بخش دو قضیه برای طراحی کنترلگر بازخورد خروجی مرتبه ثابت معمولی و غیرشکننده برای سامانه غیرخطی به هم پیوسته (۳) ارائه شده است. با توجه به اینکه، هدف مسئله پیدا کردن مقدار بیشینه‌ی کران ترم غیرخطّی $h(t,x_p)$ بیان گردیده است. می‌توان با یافتن مقدار کمینه ماتریس قطری Γ که سامانه حلقه بسته (۹) به‌ازای آن پایدار است، نسبت به بیشینه کردن درجه قوام α اقدام کرد.

قضیه ۱: سامانه حلقه‌باز (۳) و کنترلگری به‌صورت (۶) مفروض است. اگر ماتریس‌های مثبت معین $P=P^T$ به‌صورت:

$$P=diag\left(P_1,\ldots,P_N\right),\ P_i=diag\left(P_{pi},P_{ci}\right),\quad i=1,\ldots,N \tag{۱۳}$$

و ماتریس‌های Y_i، Q_i، W_i و U_i به ازای $i=1,\ldots,N$ و اسکالر مثبت τ_1 وجود داشته باشند به‌طوری‌که مسئله کمینه سازی زیر دارای جواب باشد:

$$\begin{aligned}&\text{minmize}\quad \sum_{i=1}^{N}\hat{\gamma}_i\\ &\text{subject to}\quad \begin{bmatrix} diag\left(L_1,\ldots,L_N\right) & P & \tau_1\begin{bmatrix}H^T\\ 0\end{bmatrix}\\ * & -\tau_1 I & 0\\ * & * & -\hat{\Gamma}\end{bmatrix}<0\end{aligned} \tag{۱۴}$$

که در آن:

$$L_i=\begin{bmatrix}A_i^T P_{pi}+C_i^T Y_i^T+P_{pi}A_i+Y_iC_i & C_i^T W_i^T+Q_i\\ Q_i^T+W_iC_i & U_i^T+U_i\end{bmatrix},\ i=1,\ldots,N, \tag{۱۵}$$
$$\hat{\Gamma}=diag(\hat{\gamma}_1 I_{v_1},\ldots,\hat{\gamma}_N I_{v_N})$$

آنگاه سامانه حلقه‌بسته (۹) به‌صورت مقاوم با درجه $\alpha=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_N\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1/\sqrt{\gamma_1} & \cdots & 1/\sqrt{\gamma_N}\end{bmatrix}^T$ پایدار است که در آن $\gamma_i=\tau_1^{-1}\hat{\gamma}_i$ و یا $\Gamma=\tau_1^{-1}\hat{\Gamma}$. در این صورت پارامترهای کنترلگر بازخورد خروجی A_c، B_c، C_c و D_c از روابط زیر بدست می‌آیند که در آن عملگر $\uparrow$ بیانگر شبه معکوس می‌باشد:

$$\begin{aligned}A_{ci}&=P_{ci}^{-1}U_i\\ B_{ci}&=P_{ci}^{-1}W_i\\ C_{ci}&=B_i^{\uparrow}P_{Pi}^{-1}Q_i\\ D_{ci}&=B_i^{\uparrow}P_{pi}^{-1}Y_i\end{aligned} \tag{۱۶}$$

اثبات: با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف به‌صورت زیر:

$$V=x^T P x \tag{۱۷}$$

با مشتق گیری از (۱۷) و با فرض $z_1=\begin{bmatrix}h(t,x_p)\\ 0\end{bmatrix}$ و جای‌گذاری معادلات سامانه (۹) در (۱۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\dot{V}&=\dot{x}^T P x+x^T P\dot{x}\\ &=(\overline{A}x+z_1)^T P x+x^T P(\overline{A}x+z_1)\\ &=\begin{bmatrix}x\\ z_1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\overline{A}^T P+P\overline{A} & P\\ * & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ z_1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{۱۸}$$

برای منفی بودن (۱۸) باید نابرابری زیر برقرار باشد:

$$-\begin{bmatrix}x\\ z_1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\overline{A}^T P+P\overline{A} & P\\ * & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ z_1\end{bmatrix}\geq 0 \tag{۱۹}$$

با توجه به (۴)، روشن است که:

$$z_1^T z_1\leq x_p^T H^T\Gamma^{-1}Hx_p \tag{۲۰}$$

همچنین می‌توان رابطه (۲۰) را به‌صورت معادل زیر بیان کرد:

$$\begin{bmatrix} x \\ z_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} H^T\Gamma^{-1}H & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ * & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z_1 \end{bmatrix} \geq 0 \qquad (۲۱)$$

با فرض (۱۳) و با به‌کارگیری روابط (۱۹) و (۲۱) در لم ۱ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{bmatrix} diag(L_1,\ldots,L_N) + \tau_1 \begin{bmatrix} H^T\Gamma^{-1}H & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} & P \\ * & -\tau_1 I \end{bmatrix} \leq 0 \qquad (۲۲)$$

حال با بکارگیری مکمل شور در رابطه (۲۲)، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} diag(L_1,\ldots,L_N) & P & \tau_1 \begin{bmatrix} H^T \\ 0 \end{bmatrix} \\ * & -\tau_1 I & 0 \\ * & * & -\tau_1\Gamma \end{bmatrix} \leq 0 \qquad (۲۳)$$

که در آن:

$$L_i = \begin{bmatrix} A_i^T P_{pi} + C_i^T D_{ci}^T B_i^T P_{pi} + P_{pi}A_i + P_{pi}B_i D_{ci} C_i & C_i^T B_{ci}^T P_{ci} + P_{pi} B_i C_{ci} \\ C_{ci}^T B_i^T P_{pi} + P_{ci} B_{ci} C_i & A_{ci}^T P_{ci} + P_{ci} A_{ci} \end{bmatrix}$$
$$, i = 1,\ldots,N.$$

(۲۴)

با تغییر متغیّرهایی به‌صورت $\hat{\Gamma} = \tau_1 \Gamma$ و به‌صورت زیر:

$$\begin{aligned} Y_i &= P_{pi} B_i D_{ci} \\ Q_i &= P_{pi} B_i C_{ci} \\ W_i &= P_{ci} B_{ci} \\ U_i &= P_{ci} A_{ci} \end{aligned} \qquad (۲۵)$$

رابطه نابرابری ماتریسی خطّی ارائه شده در (۱۴) حاصل می‌گردد. پایان اثبات□.

در قضیه بعدی به طراحی کنترلگر مرتبه ثابت غیرشکننده با مرتبه ثابت دلخواه در حضور عدم‌قطعیت در پارامترهای کنترلگر برای سامانه غیرخطی به هم پیوسته (۳) می‌پردازیم:

قضیه ۲: سامانه حلقه‌باز (۳) و کنترلگری غیرشکننده به‌صورت (۷) با کران (۸) را در نظر بگیرید. اگر ماتریس‌های مثبت معین $P = P^T$ به‌صورت (۱۳) و ماتریس‌های Y_i، Q_i، W_i و U_i به ازای $i = 1,\ldots,N$ و اسکالرهای مثبت τ_j برای $j = 1,..,5$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که مسئله کمینه سازی زیر دارای جواب باشد:

$$\text{minmize} \quad \sum_{i=1}^{N} \hat{\gamma}_i$$
subject to
$$\begin{bmatrix} diag(L_1,\ldots,L_N) & P\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & \tau_3 \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} \\ * & -\tau_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\tau_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\tau_3 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\tau_4 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tau_5 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\hat{\Gamma} \end{bmatrix} < 0$$

(۲۶)

که در آن:

$$L_i = \begin{bmatrix} A_i^T P_{pi} + C_i^T Y_i^T + P_{pi} A_i + Y_i C_i & C_i^T W_i^T + Q_i \\ Q_i^T + W_i C_i & U_i^T + U_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_2 \|C\| \delta_{D_c}^2 I + \tau_5 \|C\| \delta_{B_c}^T I & 0 \\ * & \tau_1 \delta_{C_c}^2 I + \tau_4 \delta_{A_c}^2 I \end{bmatrix} \qquad (۲۷)$$
$$, i = 1,\ldots,N.$$

آنگاه سامانه حلقه‌بسته (۹) به‌صورت مقاوم با درجه $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_N \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{\gamma_1} & \cdots & 1/\sqrt{\gamma_N} \end{bmatrix}^T$ پایدار است. که در آن $\gamma_i = \tau_3^{-1}\hat{\gamma}_i$ و یا $\Gamma = \tau_3^{-1}\hat{\Gamma}$. در این‌صورت پارامترهای کنترلگر بازخورد خروجی A_c، B_c، C_c و D_c از رابطه (۱۶) بدست می‌آیند.

اثبات: مشابه نحوه‌ی اثبات قضیه ۱ و با فرض:

$$z_1 = \Delta C_c x_c \;,\; z_2 = \Delta D_c C x_p \;,\; z_3 = h(t, x_p), \qquad (۲۸)$$
$$z_4 = \Delta A_c x_c \;,\; z_5 = \Delta B_c C x_p,$$

می‌توان نوشت:

$$\dot{V} = (\bar{A}x + \begin{bmatrix} Bz_1 + Bz_2 + z_3 \\ z_4 + z_5 \end{bmatrix})^T Px + x^T P(\bar{A}x + \begin{bmatrix} Bz_1 + Bz_2 + z_3 \\ z_4 + z_5 \end{bmatrix})$$
$$= \begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}^T P + P\bar{A} & P\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}$$

(۲۹)

برای منفی بودن (۲۹) نابرابری زیر باید برقرار باشد:

$$-\begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}^T P + P\bar{A} & P\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} \geq 0$$

(۳۰)

با در نظر گرفتن رابطه (۲۸)، (۴) و (۸) خواهیم داشت:

$$z_1^T z_1 \leq \delta_{C_c}^2 x_c^T x_c \;,\; z_2^T z_2 \leq \|C\| \delta_{D_c}^2 x_p^T x_p \;,$$
$$z_3^T z_3 \leq x_p^T H^T \Gamma^{-1} H x_p \;,\; z_4^T z_4 \leq \delta_{A_c}^2 x_c^T x_c \;, \qquad (۳۱)$$
$$z_5^T z_5 \leq \|C\| \delta_{B_c}^2 x_p^T x_p \;,$$

حال مشابه روند اثبات در قضیه ۱، با استفاده از لم ۱ در روابط (۲۹)، (۳۰) و (۳۱)، همچنین با بکارگیری مکمل شور می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{bmatrix} diag(L_1,\ldots,L_N) & P\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix} & P\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix} & P\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix} & P\begin{bmatrix}0\\I\end{bmatrix} & P\begin{bmatrix}0\\I\end{bmatrix} & \tau_3\begin{bmatrix}H\\0\end{bmatrix} \\ * & -\tau_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\tau_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\tau_3 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\tau_4 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tau_5 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\tau_3\Gamma \end{bmatrix} \le 0 \tag{۳۲}$$

که در آن:

$$L_i = \begin{bmatrix} A_i^T P_{pi} + C_i^T D_{ci}^T B_i^T P_{pi} + P_{Pi}A_i + P_{pi}B_i D_{ci} C_i & C_i^T B_{ci}^T P_{ci} + P_{pi} B_i C_{ci} \\ C_{ci}^T B_i^T P_{Pi} + P_{ci} B_{ci} C_i & A_{ci}^T P_{ci} + P_{ci} A_{ci} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_2 \|C\| \delta_{D_c}^2 I + \tau_5 \|C\| \delta_{B_c}^T I & 0 \\ * & \tau_1 \delta_{C_c}^2 I + \tau_4 \delta_{A_c}^2 I \end{bmatrix} \quad ,i=1,\ldots,N. \tag{۳۳}$$

با اعمال تغییر متغیّرهای رابطه (۲۵) در (۳۳) و تغییر متغیّر به‌صورت $\hat{\Gamma} = \tau_3 \Gamma$، به رابطه (۲۶) خواهیم رسید. پایان اثبات.□

نکته ۱: در قضیه ۱ و ۲ با صفر قرار دادن مرتبه کنترلگر می‌توان به طرّاحی کنترلگر بازخورد خروجی ایستا پرداخت، همچنین قضیه ۱ و ۲ با صفر قرار دادن مرتبه کنترلگر و با فرض $C = I$ از طرّاحی کنترلگر بازخورد خروجی پویا به طرّاحی کنترلگر بازخورد حالت تغییر می‌یابد.

توجه ۱: در این مقاله برای شناسائی نابرابری‌های ماتریسی خطی ارائه شده در قضیه ۱ و ۲ به محیط نرم‌افزار، از جعبه ابزار یالمیپ [۲۲] (Yalmip) و برای حلّ آن‌ها از جعبه ابزار LMILab در محیط نرم‌افزار متلب (Matlab) استفاده گردیده است.

۴- مثال عددی

به منظور شبیه‌سازی و به منظور قابلیت مقایسه، حرکت دو پاندول معکوس که توسط فنر به یکدیگر متصل شده‌اند در نظر گرفته شده است که می‌تواند در پرش‌های ناگهانی با اندازه و جهت غیر قابل پیش‌بینی، میله‌ی پاندول را بالا و پایین بلغزاند. یک مدل خطی و نرمالیزه شده از هر یک از زیرسامانه‌ها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۸]:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_{p1}(t) = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} x_{p1}(t) + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} u(t) + h_1(t,x_p), \\ &y_1(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} x_{p1}(t), \\ &h_1(t,x_p) = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} e(t,x_p) x_p, \\ &\dot{x}_{p2}(t) = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} x_{p2}(t) + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} u(t) + h_2(t,x_p), \\ &y_2(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} x_{p2}(t), \\ &h_2(t,x_p) = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} e(t,x_p) x_p. \end{aligned} \tag{۳۴}$$

در روابط بالا $e(t,x_p): \Re^5 \to [0,1]$ پارامترهای نرمالیزه شده اتصالات را نشان می‌دهند. می‌توان فرم کلی سامانه را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_p(t) = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} x_p(t) + \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\\0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} u(t) + h(t,x_p) \\ &y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} x_p(t) \end{aligned} \tag{۳۵}$$

که در آن:

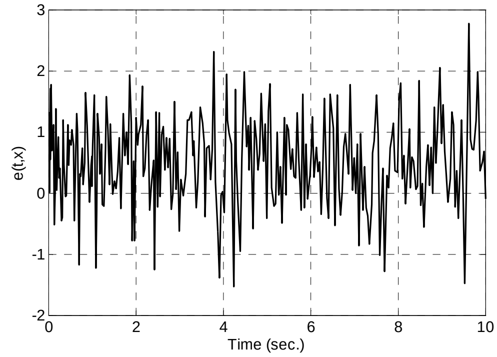
$$h(t,x_p) = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix} e(t,x_p) x_p \tag{۳۶}$$

می‌خواهیم یک قانون کنترل غیرمتمرکز بدست آوریم که سامانه را برای همه مقادیر $e(t,x_p) \in [0,1]$ در حضور عدم‌قطعیت در پارامترهای کنترلگر پایدار کند.

بازخورد حالت خطی غیرمتمرکز مقاوم ایستا بر اساس روش ارائه شده در [8]، درجه قوام $\alpha^* = \alpha_1 = \alpha_2 = 4.4950$ و ماتریس ضرایب $K = [-725.9085 \quad -40.4346]$ را بدست می‌دهد، و قطب‌های حلقه بسته حاصل $\{-20 \pm 17.8093i\}$ می‌باشد. امّا به سادگی می‌توان دید که به علت وجود مد ناپایدار در سامانه حلقه باز که اطلاعات آن در خروجی ظاهر نمی‌گردد، این سامانه با هیچ بازخورد خطی خروجی ایستا قابل پایدارسازی نمی‌باشد. اما این‌کار با بازخورد خطی خروجی پویا امکان‌پذیر می‌باشد، پارامترهای کنترلگر بازخورد خروجی پویا مرتبه کامل که از قضیه ۱ [۲۰] با فرض $H = I$ بدست آمده است به‌صورت Ac=10^4×[-0.4670 -1.4182;-1.0131 3.1931]، Bc=10^4×[-3.3926;1.5118]، Cc=[243.5166 767.0817] و Dc= -333.7029 می‌باشد، که این کنترلگر قطب‌های سامانه حلقه بسته را در مقادیر زیر قرار می‌دهد:

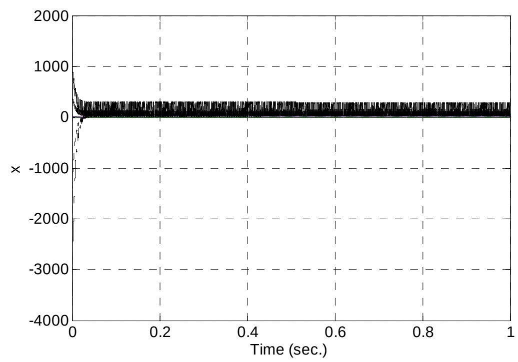
$$\left\{-3.6543 \times 10^4; -0.0390 \times 10^4; -0.7455 \pm 0.5605i\right\}$$

از یک سیگنال نویز گوسی با میانگین ۰/۵ و واریانس ۰/۵ که در شکل ۲ نشان داده شده است برای شبیه سازی سیگنال $e(t,x_p)$ استفاده شده است. شکل ۳ و شکل ۴ به ترتیب حالت‌ها و خروجی سامانه حلقه بسته حاصل از کنترلگر مرتبه کامل قضیه ۱ [۲۰] را نشان می‌دهند. چنانچه در شکل ۳ نیز مشاهده می‌شود بزرگ بودن پارامترهای کنترلگر، بازه تغییرات وسیعی را برای حالت‌های سامانه حلقه بسته موجب شده است.

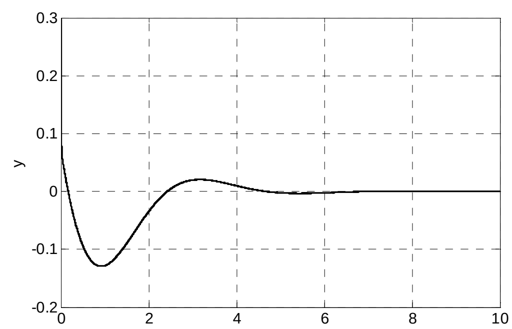


شکل ۲: سیگنال نویز گوسی با میانگین ۰/۵ و واریانس ۰/۵

نتایج حاصل از قضیه ۱ با فرض $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.5$ در جدول ۱ برای مرتبه‌های مختلف کنترلگر برای هر زیر سامانه به همراه محل قرارگیری قطب‌های حلقه بسته نشان داده شده است.



شکل ۳: حالت‌های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه کامل ارائه شده در [۲۰]

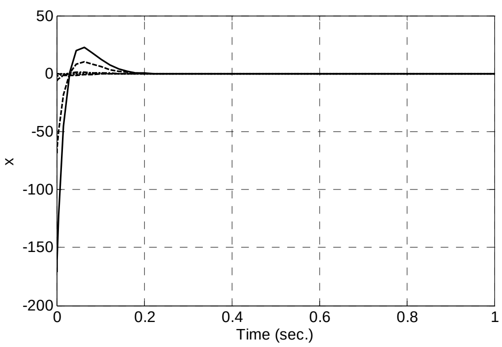


شکل ۴: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه کامل ارائه شده در [۲۰]

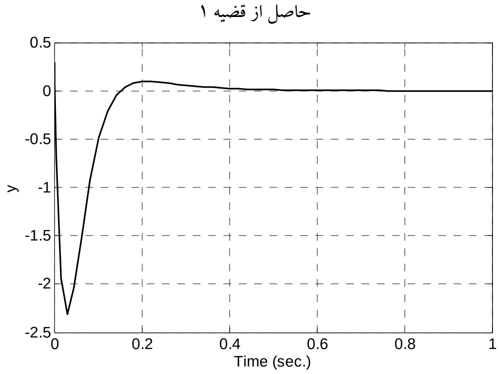
جدول ۱: پارامترهای کنترلگروقطب‌های‌حلقه‌بسته‌با اعمال قضیه ۱ به سامانه نمونه

مرتبه کنترلگر	قطب‌های حلقه بسته	پارامترهای کنترلگر
0	0 ± 3.1626	Dc = -11.0025
1	(-98.5963 ±626.2838i) -136.8172	Ac=-334.0098 Bc=-115.8581 Cc=-761909.8291 Dc=-428932.9973
2	-5375.1735 (-69.9510 ±502.8512i) -28.2745	Ac=[-2728.1704 -4701.1121 -1602.6708 -2815.1797] Bc=[-2777.8063 -1631.8701]^T Cc=[-737860.0973 -1341458.1817] Dc=-1019733.2438
بازخورد حالت (C=I)	-1.4483 -6.5642	K=Dc = [-10.5076 -8.0126]

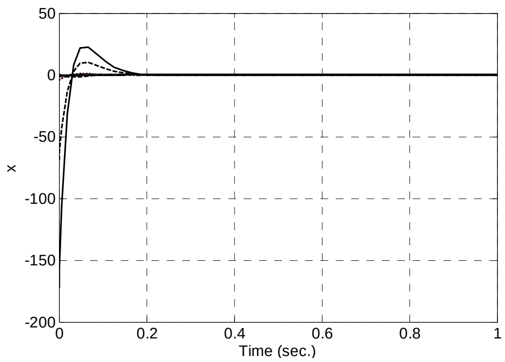
شکل ۵ و شکل ۶ حالت‌ها و خروجی سامانه حلقه بسته کلّ را برای کنترلگر مرتبه اول برای هر زیر سامانه، و شکل ۷ و شکل ۸ به ترتیب حالت‌ها و خروجی سامانه حلقه بسته را با کنترلگر مرتبه دوم برای هر زیر سامانه نشان می‌دهد.



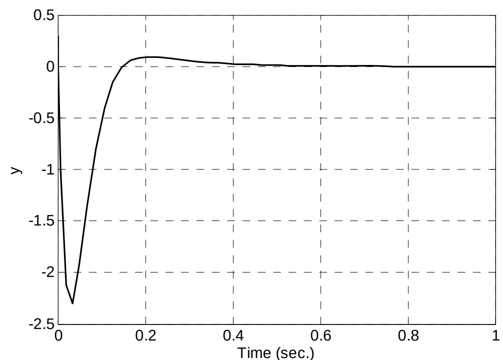
شکل ۵: حالت‌های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه یک برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۱



شکل ۶: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه یک برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۱

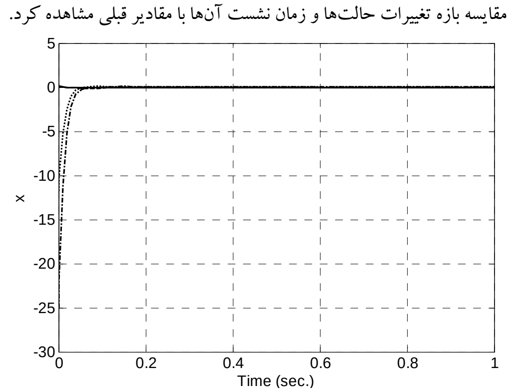


شکل ۷: حالت‌های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه دو برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۱

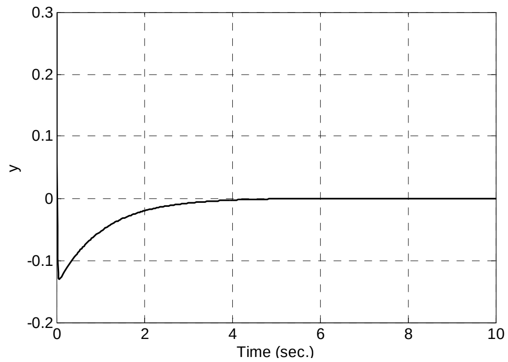


شکل ۸: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه دو برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۱

علاوه بر قابلیت طراحی کنترلگر از مرتبه‌های دلخواه، شکل‌ها نشان می‌دهند که هم بازه تغییرات حالت‌ها بسیار کمتر از [۲۰] است و هم زمان نشست به‌مراتب کمتری در این طراحی حاصل شده است. همچنین در شکل ۹ و شکل ۱۰ حالت‌ها و خروجی سامانه حلقه بسته حاصل از کنترلگر بازخورد حالت بر اساس قضیه ۱ نمایش داده شده است. با توجه به در اختیار داشتن اطلاعات بیشتری از سامانه در طراحی کنترلگر بازخورد حالت، بدیهیست پاسخ‌های این طراحی به مراتب بهتر از کنترلگر بازخورد خروجی باشد که می‌توان این بهبود را در شکل ۹ و شکل ۱۰ با مقایسه بازه تغییرات حالت‌ها و زمان نشست آن‌ها با مقادیر قبلی مشاهده کرد.



شکل ۹- حالت‌های سامانه با بازخورد حالت حاصل از قضیه ۱



شکل ۱۰: خروجی سامانه با بازخورد حالت حاصل از قضیه ۱

در این قسمت برای نشان دادن کارآئی روش ارائه شده، شبیه سازی در حضور عدم‌قطعیت در پارامترهای کنترلگر و با استفاده از قضیه ۲ انجام شده است. نتایج حاصل از قضیه ۲ با فرض $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.5$ و $\delta_{A_c} = 0.01$ ، $\delta_{B_c} = 0.01$ ، $\delta_{C_c} = 0.01$ و $\delta_{D_c} = 0.01$ ، در جدول ۲ برای مرتبه‌های مختلف کنترلگر به همراه محل قرار گیری قطب‌های حلقه بسته آورده شده است.

در این شبیه سازی پارامترهای عدم‌قطعیت برای کنترلگر مرتبه اول برای هر زیر سامانه به فرم زیر در نظر گرفته شده است:

$$\Delta A_c = 0.01\sin(3t),\ \Delta B_c = 0.01\sin(5t),\ \Delta C_c = 0.01\cos(t),\ \Delta D_c = 0.01\sin(t) \tag{۳۷}$$

جدول ۲: پارامترهای کنترلگروقطب‌های حلقه‌بسته‌با اعمال قضیه ۲ به سامانه نمونه

مرتبه کنترلگر	قطب‌های حلقه بسته	پارامترهای کنترلگر
0	0 ± 1.44i	Dc = -3.0781
1	-68.4570 (-17.3106 ±49.44i)	Ac = -103.0782 Bc = -44.8305 Cc = -7568.5345 Dc = -5115.0377
2	(-39.2785 ±54.6544i) -44.2478 -7.3939	Ac =[-32.3502 -47.8556 -46.5729 -97.8487] $Bc=[-41.5950\ \ -67.5857]^T$ Cc =[-4569.1215 -8714.0399] Dc = -7978.2686
بازخورد حالت (C=I)	-1.21 -5.98	K=Dc = [-8.2358 -7.19]

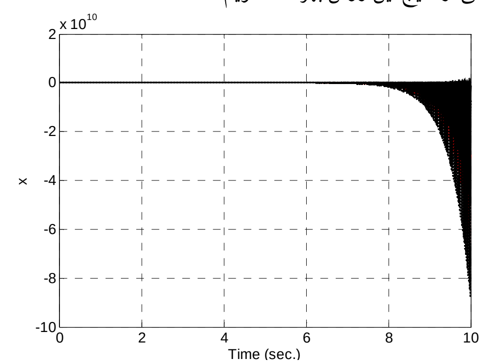
همچنین برای کنترلگر مرتبه دوم برای هر زیر سامانه پارامترهای عدم‌قطعیت به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\Delta A_c = 0.01\begin{bmatrix} 0.5\sin(3t) & 0.5\sin(5t) \\ 0.5\sin(2t) & 0.5\cos(t) \end{bmatrix}, \quad \Delta B_c = 0.01\begin{bmatrix} 0.7\sin(3t) \\ 0.7\cos(t) \end{bmatrix}, \tag{۳۸}$$

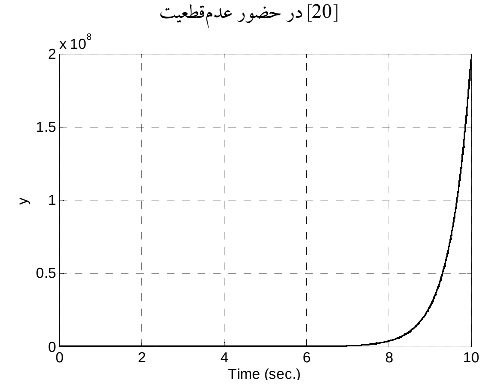
$$\Delta C_c = 0.01[0.7\cos(t) \quad 0.7\sin(4t)],$$
$$\Delta D_c = 0.01\sin(t)$$

در شکل ۱۱ و شکل ۱۲ نتایج حاصل از شبیه سازی نتایج [20] با عدم‌قطعیت (۳۸) مشاهده می‌گردد. شکل ۱۱ و شکل ۱۲ بیانگر ناپایداری سامانه حلقه بسته با در نظر گرفتن عدم‌قطعیت در ساختار کنترلگر است. بدیهیست طراحی ارائه شده در [20] شکننده بوده و برای کاربردهای عملی مناسب نمی‌باشد.

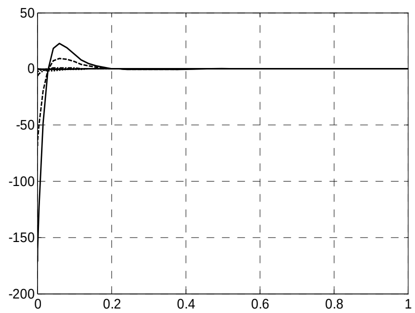
همچنین شکل ۱۳ تا شکل ۱۸ حالت‌ها و خروجی سامانه حلقه بسته کلّ را برای مرتبه های مختلف کنترلگر بازخورد خروجی پویا برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۲ و در حضور عدم‌قطعیت (۳۷) و (۳۸) نشان می‌دهد. علاوه بر قابلیت‌های مختلف روش ارائه شده که در شکلهای ارائه شده برای نتایج قضیه ۱ بیان گردید، مشاهده می‌شود که با وجود عدم‌قطعیت در پارامترهای کنترلگر، پاسخ‌های بدست آمده همچنان کارآئی بالای کنترلگر طراحی شده را نشان می‌دهد. غیرشکننده بودن کنترلگر طراحی شده این امکان را به ما می‌دهد تا در کاربردهای عملی به‌راحتی از نتایج این روش بهره‌مند شویم.



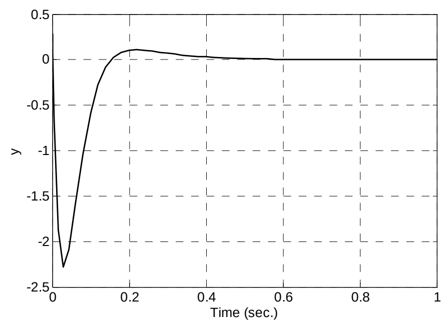
شکل ۱۱: حالت‌های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه کامل ارائه شده در [20] در حضور عدم‌قطعیت



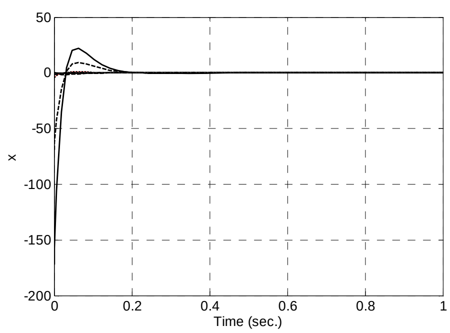
شکل ۱۲: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه کامل ارائه شده در [20] در حضور عدم‌قطعیت



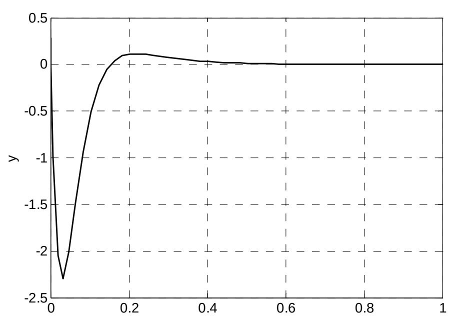
شکل ۱۳: حالت‌های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه یک برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۲



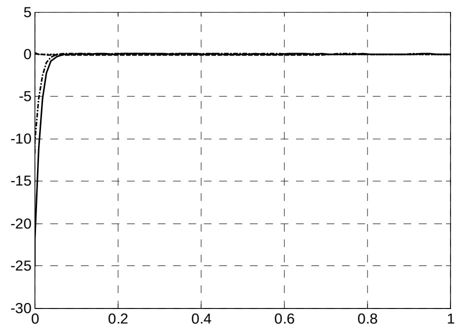
شکل ۱۴: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه یک برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۲



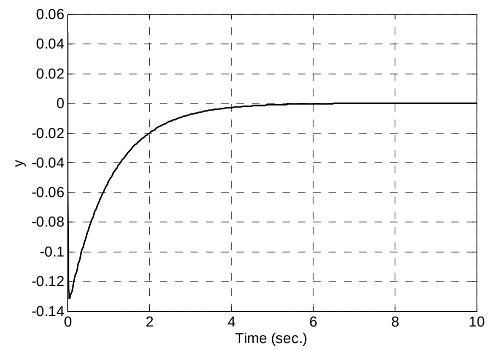
شکل ۱۵: حالت‌های سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه دو برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۲



شکل ۱۶: خروجی سامانه با بازخورد خروجی پویای مرتبه دو برای هر زیر سامانه حاصل از قضیه ۲



شکل ۱۷: حالت‌های سامانه با بازخورد حالت حاصل از قضیه ۲



شکل ۱۸: خروجی سامانه با بازخورد حالت حاصل از قضیه ۲

چنانچه ملاحظه می‌شود، نتایج بدست آمده از دو جهت قابل بررسی می‌باشد: اول اینکه قطب‌های حلقه‌بسته بدست آمده در مقایسه با کارهای مرتبه کامل قبلی دورتر از محور موهومی است که در نتیجه پایداری بسیار بهتری را به‌دست می‌دهد و پاسخ سامانه نیز بسیار سریع‌تر و پایدارتر است، دومین مسئله وجود کنترلگر از مرتبه‌های مختلف است که می‌توان مرتبه کنترلگر را برای زیرسامانه‌های متفاوت با توجه به نیاز در کاربردهای مختلف تنظیم نمود. چنانچه ملاحظه می‌شود پاسخ حاصل از کنترلگر بازخورد خروجی پویا بسیار سریعتر از کنترلگر بازخورد حالت است ولی پاسخ حاصل از کنترلگر بازخورد حالت به مراتب بالازدگی و پایین‌زدگی کمتری را دارا می‌باشد. همچنین با توجه به غیرشکننده بودن کنترلگر حاصل از قضیه ۲، مشکلات ناشی از اجرا در عمل به حداقل خواهد رسید. چنانچه در نتایج حاصل مشاهده گردید نتایج حاصل از [20] در حضور عدم قطعیت بسیار شکننده بوده و پاسخ سامانه ناپایدار گردیده است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش کنترلی برای طراحی کنترلگر بازخورد خروجی پویای غیرمتمرکز غیرشکننده با مرتبه دلخواه ثابت برای سامانه‌های مرکب از زیرسامانه‌های خطی با اتصالات داخلی غیرخطی دارای عدم‌قطعیت که قیود مربعی را برآورده می‌سازند، طراحی شده است. این طرح از ساختار عمومی بازخورد خروجی پویا بهره گرفته است. در قضیه ۱ و ۲ با صفر قرار دادن مرتبه کنترلگر می‌توان به طرّاحی کنترلگر بازخورد خروجی ایستا پرداخت، همچنین در قضیه ۱ و ۲ با صفر قرار دادن مرتبه کنترلگر و با فرض اینکه تمامی حالت‌ها به‌صورت مستقیم در خروجی در دسترس باشند، طرّاحی کنترلگر بازخورد خروجی پویا به طرّاحی کنترلگر بازخورد حالت تغییر خواهد یافت. روند طراحی با تعیین مرتبه کنترلگر، درجه‌های قوام و پارامترهای کنترلگر مورد نظر را بدست می‌دهد. همچنین کنترلگرهای غیرمتمرکز حاصل از این طراحی، پایداری سامانه کل را نیز تضمین می‌نماید. در این مقاله، یک مثال برای نشان دادن چگونگی پایدارسازی یک سامانه متشکل از زیر سامانه‌های بهم پیوسته با کنترل غیرمتمرکز ارائه گردیده و با نتایج حاصل از کارهای قبلی مقایسه شده است. این روش برای کاربردهای عمومی در طراحی کنترلگر برای سامانه‌های مقیاس وسیع و سامانه‌های غیر مقیاس وسیع بسیار مناسب است.

مراجع

[1] Gahinet, Pascal, Nemirovski, Arkadi, Laub, Alan J., Chilali, Mahmoud, *LMI control toolbox*, The Math Works, Natick, MA, 1995.

[2] Gahinet, P., Apkarian, P., 1994, “A linear matrix inequality approach to H∞ control”, *Internat. J. Robust Nonlinear Control,* 4, 421-448.

[3] Iwasaki, T., Skelton, R.E., 1994, “All controllers for the general H∞ control Problem: LMI existence conditions and state space formulas”, *Automatica*, 30, 1307-1317.

[4] Boyd, Stephen, El Ghaoui, Laurent, Feron, Eric, Balakrishnan, Venkataramanan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, 1994.

[5] Dullerud, Geir E., Paganini, Fernando, *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*, Springer, N.Y, 2000.

[6] Geromel, J.C., Bernussou, J.C., de Oliveira, M.C., 1999, “H2-norm optimization with constrained dynamic output feedback controllers: Decentralized and reliable control”, *IEEE Trans. Automat. Control,* 44, 1449-1454.

[7] Geromel, J.C., Bernussou, J., Peres, P.L.D., 1994, “Decentralized control through parameter space optimization”, *Automatica,* 30, 1565-1578.

[8] Siljak, D.D., Stipanovic, D., 2000, “Robust stabilization of nonlinear systems”, *Math. Probl. Eng.*, 6, 461-493.

[9] Siljak, D.D., Stipanovic, D., 2001, “Autonomous decentralized control”, *Proc. ASME Intern. Mech. Eng. Congress,* 761-765.

[10] Zhai, G., Ikeda, M., Fujisaki, Y., 2001, “Decentralized controller design: A matrix inequality design using a homotopy method”, *Automatica,* 37, 565-572.

[11] D'Andrea, R., Dullerud, G.E., 2003, “Distributed control design for spatially interconnected systems”, *IEEE Trans. Automat. Control.*, 48, 1478-1495.

[12] Zecevic, A.I., Neskovic, G., Siljak, D.D., 2004, “Robust decentralized exciter control with linear feedback”, *IEEE Trans. Power Syst.*, 19, 1096-1103.

[13] Stipanovic, D.M., Teo, Inhalan R., Tomlin, C., 2004, “Decentralized overlapping control of a formation of unmanned aerial vehicles”, *Automatica,* 40, 1285-1296.

[14] Siljak, D.D., Zecevic, A.I., 2004, “Control of large-scale systems: Beyond decentralized feedback”, *in: Proc. 10th*

IFAC Symposium on Large Scale Systems, Osaka, Japan, 1-10.

[15] Zecevic, A.I., Siljak, D.D., 2004, “Design of robust static output feedback for large-scale systems”, *IEEE Trans. Automat. Control.*, 49, 2040-2044.

[16] Siljak, Dragoslav D., *Decentralized Control of Complex Systems*, Academic Press, New York, 1991.

[17] Pagilla, P.R., Zhu, Y., 2005, “A decentralized output feedback controller for a class of large-scale interconnected nonlinear systems”, *Trans. ASME, J. Dynam. Syst.Meas. Control*, 127, 167-172.

[18] Stankovic, S.S., Stipanovic, D.M., Siljak, D.D., 2007, “Decentralized Dynamic Output Feedback for Robust Stabilization of a Class of Nonlinear Interconnected Systems”, *Automatica*, 43, 861-867.

[19] Zhu, Y., Pagilla, P.R., 2007, “Decentralized output feedback control of a class of large scale interconnected systems”, *IMA J. Math. Control Inform.*, 24, 57-69.

[20]Stankovic, S. S., Siljak, D. D., 2009, “Robust stabilization of nonlinear interconnected systems by decentralized dynamic output feedback”, *Systems & Control Letters*, 58, 271-275.

[21]Labibi, B., Marquez, H. J., Chen, T., 2009, “Decentralized robust output feedback control for control affine nonlinear interconnected systems”, *Journal of Process Control*, 19, 865–878.

[22]Lofberg, John, *What is YALMIP?,* Linkopings univeritet, http://control.ee.ethz.ch/~joloef/wiki/pmwiki.php?n=Main.What, 2001.

مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۴، شماره ۳، پاییز ۱۳۸۹، صفحه ۵۵-۴۷

طراحی رویتگر تطبیقی اتفاقی پایدار در احتمال، برای سیستم آشوبی نامعین نویزی

موسی آیتی[۱]، حمید خالوزاده[۲]

[۱]دانشجوی دکتری مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی، ayati@dena.kntu.ac.ir
[۲] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی ، H_khaloozadeh@kntu.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۹/۴/۱۲، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۹/۹/۲۵)

چکیده: در این مقاله یک رویت‌گر مد لغزشی تطبیقی اتفاقی جدید ارایه شده که قادر است حالت‌های سیستم آشوبی نامعین، با نامعینی مدل و پارامتر را تخمین بزند. رویت‌گر ارایه شده نیازی به دانستن کران بالای نامعینی مدل ندارد و آن را با استفاده از روش‌های تطبیقی تخمین می‌زند. از طرف دیگر با استفاده از قانون تطابق ارایه شده، رویت‌گر قادر به تخمین پارامترهای نامعین است. اثر نویز اندازه‌گیری در معادلات رویت‌گر در نظر گرفته شده و بنابراین رویت‌گر توسط معادلات دیفرانسیل اتفاقی مدل شده است. با استفاده از ریاضیات اتفاقی و قضیه پایداری لیاپانوف اتفاقی، پایداری در احتمال سیستم خطای حالت‌ها اثبات شده است. علاوه بر این، نشان داده شده که با گذشت زمان حالت‌های رویت‌گر ارایه شده به حالت‌های سیستم راه‌انداز میل می‌کنند. مزیت دیگر رویت‌گر ارایه شده این است که بهره تطبیقی رویت‌گر همیشه محدود و ناویژه باقی می‌ماند. با توجه به اینکه رویت‌گر توانایی مقابله با نویز و نامعینی‌های مدل و پارامتر را دارد و همگرایی حالت‌های آن اثبات شده است، رویت‌گر در یک طرح همزمان‌سازی سیستم‌های آشوبی نویزی استفاده و نتایج شبیه‌سازی آورده شده است.

کلمات کلیدی: رویت‌گر مد لغزشی، پایداری لیاپانوف اتفاقی، همزمان‌سازی سیستم‌های آشوبی و معادلات دیفرانسیل اتفاقی.

Designing a Stochastic Adaptive Stable in Probability Observer, for Noisy Uncertain Chaotic Systems

Moosa Ayati, Hamid Khaloozadeh

Abstract: In this paper a novel stochastic adaptive sliding mode observer is developed which is able to estimate the states of an uncertain chaotic system with model and parametric uncertainties. The type of the model uncertainty could be unknown and its upper bound is estimated by adaptive methods. The unknown parameters are estimated using a proposed adaptation law. In addition, the effects of noise are considered in the observer dynamics and then the response system is modeled via stochastic differential equations. Using stochastic calculus and stochastic Lyapunov stability, the stability in probability of the states' error system is proved. Moreover, it is proved that the states of the proposed observer converge to the drive system states while the adaptation gains of the observer remain non-singular and bounded. Since the observer can suppress the effect of noise and uncertainties and the states' convergence is proved, proposed observer is used in a noisy chaos synchronization system.

Keywords: Sliding mode observer, Stochastic Lyapunov stability, Chaotic systems synchronization, Stochastic differential equation.

۱- مقدمه

رفتار آشوبی پدیده‌ای کلی است و در بسیاری از سیستم‌های غیرخطی ظاهر می‌شود. توجه دانشمندان به این پدیده از وقتی جلب شد که لورنز [۱] در ۱۹۶۳ در مقاله‌اش به معرفی و بررسی آشوب پرداخت. آشوب در مهندسی خیلی دیرتر مورد توجه قرار گرفت و در ابتدا اکثرا آن را با نویز یکسان در نظر می‌گرفتند. برای اولین بار در سال ۱۹۹۰ [۲] نشان داده شد که رفتارهای آشوبی قابل کنترل هستند و در همان سال، دو سیستم آشوبی با هم همزمان شدند [۳]. همچنین در سال ۱۹۹۲ اولین سیستم مخابرات امن بر اساس آشوب توسط مهندسان برق بوجود آمد ([۴] و [۵]).

مهمترین ویژگی سیستم‌های آشوبی حساسیت بسیار شدید به شرایط اولیه و پارامترها است. به این معنی که با تغییر کوچکی در شرایط اولیه دو سیستم آشوبی کاملا یکسان، مسیرهای حالت این دو سیستم با گذشت زمان بصورت نمایی از هم دور می‌شوند. هرچند این ویژگی در برخی موارد مثل کنترل نوسانگرهای کوپل شده مزاحم است، ولی در بسیاری از کاربردها حساسیت شدید سیستم‌های آشوبی یک مزیت به حساب می‌آید. به عنوان مثال، این ویژگی باعث شد که سیستم‌های آشوبی به منظور ایجاد سیستم‌های مخابراتی با امنیت بالا استفاده شوند که در نتیجه آن چهار نسل مختلف از سیستم‌های مخابرات آشوب بوجود آمده است [۶]. مهمترین مسئله‌ای که در مخابرات امن آشوبی با آن مواجه هستیم همزمان‌سازی فرستنده (سیستم راه‌انداز) و گیرنده (سیستم پاسخ) است.

در حالت کلی همزمان‌سازی به معنا است که تابعی از حالت‌ها یا پارامترهای راه انداز و پاسخ با هم یکسان شده و یکدیگر را دنبال کنند. با توجه به حساسیت بسیار زیاد سیستم‌های آشوبی به نظر می‌رسد که این سیستم‌ها بطور ذاتی غیرقابل همزمان‌سازی باشند. بنابراین پیدا کردن روش‌هایی که با استفاده از آنها بتوانیم سیستم‌های آشوبی را همزمان کنیم بسیار مفید خواهد بود. از جمله مناسب‌ترین این روش‌ها استفاده از رویت‌گر به عنوان سیستم پاسخ در یک طرح همزمان‌سازی آشوبی است.

از جمله موانعی که در ایجاد همزمانی قابل قبول وجود دارد می‌توان نامعینی‌ها و نویز در سیستم‌های پاسخ و راه‌انداز را نام برد. برای رفع این موانع راه‌حل‌های زیادی ارایه شده است به عنوان مثال در [۷] و [۸] تنها اثر نامعینی‌های مدل و در [۹]، [۱۰] و [۱۱] تنها اثر نامعینی‌های پارامتری و در [۱۲] و [۱۳] تنها اثر نویز در نظر گرفته شده است. در [۱۴] و [۱۵] از روش‌های هوشمند برای همزمان‌سازی سیستم‌های آشوبی نامعین استفاده شده است ولی پیاده‌سازی این روش‌ها نیاز به پردازنده‌هایی با توان محاسباتی زیاد دارند. در بسیاری از این مقالات اثر نویز در تحلیل پایداری در نظر گرفته نشده و از روش‌های معمول تحلیل پایداری به کار رفته است.

در [۱۶] اثر نویز و نامعینی مدل هر دو در یک طرح همزمان‌سازی سیستم‌های آشوبی در نظر گرفته شده و با استفاده از قضایای پایداری اتفاقی پایداری سیستم خطای تخمن حالت‌ها اثبات شده است. در مقاله [۱۷] نشان داده شده است که اگر اثر نامعینی پارامتر در نظر گرفته نشود ایجاد همزمانی غیر ممکن است. این موضوع از این نظر اهمیت دارد که نامعینی پارامتر در بسیاری از سیستم‌های عملی وجود دارد و حتی در بسیاری از طرح‌های مخابرات امن با استفاده از سیستم‌های آشوبی برای افزایش امنیت سیستم مخابراتی به طور عمدی نامعینی پارامتر به سیستم‌ها اضافه می‌شود. برای رفع این مشکل [۱۷] از الگوریتم شناسایی حداقل مربعات بازگشتی برای شناسایی پارامترهای نامعین استفاده کرده است. با این وجود چون اثر نامعینی‌های پارامتری در اثبات پایداری در نظر گرفته نشده، برای برخی از شرایط اولیه و پارامترهای نامعین سیستم همزمانی ناپایدار خواهد بود.

در این مقاله اثر هر دو نوع نامعینی‌ها مدل و پارامتر در سیستم راه‌انداز در نظر گرفته شده است و از رویت‌گر مد لغزشی تطبیقی اتفاقی (Stochastic Adaptive Sliding Mode Observer یا SASMO) به عنوان سیستم پاسخ استفاده شده است. مزیت مهم رویت‌گر ارایه شده آن است که نیازی به دانستن کران بالای نامعینی مدل ندارد و این کران بالا توسط رویت‌گر (سیستم پاسخ) تخمین زده می‌شود. علاوه بر این، با استفاده از قانون تطابق در نظر گرفته شده تخمینی از پارامترهای نامشخص بدست می‌آید و همچنین اثر نامعینی‌های پارامتر در مدل راه‌انداز، مدل پاسخ و روند اثبات پایداری سیستم کلی در نظر گرفته شده است. اثر نویز که توسط فرآیندهای اتفاقی از نوع حرکت براونی استاندارد (standard Brownian motion) مدل شده نیز در معادلات سیستم پاسخ در نظر گرفته شده است.

بدلیل وجود نویز، سیستم‌های راه‌انداز و پاسخ با استفاده از معادلات دیفرانسیل اتفاقی (stochastic differential equations) [۱۸] مدل شده‌اند که این معادلات ابزار مناسبی برای توصیف سیستم‌های آشوبی نویزی هستند. برای تحلیل و بررسی پایداری سیستم کلی شامل راه‌انداز و پاسخ، از ریاضیات ایتو (Ito calculus) [۱۹] و قضایای پایداری اتفاقی (stochastic stability theorems) [۲۰] استفاده شده است. [۲۱] از سیستم آشوبی نویزی در یک طرح همزمان‌سازی استفاده کرده و برای تحلیل اثر نویز در این طرح از هر دو انتگرال ریمان و انتگرال ایتو استفاده و نتایج آنها مقایسه شده است. شبیه‌سازی‌ها نشان داده‌اند که استفاده از ریاضیات ایتو برای تحلیل سیستم‌های آشوبی نویزی ضروری است.

در این مقاله با ارایه یک قضیه و استفاده از قضایای پایداری لیاپانوف اتفاقی، اثبات شده که علی رغم وجود نویز و نامعینی‌ها، SASMO پایدار در احتمال است. همچنین نشان داده شده حالت‌های رویت‌گر به حالت‌های سیستم راه‌انداز میل می‌کنند. همچنین رویت‌گر تخمینی از پارامترهای نامعین بدست می‌دهد که این تخمین در بهبود همزمان سازی سیستم‌های آشوبی بسیار موثر است. علاوه بر اینها بهره‌های تطبیقی رویت‌گر همیشه محدود و ناویژه هستند که این مورد از دیگر مزایای SASMO است.

این مقاله به این ترتیب سازماندهی شده است که در بخش دوم مفاهیم و تعریف‌های اولیه مورد استفاده در ریاضیات اتفاقی آورده شده است. در بخش سوم روابط سیستم راه‌انداز بیان شده و در بخش چهارم معادلات SASMO ارایه و پایداری در احتمال آن اثبات شده است. در بخش پنجم نتایج شبیه‌سازی

حاصل از بکار بردن SASMO در یک طرح همزمان‌سازی بر اساس مدار چوآی نویزی آورده شده است.

۲- مفاهیم اولیه کنترل اتفاقی

در این بخش تعدادی از تعاریف، مفاهیم اولیه و پر کاربرد در نظریه احتمال و ریاضیات اتفاقی که در این مقاله به کار رفته‌اند بیان شده است. خوانندگان علاقمند برای اطلاعات بیشتر می‌توانند به مراجع [۱۸] و [۱۹] مراجعه نمایند.

تعریف ۱: [۱۸] F که دسته‌ای از زیر مجموعه‌های مجموعه Ω است را یک سیگما جبر ($\sigma-algebra$) روی Ω می‌نامیم اگر خواص زیر را داشته باشد:

الف) $\phi \in \mathrm{F}$، که ϕ مجموعه تهی است.

ب) اگر مجموعه A متعلق به F باشد آنگاه مکمل A یعنی $\mathrm{A}^c = \Omega - A$ هم متعلق به F باشد.

ج) اگر دنباله‌ای نامتناهی از مجموعه‌ها مانند A_i، به F متعلق باشد ($\{A_i\}_{1\le i<\infty} \subset \mathrm{F}$) باشد، آنگاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathrm{F}$ باشد.□

تعریف ۲: [۱۸] اندازه احتمالاتی (Probability Measure) P روی فضای اندازه‌پذیر (Ω, F) تابعی است به صورت $\mathrm{P}: \mathrm{F} \to [0,\ 1]$ که

الف) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$

ب) برای هر مجموعه مجزای $\{A_i\}_{i\ge 1} \subset \mathrm{F}$ ($\mathrm{A}_i \cap A_j = \phi \;\; if \;\; i = j$) داشته باشیم

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$$

تعریف ۳: [۱۸] سه‌تایی $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ یک فضای احتمال نامیده می‌شود. اگر $\mathrm{F}=\overline{\mathrm{F}}$ باشد، فضای احتمال کامل است.

$$\overline{\mathrm{F}} = \{A \subset \Omega : \exists B, C \in \mathrm{F} \; such \; that \; B \subset A \subset C,\ \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C)\}$$

تعریف ۴: [۱۸] فضای احتمال $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ را در نظر بگیرید. یک دسته مانند $\{\mathrm{F}_t\}_{t\ge 0}$ از زیر سیگما جبرهای افزایشی روی F را یک پالایش (Filteration) روی فضای احتمال می‌نامیم. ($\forall t \ge 0,\ \mathrm{F}_t \subset \cap_{s>t} \mathrm{F}_s$)□

تعریف ۵: فرآیند اتفاقی x_t را تطبیق شده‌ی $\{\mathrm{F}_t\}_{t\ge 0}$ ($adapted - \{\mathrm{F}_t\}_{t\ge 0}$) می‌نامیم، اگر برای هر t، فرآیند x_t، اندازه پذیرِ F_t باشد.□

تعریف ۶: [۱۹] فرض کنید $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ فضای احتمال با پالایش $\{\mathrm{F}_t\}_{t\ge 0}$ باشد. فرآیند براونی استاندارد $\{\mathrm{B}_t\}_{t\ge 0}$، فرآیندی با مقادیر حقیقی و تطبیق شده $\{\mathrm{F}_t\}_{t\ge 0}$ است که دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:

الف) $B_0 = 0$

ب) نموی $B_t - B_s$، $0 \le s < t < \infty$، توزیع نرمال میانگین صفر با واریانس $t-s$ دارد.

ج) نموی $B_t - B_s$، $0 \le s < t < \infty$، مستقل از F_s است.□

سیستم غیرخطی اتفاقی نامعین نویزی با معادلات دیفرانسیل ایتو زیر را در فضای احتمال کامل $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} dx_t &= Ax_t dt + Bu_t dt + f(x,t)dt + g(x,t)dB_t \\ dy_t &= Cx_t dt \end{aligned} \qquad (۱)$$

که در آن Ω فضای پیشامدها، F یک سیگما جبر روی Ω، و P اندازه احتمالاتی است. $t \in \mathbf{R}^+$ متغیر زمان، $x_t \in \mathbf{R}^n$ بردار حالت‌های سیستم، $u_t \in \mathbf{R}^p$ بردار ورودی کنترلی، $y \in \mathbf{R}^m$ بردار خروجی سیستم و $f: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^n$ یک تابع برداری غیرخطی است. $g: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^{n\times b}$ شدت نویز سیستم و A، B و C ماتریس‌های مشخص با ابعاد مناسب هستند. $dB_t \in \mathbf{R}^b$ یک فرآیند گوسی میانگین صفر با واریانس dt است که نمو فرآیند براونی استاندارد B_t را نشان می‌دهد. قضایا و روابط زیر برای سیستم اتفاقی توصیف شده در (۱) برقرار است.

برای هر شرایط اولیه $x_0 \in \mathbf{R}^n$، $t_0 \in \mathbf{R}^+$، و ورودی اندازه‌پذیر u_t، حل $x(t, t_0, x_0, u)$ معادله (۱) که از شرایط اولیه x_0 در زمان t_0 شروع می‌شود، در فضای احتمال $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ و با پالایش $\{\mathrm{F}_t\}_{t\ge 0}$ تعریف می‌شود. پالایش $\{\mathrm{F}_t\}_{t\ge 0}$ پیوسته از راست، تولید شده با فرآیند براونی B_t و شامل تمام مجموعه‌هایِ پوچ P ($\mathrm{P} - null\ sets$) است. همچنین بر اساس قضیه وجود و یکتایی، سیستم (۱) کامل است. به این معنا که برای هر ورودی اندازه‌پذیر u_t، شرایط اولیه x_0، t_0 و تقریبا برای تمام $\omega \in \Omega$، سیستم (۱) حل یکتایی به صورت $x(t, t_0, x_0, u)$ دارد که برای تمام t تعریف شده و پیوسته نسبت به t، پیوسته اتفاقی نسبت به x_0، اندازه‌پذیر در (t, ω) و تطبیق شده $\{\mathrm{F}_t\}_{t\ge 0}$ است.

بدلیل وجود نویز پایداری سیستم‌های اتفاقی متفاوت از پایداری سیستم‌های قطعی است. در این قسمت قضایا و تعاریف مربوط به پایداری اتفاقیِ سیستم غیرخطی اتفاقی (۱) آورده شده است.

تعریف ۷: [۲۳] مجموعه تمام توابع پیوسته و اکیدا افزایشی $\mu: [0\ ,\ a) \to \mathbf{R}^+$ که $\mu(0) = 0$ است را توابع کلاس K می‌نامند. توابع کلاس K که برای آنها $\lim_{r\to\infty} \mu(r) \to \infty$ برقرار باشد را توابع کلاس K_∞ می‌نامند.□

قضیه ۱: پایداری در احتمال (stability in probability) [۱۹] و [۲۰]

الف) نقطه تعادل $x_e \equiv 0$ مربوط به معادله دیفرانسیل اتفاقی (۱) بطور سراسری پایدار در احتمال است اگر برای هر $t_0 \ge 0$ و $\varepsilon > 0$

$$\underset{x_0 \to 0}{Lim}\; P\left(\underset{t_0 \le t}{Sup}\left|x(t, t_0, x_0, 0)\right| > \varepsilon\right) = 0$$

که در آن $x(t, t_0, x_0, 0)$ حل معادله (۱) در زمان t ($t_0 \le t$) است که از شرایط اولیه x_0 و t_0 شروع می‌شود.

ب) نقطه تعادل $x_e \equiv 0$ مربوط به معادله دیفرانسیل اتفاقی (۱) بطور سراسری پایدار مجانبی در احتمال است اگر پایدار در احتمال باشد و برای هر $t_0 \ge 0$ رابطه $\underset{x_0 \to 0}{Lim}\, P\left(\underset{t \to +\infty}{Lim} \left|x_t^{t_0,x_0}\right| = 0\right) = 1$ برقرار باشد.□

قضیه ۲: پایداری لیاپانوف اتفاقی (stochastic Lyapunov stability) [۱۹]

سیستم غیرخطی اتفاقی (۱) را در نظر بگیرید. فرض کنید که تابع $V(x,t):[0,\infty)\times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+$ متعلق به $C^{2,1}$ و توابع μ_1 و μ_2 از کلاس K_∞ وجود دارند بطوریکه برای هر $t \ge 0$, $x \in \mathbf{R}^n$

$$\begin{aligned} &\mu_1(\|x\|) \le V(x,t) \le \mu_2(\|x\|) \\ &LV(x,t) = \frac{\partial V}{\partial t} + f(x,t)^T \frac{\partial V}{\partial x} + \\ &\frac{1}{2} tr\left(g(x,t)^T \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} g(x,t) \right) \le -\mu_3(\|x\|) \end{aligned} \quad (۲)$$

برقرار باشد. $\mu_3 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+$ تابعی پیوسته و غیرمنفی از کلاس K است. با این شرایط، حل یکتای $x_e \equiv 0$ با شرایط اولیه $x_0 \in \mathbf{R}^n$ و $t_0 \in \mathbf{R}^+$ وجود دارد که بطور سراسری پایدار در احتمال است و $P\left\{\lim_{t\to\infty} \mu_3(x,t) = 0\right\} = 1$ می‌باشد. L را تولید کننده (generator) یا عملگر انتشار (diffusion operator) فرآیند اتفاقی $V(x,t)$ می‌نامند.□

قضیه ۳: فرمول دینکین (Dynkin's Formula) [۲۰]

فرض کنید x_t فرآیند مارکوف از راست پیوسته و τ یک زمان تصادفی باشد که $E_x \tau < \infty$ است. اگر $f(x_t,t)$ در دامنه عملگر $\tilde{A}$ (weak infinitesimal operator) باشد آنگاه

$$E_{x,t} f(x_\tau, t+\tau) - f(x_0,t_0) = E_{x,t} \int_0^\tau \tilde{A} f(x_s, t+s)\, ds$$

برقرار خواهد بود.□

۳- توصیف سیستم راه انداز

سیستم غیرخطی اتفاقی نامعین تویف شده با معادلات دیفرانسیل ایتو زیر را به عنوان سیستم راه انداز در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} dx_t &= (Ax_t + Bu_t)dt + Bh(x_t)\theta\, dt + f(x_t,t)dt \\ dy_t &= Cx_t dt \end{aligned} \quad (۳)$$

که در آن $\theta \in \mathbf{R}^q$ بردار پارامترهای نامعین ($\|\theta\| \le K_\theta$)، $h:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{p\times q}$ و $f:\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^n$ تابع‌های برداری غیرخطی هستند. همانطور که مشاهده می‌شود در معادلات سیستم راه انداز، نامعینی‌های مدل و پارامتری در نظر گرفته شده‌اند و از این نظر مدل بکار گرفته شده کلی‌تر از مدل بکار رفته در [۲۲] است. همچنین برای مدل (۳) شروطی در نظر گرفته شده که در ادامه آورده شده است.

شرط ۱: فرض کنید f قابل تقسیم به دو بخش است

$$f(x,t) = f_1(x) + f_2(x,t) \quad (۴)$$

همچنین فرض کنید توابع h و f_1 بطور محلی لیپ شیتز و پیوسته در $\Psi \subset \mathbf{R}^n$ هستند

$$\|h(x_1) - h(x_2)\| \le K_h \|x_1 - x_2\|;\ \forall x_1, x_2 \in \Psi \quad (۵)$$

$$\|f_1(x_1) - f_1(x_2)\| \le K_{f1} \|x_1 - x_2\|;\ \forall x_1, x_2 \in \Psi \quad (۶)$$

$K_h \in \mathbf{R}^+$ و $K_{f1} \in \mathbf{R}^+$ ثابت لیپ شیتز می‌باشند.□

این شرایط وجود و یکتایی جواب محلی برای معادله دیفرانسیل اتفاقی (۳) را تضمین می‌کنند. f_2 قسمتی از مدل سیستم است که نامعینی‌های محدود با کران بالای نامشخص و یا اغتشاشات غیر قابل اندازه‌گیری را نشان می‌دهد. همچنین، در یک سیستم مخابرات آشوبی f_2 می‌تواند پیام ارسالی از راه‌انداز به سیستم پاسخ را که در حالت کلی نامعین است مدل کند.

شرط ۲: f_2 باید در شرط

$$f_2(x,t) = P^{-1}C^T \psi(y,t) \quad (۷)$$

صدق کند که P در شرط ۳ معرفی خواهد شد. $\psi(y,t):\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^m$ تابعی برداری است که

$$\|\psi(y,t)\|_F \le \sum_{i=1}^N \eta_i \rho_i(y_t,t) \quad (۸)$$

$\rho_i(y_t,t): R^m \times R^+ \to R^+,\ i = 1,2,\cdots N$ و $\eta_i \in R^+$ است. در حالت کلی، η_i و $\psi(y,t)$ می‌توانند نامشخص باشند. به تابع f_2 که در این شرایط صدق کند نامعینی تطابق یافته (matched uncertainty) می‌گویند که تنها به خروجی سیستم وابسته است.□

شرط ۳: زوج (A,C) آشکاری‌پذیر و $L \in R^{n\times m}$ بردار بهره رویت‌گر است که مقادیر ویژه جفت (A,C) را به نیم صفحه چپ تخصیص می‌دهد. $Q \in \mathbf{R}^{n\times n}$ ماتریسی متقارن و مثبت معین است. به ازای $Q \in \mathbf{R}^{n\times n}$ یک ماتریس مثبت معین $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$ وجود دارد که در رابطه لیاپانوف زیر صدق می‌کند.

(۹)

$$(A - LC)^T P + P(A - LC) = -Q \quad and \quad B^T P = HC$$

(۱۰)

$$2K_{f1}\bar{\lambda}(P) + \frac{1}{2}\bar{\lambda}(P) K_g \|C\|^2 + 2K_h K_\theta \|HC\| - \underline{\lambda}(Q) < 0$$

K_g در شرط ۴ معرفی خواهد شد.

۴- رویت‌گر اتفاقی تطبیقی مد لغزشی

در این مقاله برای تخمین حالت‌های سیستم غیرخطی اتفاقی (۳)، یک رویت‌گر اتفاقی تطبیقی مد لغزشی (Stochastic Adaptive Sliding Mode Observer یا SASMO)، ارایه شده است. مدل این رویت‌گر در ادامه این بخش آورده و قسمت‌های مختلف آن شرح داده شده است. رویت‌گر ارایه شده فقط با استفاده از خروجی سیستم یعنی y_t که تحت تاثیر وجود نویز

اندازه‌گیری و نامعینی‌ها هم می‌باشد، حالت‌های سیستم راه انداز را تخمین می‌زند. مدل رویت‌گر (سیستم پاسخ) بصورت زیر است

(۱۱)

$$\begin{aligned} d\hat{x}_t &= (A\hat{x}_t + Bu_t + f_1(\hat{x}_t))dt + L(dy_t - d\hat{y}_t) + \\ &\quad Bh(\hat{x}_t)\hat{\theta} + S(\hat{x}_t, x_t, y_t, \rho_i(y_t,t), \hat{\eta}_i(t), t)dt \\ &\quad + g(dy_t - d\hat{y}_t, t)dW_t \\ d\hat{y}_t &= C\hat{x}_t dt \end{aligned}$$

با استفاده از بردار L ماتریس $(A-LC)$ هرویتز خواهد بود. در این مدل شدت نویز، تابعی از خروجی سیستم راه‌انداز و سیستم پاسخ است [۲۴]، می‌توان با استفاده از آن نویز اندازه‌گیری را مدل کرد.

شرط ۴: ثابت $K_g > 0$ وجود دارد که برای آن رابطه زیر برقرار است.

(۱۲)

$$tr\left(g(dy_t - d\hat{y}_t, t)^T g(dy_t - d\hat{y}_t, t)\right) \le K_g \left\|dy_t - d\hat{y}_t\right\|^2$$

$\hat{\theta}$ بردار پارامترهای تخمین زده شده است و از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\dot{\hat{\theta}} = \phi^{-1} h^T(\hat{x}_t) HCe_t \qquad (۱۳)$$

که ϕ ماتریس مثبت معین دلخواه است. سیستم خطای حالت‌ها حاصل از معادلات (۳) و (۱۱)، $e_t = x_t - \hat{x}_t$، با استفاده از بهره مد لغزشی زیر پایدار خواهد بود

(۱۴)

$$S(\hat{x}_t, x_t, y_t, \rho_i(y_t,t), \hat{\eta}_i(t), t) = \frac{P^{-1}C^T(Ce_t)\sum_{i=1}^{N}\hat{\eta}_i\rho_i(y_t,t)}{\left\|Ce_t\right\| - \dot{h}_1(t)h_2(t)\sum_{i=1}^{N}\hat{\eta}_i\rho_i(y_t,t)}$$

$\hat{\eta}_i(t) \in \mathbf{R}^+$، تخمین η_i است و با استفاده از رابطه (۱۵) محاسبه می‌شود،

(۱۵)

$$d\hat{\eta}_i = z_i\left\|Ce_t\right\|\rho_i(y_t,t)dt,\ \hat{\eta}_i(0) \in R^+,\ i = 1, 2, \cdots, N$$

که $z_i \in \mathbf{R}^+$، $\hat{\eta}_i(t) \in \mathbf{R}^+$ و $h_1(t): \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ متعلق به C^1 است. همچنین $\sup_{t\in\mathbf{R}^+} \dot{h}_1(t) < 0$ و $\sup_{t\in\mathbf{R}^+} h_1(t) < M < \infty$ می‌باشد. $h_2(t): \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ متعلق به C^0 بوده و شروط زیر برقرار هستند

(۱۶)

$$h_2(t) < \frac{1}{2\left(\sum_{i=1}^{N}\hat{\eta}_i\rho_i(y_t,t)\right)^2}$$

(۱۷)

$$\dot{h}_1(t)\left(1 + 2h_2(t)\left(\sum_{i=1}^{N}\hat{\eta}_i\rho_i(y_t,t)\right)^2\right) < 0$$

وجود توابع $h_1(t)$، $h_2(t)$، و شروط بالا روی این توابع، باعث می‌شود مخرج (۱۴) همیشه مثبت باقی بماند و بهره مد لغزشی کران دار باشد.

قضیه ۴: اگر شروط ۱ تا ۴ برقرار باشند، SASMO که مدل آن با معادلات (۱۱) تا (۱۵) داده شده، قادر است حالت‌های سیستم (۳) را تخمین بزند بطوریکه سیستم خطای حالت‌ها پایدار سراسری در احتمال بوده و میانگین حالت‌های رویت‌گر به سمت میانگین حالت‌های سیستم میل کند.□

بهره‌ی مد لغزشی رویت‌گر بدست آمده از این قضیه همیشه، حتی هنگامیکه میانگین خطای حالت‌ها به سمت صفر می‌رود، کران‌دار و ناویژه باقی می‌ماند.

اثبات: برای بررسی پایداری، سیستم خطای حالت‌ها را تشکیل می‌دهیم که به صورت زیر خواهد بود

$$de_t = A_C e_t dt + \tilde{f}^1 dt + \tilde{f}^2 dt + \tilde{h}\, dt - g dW_t \qquad (۱۸)$$

که $A_C = A - LC$، $\tilde{f}^1 = f_1(x_t) - f_1(\hat{x}_t)$، $\tilde{f}^2 = f_2 - S$، و $\tilde{h} = Bh(x_t)\theta - Bh(\hat{x}_t)\hat{\theta}$ است. باید پایداری در احتمال نقطه تعادل $e \equiv 0$ ثابت شود با تعریف بردارهای $G = [-g]$ و $\tilde{f} = \tilde{f}^1 + \tilde{f}^2 + \tilde{h}$ رابطه (۱۸) را می‌توان بصورت

$$de_t = A_C e_t dt + \tilde{f} dt + G dW_t \qquad (۱۹)$$

باز نویسی کرد. با انتخاب کاندید تابع لیاپانوف مناسب

(۲۰)

$$\begin{aligned} V(e_t, \hat{\theta}, \hat{\eta}_i(t), t) &= e_t^T P e_t + \\ &\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{z_i}\left(\hat{\eta}_i(t) - \eta_i\right)^2 + \left(\hat{\theta} - \theta\right)^T \phi\left(\hat{\theta} - \theta\right) + h_1(t) \end{aligned}$$

شرایط کافی برای صحت قضیه ۴ را بررسی می‌کنیم. $V: R^{n+3} \to R^+$ متعلق به $C^{2,1}$ است. با اعمال عملگر انتشار L، به (۲۰) داریم

(۲۱)

$$\begin{aligned} LV(e_t, \hat{\theta}, \hat{\eta}_i(t), t) &= e_t^T\left(A_C e_t + \tilde{f}\right)^T P e_t \\ &+ e_t^T P\left(A_C e_t + \tilde{f}\right) + \dot{\hat{\theta}}^T \phi\left(\hat{\theta} - \theta\right) + \left(\hat{\theta} - \theta\right)^T \phi\dot{\hat{\theta}} \\ &\sum_{i=1}^{N}\frac{2}{z_i}\left(\hat{\eta}_i(t) - \eta_i\right)\dot{\hat{\eta}}_i(t) + \frac{1}{2}tr(G^T G P) + \dot{h}_1(t) \end{aligned}$$

با استفاده از (۹) و جایگذاری $\tilde{f} = \tilde{f}^1 + \tilde{f}^2 + \tilde{h}$ در (۲۱) بدست می‌آید

$$\begin{aligned} LV(e_t, \hat{\eta}_i(t), t) &= -e_t^T Q e_t + \dot{\hat{\theta}}^T \phi\left(\hat{\theta} - \theta\right) + \left(\hat{\theta} - \theta\right)^T \\ &\phi\dot{\hat{\theta}} + \left(\tilde{f}^{1T} P e_t + e_t^T P \tilde{f}^1 + \tilde{f}^{2T} P e_t + e_t^T P \tilde{f}^2 + \right. \\ &\left.\tilde{h}^T P e_t + e_t^T P \tilde{h}\right) + \sum_{i=1}^{N}\frac{2}{z_i}\left(\hat{\eta}_i(t) - \eta_i\right)\dot{\hat{\eta}}_i(t) \\ &+ \frac{1}{2}tr(G^T G P) + \dot{h}_1(t) \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

در نظر گرفتن رابطه (۶) نتیجه می‌دهد:

$$
\begin{aligned}
LV\,(e_t,\hat{\eta}_i(t),t) &= -e_t^T Q e_t + 2K_{f1}\|e_t\|^2\,\bar{\lambda}(P) \\
&+\frac{1}{2}tr(G^T GP) + \dot{\hat{\theta}}^T \phi\left(\hat{\theta}-\theta\right) + \left(\hat{\theta}-\theta\right)^T \phi\dot{\hat{\theta}} \\
&+\left(\tilde{f}^{2T} Pe_t + e_t^T P\tilde{f}^{2T} + \tilde{h}^T Pe_t + e_t^T P\tilde{h}\right) + \\
&\sum_{i=1}^{N}\frac{2}{z_i}\left(\hat{\eta}_i(t)-\eta_i\right)\dot{\hat{\eta}}_i(t) + \dot{h}_1(t)
\end{aligned}
\quad (۲۳)
$$

با اعمال شرط ۴، استفاده از خواص ماتریس‌ها، و جایگذاری معادلات (۷) و (۱۵) در (۲۳) بدست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
LV\,(e_t,\hat{\eta}_i(t),t) &\le \left(2K_{f1}\bar{\lambda}(P)-\underline{\lambda}(Q)\right)\|e_t\|^2 \\
&+\frac{1}{2}\bar{\lambda}(P)K_g\|C\|^2\|e_t\|^2 + \tilde{h}^T Pe_t + e_t^T P\tilde{h} \\
&+\dot{\hat{\theta}}^T \phi\left(\hat{\theta}-\theta\right) + \left(\hat{\theta}-\theta\right)^T \phi\dot{\hat{\theta}} + + \dot{h}_1(t) \\
&\sum_{i=1}^{N} 2\left(\hat{\eta}_i(t)-\eta_i\right)\|Ce_t\|\,\rho_i(y_t,t) + \\
&\left(P^{-1}C^T\psi(y,t)-S\right)^T Pe_t + e_t^T P\left(P^{-1}C^T\psi(y,t)-S\right)
\end{aligned}
\quad (۲۴)
$$

با جایگذاری $\tilde{h}$ و استفاده از (۱۳) و (۵) نامساوی ۰(۲۴) بصورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
&LV\,(e_t,\hat{\eta}_i(t),t) \le \\
&\left(2K_{f1}\bar{\lambda}(P)-\underline{\lambda}(Q)+\frac{1}{2}\bar{\lambda}(P)K_g\|C\|^2\right)\|e_t\|^2 + \\
&\sum_{i=1}^{N} 2\left(\hat{\eta}_i(t)-\eta_i\right)\|Ce_t\|\,\rho_i(y_t,t) + \\
&2K_h K_\theta\|HC\|\|e_t\|^2 + \dot{h}_1(t) \\
&+\left(P^{-1}C^T\psi(y,t)-S\right)^T Pe_t + e_t^T P\left(P^{-1}C^T\psi(y,t)-S\right)
\end{aligned}
\quad (۲۵)
$$

با اعمال نامساوی (۷) و جایگذاری بهره مد لغزشی (۱۴) خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
LV(e_t,\hat{\eta}_i(t),t) &\le \Big(2K_{f1}\bar{\lambda}(P)-\underline{\lambda}(Q)+\frac{1}{2}\bar{\lambda}(P)K_g\|C\|^2 \\
&+2K_h K_\theta\|HC\|\Big)\|e_t\|^2 + 2\|Ce_t\|\sum_{i=1}^{N}\hat{\eta}_i(t)\,\rho_i(y_t,t) - \\
&\frac{2\|Ce_t\|^2\sum_{i=1}^{N}\hat{\eta}_i(t)\,\rho_i(y_t,t)}{\|Ce_t\| - \dot{h}_1(t)h_2(t)\sum_{i=1}^{N}\hat{\eta}_i\rho_i(y_t,t)} + \dot{h}_1(t)
\end{aligned}
\quad (۲۶)
$$

اگر نامساوی‌های (۱۶) و (۱۷) در رابطه (۲۶) جایگذاری شوند بدست می‌آید

$$
\begin{aligned}
LV\,(e_t,\hat{\eta}_i(t),t) &\le \Big(2K_{f1}\bar{\lambda}(P)-\underline{\lambda}(Q)+\frac{1}{2}\bar{\lambda}(P)K_g\|C\|^2 \\
&+2K_h K_\theta\|HC\|\Big)\|e_t\|^2 \le 0
\end{aligned}
\quad (۲۷)
$$

با توجه به قضیه ۲ (پایداری لیاپانوف اتفاقی) ارایه شده در بخش ۲ و رابطه (۱۰) نتیجه می‌شود که سیستم خطای حالت‌ها بطور سراسری پایدار در احتمال است. از طرف دیگر چون با توجه به (۲۷) داریم $N \ge 0$، پس $LV\,(e_t,\hat{\eta}_i(t),t) \le -N\,\|e_t\|^2$ برقرار است و استفاده از فرمول دینکین نتیجه می‌دهد.

$$
\begin{aligned}
&LV \le -N\,\|e_t\|^2 \le 0 \Rightarrow \\
&E_{e,t}V\left(e_\tau,\tilde{\eta}_{i\,\tau},\tilde{\theta}_\tau,t+\tau\right) - V\left(e_0,\tilde{\eta}_{i\,0},\tilde{\theta}_0,t_0\right) \le \\
&E_{e,t}\int_0^\tau -N\,\|e_s\|^2\,ds < \infty \\
&\Rightarrow 0 < N\,E_{e,t}\int_0^\tau \|e_s\|^2\,ds = N\int_0^\tau E_{e,s}\,\|e_s\|^2\,ds \\
&\le V\left(e_0,\tilde{\eta}_{i\,0},\tilde{\theta}_0,t_0\right) - E_{e,t}V\left(e_\tau,\tilde{\eta}_{i\,\tau},\tilde{\theta}_\tau,t+\tau\right) < \infty
\end{aligned}
\quad (۲۸)
$$

چون $E_{e,s}\,\|e_s\|^2 > 0$ است، طبق لم باربالت [۲۵] نتیجه می شود که میانگین نرم خطای تخمین حالت‌ها به سمت صفر میل می‌کند که به معنای همگرایی میانگین حالت‌های تخمین زده شده به حالت‌های اصلی است، $\lim_{t\to\infty} E_x\hat{x}_t \to E_x x_t$.□

نکته ۱: یکی از ویژگی‌های سیگنال‌های آشوبی پیوسته بودن طیف فرکانسی است، بنابراین طیف سیگنال $Bh(x)$ که تابعی از حالت‌های آشوبی است پیوسته بوده و در نتیجه این سیگنال پایا از مرتبه بالا است [۲۶]. بنابراین شرایط قضیه تحریک پایا در مرجع [۲۵] برقرار است و در نتیجه طبق قضیه ۲ مرجع [۱۰] همگرایی پارامترها تضمین شده است.□

مزیت قضیه ارایه شده اثبات پایداری در احتمال سیستم خطای حالت‌ها است. همچنین علی‌رغم وجود نویز و نامعینی در مدل، SASMO ارایه شده قادر است تنها با استفاده از بردار خروجی، حالت‌های سیستم را تخمین بزند. مهمتر اینکه بهره مد لغزشی رویت‌گر همیشه کران دار است و حتی هنگامیکه خطای تخمین حالت‌ها کوچک می شود ناویژه باقی می‌ماند.

۵- نتایج شبیه سازی

در این قسمت نتایج شبیه‌سازی SASMO آورده شده است. با توجه به مزایای SASMO در تخمین حالت‌ها می‌توان موارد کاربرد مختلفی برای آن در نظر گرفت. بدلیل توانایی رویت‌گر در تخمین حالت‌های سیستم‌های بسیار غیرخطی، SASMO در یک طرح همزمان‌سازی بر اساس مدار آشوبی چوآ بکار رفته است.لازم به ذکر است که این مدار در ابتدا توسط لئون چوآ ارایه شد و در حال حاضر تحقق‌های مداری مختلف آن [۲۷] دارای کاربردهای بسیاری در نظریه آشوب است [۲۸]. همانطور که قبلا اشاره شد سیستم اصلی را راه‌انداز (بر اساس مدار چوآ) و رویت‌گر را پاسخ (بر اساس مدار چوآ) نامیده‌ایم. معادلات راه‌انداز بصورت زیر است.

$$
\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-\frac{G}{C_1}-\frac{G_b}{C_1} & \frac{G}{C_1} & 0 \\
\frac{G}{C_2} & -\frac{G}{C_2} & \frac{1}{C_2} \\
0 & -\frac{1}{L} & -\frac{R_0}{L}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}
\quad (۲۹)
$$

$$+\begin{bmatrix} -\dfrac{G_a-G_b}{2C_1}\left(|x_1+E|-|x_1-E|\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

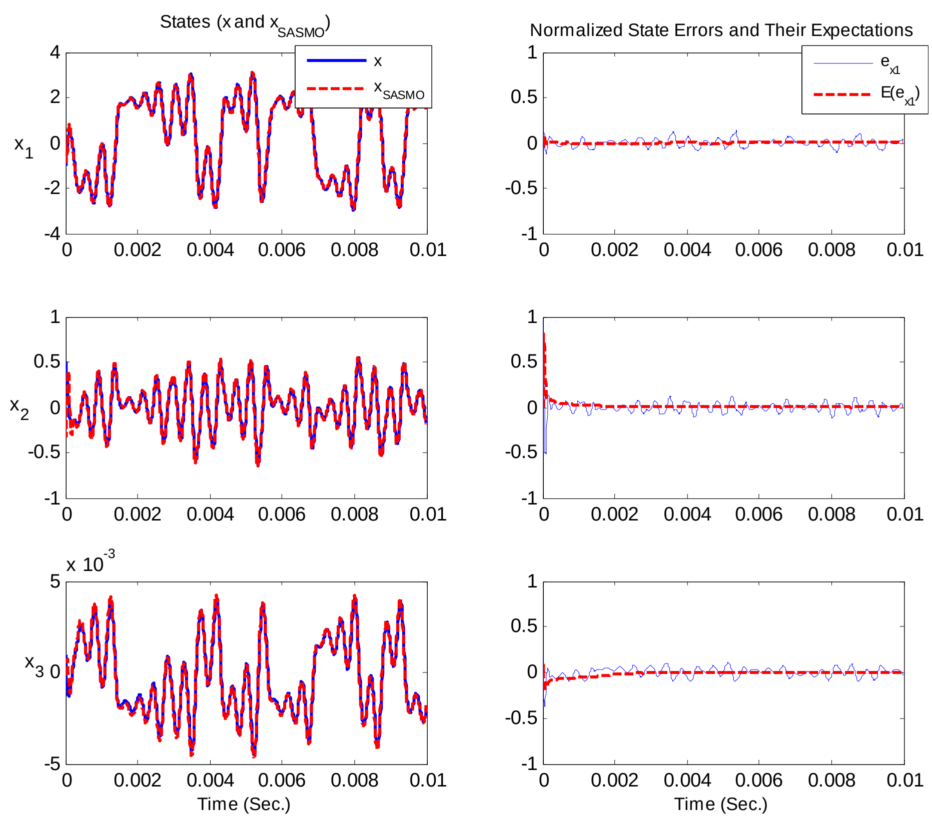
$$z(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

که برای پارامترهای
$G_b=-0.711\times10^{-3}$، $G=-1.139\times10^{-3}$، $R_0=20$، $R=1000$، $C_1=17\times10^{-9}$، $E=1$ و $C_2=178\times10^{-9}$ آشوبی است معادلات رویت‌گر با توجه دینامیک‌های مدار چوآ (۲۹)، ایجاد و به صورت (۱) بازنویسی شده است. با توجه به اینکه دامنه تغییرات حالت‌های سیستم به دلیل آشوبی بودن حتما کران‌دار و متعلق به جاذب آشوبی محدود Ψ هستند، ثابت‌های لیپ‌شیتز محلی (در جاذب آشوبی) زیر برای طراحی رویت‌گر در نظر گرفته شده‌اند.

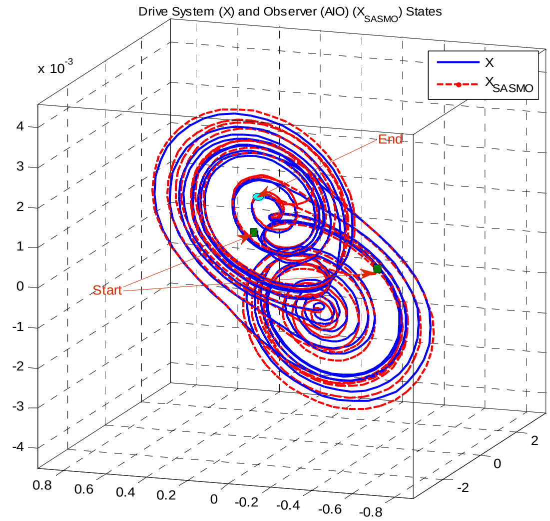
$$K_g=3,\ K_{f1}=500$$

کل سیستم راه‌انداز-پاسخ با شرایط اولیه متفاوت و برای ۰/۰۱ ثانیه شبیه‌سازی شده است. شکل ۱ رفتارهای آشوبی مدار چوآ را نشان می‌دهد. در قسمت (الف) شکل (۱) حالت‌های راه‌انداز به رنگ آبی (خط توپر) و حالت‌های پاسخ به رنگ قرمز (خط چین) آورده شده است. در قسمت (ب) خطای تخمین حالت‌ها به رنگ آبی (خط توپر) و میانگین خطای تخمین به رنگ قرمز (خط چین) آورده شده است.

با توجه به شکل مشاهده می‌شود خطای تخمین حالت‌ها و میانگین خطای تخمین حالت‌ها با گذشت زمان کران‌دار باقی می‌مانند. میانگین خطای تخمین حالت‌ها $E\{e\}=[1.832\text{-}2,\ 2.32\text{E-}3,\ 5.24\text{E-}8]^T$ و انحراف از معیار آن $Var\{e\}=[\text{-}4.67\text{E-}4,\ \text{-}1.202\text{E-}3,\ 3.63\text{E-}6]^T$ است که در مدت زمان شبیه سازی محاسبه شده‌اند. مشاهده می‌شود که میانگین و انحراف از معیار خطا با گذشت زمان به سمت صفر میل می‌کنند که بیانگر تخمین مناسب حالت‌های راه‌انداز توسط SASMO است. شکل (۲) جاذب آشوبی راه‌انداز و پاسخ را نشان می‌دهد. در شکل (۳) خروجی راه‌انداز و خطای تخمین خروجی آورده شده که بسیار کوچک است.



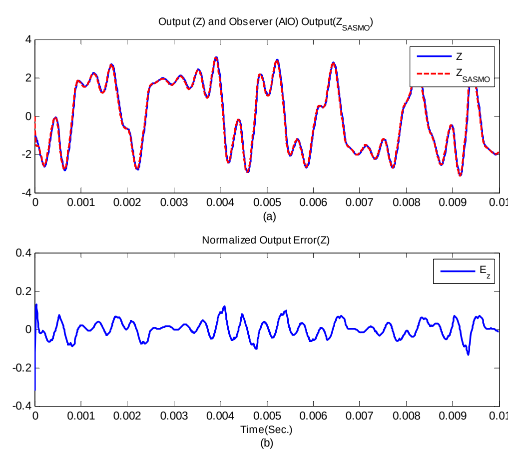
شکل (۱): (الف) حالت‌های راه‌انداز (آبی، خط توپر) و پاسخ (قرمز، خط چین). (ب) خطای نرمالیزه شده تخمین حالت‌ها (آبی، خط توپر) و میانگین خطای تخمین نرمالیزه شده (قرمز، خط چین).



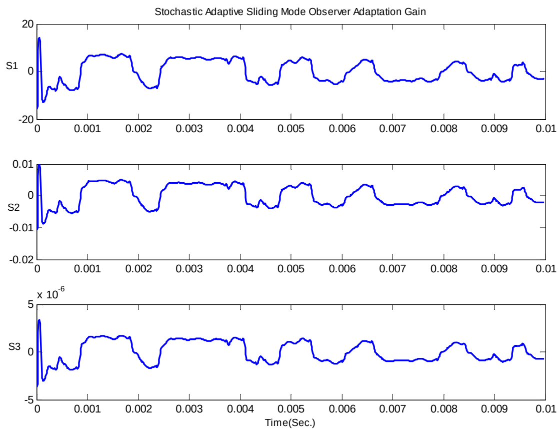
شکل (۲): جاذب آشوبی راه‌انداز (آبی، خط توپر) و پاسخ (قرمز، خط چین).

SASMO با استفاده از تنها یک خروجی نویزی تک بعدی توانسته است حالت‌های مدار چوآ آشوبی با نامعینی پارامتر و مدل را بطور مناسب تخمین بزند. در شکل (۴) بهره مد لغزشی رویت‌گر آورده شده است.

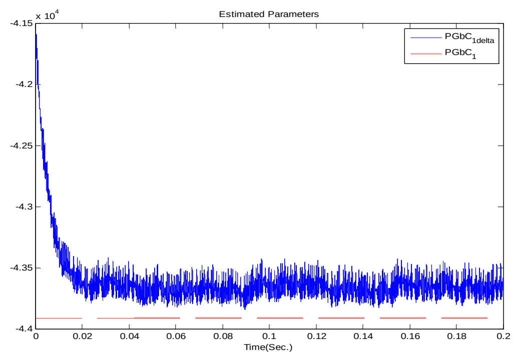
بهره مد لغزشی رویت‌گر طوری تغییر می‌یابد که در حین حفظ پایداری، اثر نویز و نامعینی‌ها در تخمین‌حالت‌ها کاهش یابد. علاوه بر این، بهره مد لغزشی رویت‌گر همیشه محدود باقی می‌ماند. شکل (۵) تخمین پارامتر را نشان می‌دهد.



شکل (۳): (a) خروجی راه‌انداز (آبی، خط توپر) و خروجی SASMO (قرمز، خط چین). (b) خطای تخمین خروجی.

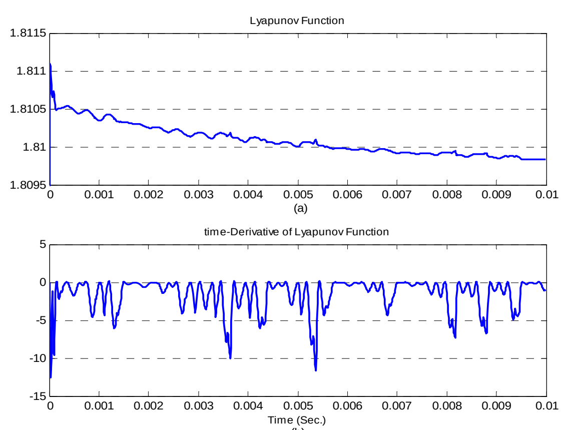


شکل (۴): بردار بهره مد لغزشی رویت‌گر.



شکل (۵): پارامتر تخمین زده شده (آبی، خط توپر) و پارامتر واقعی (قرمز، خط چین).

با توجه به اینکه سیستم آشوبی نسبت به تغییر پارامترها حساسیت شدیدی دارد، تخمین پارامتر مجهول می‌تواند در کاهش خطای تخمین حالت‌ها و بهبود همزمانی بین راه‌انداز و پاسخ تاثیر به سزایی داشته باشد به طوریکه بدون تخمین پارامترها ایجاد همزمانی غیر ممکن است. شکل (۶) هم تابع لیاپانوف و مشتق زمانی اتفاقی تابع لیاپانوف با اعمال عملگر انتشار را نشان می‌دهد. مقدار تابع لیاپانوف همیشه مثبت و مقدار مشتق زمانی تابع لیاپانوف همیشه منفی بوده و برقراری شرایط کافی قضیه ۲ را نشان می‌دهد.



شکل (۶): (a) تابع لیاپانوف. (b) مشتق زمانی تابع لیاپانوف با اعمال عملگر انتشار

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک رویت‌گر تطبیقی اتفاقی جدید تحت عنوان SASMO ارایه شده است. از جمله قابلیت‌های SASMO، عدم نیاز به دانستن مدل دقیق سیستم است بطوریکه سیستم می‌تواند شامل نامعینی‌های مدل و پارامتر باشد. کران بالای نامعینی مدل توسط SASMO تخمین زده می‌شود و برای تخمین پارامترهای نامعین هم قانون تطابق مناسبی در نظر گرفته شده است. نویز اندازه‌گیری توسط حرکت براونی مدل شده و برای توصیف مناسب‌تر، رویت‌گر توسط معادلات دیفرانسیل اتفاقی مدلسازی و پایداری سیستم خطای حالت‌ها توسط قضیه پایداری لیاپانوف اتفاقی اثبات شده است. بهره مد لغزشی رویت‌گر ارایه شده همیشه حتی وقتی خطای تخمین حالت‌ها به سمت صفر میل می‌کند، ناویژه و محدود است. با توجه به قابلیت‌های SASMO، از آن در یک طرح همزمان‌سازی سیستم‌های آشوبی بر اساس مدار چوآ با سیگنال کوپل یکطرفه نویزی اسکالر استفاده و توانایی رویت‌گر در تخمین حالت‌های سیستم راه‌انداز نامعین با استفاده از شبیه‌سازی نشان داده شده است.

سپاسگزاری

این تحقیق توسط مرکز تحقیقات مخابرات ایران حمایت شده است.

مراجع

[1] Lorenz, E.N., 1963, “Deterministic non periodic flow”, *Journal of Atmos. Science*, 20, 130-141.

[2] Ott, E., Grebogi, C., Yorke, J.A., 1990, “Controlling chaos,” *Physical Review Letters*, 64, 11, 1196-1199.

[3] Cuomo K.M., Oppenheim, A.V., 1993, “Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications”, *Physics Review Letters*, 71, 65-68.

[4] Cuomo, K.M., Oppenheim, A.V., Strogatz, S.H. , 1993, “Synchronization of Lorenz based chaotic circuits with applications to communications”, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I: Fundamental theory and applications*, 40, 626-633.

[5] Pecora L.M., Carroll, T.L., 1990, “Synchronization in chaotic systems,” *Physics Review Letters*, 64, 821-824.

[6] Yang, T., 2004, “A survey of chaotic secure communication systems”, *International Journal of Computational Cognition*, vol. 2, no. 2, pp. 81-130.

[7] Azemi A., Yaz, E.E., 2000, “Sliding-mode adaptive observer approach to chaotic synchronization”, *Transaction of ASME*, 122, 758-765.

[8] Rodriguez, A., Leon, D.J., Femat, R., 2007, “Chaos suppression based on adaptive observer for a P-class of chaotic systems”, *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 32, pp. 1345-1356.

[9] Arefi M.M., Jahed-Motlagh M.R., 2010, "Adaptive robust synchronization of Rossler systems in the presence of unknown matched time-varying parameters", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 15, no. 12, pp. 4149-4157.

[10] Zhu, F., 2008, “Full-Order and reduced-Order Observer-based Synchronization for Chaotic Systems with unknown Disturbances and Parameters”, *Physics letters A*, 372, 223-232.

[11] Stamnesa, Ø.N., Aamo, O.M., Kaasa, G.O., 2011, “Redesign of adaptive observersnext term for improved previous termparameternext term identification in nonlinear systemsstar”, *Automatica*, 47, 2, 403-410.

[12] Kakmeni, F.M., Bowong S., Tchawoua C., 2006, “Nonlinear Adaptive Synchronization of a Class of Chaotic Systems”, *Physics Letters A*, 355, 47-54.

[13] Morgul, O., Solak, E., Akgul, M., 2003, “Observer based Chaotic Message transmission”, *International journal of Bifurcation & Chaos*, 13, 4, 1003-1017.

[14] Hyuna, C.H., Parkb, C.W., Kima, J.H., Parka, M., 2007, “Synchronization and secure communication of chaotic systems via robust adaptive high-gain fuzzy observer”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 40, 5, 2200-2209.

[15] Sunga, W.J., Leea, S.C., You, K.H., 2010, “Ultra-precision positioning using adaptivenext term fuzzy-Kalman filter observer”, *Precision Engineering*, 34, 1, 195-199

[16] Ayati, M., Khaloozadeh, H., 2010, “A Stable Chaos Synchronization Scheme for Nonlinear Uncertain Systems”, *IET Control Theory and Applications*, 4, 3, 437-447.

[17] Ayati, M., Khaloozadeh, H., 2009, “A stable adaptive synchronization scheme for uncertain chaotic systems via observer”, *Chaos, Solitons and Fractals*, 42, 2473–2483.

[18] Oksendal, B., *Stochastic differential equations an introduction with applications*, 6th Edition, Springer Verlag, 2007.

[19] X., Mao, *Stochastic differential equations and their applications*. Horwood Publishing, Chechester, 1997.

[20] Kushner, H.J., *Stochastic stability and control,* Academic Press, New York, 1967.

[21] Chen, C.C., Yao, K., 2000, “Stochastic-calculus-based numerical Evaluation and performance analysis of chaotic communication systems”, *IEEE Transaction on Circuits and systems-I: Fundamental Theory and Applications*, 47, 12, 1663-1672.

[22] Raoufi, R., and Khaloozadeh, H., 2004, “A modified robust adaptive chaos synchronization”, *International Conference on Signal Processing & Communication*, Bangalore, India, 76-80.

[23] Khalil, H., *Nonlinear systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NewJersey, Ed. 3, 2002.

[24] Sun, Y., Cao, J., 2007, “Adaptive synchronization between two different niose-perturbed chaotic systems with fully unknown parameters”, *Physica A*, 376, 253-265.

مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۴، شماره ۳، پاییز ۱۳۸۹، صفحه ۶۵-۵۶

طراحی فیلتر تشخیص خطا برای سیستم های LTI دارای نامعینی با استفاده از حداقل سازی نرم H_∞ خطا

حمید رنجبر، محمدعلی نکوئی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر- دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی –سیدخندان - تهران

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۹/۷/۱۲، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۹/۹/۲۷)

چکیده : تشخیص خطا مساله مهمی در حفظ عملکرد و امنیت یک فرآیند کنترل می‌باشد . روش های مختلفی برای تشخیص خطا در یک فرآیند وجود دارد . در این روشها علاوه بر مساله تشخیص خطا ، بحث قوام سیستم نسبت به نامعینی ها و اغتشاش نیز مهم خواهد بود ، در نتیجه باید مصالحه مناسبی بین حساسیت سیستم به خطا و قوام سیستم وجود داشته باشد . یکی از روش های پیشنهادی بر اساس تبدیل مساله تشخیص خطای مقاوم به یک مساله استاندارد H_∞ تطابق مدل می‌باشد . در این مقاله ابتدا یک مدل مرجع مناسب از لحاظ تشخیص خطای مقاوم انتخاب شده سپس یک فیلتر تشخیص خطا به صورت یک مولد مانده بر اساس مینیمم سازی نرم H_∞ اختلاف بین مدل مرجع و مولد واقعی مانده با استفاده از ابزار LMI طراحی می‌شود و در انتها با یک مثال طراحی موثر بودن روش توجیه می‌شود.

کلمات کلیدی : تشخیص مقاوم خطا ، خطای مدلسازی ، مدل مرجع ، LMI

Fault Detection Filter Design for Uncertain LTI Systems using H_∞ Norm Error Minimization

Hamid Ranjbar, Mohammad Ali Nekoui

Abstract: Due to the importance of fault detection in maintaining the performance and immunity of control process, various methods have been proposed where as well as fault detection, the robustness of the system with respect to uncertainty and disturbance has been also discussed. In this regard a compromise between error sesitivity of the system and its robustness should be considered. One of the proposed methods is based on transformation of robust fault detection problem to a standard H_∞ model-matching one. In this paper after the selection of a proper reference model for the robust fault detection problem, a residual generator will be considered on the basis of an H_∞ minimization of the difference between reference model the realastic residual generator using LMI technics. A design example has been chosen to demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

Keywords : Robust Fault Detection, Modelling Error, LMI

۱- مقدمه

تشخیص خطای مبتنی بر مدل در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه واقع شده است[۴,۳,۲,۱]. در تشخیص خطای مبنی بر مدل، هدف، طراحی مکانیزم تولید سیگنالی است که آشکار سازی سیگنال‌های خطا را بر عهده دارد. این امر بر اساس دانشی از مدل سیستم استوار بوده که نهایتا منجر به تولید سیگنال مانده می‌شود[1,3]. یکی از روش‌های بسیار کاربردی و مورد مطالعه، تکنیک فیلتر تشخیص خطای مبنی بر رویتگر می‌باشد[۵]. این روش علاوه بر سادگی پیاده سازی، در تشخیص انواع

خطاهای ممکنه بسیار مناسب عمل می‌کند. از آنجا که اغتشاشات معلوم و نـامعلوم و نـویز بـرای بسـیاری از سیسـتمهای عملـی اجتنـاب ناپـذیر می‌باشد، در هر نوع طراحی فیلتـر تشـخیص خطـا، در نظـر گـرفتن ایـن اثرات ضروری می‌نماید. بر این اساس در فرآیند طراحـی منطقـی اسـت که مصالحه‌ای میان حساسیت به خطا و قوام سیستم بـه ورودی نـامعلوم برقرار شود.

برای تولید مانده در سیستم‌هایی که عـلاوه بـر ورودی نـامعلوم در آنهـا نامعینی در مدلسازی نیز مطرح است، هدف اصلی بالا بردن قوام سیگنال مانده نسبت به ورودی نامعلوم و همچنین نامعینی‌هـای مدلسـازی اسـت. بدیهی است که افزایش حساسیت سیستم مولد مانده نسبت بـه خطـا نیـز باید مدنظر قرار گیرد.

نامعینی مدلسازی به فرم‌های متفاوتی بیان می‌شـود کـه بـه فراخـور نـوع تعریف از آن، روش خاصـی در تولیـد مانـده در ایـن سیسـتم‌هـا مطـرح می‌شود. بـر خـلاف روش‌هـای متنـوع تولیـد مانـده در حضـور ورودی نـامعلوم، در حالـت کلـی روش مـدون و مشخصـی بـرای تولیـد مانـده درحضور نامعینی وجود ندارد.[۶] یکی از ایده‌های بکار گرفته شـده بـه منظور حذف اثر نامعینی مدلسازی، تبدیل این مورد بـه صـورت ورودی نامعلوم می‌باشد که به دلیل سهولت استفاده متداولی یافت.[۷] ولـی ایـن روش معایب خاص خود را داشت. در واقع شناختن نامعینی مدلسازی به عنوان ورودی نامعلوم سبب انحراف در طراحی مولد مانده می‌شود. چرا که، سبب بی اثر شدن اطلاعات ساختار نامعینی در روند طراحی شـده و این معلومات به هیچ وجه در نظر گرفته نمی‌شوند. ثانیا اثراتی از خطا در ورودی نامعلوم بروز میابد که ضمن مقاوم سازی مانده نسبت به ورودی نامعلوم، این اثرات حذف می‌شوند.[6]

روش بهینه و مناسب‌تر که برای اولین بار به منظور سیستم تشخیص خطا در [۹,۸] بکار گرفته شد، ایده استفاده از مدل مرجع بود.

در روش مدل مرجع، مساله اصلی طراحـی سیسـتم FDI [1]، تبـدیل بـه یک مساله استاندارد طراحی مانند:

$$\min_{L,R(s)} \quad \sup_{u,f,d} \frac{\left\| r_{ref} - r \right\|_2}{\left\| \begin{bmatrix} u \\ d \\ f \end{bmatrix} \right\|_2}$$

می‌شود[1]. در اسـتفاده از ایـن روش بـه منظـور طراحـی سیسـتم FDI، مدلی مطلوب همانند:

$$r_{ref}\left(s\right) = f\left(s\right) \quad or \quad r_{ref} = W\left(s\right) f\left(s\right) \qquad (۱-۱)$$

به عنوان مدل مرجع برای سیگنال مانده در نظـر گرفتـه مـی‌شـود کـه در آن $f\left(t\right)$ بیانگر بردار خطا می‌باشد.

مطابق با این انتخاب، هدف مطلوب، کمینه سـازی اخـتلاف میـان مانـده حاصل از سیستم دارای نامعینی بـا مـدل مرجـع انتخـابی خواهـد بـود بـه طوری که در جهت کمینه سازی اثـر نـامعینی مدلسـازی حرکـت شـود. انتخاب مـدل مطلـوب یعنـی r_{ref}، بـه صـورت $f\left(s\right)$ یـا در حالـت کلی‌تر $w\left(s\right) f\left(s\right)$ انجام می‌شود. در واقع استفاده از خود خطاها یـا ضریب وزنی آنها به عنوان هـدف تولیـد مانـده ایـده اصـلی روش مـدل مرجع می‌باشد.[۱۱,۱۲,۱۰]

همچنین انتخاب مدل مرجع یکسان نبوده و همین تفـاوت در روش‌هـای مختلف تعریف آن، خود از انعطاف پذیری این روش ناشی می‌شود.

در این نوشتار با انتخاب مدل مرجع مناسب به صورت :

$$r_{ref} = W\left(s\right) f\left(s\right) + Q\left(s\right) d\left(s\right) \qquad (۱-۲)$$

دو هدف کمینه سازی اثر ورودی نامعلوم و نامعینی مدلسـازی، بـه طـور جداگانه مورد اجرا قرار گرفتـه‌انـد. بـه عبـارت دیگـر مـی‌تـوان فرآینـد طراحی را به دو مرحله تقسیم بندی نمود:

مرحله اول: یافتن حل بهینه پارامترهای سیستم تشخیص خطـا در حـالتی که نامعینی مدلسازی وجود ندارد و تنهـا عامـل مـزاحم در تولیـد مانـده وجود ورودی نامعلوم می‌باشد. با قرار دادن این حل بهینـه و پارامترهـای بدست آمده در روابط تولید مانده در ایـن حالـت، مـدل مرجـع مناسـب تعریـف مـی‌شـود. البتـه ایـن نحـوه انتخـاب مـدل مطلـوب، نگرانـی در موردقوام سیستم نسبت به ورودی نامعلوم را برطرف می‌سازد.

مرحله دوم: یافتن پاسخ بهینه مساله زیر (که به نوعی یـک مسـاله H_∞ می باشد):

$$\min_{L,V} \quad \left\| r_{ref} - r \right\|_\infty = \min_{L,V} \quad \sup_{u,f,d} \frac{\left\| r_{ref} - r \right\|_2}{\left\| \begin{bmatrix} u \\ d \\ f \end{bmatrix} \right\|_2}$$

کـه در آن r مانـده تولیـدی در حالـت تولیـد مانـده در حضـور نـامعینی مدلسـازی بـوده و از طریـق روش‌هـای مرسـوم (نظیـر LMI)محاسـبه می‌شود.

۲- تعریف مساله

سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان ، که در آن خطای مدلسازی و ورودی نامعلوم لحاظ شده است را به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}u + \bar{E}_d d + \bar{E}_f f \\ y = \bar{C}x + \bar{D}u + \bar{F}_d d + \bar{F}_f f \end{cases} \qquad (۲-۱)$$

[1] fault detection and isolation

$$\bar{A} = A^0 + \Delta A\,, \bar{B} = B^o + \Delta B$$
$$\bar{C} = C^0 + \Delta C\,, \bar{D} = D^0 + \Delta D$$
$$\bar{E}_d = E_d^0 + \Delta E_d\,, \bar{F}_d = F_d^0 + \Delta F_d$$
$$\bar{E}_f = E_f^0 + \Delta E_f\,, \bar{F}_f = F_f^0 + \Delta F_f$$

$x(t) \in R^n$ بردار حالت و $u(t), y(t)$ به ترتیب بردار خروجی و ورودی سیستم می‌باشند. $d(t), f(t)$ نیز نشان دهنده بردار خطاهای سیستم و ورودی نامعلوم می‌باشند. ماتریس‌های $\bar{A}, \bar{B}, \bar{E}_d, \bar{E}_f, \bar{C}, \bar{D}, \bar{F}_d, \bar{F}_f$ نیز معلوم و با ابعاد مناسب هستند.

به منظور در نظر گرفتن اثر نامعینی مدلسازی ، معمولا در اکثر موارد، نامعینی به سه فرم زیر مورد بررسی قرار گرفته است [6]:

۱- در اولین مورد که تحت عنوان نرم محدود شناخته می‌شود، قسمت کاملا مجهول در مدلسازی، یعنی Δ به صورت $\Delta \in RH^\infty$ در نظر گرفته می‌شود، یعنی :

$$\bar{\sigma}(\Delta) \le \delta_\Delta$$

اگر این نامعینی در مدلسازی به صورت تحقق در فضای حالت نیز وارد شود، برای قسمت نامعینی سیستم (۲-۱) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B & \Delta E_d & \Delta E_f \\ \Delta C & \Delta D & \Delta F_d & \Delta F_f \end{bmatrix} \in$$
$$\dots \left\{ \begin{bmatrix} F_A \\ F_C \end{bmatrix} \Delta_H \begin{bmatrix} W_A & W_B & W_d & W_f \end{bmatrix} | \Delta \in \Lambda \right\}$$
$$\Delta_H = \Delta (I - H\Delta)^{-1}$$

که در آن $F_A, F_C, W_A, W_B, W_d, W_f, H$ معلوم و مربوط به ساختار نامعینی می‌باشند. همچنین $\Delta(t)$ کاملا مجهول بوده و تنها دانش در مورد آن، نرم محدود بودن آن است، یعنی:

$$\bar{\sigma}(\Delta) \le \delta_\Delta$$

این فرم از نمایش نامعینی مدلسازی، که در تئوری‌های کنترل نیز مرسوم است[]، برای استفاده از قضایای مربوط به تبدیل مساله H_∞ به یک LMI ضروری می‌نماید.

۲- در نوع دوم توصیف نامعینی مدلسازی، نامعینی‌ها به صورت چند موضوعی[1] در نظر گرفته می‌شوند که بر اساس آن خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B & \Delta E \\ \Delta C & \Delta D & \Delta F \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{l} \beta_i \begin{bmatrix} A_i & B_i & E_i \\ C_i & D_i & F_i \end{bmatrix}$$
$$\sum_{i=1}^{l} \beta_i = 1\,, \quad \beta_i \ge 0$$

در این حالت نیز مدل سیستم (۱-۲) به صورت زیر قابل بازنویسی می‌باشد:

$$\dot{x} = \left(\sum_{i=1}^{l} \beta_i (A + A_i) \right) x + \left(\sum_{i=1}^{l} \beta_i (B + B_i) \right) u$$
$$\dots + \left(\sum_{i=1}^{l} \beta_i (E_d + E_i) \right) d$$
$$y = \left(\sum_{i=1}^{l} \beta_i (C + C_i) \right) x + \left(\sum_{i=1}^{l} \beta_i (D + D_i) \right) u$$
$$\dots + \left(\sum_{i=1}^{l} \beta_i (F_d + F_i) \right) d$$

بدیهی است که در این نحوه نمایش، سخنی در مورد محدود بودن یا نامحدود بودن نرم نامعینی مطرح نیست.

۳- نوع دیگر از توصیف نامعینی، توصیف به فرم آماری می‌باشد. یعنی:

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B & \Delta E \\ \Delta C & \Delta D & \Delta F \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{l} \left(\begin{bmatrix} A_i & B_i & E_i \\ C_i & D_i & F_i \end{bmatrix} p_i(k) \right)$$

در این مورد $(A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i)$ معلوم بوده و $p^T(k) = \begin{bmatrix} p_1(k) & \cdots & p_l(k) \end{bmatrix}$ اشاره به نامعینی سیستم داشته و یک فرآیند آماری با:

$$\bar{p}(k) = E(p(k)) = 0$$
$$E\left(p(k)\, p^T(k)\right) = diag(\sigma_1, \cdots, \sigma_l)$$

فرض می‌شود. با این توصیف از $p(k)$ مشخص است که $p(0), p(1), \dots$ از یکدیگر کاملا مستقل بوده و ضمنا $p(k)$ از $x(0), u(k), d(k)$ کاملا مستقل می‌باشند.

در ادامه مولد مانده و سیستم تشخیص خطای مناسب برای این حالت یعنی سیستم دارای نامعینی را می‌توان به فرم:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A_k \hat{x} + \begin{bmatrix} B_{ku} & B_{ky} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \\ r = C_k \hat{x} + \begin{bmatrix} D_{ku} & D_{ky} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \end{cases} \qquad (۲-۲)$$

تعریف نمود. با تعریف $z = \begin{bmatrix} x^T & \hat{x}^T \end{bmatrix}^T$ برای دینامیک مولد مانده می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B}_f & \tilde{E}_d & \tilde{E}_u \\ \tilde{C} & \tilde{D}_f & \tilde{F}_d & \tilde{F}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ f \\ d \\ u \end{bmatrix}$$

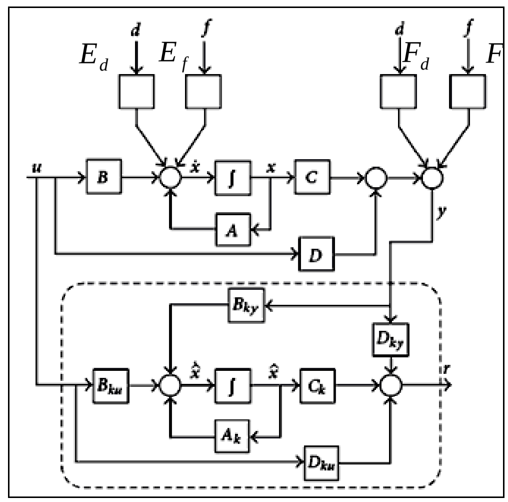
لذا توابع انتقال از خطا، اغتشاش و ورودی u به مانده در حالت سیستم با خطای مدلسازی به شرح زیر می‌باشند:

[1] polytopic

$$\begin{bmatrix} T_{rf}^M & T_{rd}^M & T_{ru}^M \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} \tilde{A} & \tilde{E}_f & \tilde{E}_d & \tilde{B}_u \\ \hline \tilde{C} & \tilde{F}_f & \tilde{F}_d & \tilde{D}_u \end{array}\right]$$
$$= \left[\begin{array}{cc|ccc} \bar{A} & 0 & \bar{E}_f & \bar{E}_d & \bar{B} \\ B_{ky}\bar{C} & A_k & B_{ky}\bar{F}_f & B_{ky}\bar{F}_d & B_{ku}+B_{ky}\bar{D} \\ \hline D_{ky}\bar{C} & C_k & D_{ky}\bar{F}_f & D_{ky}\bar{F}_d & D_{ku}+D_{ky}\bar{D} \end{array}\right]$$

به منظور تشخیص خطای مقاوم، در حالت ایده آل باید $T_{rf}^M \neq 0 \quad T_{rd}^M = 0 \quad T_{ru}^M = 0$ برقرار باشد.

در عمل معمولا این حالت برقرار نبوده و باید تا حد امکان شرایط $\left\| T_{rf}^M \right\| \to \max \quad \left\| T_{rd}^M \;\; T_{ru}^M \right\| \to \min$ برقرار شود. ضمنا ماندەی تولیدی نیز از نامعینی مدلسازی حداکثر تاثیر ناپذیری را دارا باشد.



شکل ۱ : شمای کلی سیستم تشخیص خطا

اگر سیستم مانده مرجع را در حالت تولید مانده بهینه در برابر ورودی نامعلوم بدون خطای مدلسازی به فرم زیر فرض کنیم:

(۲-۳)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{ref} \\ r_{ref} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A_{ref} & E_{ref,f} & E_{ref,d} \\ \hline C_{ref} & F_{ref,f} & F_{ref,d} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_{ref} \\ f \\ d \end{bmatrix}$$

با کمینه سازی حداکثر اختلاف میان مانده تولیدی در این حالت و مانده مرجع، و کمینه سازی دوباره انحراف در مانده ناشی از $u(t), d(t)$، یعنی:

$$\left\| \begin{bmatrix} T_{rf}^M - T_{ref} & T_{rd}^M & T_{ru}^M \end{bmatrix} \right\|_\infty$$

مولد مانده مورد طراحی تا حد امکان نسبت به تغییرات $u(t), d(t)$ و خطای مدلسازی مقاوم خواهد بود. در طراحی مولد مانده مقاوم نسبت به ورودی نامعلوم روش‌های متنوعی وجود دارند [۱۳,4,2] که بر اساس آنها می‌توان طراحی مولد مانده مرجع فوق را بسادگی انجام داد.بدیهی است که با توجه به این فرم از انتخاب مولد مانده مرجع، هدف اصلی کمینه سازی اثر خطای مدلسازی باشد.

از آنجا که در حالت بدون نامعینی ($\Delta(t)=0$) اثر ورودی سیستم یعنی u، روی مانده نزدیک به صفر است ، در مدل مرجع اثری از آن وجود ندارد. به هر حال ورودی سیستم u بروی دینامیک‌های سیستم اثر می گذارد لذا منطقی است که u به عنوان یک اغتشاش (معلوم) روی طراحی سیستم FDI اثر بگذارد. از طرف دیگر باید به خاطر داشت که $d(t)$ از $u(t)$ متفاوت می‌باشد چرا که در حالت برخط[۱] نیز در دسترس است.

به همین سبب جهت بهبود عملکرد سیستم FDI، دانش در مورد $u(t)$ باید در عمل و طراحی سیستم FDI وارد شود. برای مثال در طراحی ارزیاب های تطبیقی یا در انتخاب حد آستانه تطبیقی برای اعلام خطا می توان اهمیت این مطلب را درک نمود.[۱۵,۱۴]

۳- یافتن مولد مانده مرجع

به منظوریافتن مدل مرجع مناسب، دینامیک سیستم فیلتر تشخیص خطا را به صورت:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + Bu + L(y-\hat{y}) \\ \hat{y} = \hat{C}\hat{x} + \hat{D}u \\ r = V(y-\hat{y}) \end{cases}$$

در نظر می‌گیریم، که در آن $\hat{x}, y$ به ترتیب نمایانگر خروجی و حالات تخمین زده شده از(۱-۲) در حالت بدون نامعینی و H, L به ترتیب بهره رویتگر و ماتریس وزنی یا فیلترپسین[۲] مانده می‌باشند. دینامیک خطا نیز به صورت:

$$\begin{cases} \dot{e} = (A-LC)e + (E_d - LF_d)d + (E_f - LF_f)f \\ r = V(Ce + F_d d + F_f f) \end{cases}$$

خواهد بود. بدیهی است که در این سیستم:

$$r_{ref}(s) = Gr_{ref,f}(s)f(s) + Gr_{ref,d}(s)d(s)$$
$$Gr_{ref,f}(s) = V_{opt}\left(Q\left(E_f - L_{opt}F_f\right) + F_f\right)$$
$$Gr_{ref,d}(s) = V_{opt}\left(Q\left(E_d - L_{opt}F_d\right) + F_d\right)$$
$$Q = C\left(sI - A + L_{opt}C\right)^{-1}$$

بوده و با توجه به مدل مرجع انتخابی (۲-۳) می‌توان نوشت:

[۱] online
[۲] Post filter

$$A_{ref} = A - L_{opt}C$$
$$E_{f,ref} = E_f - L_{opt}F_f \ , E_{d,ref} = E_d - L_{opt}F_d$$
$$C_{ref} = V_{opt}C \ , F_{f,ref} = V_{opt}F_f \ , F_{d,ref} = V_{opt}F_d$$

با بکار گیری یکی از روش‌های موجود در طراحی بهینه $V_{opt} \ , L_{opt}$ نظیر H_-/H_∞ می‌توان پارامترهای مدل مرجع را محاسبه نمود[۱۴].

معیار H_∞ به منظور اندازه گیری حداکثر میزان اثر گذاری ورودی‌های نامعلوم بر سیگنال مانده مورد استفاده قرار می‌گیرد که با توجه به تابع تبدیل از ورودی نامعلوم به مانده، به صورت:

$$H_\infty = \left\| Gr_{ref,d} \right\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}\left(Gr_{ref,d}\,(j\omega)\right)$$

تعریف می‌شود. معیار ارزیابی H_- نیز به منظور ارزیابی حداقل میزان اثر گذاری خطا بر روی سیگنال مانده به صورت:

$$H_- = \inf_\omega \underline{\sigma}\left(Gr_{ref,f}\,(j\omega)\right)$$

مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این تعاریف $\bar{\sigma}(\ldots), \underline{\sigma}(\ldots)$ به ترتیب به کمترین و بیشترین مقدار ویژه توابع مطرح شده اشاره دارند.
با توجه به تعریف H_- مطابق آنچه در[۱۶] آمده است، اگرچه این ابزار نرم نیست ولی به عوض نرم می‌توان از آن در اندازه گیری بدترین حالت حساسیت خطا بهره برد.[6,14]

۴- بکار گیری ابزار LMI در حل مساله بهینه سازی

با توجه به سیستم مرجع می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} T_{rf}^M - T_{ref} & T_{rd}^M & T_{ru}^M \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_c^M & B_c^M \\ \hline C_c^M & D_c^M \end{array}\right]$$
$$\ldots = \left[\begin{array}{cc|ccc} A_{ref} & 0 & E_{f,ref} & E_{ref,d} & 0 \\ 0 & \tilde{A} & \tilde{E}_f & \tilde{E}_d & \tilde{B}_u \\ \hline -C_{ref} & \tilde{C} & \tilde{F}_f - F_{ref,f} & \tilde{F}_d - F_{ref,d} & \tilde{D}_u \end{array}\right]$$

بر اساس BRL[1]، سیستم FDI پایدار قابل طراحی است اگر و تنها اگر ماتریس $P_c = P_c^T > 0$ موجود باشد که:

$$\begin{bmatrix} \left(A_c^M\right)^T P_c + P_c A_c^M & P_c B_c^M & \left(C_c^M\right)^T \\ * & -\gamma I & \left(D_c^M\right)^T \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

[1] Bounded Real Lemma

۴- ۱) طراحی سیستم FDI برای نامعینی نرم محدود

با توجه به ساختار نامعینی نرم محدود، با جداسازی قسمت نامعینی مدلسازی از قسمت اصلی داریم:

$$\left(A_c^M, B_c^M, C_c^M, D_c^M\right) = \ldots$$
$$\left(A_c^o + A_c^\Delta, B_c^o + B_c^\Delta, C_c^o + C_c^\Delta, D_c^o + D_c^\Delta\right)$$

که بر این اساس می‌توان نوشت:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c^0 & B_c^0 \\ \hline C_c^0 & D_c^0 \end{array}\right] = \ldots$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} A_{ref} & 0 & 0 & E_{ref,f} & E_{ref,d} & 0 \\ 0 & A^0 & 0 & E_f^0 & E_d^0 & B^0 \\ 0 & B_{ky}C^0 & A_k & B_{ky}F_f^0 & B_{ky}F_d^0 & B_{ku} + B_{ky}D^0 \\ \hline -C_{ref} & D_{ky}C^0 & C_k & D_{ky}F_f^0 - F_{ref,f} & D_{ky}F_d^0 - F_{ref,d} & D_{ku} + D_{ky}D^0 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{c|c} A_c^\Delta & B_c^\Delta \\ \hline C_c^\Delta & D_c^\Delta \end{array}\right] = \begin{bmatrix} F_{r1} \\ F_{r2} \end{bmatrix} \Delta_H \begin{bmatrix} E_{r1} & E_{r2} \end{bmatrix} = \ldots$$
$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ F_A \\ B_{ky}F_c \\ \hline D_{ky}F_c \end{array}\right] \Delta_H \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & W_A & 0 & W_f & W_d & W_B \end{array}\right]$$

با این تجزیه می‌توان نامساوی مذکور را به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \left(A_c^0\right)^T P_c + P_c A_c^0 & P_c B_c^0 & \left(C_c^0\right)^T \\ * & -\gamma I & \left(D_c^0\right)^T \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix}}_{M_c^0} + \ldots$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \left(A_c^\Delta\right)^T P_c + P_c A_c^\Delta & P_c B_c^\Delta & \left(C_c^\Delta\right)^T \\ * & 0 & \left(D_c^\Delta\right)^T \\ * & * & 0 \end{bmatrix}}_{M_c^\Delta} < 0$$

با باز نویسی رابطه بالا برای قسمت نامعینی (M_c^Δ) داریم:

$$M_c^\Delta = \tilde{F}\Delta_H \tilde{E} + \tilde{E}^T \Delta_H \tilde{F}^T$$
$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} \left(P_c F_{r1}\right)^T & 0 & F_{r2}^T \end{bmatrix}^T, \tilde{E} = \begin{bmatrix} E_{r1} & E_{r2} & 0 \end{bmatrix}$$

قضیه (۱): [۱۷] فرض کنیم Δ، توصیف شده در حالت اول قسمت ۲ باشد (نامعینی نرم محدود)، برای ماتریس های $R = R^T, F, E, H$ با ابعاد مناسب، و هر Δ که $\bar{\sigma}(\Delta) \le \delta_\Delta$ باشد، نابرابری‌های:

$$\det\left(I-H\Delta\right)\neq 0$$

$$R+F\Delta\left(I-H\Delta\right)^{-1}E+E^{T}\left(I-\Delta^{T}H^{T}\right)^{-1}\Delta^{T}F^{T}<0$$

برقرار است، اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$\begin{bmatrix} R+\lambda E^{T}E & F+\lambda E^{T}H \\ * & \lambda\left(H^{T}H-I\right) \end{bmatrix}<0 \quad ,\lambda\geq 0$$

بنابراین با توجه به قضیه فوق:

$$T_c^{o}+T_c^{\Delta}<0\Leftrightarrow T_c^{o}+\tilde{F}\Delta_H\tilde{E}+\tilde{E}^{T}\Delta_H\tilde{F}^{T}<0\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} T_c^{o}+\lambda\tilde{E}^{T}\tilde{E} & \tilde{F}+\lambda\tilde{E}^{T}H \\ * & \lambda\left(H^{T}H-I\right) \end{bmatrix}<0 \quad ,\lambda\geq 0$$

بوده و با استفاده از schur complement داریم:

$$\begin{bmatrix} \left(A_c^{0}\right)^{T}P_c+P_cA_c^{0} & P_cB_c^{0} & \left(C_c^{0}\right)^{T} & P_cF_{r1} & \lambda E_{r1}^{T} \\ * & -\gamma I & \left(D_c^{0}\right)^{T} & 0 & \lambda E_{r2}^{T} \\ * & * & -\gamma I & F_{r2} & 0 \\ * & * & * & -\lambda I & \lambda H^{T} \\ * & * & * & * & -\lambda I \end{bmatrix}<0$$

با تغییر متغیر:

$$P=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 \\ P_{12} & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} \end{bmatrix}$$

$$B_{ky}=P_{33}^{-1}Z \quad ,A_k=P_{33}^{-1}X \quad ,B_{ku}=P_{33}^{-1}Y$$

می توان نابرابری غیر خطی فوق را به فرم خطی تبدیل کرد. یعنی:

$$\min_{P,X,Y,Z,D_{ky},D_{ku},C_k,\lambda} \quad \gamma$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{11}+\mu_{11}^{T} & \mu_{12} & \left(C_c^{0}\right)^{T} & \mu_{14} & \lambda E_{r1}^{T} \\ * & -\gamma I & \left(D_c^{0}\right)^{T} & 0 & \lambda E_{r2}^{T} \\ * & * & -\gamma I & F_{r2} & 0 \\ * & * & * & -\lambda I & \lambda H^{T} \\ * & * & * & * & -\lambda I \end{bmatrix}<0$$

$$\lambda\geq 0 \quad ,P=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 \\ P_{12} & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} \end{bmatrix}>0$$

$$\mu_{11}=\begin{bmatrix} P_{11}A_{ref} & P_{12}A^{0} & 0 \\ P_{12}A_{ref} & P_{22}A^{0} & 0 \\ 0 & ZC^{0} & X \end{bmatrix},\mu_{14}=\begin{bmatrix} P_{12}F_A \\ P_{22}F_A \\ ZF_C \end{bmatrix}$$

$$\mu_{12}=\begin{bmatrix} P_{11}E_{ref,f}+P_{12}E_f^{0} & P_{11}E_{ref,d}+P_{12}E_d^{0} & P_{12}B^{0} \\ P_{12}E_{ref,f}+P_{22}E_f^{0} & P_{12}E_{ref,d}+P_{22}E_d^{0} & P_{22}B^{0} \\ ZF_f^{0} & ZF_d^{0} & Y+ZD^{0} \end{bmatrix}$$

۴-۲) طراحی سیستم FDI برای نامعینی چندموضوعی

با توجه به ساختار نامعینی ذکر شده برای حالت مذکور، داریم:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_c^{M} & B_c^{M} \\ \hline C_c^{M} & D_c^{M} \end{array}\right]\in\left\{\sum_{i=1}^{p}\zeta_i\left[\begin{array}{c|c} A_c^{i} & B_c^{i} \\ \hline C_c^{i} & D_c^{i} \end{array}\right] \mid \sum_{i=1}^{p}\zeta_i=1,\zeta_i\geq 0\right\}$$

مطابق حالت قبل، فرض پایداری سیستم به ازای تمام نامعینی‌های چندموضوعی همچنان به قوت خود باقی است. از آنجا که شرط برقراری مساله بهینه سازی ارائه شده، شدنی بودن حل LMI ارائه شده بود، می‌توان برقراری آن را به حالت:

$$\ldots\Leftrightarrow\begin{bmatrix} \left(A_c^{i}\right)^{T}P_c+P_cA_c^{i} & P_cB_c^{i} & \left(C_c^{i}\right)^{T} \\ * & 0 & \left(D_c^{i}\right)^{T} \\ * & * & 0 \end{bmatrix}<0$$

$$\forall\zeta_i>0,\sum_{i=1}^{p}\zeta_i=1$$

تبدیل نمود و مشابه حالت قبل برای این رابطه با اعمال همان تغییر متغیرها، رابطه زیر را بدست آورد:

$$\min_{P,X,Y,Z,D_{ky},D_{ku},C_k} \quad \gamma$$

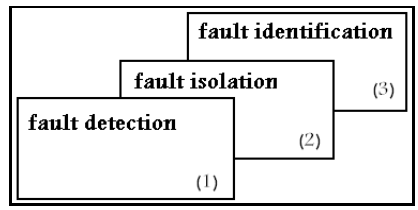
$$\begin{bmatrix} \mu_{11}^{i}+* & \mu_{12}^{i} & \left(C_c^{i}\right)^{T} \\ & -\gamma I & \left(D_c^{i}\right)^{T} \\ & & -\gamma I \end{bmatrix}<0$$

$$\lambda\geq 0 \quad ,P=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 \\ P_{12} & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} \end{bmatrix}>0$$

۵- تشخیص نوع خطا

به طور کلی روش اجرای فرآیند تشخیص خطا شامل سه مرحله‌ی تشخیص خطا، تعیین نوع خطا و شناسایی خطا می‌باشد.[۱۸] بسته به نوع خطا و عملکرد مورد انتظار از سیستم کنترل، این سه مرحله می‌توانند نسبت به هم دارای اولویت باشند. ولی با این همه، بحث تشخیص خطا تقریبا برای تمام سیستم‌های عملی مورد نیاز است و بعد از آن مقوله جداسازی خطا نیز به همان اندازه اهمیت می‌یابد.

از طرف دیگر شناسایی نوع عیب معمولا در سیستم‌ها ضروری نبوده و اهمیت زیادی در سیستم‌های کنترلی پیدا نمی‌کند چرا که به محض وقوع عیب، سیستم را در صورت امکان خاموش می‌کنند و به سرعت، در جهت تعمیر، اقدام می‌کنند.



شکل ۲ : مراحل انجام فرآیند تشخیص عیب

معمولا تشخیص خطا و جداسازی خطا به صورت برخط انجام می‌گیرند و هر دو هم زمان، و به موازات هم اجرا می‌شوند. در اکثر سیستم‌ها این دو مورد، هم زمان فعال بوده و در برخی دیگر از سیستم‌ها تشخیص خطا به صورت دائم روشن است و به محض نمایش عیب جداسازی خطا فعال می‌شود.

برای تشخیص نوع عیب نیز روش‌ها عموما در دو سطح مبتنی بر مدل و مبتنی بر سیگنال دسته بندی می‌شوند. روش‌های مبتنی بر استفاده از شبکه‌عصبی[1] که بر اساس ایجاد نگاشت‌های غیرخطی و دسته بندی عمل‌می‌کنند و روش‌هایی همچون ...,PLS[4],FDA[3],PCA[2] که بر اساس استفاده از پردازش آماری به منظور تشخیص عیب مورد استفاده هستند. عیب اصلی این روش‌ها عموما در عدم برخط بودن آنهاست. در این میان استفاده از روش‌های مبتنی بر مدل به صورت برپایی بانک‌های رویتگری به صورت DOS[5] و GOS[6] نیز مرسوم و معمول است.[۱۹] در واقع با بکارگیری هر یک از این دو روش نیازمند طراحی حداقل رویتگر به تعداد خطاهای سیستم، به منظور تشخیص هر عیب خواهیم بود.[2019,]

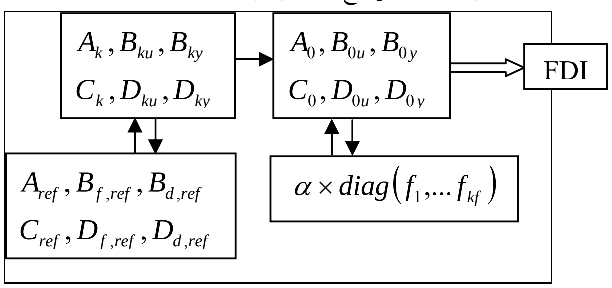
اما بکارگیری از روش مدل مرجع و انتخاب مرجع مناسب می‌تواند این فرآیند را با مرحله تشخیص خطا، یکی کند. در واقع اگر در سیستم مولد مانده مرجع انتخابی (۱-۲) ضریب وزنی $f(s)$ طوری انتخاب شود که داشته باشیم:

$$r_{ref} = Wf \quad ,W = diag(\beta_i) \quad ,i = 1,2,...,n_f$$

می‌توان اثر هر خطا را به صورت منفرد بر هر مانده مشاهده نمود.

بدین منظور هدف طراحی، تنها افزایش مقدار β_i ها خواهد بود چرا که مانده بدست آمده نسبت به اثر ورودی نامعلوم و نامعینی مدلسازی قبلا مقاوم گردیده است و مقصود از این مورد جداسازی حداکثری میان خطاهای ممکنه می‌باشد.

از آنجا که سیستم مولد مانده به صورت (۲-۲) تعریف شده است، مانده‌ی تولیدی در مرحله نهایی را می‌توان با عبور از یک سیستم، با انتخاب مدل مرجع قطری مناسب به فرم دلخواه قطری تبدیل نمود و از آن در فرآیند تشخیص نوع خطا بهره برد.



شکل ۳ : استفاده از مدل مرجع در شناسایی و تشخیص نوع خطا

این بدان معناست که پس از کمینه سازی اثر ورودی نامعلوم و نامعینی مدلسازی می‌توان با انتخاب مدل مرجع دیگری به صورت بردار خالص خطا یا ضریب وزنی قطری آن، از مانده حاصله در جهت تعیین نوع عیب نیز بهره برد. با توجه به سیستم نهایی مانده، سیستم ضریب وزنی قطری ساز مانده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \dot{k} = A_0 k + B_0 r \\ r_{iso} = C_0 k + D_0 r \end{cases}$$

که در آن r مانده حاصل از فرآیند کمینه سازی اثر نامعینی مدلسازی و k متغیر حالت می‌باشد. با توجه به (۲-۲) خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & 0 \\ B_0 C_k & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{ku} & B_{ky} \\ B_0 D_{ku} & B_0 D_{ky} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \\ r_{iso} = \begin{bmatrix} D_0 C_k & C_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_0 D_{ku} & D_0 D_{ky} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \end{cases}$$

که با در نظر گرفتن مانده مرجع مطلوب جهت جداسازی خطا به صورت :

$$r_{iso\_ref} = \beta \times diag(f_1,... f_{kf})$$

میتوان پارامترهای ضریب وزنی مانده یعنی ماتریس‌های A_0, B_0, C_0, D_0 را جهت تعیین نوع خطا محاسبه نمود. البته مقدار β را می‌توان به صورت مرحله به مرحله تا جایی که نابرابری ماتریسی حاصل از:

$$\min \left\| r_{iso} - r_{iso\_ref} \right\|_\infty$$

[1] neural network
[2] Principal Component Analysis
[3] Fisher Discrimnant Analysis
[4] Partial Least Square
[5] Dedicated Observer Scheme
[6] Generalized Observer Scheme

قابل حل نباشد، افزایش داد.

۶- مثال عددی تشخیص خطا

مطابق بـا مـدل ارائـه شـده در [۲۱] بـرای فضـای حالـت موتـور جـت، پارامترها به شرح زیر خواهند بود:

$$A^0=\begin{bmatrix}-0.9835 & -0.0110 & -0.0039\\ -0.0004 & -0.9858 & -0.0026\\ 0 & 0.0002 & -0.9891\end{bmatrix}, B^0=\begin{bmatrix}0.0080 & 0.2397 & -0.0383\\ 0.0068 & 0.1565 & 0.0248\\ 0.0003 & -0.0003 & 0.0003\end{bmatrix}$$

$$C^0=\begin{bmatrix}0.2383 & 0.4871 & 0.1390\\ 0 & -0.0008 & 0.0004\\ 0.0000 & -0.0000 & 0\end{bmatrix}, D^0=\begin{bmatrix}0.4171 & -4.4920 & 0.4875\\ 0.0008 & -0.0050 & 0.0003\\ 0 & 0.0005 & -0.0021\end{bmatrix}$$

$$E_d=\begin{bmatrix}0.1I & 0\\ 0 & 0.01\end{bmatrix}, E_f=\begin{bmatrix}0.0080 & 0.2397 & -0.0383\\ 0.0068 & 0.1565 & 0.0248\\ 0.0003 & -0.0003 & 0.0003\end{bmatrix}, F_d=0.1I$$

$$F_f=\begin{bmatrix}-0.0205 & 0.6217 & 0.8115\\ 0.2789 & -1.7506 & 0.6363\\ 1.0583 & 0.6973 & 1.3101\end{bmatrix}, H=\begin{bmatrix}-0.3190 & -0.0800 & 0.1420\\ -0.2880 & 0.1380 & 0.2580\\ 0.1140 & 0.1630 & 0.1330\end{bmatrix}$$

$$W_A=\begin{bmatrix}-0.0600 & -0.0080 & -0.1350\\ -0.0150 & 0.1540 & 0.0470\\ -0.0440 & -0.0610 & -0.0900\end{bmatrix}, W_B=\begin{bmatrix}0.1340 & 0.6300 & 0.4510\\ 0.2070 & 0.3710 & 0.0440\\ 0.6070 & 0.5750 & 0.0270\end{bmatrix}$$

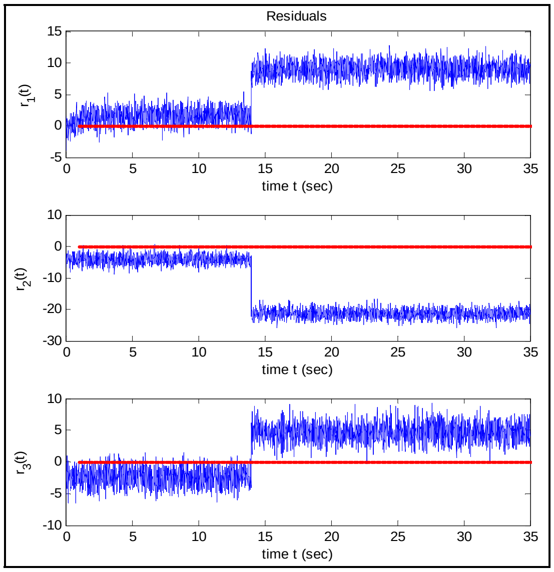
$$F_A=\begin{bmatrix}0.1480 & -0.1290 & -0.0840\\ 0.1140 & -0.0070 & 0.0500\\ -0.0680 & -0.0330 & 0.1490\end{bmatrix}, F_C=\begin{bmatrix}-0.0550 & 0.0660 & -0.0120\\ -0.0850 & -0.0850 & -0.0070\\ -0.0250 & -0.1200 & 0.0490\end{bmatrix}$$

برای این مثال بـا اسـتفاده از روش‌هـای مختلـف، بهـره فیلتـر و مـاتریس فیلترپسین مدل مرجع محاسبه شده است که نتایج بدست آمده برای هـر کدام مطابق جدول زیر مشاهده شد[6]:

جدول ۱: مقایسه عملکرد روشهای طراحی در تعریف مناسب مدل مرجع

Method	H_-/H_∞	H_2/H_2	H_-/H_2
γ	2.2824	2.4276	2.6133

بر اساس این مقایسه با انتخاب مدل مرجع توصیف شده، فیلتر مناسب بـا حل به روش تکراری LMI بدست می‌آید. بـا اعمـال سـیگنال خطـا بـه صـورت پلـه واحـد در لحظـه ۱۴ و اعمـال ورودی نـامعلوم بـه صـورت نویزسفید با میانگین صفر و واریانس ۲ نتایج سیگنال مانده به شـرح زیـر بدست می‌آید: (شکل ۴)



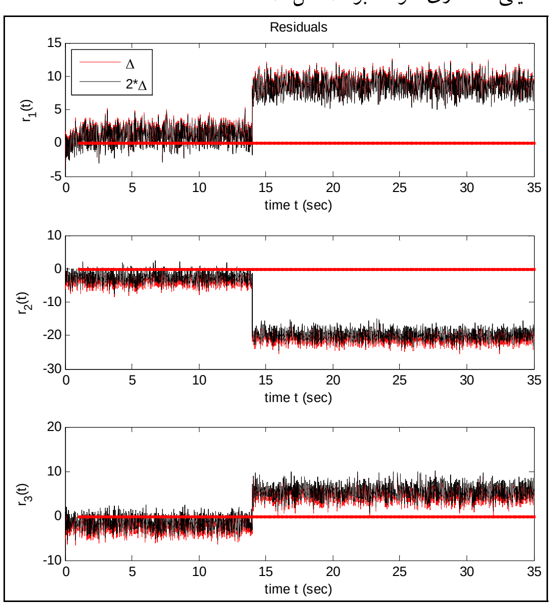
شکل ۴: مانده تولیدی به روش مدل مرجع

با افزایش واریانس نامعینی مدلسازی، و نهایتا تغییر در مـاتریس نـامعینی به صورت:

$$\Delta_{H,1}=\begin{bmatrix}0.3741 & 0.3173 & 0.1506\\ 0.7977 & 0.7207 & 0.2220\\ 0.0848 & 0.0325 & 0.2133\end{bmatrix}$$

$$\to \Delta_{H,2}=\begin{bmatrix}1.3521 & 0.6380 & 1.4948\\ 1.2179 & 0.2271 & 0.3274\\ 1.1046 & 0.4046 & 1.1749\end{bmatrix}$$

تغییر محسوسی در مانده رخ نمی‌دهد که این امر مبـین قـوام سیسـتم بـه نامعینی مدلسازی خواهد بود.(شکل ۵)

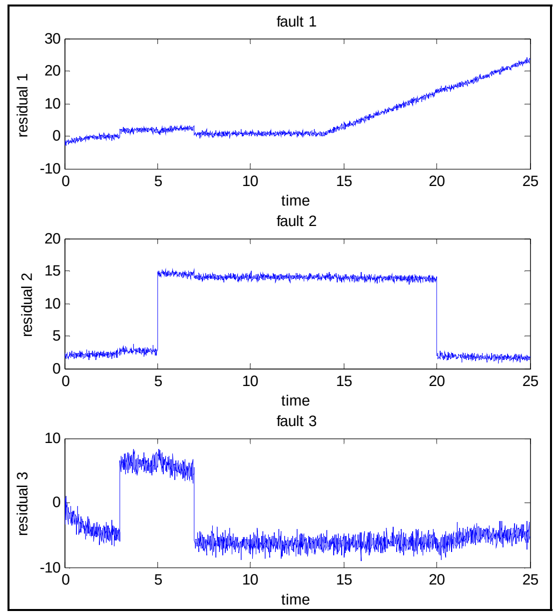


شکل ۵: اثر تغییر مقدار نامعینی روی مانده

به منظور تعیین نوع خطا با در نظر گرفتن مدل مرجع:

$$r_{iso\_ref} = \alpha \times diag\left(f_1, \dots f_{kf}\right)$$

و افزایش تدریجی β، با اعمال سه سیگنال خطا به صورت پالس واحد از لحظه ۵ الی ۲۰، شیب ۰.۲ در لحظه ۱۴ و پالس از زمان ۳ الی ۷ واعمال ورودی نامعلوم به صورت نویزسفید با میانگین صفر و واریانس ۱ نتایج سیگنال مانده به شرح زیر بدست می‌آید: (شکل ۶)



شکل ۶ : تعیین نوع خطا بوسیله مدل مرجع $\beta = 12$

۷- نتیجه گیری

با اینکه برای تولید مانده در حضور اشکال مختلف نـامعینی، روش‌هـای مختلفی وجود دارد ولی تقریبا هسته اصلی تمام روش‌ها یکی مـی‌باشـد. در واقع به نوعی در تمام آنها استفاده از یک مدل مرجع مورد نیاز است، که از شباهت‌های اساسی این روش‌ها محسوب می‌شود.

در این مقاله طراحی سیستم عیـب یـاب بـر اسـاس روش مـدل مرجـع و تعریـف مـدل مرجـع مناسـب از لحـاظ تشـخیص خطـای مقـاوم بـرای سیستم‌های خطی دارای نامعینی مدلسازی با ورودی نـامعلوم ارائـه شـد. بر اساس این تعریف از مدل مرجع، که در آن لحاظ نمودن اثـر ورودی نامعلوم درمدل مطلوب و یافتن مدل مرجع مناسب از دید حـداکثر قـوام سیستم نسبت به ورودی نامعلوم مطرح شده اسـت، هـدف اصـلی مسـاله بهینه سازی، بهبود میزان قوام مانده به نامعینی مدلسازی خواهد بود.

اینکه اثر ورودی نامعلوم به مدل مرجـع تعریـف شـده وارد شـده اسـت، تناقضی با کم کـردن اثـر آن در مانـده – کـه همـواره مطلـوب اسـت – نخواهد داشت. چرا که این اثر، در روش‌های موجود در طراحی مقـاوم مولد مانده در حضور ورودی نامعلوم مستقلا به طور بهینه، مینیمم شده و توجه بیشتر شامل نـامعینی مدلسـازی خواهـد بـود. لـیکن بـا ایـن فـرض می‌توان تاکید مساله را بر کمینه سازی اثر نامعینی مدلسازی بـه صـورت منفرد تضمین نمود.

بـا ایـن تعریـف از مـدل مرجـع، قـوام سیسـتم FDI نسـبت بـه نـامعینی مدلسازی، نسبت به حالتی که در مـدل مطلـوب ورودی نـامعلوم لحـاظ نشود، بهبود می‌یابد. از آنجا کـه مـدل انتخـابی از لحـاظ حـداکثر قـوام سیستم نسبت به سیگنال ورودی نامعلوم انتخاب می‌شود، این تعریـف از مدل مرجع منافاتی با قوام سیستم FDI نسبت به ورودی نامعلوم ندارد.

همچنین مدل مرجع مورد نظر برای شبیه سازی هرچه بیشتر مانده بـا آن، می‌تواند بر حسب نیاز تعریف شود و حتی با تعریف مناسب آن (مثلا در این مـورد، قطـری بـا عناصـر یکسـان)، تفکیکـی میـان اثـرات خطاهـای مختلف ایجـاد نمـود و بـه نـوعی از مانـده حاصـله بـرای ایجـاد سیسـتم جداساز خطا بهره برد. در این کاربرد با کمی تامل می‌توان تغییراتـی در مدل مرجع مناسب وارد نمود و بر اساس آن با تغییر تعداد سـیگنال‌هـای مانده برابر با تعداد خطاهای موجود آن را تا حد امکان نسبت به اغتشاش مقاوم نمودو از ایجاد بانک‌های رویتگری به منظور جداسازی خطـا بـی نیاز شد. حتی می‌توان با ایجاد ساز و کار مناسبی این مدل مرجع مناسب جهت جداسازی خطاها را به صورت یک الگوریتم تکرار بهینه نمود.

در نهایت نیز با اعمال نتایج بـر سیسـتم عـددی داده شـده، قـوام سیسـتم نسبت به تغییرات مدلسازی در عین حساسـیت بـه تشـخیص خطـا مـورد ارزیابی قرار گرفته و درحالت رخداد خطاهای مختلف، بـا ایجـاد مـدل مرجع قطری اقدام به جداسازی خطاها و طراحی سیستم تعیین نوع خطا شده است.

۸- مراجع

[1] Zhonga M., Ding Steven X., Lam J., Wang H., 2003, "An LMI approach to design robust fault detection filter for uncertain LTI systems," Automatica, Vol. 39, No. 3, pp. 543 – 550

[2] Khosrowjerdi M., Nikoukhah R., Safari-Shad N. , 2004, "A mixed H2/Hinf approach to simultaneous fault detection and control," Automatica, Vol. 40, No. 3, pp. 261-267

[3] Hamelin F., Sauter D., 2000, "Robust fault detection in uncertain dynamic systems," Automatica, Vol. 36, Issue 11, pp. 1747-1754

[4] Chen J., Patton R.J., Zhang H.Y., 1996, "Design of unknown input observer and robust fault detection filters," International Journal of Control, Vol. 63, No. 1, pp. 85-105

[5] Isermann R., Balle P., 1997, "Trends in the application of model-based fault detection and

diagnosis of technical processes," Control Eng. Practice., Vol. 5, No. 5, pp. 709-719

[6] Ding X., 2000, "Model-based fault diagnosis techniques," Springer

[7] Akhenak A., Chadli M., Ragot J., Maquin D. , 2007 "Design of Sliding Mode Unknown Input Observer for Uncertain Takagi-Sugeno Model," Control & Automation Mediterranean Conference, pp. 1-6

[8] Murad G., Postlethwaite I., Gu D.W., 1996, "A robust design approach to integrated control and diagnostics," Proc. the 13th IFAC Word Congress

[9] Stroustrup J., Grimble M., Niemann H., 1997, "Design f integrated systems for the control and detection of actuator/sensor faults," Sensor review, Vol. 17, pp.138-149

[10] Rank M.L., Niemann H., 1999, "Norm based design of fault detectors," International Journal of Control, Vol. 72, No. 9, pp. 773-783

[11] Frisk E., Nielsen L., 2006, "Robust residual generation for diagnosis including a reference model for residual behavior," Automatica, Vol. 42, Issue 3, pp. 437-445

[12] Chen J., Patton R.J., 2000, "Standard h-infinity formulation of robust fault detection," Proc. of the 4th IFAC Symp. Safe Process, pp. 256-261

[13] Ding S.X., Jeinsch J., Frank P.M., Ding E.L., 2000, "A unified approach to the optimization of fault detection systems," International journal of adaptive control and signal processing, Vol. 14, pp. 725-745

[14] Guo J., Huang X., Cui Y., 2009, "Design and analysis of robust fault detection filter using LMI tools," Computers & Mathematics with Applications, Vol. 57, Issues 11-12, pp. 1743-1747

[15] Frank P.M., Ding X., 1997, "Survey of robust residual generation and evaluation methods in observer-based fault detection systems," Journal of Process Control, Vol. 7, No. 6, pp. 403-424

[16] Liu J., Wang J.L., Yang G.H., 2005, "An LMI approach to minimum sensitivity analysis with application to fault detection," Automatica, Vol. 41, No. 11,pp.1995-2004

[17] El Ghaoui L., Folcher J.P., 1996, "Multi objective robust control of LTI systems subject to unstructured perturbations," Systems and Control Letters, Vol. 28, No. 1, pp.23-30

[18] Chiang L.H., Russell E., Broatz R.D., 2001, "Fault Detection and Diagnosis in Industrial Systems," Springer

[19] Frisk E., 1996," Model-based fault diagnosis applied to an SI-Engine," M.s Thesis of Linkoping university

[20] Frank P.M., Ding S.X., Marku T., 2000, "Model-based fault diagnosis in technical processes," Transactions of the Institute of Measurement and Control, Vol. 22, No. 1, pp. 57-101

[21] Curry T.D., Collins J., 2005, "Robust fault detection and isolation using robust $\ell 1$ estimation," Journal of Guidance Control and Dynamics, Vol. 28, Vo. 6, pp.1131-1139

مجله کنترل
ISSN 2008-8345
جلد ۴، شماره ۳، پاییز ۱۳۸۹، صفحه ۷۷-۶۶

کنترل ساختارهای زنجیر بسته سینماتیکی با استفاده از مدل SPF بدون اندازه‌گیری سرعت

حسین بلندی [۱]، امیر فرهاد احیائی [۲]

[۱] دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه علم و صنعت ایران، h_bolandi@iust.ac.ir

[۲] دانشجوی دکتری، دانشکدهٔ مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه علم و صنعت ایران، ehyaei@ee.iust.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله ۱۳۸۹/۶/۲۶، تاریخ پذیرش مقاله ۱۳۸۹/۱۰/۱۱)

چکیده: در این مقاله، یک کنترل‌کننده موقعیت برای سیستم انتخابی متشکل از دو بازوی همکار، جهت حمل مشترک یک جسم صلب ارائه می‌گردد. در این راستا، جهت کاهش معادلات دینامیک دیفرانسیلی-جبری سیستم و تبدیل آن به مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیلی معمولی، یک مدل تقلیل‌یافته SPF از سیستم استخراج گردیده و کنترل‌کننده‌ای متمرکز بر این اساس ارائه خواهد شد. بدین-ترتیب، کنترل‌کننده طراحی‌شده متکی بر حل قیدهای جبری غیرخطی نبوده و بنابراین قابلیت اجرایی بیشتری در کاربردهای زمان واقعی دارد. همچنین، یک رؤیتگر سرعت در ساختار کنترلی سیستم بنحوی طراحی می‌گردد که سبب حذف حسگرهای سرعت و در نتیجه جلوگیری از تزریق نویز از طریق این حسگرها به درون سیستم شده و تعداد حسگرهای مورد نیاز در کنترل سیستم را به حداقل می‌رساند. در نهایت، پایداری سیستم با استفاده از توابع لیاپانوف اثبات شده و بر اساس نتایج شبیه‌سازی‌ها اثربخشی روش ارائه شده تأیید می‌گردد.

کلمات کلیدی: کنترل موقعیت، سیستم‌های رباتیک همکار، زنجیرهای بسته سینماتیکی، رؤیتگر سرعت، مدل تقلیل یافته.

Control of Closed Kinematic Chains Based on SPF Model without Velocity Measurements

Hossein Bolandi, Amir Farhad Ehyaei

Abstract: In this paper, position control of a dual manipulator system for transporting a common payload is considered. In this regard, a centralized controller is designed for a reduced model developed based on a singularly perturbed formulation (SPF) which reduces the differential-algebraic dynamic equations of the system to a set of ordinary differential equations. In this approach, the controller does not rely on solving nonlinear algebraic constraints and is more applicable to real-time implementation. At the same time, a linear observer is designed to estimate the joint velocities which leads to elimination of velocity sensors and prevents noise injection into the system which may degrade the system performance. Finally, stability of the system is proved by using Lyapunov theorem. Simulation results illustrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: Position control, Cooperative transportation, Closed kinematic chains, Velocity observer, Reduced model.

۱- مقدمه

در دهه گذشته، سیستم‌های متشکل از چندین ربات همکار شامل ربات‌های متحرک همکار [۱و۲]، بازوهای همکار [۳] دست‌های چند انگشتی [۴و۵]، ربات‌های دارای چند پا [۶و۷] و . . . به طور گسترده‌ای در زمینه‌های گوناگونی مطالعه شده‌اند. چنین سیستم‌هایی در ساختارهای توپولوژیکی مختلفی بررسی شده‌اند که در قالب زنجیره-های سینماتیکی باز و بسته تقسیم‌بندی می‌شوند. اگرچه زنجیره‌های بسته مزایای زیادی از لحاظ استحکام مکانیزم بر زنجیره‌های باز دارند،

طراحی حرکت و کنترل آنها بدلیل نیاز به حفظ ساختار زنجیر بسته (وجود قیدهای زنجیر بسته)، بسیار پیچیده است. در این مقاله، توجه ما به حمل مشترک اجسام صلب توسط بازوهای همکار با تمرکز بر موضوعات کنترلی محدود خواهد گردید.

بسیاری از کارهای پیشین مسأله کنترل ساختارهای زنجیر بسته را تحت شرایط مختلف بررسی نموده‌اند [۱۴-۸]. البته تعداد کمی از تحقیقات انجام شده در زمینه کنترل مبتنی بر مدل این ساختارها بوده است که عمدتاً شامل روش‌های کنترل تطبیقی [۱۳و۱۴]، کنترل امپدانسی [۱۵و۱۶] و کنترل هیبرید موقعیت/نیرو [۱۷و۱۸] هستند. این امر از آنجا ناشی می‌شود که ساختارهای زنجیر بسته، سیستم‌هایی دینامیکی هستند که معمولاً با معادلات دیفرانسیلی-جبری[1] توصیف می‌گردند. بنابراین، روش‌های رایج کنترلی معمولاً متکی بر حل معادلات قید جبری غیر خطی بمنظور یافتن متغیرهای وابسته از طریق الگوریتم‌های بازگشتی هستند که در کاربردهای زمان واقعی قابل اجرا نیستند.

یک راهکار مناسب برای غلبه بر این مشکل استفاده از روش‌های مبتنی بر مدل‌های دینامیکی کاهش‌یافته است. در این راستا، [۱۹] مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی[2] را برای یک سیستم مقید رباتیکی تولید می‌نماید که با جایگزین کردن ضرایب لاگرانژ در معادلات دیفرانسیلی-جبری سیستم اولیه بدست آمده است. بنابراین، مدل نهایی فضای حالت تنها شامل متغیرهای دیفرانسیلی است که تحت تأثیر قیدهای جبری و مشتقات آنها هستند. البته روش ارائه شده در [۱۹] نیاز به حل معادلات قید غیرخطی برای بدست آوردن متغیرهای وابسته دارد. ایده‌های مشابهی را در مراجع دیگر می‌توان یافت [۲۰]. برای حل این مسأله، روشی مبتنی بر مدل *SPF*[3] در [۲۱] ارائه گردیده و در [۲۲] بیشتر توضیح داده شده است که مسأله کنترل سیستم دیفرانسیلی-جبری اولیه را به کنترل یک سیستم با معادلات حالت معمولی تبدیل می‌نماید و معادلات جبری قید برای یافتن متغیرهای وابسته سیستم با یک دینامیک سریع با معادلات دیفرانسیل معمولی جایگزین می‌گردد. بنابراین، کنترل‌کننده مربوطه می‌تواند برای یافتن متغیرهای وابسته سیستم از یک حل‌کننده *ODE* به جای حل عددی معادلات قید جبری غیرخطی استفاده نماید.

یکی دیگر از موضوعاتی که در برخی از مقالات مورد توجه قرار گرفته است تلاش در جهت حذف پارامترهای اندازه‌گیری در سیستم شامل نیرو، شتاب و سرعت می‌باشد [۲۸-۲۳]. این مسأله چندین مزیت عمده دارد از جمله آنکه سبب کاهش هزینه استفاده از سنسورهای مختلف و نیز حجم سیستم می‌گردد و دیگر آنکه اندازه‌گیری برخی کمیت‌ها با دقت بالا امکان پذیر نیست. به عنوان مثال همیشه یک فیدبک دقیق از اندازه‌گیری سرعت موجود نیست ضمن آنکه برای دقیق‌تر شدن اندازه‌گیری سرعت باید پریود نمونه‌برداری کاهش یابد که خود یک فاکتور محدود کننده محسوب می‌گردد و از طرفی استفاده از المان‌هایی همچون تاکومتر جهت اندازه‌گیری سرعت همراه با نویز قابل توجه می‌باشد. در این راستا در [۲۶] یک کنترل کننده تطبیقی برای سیستمی متشکل از چندین ربات برای حمل مشترک یک جسم صلب ارائه گردیده است با این ویژگی که در آن نیازی به فیدبک شتاب مفاصل وجود ندارد. در [۲۷] یک روش کنترل تطبیقی جهت کنترل مسیر حرکت شیء و نیز نیروهای داخلی بین شیء و بازوها معرفی شده است که از ویژگی‌های آن عدم اندازه‌گیری نیرو و گشتاور در محل تماس شیء با بازوها می‌باشد. همچنین، [۲۸] از یک رؤیتگر سرعت در کنترل یک ساختار رباتیک موازی با ۶ درجه آزادی بهره گرفته است.

در این مقاله یک کنترل‌کننده موقعیت برای یک سیستم رباتیکی مشتمل بر دو بازوی همکار جهت حمل مشترک یک جسم صلب پیشنهاد می‌گردد. هدف این کنترل‌کننده، دنبال کردن یک مسیر مطلوب از پیش تعیین شده است. برای این منظور، با انجام تغییراتی در کنترل‌کننده متمرکز مبتنی بر مدل *SPF* ارائه شده در [۲۲] این کنترل‌کننده برای رسیدن به کارآیی بالاتر توسعه داده خواهد شد. از این رو، روش ارائه شده نیاز به الگوریتم‌های بازگشتی برای محاسبه متغیرهای وابسته سیستم از روی معادلات جبری غیرخطی نخواهد داشت و در کاربردهای زمان واقعی قابل اجرا است. از سوی دیگر به منظور دستیابی به قابلیت اطمینان بالاتر در موقعیت‌های عملی، یک رؤیتگر مناسب برای تخمین سرعت‌های مفصلی طراحی خواهد گردید. استفاده از این رؤیتگر سرعت باعث حذف حسگرهای سرعت گردیده و نیز از تزریق نویز به درون سیستم که ممکن است کارآیی سیستم را کاهش دهد، جلوگیری می‌کند. در نهایت، از طریق یک تحلیل پایداری براساس تئوری توابع لیاپانوف، نشان داده خواهد شد که سیستم کلی شامل کنترل‌کننده و رؤیتگر، پایدار مجانبی سراسری است. از سوی دیگر نتایج شبیه‌سازی‌ها کارآیی مطلوب تئوری ارائه شده را تأیید می‌نماید.

مطالب ارائه شده در این مقاله بصورت زیر تنظیم گردیده است: در بخش ۲ ضمن معرفی سیستم انتخابی، معادلات حاکم بر آن شامل معادلات دینامیک، قیدهای زنجیر بسته و مدل *SPF* مربوطه آورده می-

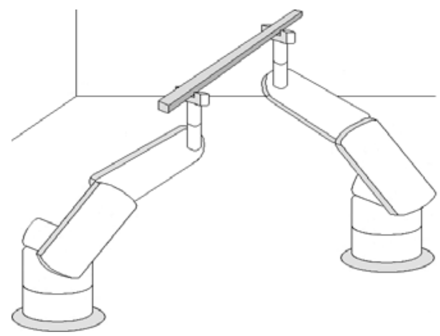
---

[1] Differential-Algebraic Equations (DAE)
[2] Ordinary Differential Equations (ODE)
[3] Singularly Perturbed Formulation (SPF)

شود. در ادامه، در بخش ۳ قوانین کنترل‌کننده و رؤیتگر پیشنهادی استخراج گردیده و در بخش ۴ جزئیات تحلیل پایداری سیستم کلی مطرح می‌گردد. سرانجام، جهت اثبات کارآیی روش، نتایج شبیه‌سازی-ها در بخش ۵ ارائه خواهد گردید و بخش ۶ به انجام نتیجه‌گیری از مطالب، اختصاص داده شده است.

۲- مدل سیستم زنجیر بسته

مدل انتخابی در این مقاله همانگونه که در شکل ۱ نمایش داده شده است متشکل از دو بازو با مفاصل دورانی می‌باشد که هر یک دارای پنج درجه آزادی بوده و به منظور حمل مشترک یک جسم صلب در نظر گرفته شده است.



شکل ۱. سیستم انتخابی جهت انجام یک کار مشترک

حال جهت استخراج معادلات حاکم بر سیستم، مطابق شکل ۲ دستگاه‌های مختصات مناسبی به سیستم متصل می‌گردد. بدین ترتیب پارامترهای مدل بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$l_i \; (i=1,\dots,6)$: طول رابط[1] iام در زنجیر بسته سینماتیکی

$\theta_i \; (i=1,\dots,6)$: زاویه مفصلی iام در زنجیر بسته سینماتیکی دارای حرکت دورانی در صفحه عمود

$\theta_{pi} \; (i=1,\dots,4)$: زاویه مفصلی iام در زنجیر بسته سینماتیکی دارای حرکت دورانی در صفحه افق

l_{obj}: طول جسم صلب بین دو مجری نهایی

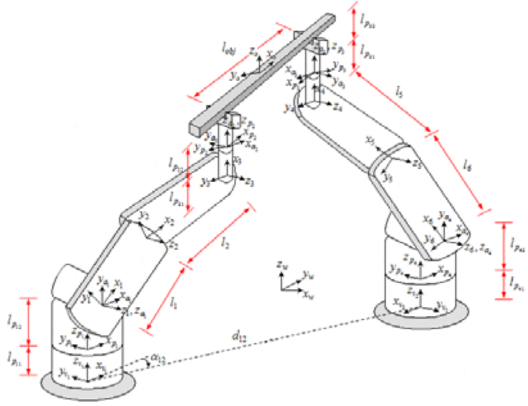
$l_{p_{i1}}, l_{p_{i2}} \; (i=1,\dots,4)$: طول رابط‌های متصل به مفصل iام در زنجیر بسته سینماتیکی دارای حرکت در صفحه افق

بنابراین با توجه به مدل انتخابی، در ادامه، بردار مختصات تعمیم-یافته زیر تعریف می‌گردد:

$$q' = \left[\theta_{p_1} \;\; \theta_1 \;\; \theta_2 \;\; \theta_3 \;\; \theta_{p_2} \;\; \theta_{p_3} \;\; \theta_4 \;\; \theta_5 \;\; \theta_6 \;\; \theta_{p_4}\right]^T \qquad (۱)$$

اما یک زنجیره بسته سینماتیکی با n درجه آزادی را در حالت کلی می‌توان بصورت یک سیستم هولونومیک با n' درجه آزادی در نظر گرفت[2] که تحت تأثیر $p = n' - n$ معادله قید هولونومیک مستقل قرار دارد [۲۲]. بر این اساس معادلات دینامیک سیستم آزاد را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$M'(q')\ddot{q}' + C'(q',\dot{q}')\dot{q}' + F'(q',\dot{q}') = \tau' \qquad (۲)$$



شکل ۲. ساختار زنجیر بسته همراه با دستگاه‌های مختصات مربوطه

که در آن $M'(q')$ نشان‌دهنده ماتریس اینرسی، $C'(q',\dot{q}')$ ماتریسی شامل ترم‌های کوریولیس[3] و گریز از مرکز[4]، $F'(q',\dot{q}')$ برداری شامل نیروهای جاذبه‌ای و اصطکاک و $\tau' \in \Re^{n'}$ بردار گشتاورهای کنترلی می‌باشد. همچنین p قید جبری غیر خطی را می-توان با استفاده از معادلات زیر توصیف نمود (به ضمیمه الف مراجعه نمایید):

$$\Phi(q') = 0 \qquad (۳)$$

ایده اصلی روش *SPF* جایگزین کردن معادلات جبری قید در (۳) با یک دینامیک سریع پایدار مجانبی از نوع معادلات دیفرانسیل معمولی بر حسب یک متغیر کمکی بصورت زیر است که میزان انحراف از قیدهای سینماتیکی را نشان می‌دهد [۲۲]:

$$\dot{w} = -\frac{1}{\varepsilon} w \;, \qquad w \overset{\Delta}{=} \Phi(q') \qquad (۴)$$

که در آن ε یک پارامتر مثبت کوچک است. سپس با تعریف بردار مختصات تعمیم یافته کلی سیستم، q'، آنرا می‌توان بصورت زیر دسته بندی نمود:

$$q' = (q, z) \qquad (۵)$$

[1] Link

[2] یک سیستم آزاد که با برش مجازی حلقه‌ها بدست آمده و تنها شامل زنجیره‌های باز می‌باشد.

[3] Coriolis

[4] Centrifugal

که در آن q برداری با بعد n و نشان‌دهنده مختصات مستقل متناظر با مفاصل دارای عملگر و z در برگیرنده مختصات باقیمانده می‌باشد. لذا، با جایگزینی (۵) در (۴) می‌توان نوشت:

$$\varepsilon\Phi_z(q')\dot{z} = -\Phi(q') - \varepsilon\Phi_q(q')\dot{q} \quad (۶)$$

حال، در نظر بگیرید که :

$$\dot{q}' = \rho(q')\dot{q} \quad (۷)$$

بر این اساس، با توجه به رابطه $q = \alpha(q')$ و با تعریف $\Psi(q') \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} \Phi(q') \\ \alpha(q') \end{bmatrix}$ می‌توان نشان داد که (به ضمیمه ب مراجعه نمایید):

$$\rho(q') = \Psi_{q'}^{-1}(q') \begin{bmatrix} 0_{(n'-n)\times n} \\ I_{n\times n} \end{bmatrix} \quad (۸)$$

بدین‌ترتیب مدل *SPF* سیستم بصورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{cases} M(q')\ddot{q} + C(q',\dot{q}')\dot{q} + F(q',\dot{q}') = \tau \\ \varepsilon\Phi_z(q')\dot{z} = -\Phi(q') - \varepsilon\Phi_q(q')\dot{q} \end{cases} \quad (۹)$$

که در آن:

$$\begin{cases} M(q') = \rho^T(q')M'(q')\rho(q') \\ C(q',\dot{q}') = \rho^T(q')C'(q',\dot{q}')\rho(q') + \rho^T(q')D'(q')\dot{\rho}(q',\dot{q}') \\ F(q',\dot{q}') = \rho^T(q')F'(q',\dot{q}') \\ \tau = \rho^T(q')\tau' \end{cases} \quad (۱۰)$$

و با توجه به (۶) حوزه اعتبار مدل SPF بصورت زیر خواهد بود:

$$V = \{q' \in \Re^{n'} : det[\Phi_z(q')] \neq 0\} \quad (۱۱)$$

۳- طراحی کنترل‌کننده زنجیر بسته همراه با رؤیتگر سرعت

مسیر مطلوب هموار و متغیر با زمان $q_d(t)$ را در نظر بگیرید. هدف طراحی کنترل‌کننده آن است که مختصات تعمیم یافته مستقل $q(t)$ مسیر مطلوب را دنبال نموده و در نتیجه شرط زیر برقرار گردد:

$$lim_{t\to\infty}\ e(t) = 0 \quad (۱۲)$$

که در آن:

$$e(t) = q_d(t) - q(t) \quad (۱۳)$$

فرض نمایید که Λ و Λ_i ماتریس‌های قطری ثابت و با درایه‌های مثبت باشند و بر این اساس پارامترهای زیر را در نظر بگیرید:

$$v = \dot{q}_d + \Lambda e + \Lambda_i \int_0^t e dt \quad , \quad a = \dot{v} \quad (۱۴)$$

در اینصورت قانون کنترل سیستم بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\tau = M(q,z)a + C(q,\dot{q},z,\dot{z})v + F(q,\dot{q},z,\dot{z}) + K_D r \quad (۱۵)$$

که در آن K_D یک ماتریس قطری ثابت با درایه‌های مثبت بوده و r بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$r = \dot{e} + \Lambda e + \Lambda_i \int_0^t e dt \quad (۱۶)$$

اما با توجه به (۱۰) می‌توان نوشت:

$$\tau = \rho^T(q')\tau' \quad (۱۷)$$

از سوی دیگر همانطور که پیشتر نیز ذکر گردید تنها مفاصل متناظر با متغیرهای اکتیو دارای گشتاور کنترلی هستند، بنابراین:

$$\tau' = \begin{bmatrix} \tau x \\ 0_{(n'-n_i)\times 1} \end{bmatrix} \quad (۱۸)$$

که در آن τx نشان‌دهنده گشتاور اعمال شده در مفاصل اکتیو می‌باشد و با τ بعد یکسانی دارند. حال با استفاده از (۱۷) و پس از کمی ساده‌سازی می‌توان نوشت:

$$\tau = \rho^T(q') \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{(n'-n)\times n} \end{bmatrix} \tau x \quad (۱۹)$$

بدین ترتیب:

$$\tau x = \left(\rho^T(q') \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{(n'-n)\times n} \end{bmatrix} \right)^{-1} \tau \quad (۲۰)$$

و با جایگزین کردن (۲۰) در (۱۸) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\tau' = \begin{bmatrix} \left(\rho^T(q') \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{(n'-n)\times n} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ 0_{(n'-n)\times n} \end{bmatrix} \tau \quad (۲۱)$$

یا به عبارت دیگر:

$$\tau' = \sigma^T(q')\tau \quad (۲۲)$$

که در آن:

$$\sigma(q') = \left[\left(\begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times(n'-n)} \end{bmatrix} \rho(q') \right)^{-1} \quad 0_{n\times(n'-n)} \right] \quad (۲۳)$$

حال، یک رؤیتگر مناسب برای تخمین سرعت در قانون کنترل سیستم ارائه نموده و اثر آن در پایداری سیستم مورد بررسی قرار می‌گیرد. استفاده از این رؤیتگر نه تنها باعث حذف اندازه‌گیری سرعت و کاهش تعداد سنسورهای مورد نیاز می‌گردد، بلکه رفتار دینامیکی سیستم کنترل را در عمل بهبود خواهد بخشید. بر این اساس، در ادامه از (۶) برای محاسبه $\dot{z}$ و از یک رؤیتگر خطی بصورت زیر، جهت تخمین $\dot{q}$ بهره گرفته می‌شود:

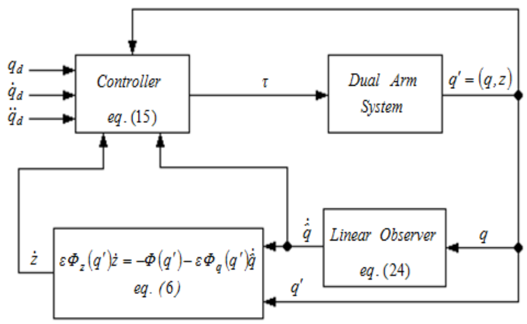
$$\begin{cases} \dot{\hat{q}} = y + (2K_o + I_n)(q - \hat{q}) \\ \dot{y} = K_o(K_o + I_n)(q - \hat{q}) \end{cases} \quad (۲۴)$$

که در آن $\hat{q}$ و $\dot{\hat{q}}$ بترتیب نشان‌دهنده تخمین q و $\dot{q}$، y یک بردار شامل متغیرهای واسط و K_o یک ماتریس بهره قطری با درایه-

های مثبت می‌باشد. با جایگزینی $K_o = k_o I$ در فرم گسسته معادله فوق نتیجه گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned}\hat{q}(t+\Delta t)&=\hat{q}(t)+\Delta t\left[y(t)+(2k_o+1)\left(q(t)-\hat{q}(t)\right)\right]\\ y(t+\Delta t)&=y(t)+\Delta t\left[k_o\left(k_o+1\right)\left(q(t)-\hat{q}(t)\right)\right]\end{aligned} \qquad (۲۵)$$

که در آن با فرض شرایط اولیه $y(0)=0$ و $\hat{q}(0)=q(0)$، می‌توان بردار موقعیت $\hat{q}(t+\Delta t)$ را در لحظات بعد تخمین زد. بنابراین، سرعت مفاصل تنها با اندازه‌گیری موقعیت مفاصل در هر لحظه و تخمین آن در لحظه بعد بدست خواهد آمد. شکل ۳ دیاگرام بلوکی ساختار ارائه شده برای کنترل‌کننده حلقه بسته را نشان می‌دهد.



شکل ۳. دیاگرام بلوکی سیستم کنترل همراه با رؤیتگر سرعت

۴- تحلیل پایداری

در ادامه با تعریف توابع لیاپانوف مناسب برای بخش‌های مختلف سیستم شامل سیستم زنجیر بسته و رؤیتگر و ترکیب آنها پایداری سیستم زنجیر بسته اثبات خواهد گردید.

فرض ۱. مسیر مطلوب q_d پیوسته و محدود بوده و تا مرتبه دوم مشتقات پیوسته و محدود دارد.

تئوری ۱. سیستم توصیف شده با معادلات (۱)،(۲) و (۴) را در نظر بگیرید. در صورت برقراری فرض ۱، با در نظر گرفتن قانون کنترل (۱۵) و رؤیتگر (۲۴)، q، $\dot{q}$ و w به ازای $t\to\infty$ به سمت q_d، $\dot{q}_d$ و صفر همگرا خواهند شد.

اثبات. فرض کنید که Λ_1 و Λ_2 ماتریس‌های قطری و ثابت بوده و پارامترهای زیر تعریف گردند:

$$\begin{cases} r_1 = \dot{e}+\Lambda_1 e \\ r_2 = e+\Lambda_1\int_0^t e\,dt \end{cases} \qquad (۲۶)$$

و همچنین:

$$r = r_1 + \Lambda_2 r_2 \qquad (۲۷)$$

بدین‌ترتیب با جایگزینی (۲۶) در (۲۷) و مقایسه رابطه بدست آمده با (۱۶) می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \Lambda = \Lambda_1+\Lambda_2 \\ \Lambda_i = \Lambda_1\Lambda_2 \end{cases} \qquad (۲۸)$$

که نشان می‌دهد ماتریس‌های Λ_1 و Λ_2 مثبت معین هستند. حال توابع لیاپانوف سیستم زنجیر بسته را به صورت زیر در نظر بگیرید [۲۲]:

$$V_C = d_1V_1 + d_2V_2 \qquad (۲۹)$$

که در آن d_1 و d_2 ثابت‌هایی با مقادیر مثبت بوده و با در نظر گرفتن N به عنوان یک ماتریس قطری ثابت با درایه‌های مثبت، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{1}{2}r^T M(q,z)r + r_2^T\Lambda_2^T K_D r_2 \\ V_2 = \dfrac{1}{2}w^T N w \end{cases} \qquad (۳۰)$$

که در آن N یک ماتریس قطری ثابت با درایه‌های مثبت می‌باشد. از آنجا که $\Lambda_2^T K_D$ نیز یک ماتریس قطری ثابت با درایه‌های مثبت بوده و $M(q')$ مثبت معین است، در آنصورت V_C مثبت معین خواهد بود. گام بعد در اثبات پایداری، محاسبه مشتق تابع لیاپانوف در (۲۹) است که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{V}_C = d_1 r^T M\dot{r} + \frac{d_1}{2}r^T\dot{M}r + 2d_1 r_2^T\Lambda_2^T K_D\dot{r}_2 + d_2 w^T N\dot{w} \qquad (۳۱)$$

اما با استفاده از (۹) و (۱۵) نتیجه گرفته می‌شود:

$$M\dot{r} + Cr + K_D r = 0 \qquad (۳۲)$$

بنابراین، با جایگزینی (۳۲) در (۳۱) و استفاده از (۴) می‌توان نوشت:

$$\dot{V}_C = -d_1 r^T Cr - d_1 r^T K_D r + \frac{d_1}{2}r^T\dot{M}r + 2d_1 r_2^T\Lambda_2^T K_D\dot{r}_2 - \left(d_2/\varepsilon\right)w^T N w \qquad (۳۳)$$

سپس، با توجه به (۲۷) می‌توان نشان داد که:

$$\dot{V}_C = -d_1(r_1+\Lambda_2 r_2)^T K_D(r_1+\Lambda_2 r_2) + \frac{d_1}{2}r^T\left(\dot{M}-2C\right)r + 2d_1 r_2^T\Lambda_2^T K_D\dot{r}_2 - \left(d_2/\varepsilon\right)w^T N w \qquad (۳۴)$$

یک ویژگی اساسی سیستم (۹) آن است که $\left(\dot{M}(q')-2C(q',\dot{q}')\right)$ یک ماتریس پادمتقارن می‌باشد [۲۹]، بنابراین:

$$\begin{aligned}\dot{V}_C = &-d_1 r_1^T K_D r_1 - d_1 r_2^T \Lambda_2^T K_D \Lambda_2 r_2 - \\ &d_1 r_2^T \Lambda_2^T K_D r_1 - d_1 r_1^T K_D \Lambda_2 r_2 + \\ &2d_1 r_2^T \Lambda_2^T K_D \dot{r}_2 - \left(d_2 / \varepsilon\right) w^T N w\end{aligned} \tag{۳۵}$$

اما، از آنجا که $r_1 = \dot{r}_2$، رابطه (۳۵) بصورت زیر ساده می‌گردد:

$$\dot{V}_C = -d_1 r_1^T K_D r_1 - d_1 r_2^T \left(\Lambda_2^T K_D \Lambda_2\right) r_2 - \left(d_2 / \varepsilon\right) w^T N w \tag{۳۶}$$

که نشان می‌دهد $-\dot{V}_C$ مثبت معین می‌باشد و بنابراین سیستم زنجیر بسته (۹) با کنترل‌کننده (۱۵) پایدار مجانبی سراسری است. حال بمنظور اثبات پایداری سیستم در حضور رؤیتگر فوق، متغیرهای خطای زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{cases} e = q_d - q \\ \hat{e} = q_d - \hat{q} \\ \widetilde{e} = \hat{e} - e \\ \widetilde{r} = k_1 \widetilde{e} + \dot{\widetilde{e}} \end{cases} \tag{۳۷}$$

که در آن:

$$k_1 = \frac{k_o (k_o + 1)}{2k_o + 1} \tag{۳۸}$$

همچنین $\hat{e}$ تخمینی از خطای موقعیت و $\widetilde{e}$ برداری است که میزان انحراف تخمین موقعیت از مقادیر اندازه‌گیری شده را نشان می‌دهد. از آنجا که سیستم بدون رؤیتگر پایدار است، می‌توان نوشت:

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = 0 \tag{۳۹}$$

بنابراین، اگر خطای رؤیتگر، خطای اندازه‌گیری را دنبال نماید، سیستم کلی پایدار خواهد بود. این، بدان معنی است که اگر خطای دنبال کردن مسیر، $\widetilde{e}(t)$، به سمت صفر همگرا گردد، آنگاه، پایداری سیستم کلی تضمین خواهد گردید. در این راستا، با توجه به (۳۷) رابطه زیر برقرار است:

$$\dot{\widetilde{r}} = k_1 (\widetilde{r} - k_1 \widetilde{e}) + (\ddot{q} - \ddot{\hat{q}}) \tag{۴۰}$$

از سوی دیگر، با توجه به (۲۴) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\ddot{\hat{q}} = k_o (k_o + 1)(q - \hat{q}) + (2k_o + 1)(\dot{q} - \dot{\hat{q}}) \tag{۴۱}$$

بنابراین:

$$\ddot{\hat{q}} = (2k_o + 1)\widetilde{r} \tag{۴۲}$$

بدین ترتیب با جایگزینی (۴۲) در (۴۰) عبارت زیر نتیجه می‌گردد:

$$\dot{\widetilde{r}} = k_1 (\widetilde{r} - k_1 \widetilde{e}) + \ddot{q} - (2k_o + 1)\widetilde{r} \tag{۴۳}$$

و پس از کمی ساده‌سازی می‌توان نشان داد:

$$\dot{\widetilde{r}} = -k_2 \widetilde{r} - k_1^2 \widetilde{e} + \ddot{q} \tag{۴۴}$$

که در آن:

$$k_2 = \frac{3k_o^2 + 3k_o + 1}{2k_o + 1} \tag{۴۵}$$

حال، تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید:

$$V = V_C + V_O \tag{۴۶}$$

که در آن:

$$V_O = k_1^2 \widetilde{e}^T \widetilde{e} + \widetilde{r}^T \widetilde{r} \tag{۴۷}$$

در اینصورت مشتق تابع لیاپانوف فوق را می‌توان بصورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned}\dot{V}_O &= 2k_1^2 \widetilde{e}^T \dot{\widetilde{e}} + 2\widetilde{r}^T \dot{\widetilde{r}} \\ &= 2k_1^2 \widetilde{e}^T (\widetilde{r} - k_1 \widetilde{e}) + 2\widetilde{r}^T \left(-k_2 \widetilde{r} - k_1^2 \widetilde{e} + \ddot{q}\right)\end{aligned} \tag{۴۸}$$

لذا، با توجه به پایداری سیستم بدون رؤیتگر و با بهره‌گیری از (۳۹) می‌توان نوشت:

$$\dot{V}_O = -2k_1^3 \|\widetilde{e}\|^2 - 2k_2 \|\widetilde{r}\|^2 + 2\widetilde{r}^T \ddot{q}_d \tag{۴۹}$$

بنابراین، شرط زیر برقرار خواهد بود:

$$\dot{V}_O \le -2k_1^3 \|\widetilde{e}\|^2 - 2k_2 \|\widetilde{r}\|^2 + 2\|\widetilde{r}\| \sup_{t \in [0,\infty)} \|\ddot{q}_d\| \tag{۵۰}$$

این شرط با در نظر گرفتن فرض ۱ نشان می‌دهد که $-\dot{V}_O$ مثبت معین می‌باشد. بدین ترتیب، سیستم کلی همراه با رؤیتگر (۲۴) پایدار مجانبی بصورت سراسری است. □

۵- نتایج شبیه‌سازی

برای اثبات کارآیی روش مطرح شده بمنظور کنترل موقعیت/نیرو همراه با رؤیتگر سرعت مربوطه، نتایج شبیه‌سازی‌های کامپیوتری انجام شده در این زمینه در بخش حاضر براساس فرضیات زیر ارائه خواهد گردید:

- مسیر مطلوب حرکت مرکز جرم شیء عبارت است از:

$$\begin{aligned} x_{od} &= 0.4 + 0.2\sin(\omega t) \\ z_{od} &= 1.3 + 0.2\cos(\omega t) \end{aligned} \tag{۵۱}$$

- برخی پارامترهای مهم سیستم، در طراحی کنترل کننده مطابق جدول زیر انتخاب گردیده است:

جدول ۱. پارامترهای شبیه‌سازی

	Link1,6	Link2,5	Link3,4	Object
Mass (Kg)	8	5	2.5	2
Length (m)	0.7	0.6	0.4	0.8
Ixx	0.02	0.008	0.004	0.003

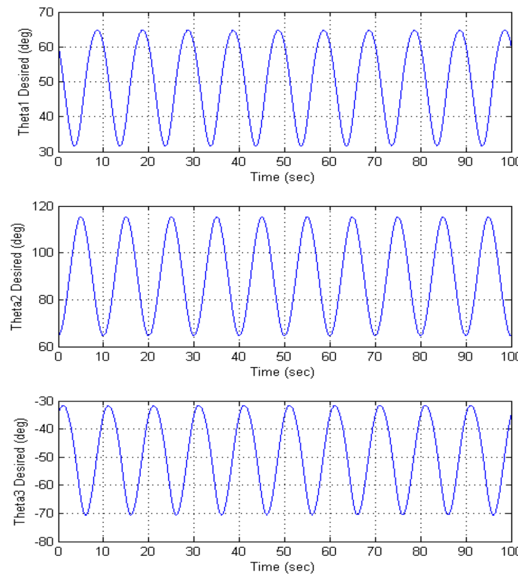
Iyy	0.373	0.154	0.035	0.108
Izz	0.373	0.154	0.035	0.108

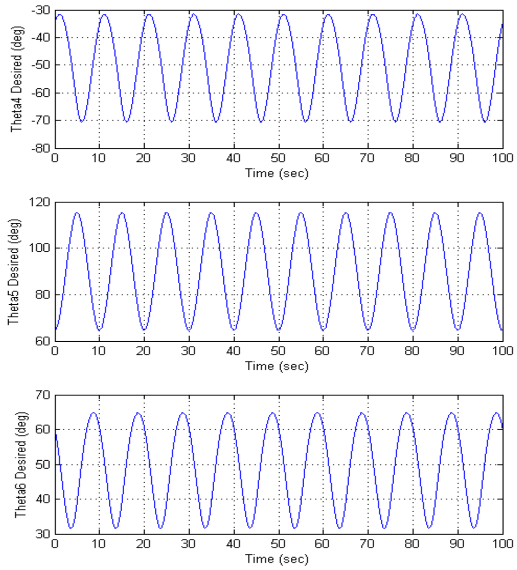
- پارامترهای کنترل کننده و رؤیتگر نیز مطابق جدول ۲ در نظر گرفته می‌شوند:

جدول ۲. پارامترهای کنترل‌کننده و رؤیتگر

Parameter	Λ	Λ_i	K_D	ε	K_o
Value	10I	50I	20I	0.01	100

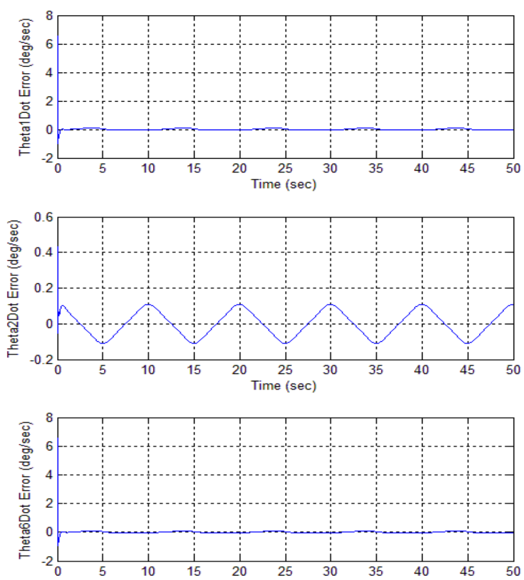
حال، با بهره‌گیری از (۵۱) مسیر مطلوب متغیرهای مفصلی همانگونه که در شکل ۴ نمایش داده شده است، با استفاده از سینماتیک معکوس تولید می‌گردد. البته باید توجه داشت که در عمل، مسیر ارائه شده توسط مسیریاب که در فضای مفصلی طراحی گردیده است، مورد استفاده قرار خواهد گرفت.



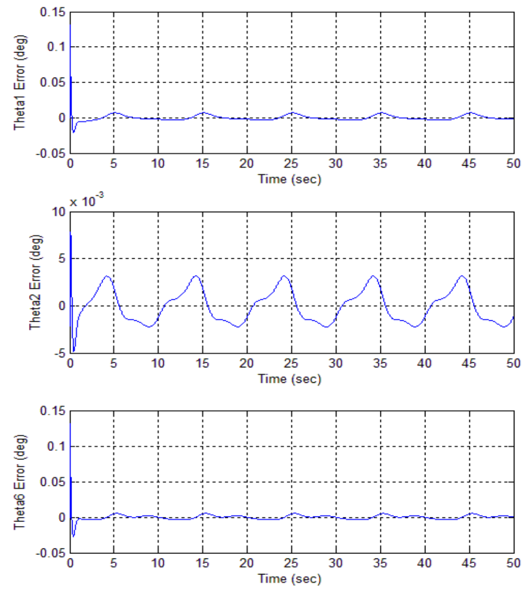


شکل ۴. مسیر مطلوب متغیرهای فضای مفصلی

شکل ۵ خطای سرعت و موقعیت را برای متغیرهای فضای مفصلی نشان می‌دهد. با توجه به این شکل می‌توان دریافت که روش کنترل ارائه شده، کارآیی خوبی داشته و خطای دنبال کردن مسیر بسیار کمی دارد. همچنین نرم بردار خطای تخمین رؤیتگر سرعت شامل $\|\hat{e}\|$ و $\|\dot{\hat{e}}\|$ در شکل ۶ نشان داده شده است.



(ب)

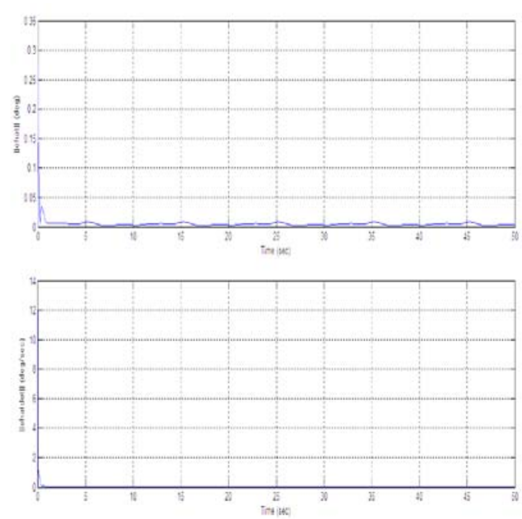


(الف)

شکل ۵. خطای متغیرهای فضای مفصلی کنترل‌کننده غیرمتمرکز در حضور رؤیتگر سرعت:

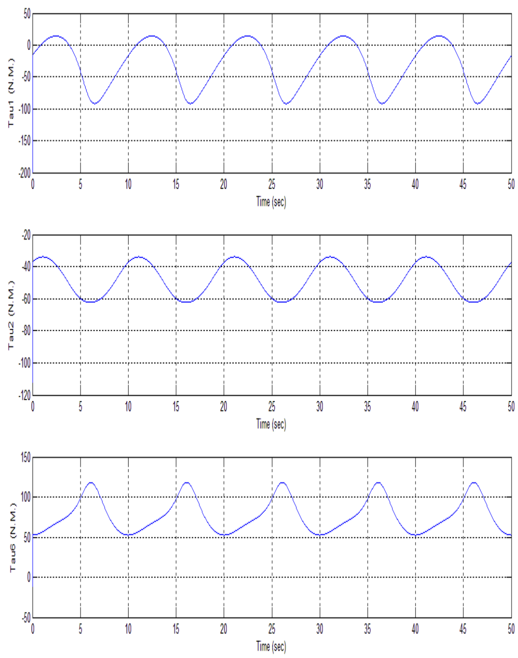
الف) متغیرهای موقعیت   ب) متغیرهای سرعت

همانگونه که در این شکل‌ها ملاحظه می‌گردد، خطای رؤیتگر در زمانی کوتاه به سمت صفر همگرا می‌گردد که کارآیی مناسب آن را تأیید می‌نماید. خطای موجود در این شکل‌ها ممکن است به دلایل مختلفی رخ دهد. به عنوان مثال، خطای انتخاب حالت اولیه z ($\delta z = \left[90^\circ, 90^\circ, 0^\circ\right]^T$) دقت تخمین سرعت را کاهش می‌دهد. اثر مهم دیگر، خطای حاصل از گسسته سازی و انتخاب زمان نمونه برداری نسبتاً بزرگ می‌باشد.

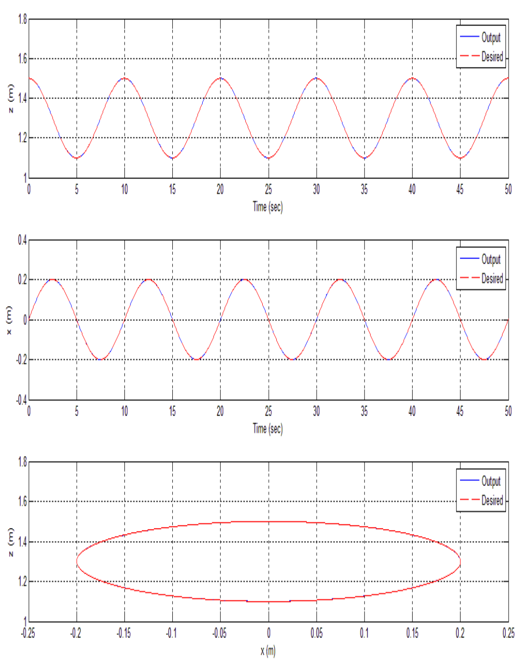


شکل ۶. نرم خطای رؤیتگر

گشتاورهای متناظر با هر یک از مفاصل و همچنین مسیرهای مطلوب و واقعی حرکت مجری نهایی بازوی اول در دستگاه مختصات کارتزین به ترتیب در شکل‌های ۷ و ۸ نشان داده شده است. با توجه به این شکل‌ها می‌توان دید که حتی در لحظات اول شبیه سازی انحراف سیستم از مسیرهای مطلوب قابل چشم‌پوشی است.

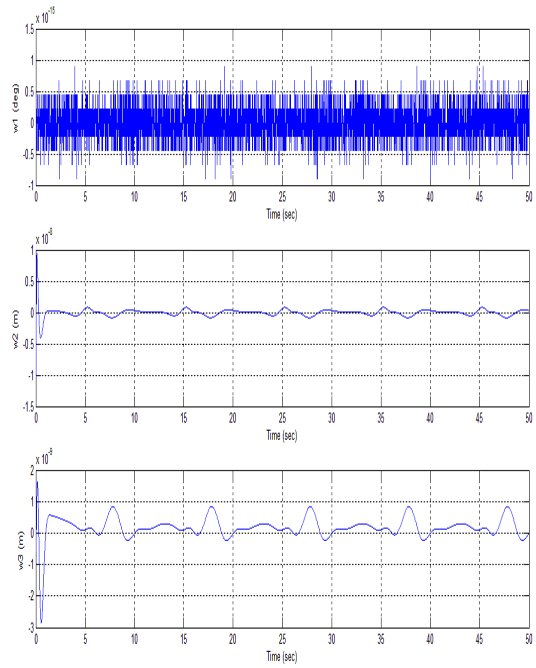


شکل ۷. گشتاورهای ورودی کنترلی



شکل ۸ مسیر حرکت مجری نهایی بازوی اول در دستگاه مختصات کارتزین؛ ___ مسیر اندازه‌گیری شده، _ _ _ مسیر مطلوب

شکل ۹ نتایج شبیه‌سازی در خصوص رفتار گذرای متغیر w را در مدل SPF سیستم نشان می‌دهد که بیانگر میزان انحراف از روابط قید زنجیر بسته می‌باشد. با توجه به این شکل می‌توان دریافت که مدل تقلیل‌یافته SPF سیستم در (۶)، در زمان کوتاهی به سمت مدل اولیه سیستم زنجیر بسته در (۳) همگرا می‌گردد.



شکل ۹. میزان انحراف از قیدهای زنجیر بسته

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسأله کنترل موقعیت در یک سیستم زنجیر بسته متشکل از دو بازوی همکار، مورد بررسی قرار گرفته است. قانون کنترل موقعیت با استفاده از یک مدل دینامیکی SPF از سیستم که قیدهای زنجیر بسته را به صورت مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیلی معمولی سریع در نظر می‌گیرد، طراحی گردیده است. بنابراین، کنترل‌کننده پیشنهادی قادر به استفاده از یک حل‌کننده ODE برای به دست آوردن متغیرهای وابسته به جای حل معادلات قید جبری غیرخطی است. از سوی دیگر بمنظور دستیابی به قابلیت اطمینان بالاتر الگوریتم کنترل در موقعیت‌های عملی، یک رؤیتگر خطی برای حذف اندازه‌گیری سرعت مفاصل دارای محرک، طراحی گردید. در مقایسه با سایر روش‌های بحث شده در مراجع، مزایای کنترل‌کننده پیشنهاد شده به صورت زیر خلاصه می‌شوند:

- با بهره‌گیری از مدل SPF سیستم، نیاز به استفاده از الگوریتم‌های تکراری برای حل قیدهای هولونومیک زنجیر بسته نخواهد بود؛ بنابراین، روش ارائه شده را می‌توان در کاربردهای زمان واقعی بکار گرفت.
- به علت استفاده از قیدهای سینماتیکی زنجیر بسته در طراحی کنترل‌کننده موقعیت، خطای حرکت نسبی بین مجری نهایی بازوها به حداقل می‌رسد و این امر باعث بهبود عملکرد کنترل‌کننده می‌شود.
- با استفاده از یک رؤیتگر، حسگرهای سرعت حذف گردیده و در نتیجه نویز کمتری به درون سیستم تزریق می‌گردد که خود سبب بهبود عملکرد سیستم خواهد گردید.

در نهایت، ضمن تعریف توابع لیاپانوف مناسبی برای بخش‌های مختلف سیستم شامل کنترل‌کننده و رؤیتگر، از ترکیب آنها برای اثبات پایداری مجانبی سراسری سیستم کلی استفاده گردید. بعلاوه، نتایج شبیه‌سازی‌های کامپیوتری کارآیی روش ارائه شده را تأیید می‌نماید.

ضمیمه الف. جزئیات استخراج قیدهای زنجیر بسته

جهت استخراج معادلات قید زنجیر بسته، لازم است ابتدا مطابق شکل ۲ دستگاه‌های مختصات مناسبی به سیستم متصل گردد. بر این اساس با استفاده از مفهوم ماتریس‌های انتقال می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}&{}^{w}_{v_1}T\,{}^{v_1}_{P_1}T\,{}^{P_1}_{a_1}T\,{}^{a_1}_{1}T\,{}^{1}_{2}T\,{}^{2}_{3}T\,{}^{3}_{a_2}T\,{}^{a_2}_{p_2}T\,{}^{p_2}_{o}T={}^{w}_{o}T\\&{}^{w}_{v_1}T\,{}^{v_1}_{v_2}T\,{}^{v_2}_{P_4}T\,{}^{P_4}_{a_4}T\,{}^{a_4}_{6}T\,{}^{6}_{5}T\,{}^{5}_{4}T\,{}^{4}_{a_3}T\,{}^{a_3}_{p_3}T\,{}^{p_3}_{o}T={}^{w}_{o}T\end{aligned} \qquad \text{(الف۱)}$$

بدین‌ترتیب، قیدهای زنجیر بسته سیستم به صورت زیر استخراج می‌گردد:

$$\begin{aligned}&{}^{w}_{v_1}T\,{}^{v_1}_{P_1}T\,{}^{P_1}_{a_1}T\,{}^{a_1}_{1}T\,{}^{1}_{2}T\,{}^{2}_{3}T\,{}^{3}_{a_2}T\,{}^{a_2}_{p_2}T\,{}^{p_2}_{o}T=\\&{}^{w}_{v_1}T\,{}^{v_1}_{v_2}T\,{}^{v_2}_{P_4}T\,{}^{P_4}_{a_4}T\,{}^{a_4}_{6}T\,{}^{6}_{5}T\,{}^{5}_{4}T\,{}^{4}_{a_3}T\,{}^{a_3}_{p_3}T\,{}^{p_3}_{o}T\end{aligned} \qquad \text{(الف۲)}$$

که در آن ${}^{A}_{B}T$ ماتریسی است که دستگاه مختصات $\{B\}$ را به $\{A\}$ منتقل می‌نماید و برای چارچوب‌های مختلف در رابطه فوق بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$ {}^{v_1}_{p_1}T=\begin{bmatrix}\cos(\theta_{p_1}) & -\sin(\theta_{p_1}) & 0 & 0\\ \sin(\theta_{p_1}) & \cos(\theta_{p_1}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & l_{p_{11}}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad {}^{p_1}_{a_1}T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & l_{p_{12}}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad {}^{a_1}_{1}T=\begin{bmatrix}\cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0\\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} $$

$$ {}^{1}_{2}T=\begin{bmatrix}\cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & l_1\\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad {}^{2}_{3}T=\begin{bmatrix}\cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & l_2\\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad {}^{3}_{a_2}T=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & l_{p_{21}}\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} $$

$$ {}^{a_2}_{p_2}T=\begin{bmatrix}\cos(\theta_{p_2}) & -\sin(\theta_{p_2}) & 0 & 0\\ \sin(\theta_{p_2}) & \cos(\theta_{p_2}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad {}^{p_2}_{o}T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & l_{obj}/2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & l_{p_{22}}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} $$

$$ {}^{v_1}_{v_2}T=\begin{bmatrix}\cos(\theta_{B_2}-\theta_{B_1}) & -\sin(\theta_{B_2}-\theta_{B_1}) & 0 & d_{12}\cos(\alpha_{12})\\ \sin(\theta_{B_2}-\theta_{B_1}) & \cos(\theta_{B_2}-\theta_{B_1}) & 0 & d_{12}\sin(\alpha_{12})\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad {}^{v_2}_{p_4}T=\begin{bmatrix}\cos(\theta_{p_4}) & -\sin(\theta_{p_4}) & 0 & 0\\ \sin(\theta_{p_4}) & \cos(\theta_{p_4}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & l_{p_{41}}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} $$

$$ {}^{p_4}_{a_4}T=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & l_{p_{42}}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad {}^{a_4}_{6}T=\begin{bmatrix}\cos(\theta_6) & -\sin(\theta_6) & 0 & 0\\ \sin(\theta_6) & \cos(\theta_6) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad {}^{6}_{5}T=\begin{bmatrix}\cos(\theta_5) & -\sin(\theta_5) & 0 & l_6\\ \sin(\theta_5) & \cos(\theta_5) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} $$

$$ {}^{5}_{4}T=\begin{bmatrix}\cos(\theta_4) & -\sin(\theta_4) & 0 & l_5\\ \sin(\theta_4) & \cos(\theta_4) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad {}^{4}_{a_3}T=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & l_{p_{31}}\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad {}^{a_3}_{p_3}T=\begin{bmatrix}\cos(\theta_{p_3}) & -\sin(\theta_{p_3}) & 0 & 0\\ \sin(\theta_{p_3}) & \cos(\theta_{p_3}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} $$

$$ {}^{p_3}_{o}T=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & l_{obj}/2\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & l_{p_{32}}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad {}^{w}_{v_1}T=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & x\\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & y\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} $$

و بدین ترتیب رابطه (۳) بدست می‌آید. □

ضمیمه ب. اثبات رابطه (۸)

فرض نمایید که:

$$ q=\alpha(q') \qquad (ب۱) $$

بر این اساس، پارامتر زیر تعریف می‌گردد:

$$ \Psi(q')\overset{\Delta}{=}\begin{bmatrix}\Phi(q')\\ \alpha(q')\end{bmatrix} \qquad (ب۲) $$

با مشتق گرفتن از (ب۲) نسبت به زمان و استفاده از (ب۱) می‌توان نشان داد:

$$ \Psi_{q'}(q')\dot{q}'=\begin{bmatrix}0_{p\times 1}\\ \dot{q}\end{bmatrix} \qquad (ب۳) $$

و پس از کمی ساده‌سازی نتیجه گرفته می‌شود:

$$ \Psi_{q'}(q')\dot{q}'=\begin{bmatrix}0_{p\times n}\\ I_{n\times n}\end{bmatrix}\dot{q} \qquad (ب۴) $$

حال، با توجه به فرض $\dot{q}'=\rho(q')\dot{q}$ و با بهره‌بردن از مفهوم ماتریس شبه‌معکوس رابطه زیر بدست خواهد آمد:

$$ \rho(q')=\Psi_{q'}^{-1}(q')\begin{bmatrix}0_{p\times n}\\ I_{n\times n}\end{bmatrix} \qquad (ب۵) $$

که صحت (۸) را تأیید می‌نماید. □

مراجع

[1] Y. Cao, A. S. Fukunaga and A. B. Kahng, Cooperative Mobile Robotics: Antecedents and Directions, *Autonomous Robots*, Vol.4, No.1, pp. 7-27 (1997).

[2] A. Farinelli, L. Iocchi and D. Nardi, Multi-robot Systems: A Classification Focused on Coordination, *IEEE Transactions on Systems, Manufacturing and Cybernetics*, Vol.34, No.5, pp.2015-2028 (2004).

[3] M. D. Zivanovic and M. K. Vukobratovic, *Multi-Arm Cooperating Robots: Dynamic and Control*, Springer (2006).

[4] J. Kerr and B. Roth, Analysis of Multifingered Hands, *The International Journal of Robotics Research*, vol.4, no.4, pp. 3-17 (1986).

[5] J. K. Salisbury and J. J. Craig, Articulated Hands: Force Control and kinematic issues, *The International Journal of Robotics Research*, vol.1, no. 1, pp. 4-17 (1982).

[6] S. M. Song and K. J. Waldron, *Machines that walk*, MIT Press, Cambridge MA. (1989).

[7] J. A. Adams, R. Bajcsy, J. Kosecka, V. Kumar, R. Mandelbaum, M. Mintz, R. Paul, C.C. Wang, Y. Yamamoto and X. Yun, Cooperative Material Handling by Human and Robotic Agents: Module Development and System Synthesis, in *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp.200-205 (1995).

[8] Y. R. Hu and A. Goldenberg, Dynamic Control of Coordinated Redundant Robots with Torque Optimization, *Automatica*, Vol. 29, No. 6, pp. 1411-1424 (1993).

[9] G. E. Yale, B. N. Agrawal, Lyapunov controller for cooperative space manipulators, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* Vol. 21, No. 3, pp. 477-484 (1998).

[10] Y. H. Liu, Y. Xu, and M. Bergerman, Cooperation control of multiple manipulators with passive joints, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 15, no. 2, pp. 258–267 (1999).

[11] G. F. Liu, Analysis and control of redundant parallel manipulators, in *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3748-3754 (2001).

[12] S. H. Lee, Control of impact disturbance by redundantly actuated mechanism, in *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3734-3741 (2001).

[13] L. S. Guo and Q. Zhang, Adaptive Trajectory Control of A Two DOF Closed-Chain Robot, in *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 658-663 (2001)

[14] W. Ailing, W. Zhonghua and Z. Zhiqun, Adaptive Control of Closed Kinematic Chains Based on Singularly Perturbed Formulation, in *Proceedings of the 26th Chinese Control Conference*, pp. 128-132 (2007).

[15] S. A. Schneider and R. H. Cannon, Object Impedance Control for Cooperative Manipulation: Theory and Experimental Results, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 8, No. 3, pp. 383-394 (1992).

[16] R. Bonitz and T. Hsia, Internal force-based impedance control for cooperating manipulators, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 12, No. 1, pp. 78–89 (1996).

[17] T. Yoshikawa and X. Zheng, Coordinated Dynamic Hybrid Position/Force Control for Multiple Robot Manipulators Handling One Constrained Object, in *Proceedings. of IEEE International Conference on Robotics and Automation,* pp. 1178-1183 (1990).

[18] R. Tinos, M. H. Terra and J. Y. Ishihara, Motion and Force Control of Cooperative Robotic Manipulators with Passive Joints, IEEE Transaction on Control Systems Technology, Vol.14, No.4, pp. 725-734 (2006).

[19] H. Krishnan and N. H. McClamroch, “Tracking in nonlinear differential-algebraic control systems with applications to constrained robot systems,” *Automatica*, vol. 30, no. 12, pp. 1885–1897 (1994).

[20] A. Kumar and P. Daoutidis, *Control of nonlinear differential algebraic equation systems*. London, UK: Chapman & Hall/CRC, (1999).

[21] J. Dabney, F. Ghorbel, and Z. Wang, “Modeling closed kinematic chains via singular perturbations”, in *Proceeding of the American Control Conference*, Anchorage, AK, pp. 4104 – 4110 (2002).

[22] Z. Wang and F. Ghorbel, “Control of Closed Kinematic Chains Using A Singularly Perturbed Dynamic Model”, in *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 317-322 (2004).

[23] M.A. Arteaga Perez, “Robot control and parameter estimation with only joint position measurements”, *Automatica*, Vol.39, pp.67–73 (2003).

[24] M.A. Arteaga Perez and R. Kelly, “Robot control without velocity measurements: New theory and experimental results”, *IEEE Transactions on*

[28] F. Hao, F. Ruixia and G. Qi, "*Adaptive Controller-Observer Design for 6-DOF Parallel Manipulators*", Proc. of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation, p.p.2436-2440 (2006).

[29] F. Ghorbel, "Modeling and PD Control of Closed-Chain Mechanical Systems", in *Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control*, pp. 540-542 (1995).

Robotics and Automation, Vol.20, (2), pp.297–308 (2004).

[25] J.C. Martinez-Rosas, M.A. Arteaga and A.M. Castillo-Sanchez, "Decentralized control of cooperative robots without velocity–force measurements", *Automatica*, Vol.42, pp.329 – 336 (2006).

[26] M.Zribi, S.Ahmad, "*Robust Adaptive Control of Multiple Robots in Cooperative Motion using σ Modification*", Proc. Of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, p.p.2160-2165 (1991).

[27] H.Kawasaki, T.Shimizu, S.Ito, "*Adaptive Coordinated Control of Multiple Robot Arms*", 6th IFAC Symposium on Robot Control, p.p.663-668 (2000).

K.N. Toosi Univ. of Tech. 1928

Journal of Control
(ISSN 2008-8345)

I S I C E

A Joint Publication of the Iranian Society of Instrumentation and Control Engineers and the K.N. Toosi University of Technology, Vol. 4, No. 3, Fall 2010.

Publisher: **I**ranian **S**ociety of **I**nstrumentation and **C**ontrol **E**ngineers

Managing Director: Prof. Iraj Goodarznia

Editor-in-Chief: Prof. Ali Khaki-Sedigh

Tel: 84062317

Email: sedigh@kntu.ac.ir

Assistant Editor: Dr. Hamid Khaloozadeh, Dr. Alireza Fatehi

Executive Director: Dr. Hamid Khaloozadeh

Address: Room 241, 2nd floor, No.71, Mousavi Ave. Ferdowsi Sq. Enghelab St. Tehran, Iran.
P.O. Box: 15815-3595 Tel: (+9821) 88813002 Fax: (+9821) 88324979
http://www.isice.ir

-

Journal of Control

ISSN 2008-8345

1928
K.N. Toosi Univ. of Tech.

A Joint Publication of the Iranian Society of Instrument and Control Engineers and the K.N. Toosi University of Technology

Vol. 4, No. 3, Fall 2010

Contents

www.isice.ir